

## СОДЕРЖАНИЕ

	Условия	Решения
1 Многочлены	4	53
2 Последовательности и пределы	5	56
3 Непрерывность	9	73
4 Дифференцирование	12	81
5 Интегрирование	15	87
6 Уравнения и неравенства	19	102
7 Ряды и бесконечные произведения	21	110
8 Дифференциальные уравнения	23	117
9 Анализ функциональных зависимостей	25	120
10 Функции комплексного переменного	33	162
11 Линейная алгебра	38	167
12 Геометрия	41	176
13 Задачи, которые предлагались в СНГ и странах дальнего зарубежья при прохождении конкурсов с последующим правом выезда в Англию, Германию, Францию, США и при поступлении на работу в организации, требующие знаний в области прикладной математики, теоретической и экспериментальной физики и программирования	43	181



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**М.Ф. Бондаренко, В.А. Дикарев, В.В. Семенец**

**ЗАДАЧИ  
СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
ОЛИМПИАД**

**Харьков 2003**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

М.Ф. Бондаренко, В.А. Дикарев, В.В. Семенец

**ЗАДАЧИ**  
**СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ**  
**ОЛИМПИАД**

Под ред. проф. В.В. Семенца

РЕКОМЕНДОВАНО  
научно-методическим  
советом университета.  
Протокол №9 от 20.12.02

Харьков 2003

УДК 514.112

Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Семенець В.В. Задачі студентських математичних олімпіад. / За ред. В.В. Семенця. – Харків: ХНУРЕ, 2003. – 200 с.

Більша частина задач, які увійшли у збірник, пропонувались на студентських математичних олімпіадах різних рівнів, включаючи міжнародні. Збірник містить і задачі, що пропонуються на математичних олімпіадах, які проводилися в ХНУРЕ протягом останніх десяти років.

Автори збірника сподіваються, що він буде ініціювати інтерес студентів до математики і сприятиме зростанню їхньої математичної культури.

Большая часть вошедших в сборник задач предлагалась на студенческих математических олимпиадах различных уровней, включая международные. Сборник содержит и задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах, которые проводились в ХНУРЕ на протяжении последних десяти лет.

Составители сборника надеются, что он будет инициировать интерес студентов к математике и содействовать росту их математической культуры.

Рецензенти: А.І. Колосов, д-р фіз.-мат. наук, проф.(ХТАГХ);

А.Г. Рут кас, д-р фіз. -мат. наук, проф. (ХНУ ім. В.Н. Каразіна).

© М.Ф. Бондаренко, В.А. Дікарєв,  
В.В. Семенець, 2003

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Михайло Федорович

ДІКАРСЬВ Вадим Анатолійович

СЕМЕНЕЦЬ Валерій Васильович

## ЗАДАЧІ СТУДЕНТСЬКИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

За редакцією проф. В.В. Семенця

Відповідальний випусковий А.Д. Тевяшев

План 2003, поз. 78.

Підп. до друку 26.12.02. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Спосіб друку – ризографія.

Умовн. друк. арк. 13,5. Облік. вид. арк. 12,1. Наклад 100 прим. Зам. №1-51.

Ціна договірна.

---

ХНУРЕ. Україна. 61166. Харків, просп. Леніна, 14

---

Надруковано в учбово-виробничому видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ  
61166, Харків, просп. Леніна, 14

«Я ни мало не хую алхимиста, ищущаго превращать металлы въ золото, механика, старающагося сыскать вечное движение (perpetuum mobile) и математика, допомагающагося узнавать долготу и широту местъ земных и законы движения светил, для того, что изыскивая чрезвычайное, внезапно изобретаютъ и многия побочныя полезныя вещи. Такого рода людей должно всячески ободрять и поощрять, а не презирать, какъ то многіе скудоумныя государи делаютъ, называя такіе упражненія бреднями».

Петр I

# УСЛОВИЯ

---

## 1 МНОГОЧЛЕНЫ

**1.1.** Найти многочлен наименьшей степени, принимающий максимальное значение 6 при  $x = 1$  и минимальное значение 2 при  $x = 3$ .

