

Итак, обнаружена зависимость электронной концентрации ионосферы от координат земной поверхности для региона СССР. Показано, что эта зависимость частично определяется глубиной залегания слоя Мохо. Показано, что  $f(Z, \varphi, \lambda)$  практически не зависит от изменения солнечной активности, зенитного угла Солнца и уменьшается с увеличением высоты. На высоте главного максимума ионосферы она не прослеживается. Установлено, что  $f(Z, \varphi, \lambda)$  зависит от сезона года.

**Список литературы:** 1. Волкова Л. Б., Федоренко Ю. П. Определение трехмерного распределения электронной концентрации ионосферы по измерениям в одном пункте//XIV Всесоюз. конф. по распространению радиоволн: Тез. докл. (Л., окт. 1984 г.), М., 1984. Ч. 1. С. 67—68. 2. International Reference Ionosphere URSI—COSPAR. 1978. 75 p. 3. Планетарное распределение поглощения радиоволн в ионосфере/Гвишвили Г. В., Флигель М. Д., Лещенко Л. Н./Геомagnetизм и астрономия. 1980. Т. XX, № 1, С. 275—279. 4. Борисов А. А. Глубинная структура СССР по геофизическим данным. М., 1962. 342 с. 5. Duhau S., Osella A. M. Evidence of mutual induction between the ionosphere and the Earth at equatorial latitudes//J. Geophys. Res. 1985. A 90, N 5. P. 4434—4438.

Поступила в редколлегию 01.02.89

УДК 621.391

Т. А. СКВОРЦОВ, канд. техн. наук

### ВОЗМОЖНОСТИ СИНТЕЗА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ МАРКОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛА, ПРОШЕДШЕГО ТУРБУЛЕНТНУЮ ТРОПОСФЕРУ

Как показано в работе [1], процесс  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$ , описывающий флюктуации фазы сигнала, прошедшего тропосферу и наблюдаемого в двух точках, не является в общем случае марковским. Поэтому представляет интерес выяснить: является ли немарковость только свойством математической модели процесса, разработанной в работе [1], или в ее основе лежат более глубокие физические причины; можно ли приближенно считать процесс марковским и какова допускаемая при этом погрешность; возможности использования модели [1] для синтеза марковской фильтрации.

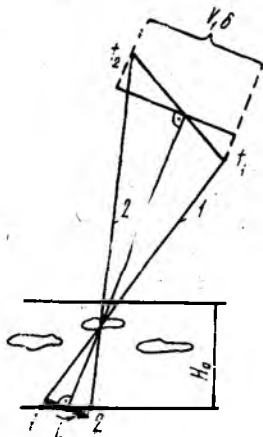
*Физическая сущность модели.* Рассмотрим для примера случай неподвижного источника излучения ( $c_v = 0, c_u \neq 0$ ). Пусть  $\Delta u = -\cos(\hat{lu}_\perp) = 1$ , что соответствует ветровому сносу неоднородностей в плоскости, проходящей через базу, от первой точки ко второй. Тогда из (20) (см. работу [1]) при  $l_1 = 0$  получаем ПВКФ

$$R^\psi(l_1, \tau) = \langle \psi^2 \rangle f_2(|u_\perp \tau + l|) \quad (1)$$

так, что взаимная корреляция фаз  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  определяется временным сомножителем  $f_2(\cdot)$ , причем при сдвиге на время  $\delta = \frac{T}{c} = -\frac{l}{u_\perp}$ , необходимое для поперечного перемещения неоднородностей на величину эффективной базы  $l$ , взаимная корреляция

ляция (1) достигает значения дисперсии  $R^\psi(l_1 - \delta) = R^\psi(0, 0) = \langle \psi^2 \rangle$ .

При этом из работы [1] следует, что  $\psi_2(t) = \lambda_2(t + \frac{l}{u_\perp})$ . В совокупности все это отражает физический факт, что в первой точке наблюдается тот же самый процесс, что и во второй точке, но с опережением во времени на величину  $l/u_\perp$ .



Следовательно, будущее значение компоненты  $\psi_2$  в точности равно прошлому значению компоненты  $\psi_1$  в соответствующий момент времени. Аналогичным образом во всех случаях, когда  $\Delta \neq 0$ , будущее значение  $\psi_2$  зависит от прошлого значения  $\psi_1$  (или наоборот), что противоречит определению непрерывного марковского процесса [2].