**1.2.** Доказать, что всякий ненулевой многочлен с положительными коэффициентами, являющийся четной функцией, всюду вогнут и имеет только одну точку экстремума.

**1.3.** Пусть  $p(x)$  – целочисленный многочлен, принимающий значение, равное 5, в пяти целых точках. Доказать, что  $p(x)$  не имеет целых корней.

**1.4.** Пусть  $p(x)$  – многочлен степени  $n$  и  $p(a) \geq 0$ ,  $p'(a) \geq 0, \dots, p^{(n-1)}(a) \geq 0$ ,  $p^{(n)}(a) > 0$ . Доказать, что действительные корни уравнения  $p(x) = 0$  не превосходят  $a$ .

**1.5.** Дано  $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0$ . Доказать, что многочлен  $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  имеет хотя бы один действительный корень.

**1.6.** Пусть  $p_1(x), \dots, p_r(x)$  – многочлены степеней  $n_1, \dots, n_r$ . Доказать, что если  $n_1 + \dots + n_r < \frac{r(r-1)}{2}$ , то многочлены  $p_1, \dots, p_r$  – линейно зависимы.

**1.7.** Доказать, что если все корни многочлена  $p(z) = a_0z^n + \dots + a_n$  лежат в верхней полуплоскости, то и все корни его производной находятся в верхней полуплоскости.

**1.8.** Доказать, что многочлен  $\sum_{k=1}^n \frac{(2x-x^2)^k - 2x^k}{k}$  делится на  $x^{n+1}$ .

**1.9.**  $p(x) = c_n x^n + \dots + c_0$  – многочлен с действительными коэффициентами, причем  $c_p = 0$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ) и  $c_i \neq 0$  при  $i \neq p$ . Доказать, что если  $p(x)$  имеет  $n$  различных действительных корней, то  $c_{p-1} \cdot c_{p+1} < 0$ .

**1.10.** Пусть  $f(x)$  – произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Доказать, что существует такая постоянная  $c$ , что для любого многочлена  $p(x)$  с целыми коэффициентами число различных целых корней многочлена  $f(p(x))$  не превосходит  $\deg p + c$ , где  $\deg p$  – степень многочлена  $p(x)$ .

## 2 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛЫ

**2.1.** Доказать, что последовательность  $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$  имеет предел,

и найти этот предел.

**2.2.** Рассмотрим отрезок  $AB$ . Последовательность точек  $\{M_n\}$  строится следующим образом:  $M_1 = A$ ,  $M_2 = B$ , каждая точка  $M_{n+1}$  является серединой отрезка, соединяющего точки  $M_{n-1}$  и  $M_n$ . К какой точке отрезка  $AB$  стремится последовательность  $\{M_n\}$ ?

**2.3.** Существует ли  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ , где  $n$  – натуральное число?

**2.4.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^{n/n}}{n + \frac{1}{n}} \right)$ .

**2.5.** При каких действительных  $a$  и  $b$  сходится последовательность:  $x_0 = a, x_1 = 1 + bx_0, \dots, x_{n+1} = 1 + bx_n, \dots$ ?

**2.6.** Последовательность  $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$  определяется следующим образом:  $x_1 = x$  – некоторая точка отрезка  $[0, 1]$ ; если  $n \geq 2$ , то  $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}$  при четном  $n$  и  $x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2}$  при нечетном  $n$ . Сколько предельных точек может быть у этой последовательности?

**2.7.** Пусть  $a_1 = 1, a_k = k(a_{k-1} + 1)$ . Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$ .

**2.8.** Пусть  $\{x_n\}$  – последовательность такая, что  $x_0 = 25, x_n = \operatorname{arctg} x_{n-1}$ . Доказать, что она имеет предел, и найти этот предел.

**2.9.** Найти предел последовательности:  $y_1 = x, y_{n+1} = a \sin y_n \quad (n \geq 1)$ , где  $|a| \leq \pi/2$  и  $x$  – действительное.

**2.10.** Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ .

**2.11.** Последовательность  $\{x_n\}$  определяется рекуррентно:  $x_n = \sin x_{n-1}$  для  $n = 2, 3, \dots$ ;  $x_1$  – любое число из интервала  $(0, \pi)$ . Доказать, что  $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**2.12.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Доказать, что последовательность

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n}$$

сходится к  $ab$ .

**2.13.** На сторонах треугольника написаны три числа  $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}$ . Эти числа стирают и вместо каждого пишут среднее арифметическое соседних, так что вместо  $a_1^{(1)}$  пишут  $a_1^{(2)} = \frac{a_2^{(1)} + a_3^{(1)}}{2}$ , вместо  $a_2^{(1)}$  пишут  $a_2^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_3^{(1)}}{2}$ , вместо  $a_3^{(1)}$  пишут  $a_3^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)}}{2}$ . С полученными числами проделывают то же самое и т.д. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)}$  существует ( $i = 1, 2, 3$ ) и равен  $\frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)}}{3}$ .

**2.14.** Пусть  $a_1, a_2, \dots$  – последовательность различных натуральных чисел, не меньших 2. Доказать, что из нее можно выбрать подпоследовательность  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$  такую, что  $a_{i_k} > i_k$ .

**2.15.** Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$ .

**2.16.** Последовательность  $\{x_n\}$  удовлетворяет условию  $0 \leq x_{m+n} \leq x_n + x_m$  для всех  $m$  и  $n$ . Доказать, что последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$  сходится.

**2.17.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) e^{-n} = \frac{1}{2}$ .

**2.18.** а) Найти предел последовательности  $\{x_n\}$ , где

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots, \quad a \geq 1.$$

б) Доказать, что последовательность вида

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}, \quad a_i > 1,$$

сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\ln a_n) < \ln 2.$$

**2.19.** Последовательность  $\{a_n\}$  задана условием  $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1)$ . При каких  $a_1$  она сходится?

**2.20.** Последовательность  $\{x_n\}$  задана следующим образом:  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = (2x_n^3)/(3x_n^2 - 1)$  при  $n \geq 1$ . Найти все  $a$ , при которых последовательность  $\{x_n\}$  определена и имеет конечный предел.

**2.21.** Пусть  $c_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$  и  $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}$  при  $n \geq 1$ . Доказать, что последовательность  $\{c_n\}$  сходится, и найти ее предел.

**2.22.** Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ , заданная условием  $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$  при  $n \geq 1$ , где  $0 < x_1 < 1$ , ограничена.

**2.23.** Множество натуральных чисел разбито на два бесконечных подмножества  $A$  и  $B$ . Доказать, что для любого  $c > 0$  существуют последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  такие, что  $\{a_n\} \subset A$ ,  $\{b_n\} \subset B$ ,  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  возрастают и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ .

**2.24.** Последовательность  $\{x_n\}$  обладает свойством:  $|x_n - x_m| > 1/n$  для любых  $n < m$ . Доказать, что последовательность неограниченна.

**2.25.** Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – последовательности действительных чисел и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Доказать, что найдутся такие  $m$  и  $n$ , что  $|a_m - a_n| > 1$  и  $|b_m - b_n| > 1$ .

**2.26.** Ограниченная последовательность действительных чисел  $\{x_n\}$  удовлетворяет условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = 0$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) = 0$ .

**2.27.** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  действительных чисел такова, что для любого многочлена  $P(x)$  второй степени с целыми неотрицательными коэффициентами выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_{P(n)}) = 0.$$

Следует ли отсюда, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ?

### 3 НЕПРЕРЫВНОСТЬ

**3.1.** Привести пример функции, непрерывной при всех действительных значениях  $x$ , кроме

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{1}{3}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots,$$

где функция имеет бесконечный разрыв.

**3.2.** Функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $(0, +\infty)$ . Можно ли утверждать существование пределов  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?

**3.3.** Доказать, что функция  $f(x, y)$ , непрерывная по каждой переменной  $x$  и  $y$  в отдельности и монотонная по  $y$ , непрерывна по совокупности переменных.