Если среда неподвижна, а источник перемещается ( $c_u = 0, c_v \neq 0$ ), то взаимная корреляция (20) [1] достигает максимума при условиях

$$\Delta_V = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\widehat{V}_\perp) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tau = \delta = \frac{3z_0 l}{2V_\perp H}.$$

Физически это происходит, если в момент  $t_2$  источник, двигаясь в плоскости базы, находится в таком положении (рис. 1), что луч 2 от второй точки пересекает те же неоднородности (находящиеся на дальности  $\frac{2H}{3}$ ), которые пересекал луч 1 от

первой точки в момент  $t_1 = t_2 + \delta$ . Таким образом, физическая причина немарковской связи между прошлым и будущим процесса  $\psi(t)$  в этом случае иная, как и смысл сдвиги во времени  $\delta$ .

При этом взаимная корреляция  $R^\psi(l_1, -\delta) = \langle \psi^2 \rangle f_1(l_{1/2})$  не достигает значения дисперсии, что физически вполне объяснимо. Действительно, при отсутствии ветрового сноса не существует таких двух моментов времени, чтобы луч 2 пересекал те же неоднородности, что и луч 1, по всей толщине тропосферы.

**Погрешность марковского приближения.** Как показано в работе [1], при  $\Delta = 0$  существует марковская модель флюктуаций

$\psi(t)$ , которую можно использовать для синтеза фильтрации. Если  $\Delta \neq 0$  (наличие продольной составляющей скорости), то можно при синтезе попытаться принять оценку  $\tilde{\Delta} = 0$ . Такая модель, естественно, будет неточна, однако станет возможным использование теории марковской фильтрации.

Как видно из (18) (см. работу [1]), введение оценки  $\tilde{\Delta} = 0$  равносильно использованию оценки ПВКФ

$$\tilde{R}^\psi(l_1, \tau_1) = R^\psi(l_1, \tau_1, \Delta = 0) = \langle \psi^2 \rangle \{1 - (l_1^2 + \tau_1^2)\}. \quad (2)$$

Если на самом деле  $\Delta \neq 0$ , то будет допущена погрешность в оценке ПВКФ

$$x_1 = |R^\psi(l_1, \tau_1) - \tilde{R}^\psi(l_1, \tau_1)| = \langle \psi^2 \rangle 2l_1 |\tau_1 \Delta|. \quad (3)$$

Чтобы понять, допустима ли такая погрешность для решения практических задач, учтем, что внешний масштаб неоднородностей  $L_0$  обычно точно не известен так, что на практике приходится пользоваться оценкой  $\tilde{L}_0$ . При этом допускается погрешность

$$x_2 = |R^\psi(l_1, \tau_1) - R^\psi(\tilde{l}_1, \tilde{\tau}_1)| = \langle \psi^2 \rangle \left| 1 - \left( \frac{\tilde{L}_0}{L_0} \right) \right| (l_1^2 + \tau_1^2 + 2l_1 \tau_1 \Delta), \quad (4)$$

где  $\tilde{l}_1 = \frac{L_0}{\tilde{L}_0} l_1$ ;  $\tilde{\tau}_1 = \frac{L_0}{\tilde{L}_0} \tau_1$  получены заменой  $L_0$  на  $\tilde{L}_0$  в ПВКФ.

Отношение этих погрешностей

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2l_1 |\tau_1 \Delta|}{\left| 1 - \left( \frac{\tilde{L}_0}{L_0} \right)^2 \right| (l_1^2 + \tau_1^2 + 2l_1 \tau_1 \Delta)} \quad (5)$$

зависит от  $\Delta$ . В соответствии с (17) (см. работу [1]) для случая  $\tau = t_1 - t_2 < 0$  и для неподвижной среды отношение достигает максимума при  $\Delta = \Delta_V = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $l_1 = |\tau_1|$ , который равен

$$\left( \frac{x_1}{x_2} \right)_{\text{макс}} = \frac{0,46}{\left| 1 - \left( \frac{\tilde{L}_0}{L_0} \right)^2 \right|} \quad (6)$$

так, что при  $\tilde{L}_0 = 0,72 L_0$  отношение равно единице.

Таким образом, в худшем случае приближение  $\tilde{\Delta} = 0$  в модели ПВКФ при неподвижной среде и работе по движущемуся источнику равносильно небольшому занижению оценки масштаба неоднородностей, которое можно считать допустимым.

Для обратного случая неподвижного источника и движущейся среды  $\Delta_V = 0$ ,  $\Delta_u = -\cos(\hat{l}u_\perp)$  так, что при ветровом снесе неоднородностей вдоль базы ( $\Delta_u \rightarrow 1$ ) отношение (5) может быть как угодно большим (для  $\tau > 0$  это происходит при  $\Delta_u \rightarrow -1$ ).

Поэтому приближение  $\tilde{\Delta} = 0$ , которое означает гипотезу поперечного к базе сноса неоднородностей, может привести к существенной некорректности модели ПВКФ и, как следствие, к потере оптимальности марковских алгоритмов фильтрации.

Так, при достаточно больших базах  $l_1$  и  $\tilde{\Delta} = 0$  из модели ПВКФ следует, что процессы  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  слабо коррелированы, в то время как реально может оказаться, что  $\Delta = 1$  и процессы

(с учетом задержки во времени) не только коррелированы, но и идентичны.

*Примеры синтеза марковской фильтрации.* Пусть имеется  $N+1$  — элементная приемная антенная система, причем на выходе  $i$ -го модуля (элемента) наблюдается аддитивная смесь

$$y_i(t) = S_i(t) + n_i(t) \quad (7)$$

сигнала

$$S_i(t) = A_i(t) \cos(\omega t + \varphi_i(t) + \psi_i(t)) \quad (8)$$

и «белого» гауссового шума  $n_i(t)$  с нулевым средним и спектральной плотностью  $N_0$ , где  $\varphi_i(t)$  — регулярная фаза, а  $\psi_i(t)$  — случайная фаза сигнала, которая порождена неоднородностями среды, причем шумы  $n_i(t)$  взаимно некоррелированы.

Если фронт волны в пределах апертуры модуля считать плоским, то для описания флуктуаций вектора  $\vec{\psi} = \{\psi_{-N/2} \dots \psi_{N/2}\}$  можно использовать процесс  $\vec{\lambda} = \{\lambda_{-N/2} \dots \lambda_{N/2}\}$  [1]. Чтобы избежать громоздкости записей, рассмотрим конкретный случай  $m \ll \frac{2}{m}$ .

В этом случае приращения процесса  $\vec{\lambda}(t)$  на примыкающих интервалах времени  $\Delta t$ , удовлетворяющих неравенствам  $\frac{1}{m} \gg \Delta t \gg \frac{m}{2}$ , приближенно независимы [2] и можно перейти от  $2(N+1)$  мерной к  $N+1$  мерной модели вида

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} + m c \lambda_i(t) = \xi_i(t), \quad i = \left\{ -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} \right\}, \quad (9)$$

с матрицей диффузии  $\bar{B} = \left( \frac{m}{2c} \right)^2 \cdot \bar{\beta}$ , имеющей размер  $(N+1)(N+1)$  с диагональными элементами  $\beta_i \approx 8c^3 \langle \psi^2 \rangle / m$  и недиагональными  $\beta_{ij} = \beta_i f_1(l'_{ij})$ , где  $l'_{ij} = |\rho_i - \rho_j|$  [1];  $l_{ij} = l_{ij} \sqrt{1 - \Delta_{ij}^2}$ ,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} -\cos(l_{ij} \hat{u}_\perp), & V_\perp = 0; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(l_{ij} \hat{V}_\perp), & u_\perp = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$c = \begin{cases} c_u, & V_\perp = 0; \\ c_v, & u_\perp = 0, \end{cases}$$

где  $l_{ij}$  — эффективное расстояние между фазовыми центрами модулей (видимое расстояние со стороны источника).

Пусть точечный источник перемещается в поперечной к линии визирования плоскости и имеет угловое положение  $\theta(t)$ , отсчитываемое от нормали к оси линейной эквидистантной антенной системы с шагом  $d$  так, что  $\varphi_i(t) = ikd \sin \theta(t)$  (11). В соот-

ветствии с динамической моделью можно описать движение источника с помощью СДУ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V_{\perp}^0}{r_0}, \quad \frac{dV_{\perp}^0}{dt} = W(t), \quad \frac{dW}{dt} = -\gamma_W W(t) + n_W(t), \quad (12)$$

где  $\gamma_W = \frac{1}{\tau_W}$ ,  $\tau_W$  — время корреляции углового ускорения  $W$ ;  $n_W(t)$  — порождающий шум с плотностью  $N_W/2$  и дисперсией  $\sigma_W^2 = N_W/4\gamma_W$ ;  $V_{\perp}^0 = V_{\perp} \cos(\hat{l}V_{\perp})$ .

Рассмотрим сначала случай быстроперемещающегося источника при малом ветровом сносе ( $c_u \ll c_v$ ). Тогда можем положить  $\psi(t) = \lambda(t)$ . Считая амплитуду  $A_i(t) = A_0$  и частоту  $\omega$  известными и используя теорию марковской фильтрации [3], получаем уравнения для оценок вектора  $\bar{X} = \{\psi, \theta, V_{\perp}^0, W\}$ :

$$\frac{d\tilde{\psi}_i}{dt} = -\tilde{m}c_v\tilde{\psi}_i(t) - \frac{2A_0}{N_0} \left[ \sum_{i=-N/2}^{N/2} k_i^{\psi} F_i^{\psi}(t) + k_i^{\psi 0} F^0(t) \right]; \quad (13)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \frac{V_{\perp}^0}{r_0} - \frac{2A_0}{N_0} \left[ \sum_{i=-N/2}^{N/2} k_i^{\theta} F_i^{\psi}(t) + k^{\theta 0} F^0(t) \right]; \quad (14)$$

$$\frac{d\tilde{V}_{\perp}^0}{dt} = \tilde{W} - \frac{2A_0}{N_0} \left[ \sum_{i=-N/2}^{N/2} k_i^{\psi V} F_i^{\psi}(t) + k^{\psi V 0} F^0(t) \right]; \quad (15)$$

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} = -\gamma_W \tilde{W} - \frac{2A_0}{N_0} \left[ \sum_{i=-N/2}^{N/2} k_i^{W\psi} F_i^{\psi}(t) + k^{W\psi 0} F^0(t) \right]; \quad (16)$$

где  $F_i^{\psi}(t) = y_i(t) \sin(\omega t + ikd \sin \tilde{\theta} + \tilde{\psi}_i); \quad (17)$

$$F^0(t) = kd \cos \tilde{\theta} \sum_{i=-N/2}^{N/2} i F_i^{\psi}(t). \quad (18)$$

Полученные соотношения можно интерпретировать так, что выражение (17) описывает выход фазового детектора, а (18) — выходной эффект углового дискриминатора с противофазным питанием половин антенной системы и нарастающим к краям по линейному закону амплитудным распределением. Выражение (13) описывает взаимосвязанные системы фазовой автоподстройки, а соотношения (14) — (16) — следящие измерители угла, угловой скорости и ускорения. Алгоритм предусматривает измерение формы случайных искажений фронта волны  $\psi(t)$  и введение

оценок этих искажений в угломерный канал для повышения точности измерений. Поскольку  $\tilde{c}_v = \tilde{V}_\perp H / 2\sqrt{3}L_0 r_0$ ,  $\tilde{V}_\perp = V_\perp^0 / \cos(l\tilde{V}_\perp)$ , то оказывается, что ширина полосы систем ФАП (13) автоматически регулируется в зависимости от оценки скорости  $V_\perp^0$  источника. Она зависит и от других параметров, в частности, от масштаба неоднородностей  $L_0$  и зенитного угла  $\epsilon$ , поскольку для плоской Земли  $H = H_0 / \cos \epsilon$ , где  $H_0$  — толщина неоднородного слоя. Зависимость от  $\epsilon$  при углах, близких к горизонту, еще более заметна, если учесть неизотропность неоднородностей, с помощью, например, выражения  $L_0 = L_r(\cos^2 \epsilon + Q \sin^2 \epsilon)$ , где  $L_r$  — горизонтальный масштаб,  $Q \ll 1$ . Таким же образом можно проводить синтез по известной методике и для других случаев, когда можно пренебречь ветровым сносом неоднородностей.

Если это сделать нельзя, например, в случае  $c_u \gg c_v$  при  $\Delta \neq 0$ , то следует принять  $\psi_i(t) = \lambda_i(t + \delta_i)$ , где для эквидистантной линейной системы  $\delta_i = -T_i/c = i \frac{l}{u_\perp} \cos(l\tilde{V}_\perp)$ , где  $l = d \cos \theta$ .

В случае  $c_u \gg c_v$  можно использовать теорию марковской фильтрации, если перейти от задачи фильтрации процесса  $\psi(t)$  к задаче фильтрации процесса  $\lambda(t)$ . Для этого в принимаемые реализации  $y_i(t)$  необходимо ввести задержку на время  $t_0 + \delta_i$ , где  $t_0 = \max(\delta_i)$  так, что принимаемые сигналы

$$S_i(t) = A_0 \cos[\omega t - \omega(t_0 + \delta_i) + \varphi_i(t - t_0 - \delta_i) + \lambda_i(t - t_0)]. \quad (19)$$

Поскольку условие  $c_u \gg c_v$  означает пренебрежимо малое угловое движение источника, то можно положить, что

$$\varphi_i(t - t_0 - \delta_i) \approx \varphi_i(t) = ikd \sin \theta.$$

Таким образом, используя модель (11), (12) для достаточно малых  $V_\perp^0$ ,  $W$ , можно перейти к задаче оценки вектора  $\bar{X} = \{\lambda, \theta, V_0, W\}$  по наблюдению задержанных реализаций  $y_i(t)$ . При этом формально соотношения (13)–(18) сохранятся с заменой  $\psi$  на  $\lambda$  и с учетом введения в аргументы (17), (18) известных смещений по фазе на величину  $\omega(t_0 + \delta_i)$ .

Однако матрица апостериорных дисперсий  $\bar{K} = \|\bar{k}_{ij}\|$ , входящая в уравнения фильтрации в качестве весовых коэффициентов, при суммировании будет зависеть от направления ветрового сноса неоднородностей. Действительно, усредненное по реализациям значение этой матрицы для стационарного состояния определяется уравнением [3]

$$\bar{A}\bar{K}^T + \bar{K}\bar{A}^T - \bar{B} + \bar{K}\bar{D}\bar{K}^T = 0, \quad (20)$$

где

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} \vec{K}^\psi & \vec{K}^{\psi\theta} & \vec{K}^{\psi V} & 0; \\ \vec{K}^{\theta\psi} & k^\theta & k^{\theta V} & 0; \\ \vec{K}^{V\psi} & k^{V\theta} & k^V & k^{VW} \\ 0 & 0 & k^{WV} & k^W \end{pmatrix},$$

а с учетом  $c_u \gg c_V$  можно принять

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha}_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{\alpha}_1 = mc_u \vec{I}; \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\gamma_w \end{pmatrix}; \quad (21)$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{D} = \|D_{ij}\|; \quad D_{ij} = \frac{2}{N_0} \sum_{\alpha} \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x_j}.$$

В соответствии с (10) элементы матрицы диффузий  $\beta_{ij}$  зависят от  $\Delta = -\cos(lu_{\perp})$  так, что, например, при  $\Delta = 1$  оказывается  $\beta_{ij} = \beta_1$ . Можно показать, решая (20), что при этом  $k_{ij}^{\psi} = k^{\psi}$  и выражение (13) описывает уже не взаимосвязанные системы ФАП, а одну систему ФАП, подключенную к суммарному выходу антенной системы. Это и понятно, поскольку процессы  $\lambda_i(t-t_0) = \lambda(t-t_0)$  оказываются идентичными на выходе всех элементов (модулей). Наоборот, если  $\Delta = 0$ , то для достаточно большого шага  $d > L_0/\cos\theta$  может оказаться, что  $f_1(l_{ij}) \ll f_1(0)$  при  $i \neq j$  и  $k_{ij}^{\psi} \ll k_{ii}^{\psi}$ . В этом случае, с учетом отбрасывания знака суммы в (13), приходим к устройству, состоящему из  $N+1$  независимых систем ФАП.

**Список литературы:** 1. Скворцов Т. А. Марковская модель пространственно-временных флуктуаций фазы сигнала, прошедшего турбулентную тропосферу// Радиотехника. 1990. Вып. 93. С. 10—16. 2. Тихонов В. Н., Миронов М. А. Марковские процессы. М., 1977. 206 с. 3. Тихонов В. Н., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., 1975. 704 с.

УДК 621.372

Поступила в редколлегию 12.06.89

Ю. М. ПЕНКИН, канд. физ.-мат. наук, Л. П. ЯЦУК, канд. физ.-мат. наук

### ТЕНЗОР ГРИНА ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕМОВ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

Тензорная функция Грина широко используется при решении внутренних и внешних задач электродинамики. Особо важную роль она играет, когда необходимо найти поле в области источ-