**3.4.** Функция  $f(x)$  определена и непрерывна на окружности. Доказать, что найдутся две диаметрально противоположные точки  $a$  и  $b$  такие, что  $f(a) = f(b)$ .

**3.5.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ .

**3.6.** Функция  $f(x)$  определена на полуоси  $[0, +\infty)$  и равномерно непрерывна на ней. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = 0$  ( $n$  – целое) для любого  $x \geq 0$ . Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**3.7.** Существует ли непрерывная действительная функция, определенная на отрезке  $[0, 1]$ , принимающая каждое значение из отрезка  $[0, 1]$ , в континууме точек?

**3.8.** Какие из следующих функций на интервале  $(0, 1)$ :

а)  $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;

в)  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

обладают свойством

$$\forall x \in (0, 1) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y (|y - x| < \varepsilon, y \in (0, 1) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta)?$$

**3.9.** Функция  $f(x)$  определена на вещественной оси. Известно, что для любого  $x$  и любого  $h > 0$

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2.$$

Доказать, что  $f(x) \equiv \text{const}$ .

**3.10.** Непрерывная функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такова, что для любой арифметической прогрессии  $a, b, c, d$

$$|f(a) - f(d)| \geq \pi |f(b) - f(c)|.$$

Доказать, что  $f(x) \equiv \text{const}$ .

**3.11.** Пусть  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – монотонно убывающие взаимно – обратные функции на  $(0, +\infty)$ . Может ли при всех  $t > 0$  выполняться неравенство  $\varphi(t) > \psi(t)$ ?

**3.12.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция на  $\mathbf{R}$ , принимающая значения разных знаков. Доказать, что найдется арифметическая прогрессия  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) такая, что  $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ .

**3.13.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная, строго возрастающая положительная функция на  $(0, +\infty)$ , причем  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} = 1$ . Обозначим через  $\varphi(x)$  функцию, обратную к  $f(x)$ , т.е. такую, что для каждого положительного  $x$   $\varphi(f(x)) = x$ .

Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x/\ln x} = 1$ .

**3.14.** Пусть  $f$  и  $g$  – определенные на всей числовой прямой периодические функции. Известно, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ . Доказать, что

$$f(x) \equiv g(x).$$

**3.15.** Непрерывная функция  $f(x)$  выпуклая вниз и  $f(0) = 0$ . Доказать, что при  $x > 0$  функция  $f(x)/x$  возрастает.

**3.16.** Построить функцию, непрерывную на  $[0,1]$  и имеющую в каждой точке  $y$  образа либо 1, либо 3 прообраза, причем некоторая точка  $y$  имеет 3 прообраза.

**3.17.** Существует ли непрерывная функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такая, что при рациональном  $x$   $f(x)$  иррационально, а при иррациональном  $x$   $f(x)$  рационально?

**3.18.** Функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такова, что  $|f(a) - f(b)| < |a - b|$  для любых  $a \neq b$ . Доказать, что если  $f(f(f(0))) = 0$ , то  $f(0) = 0$ .

## 4 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

**4.1.** Пусть  $f(x)$  – нечетная, дифференцируемая на  $(-\infty, +\infty)$  функция.

- 1) Доказать, что  $f'(x)$  – четная функция.
- 2) Верно ли обратное утверждение?

**4.2.** Пусть  $f(x)$  – четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем  $f''(0) \neq 0$ . Доказать, что точка  $x = 0$  является точкой экстремума этой функции.

**4.3.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[0,1]$  и  $f'(0)f'(1) < 0$ . Доказать, что на интервале  $(0,1)$  найдется такая точка  $c$ , что  $f'(c) = 0$ .

**4.4.** Известно, что  $y = f(x)$  имеет наклонную асимптоту и  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x$ . Доказать, что график функции  $y = f(x)$  приближается к этой асимптоте сверху.

**4.5.** Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x = 0$ . Доказать, что функция  $f(\varphi(x))$  имеет в точке  $x = 0$  производную, равную 0.

**4.6.** Сколько раз дифференцируема в нуле функция

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и сколько ее производных непрерывны в нуле?

**4.7.** Пусть  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на интервале  $(-a, a)$  и пусть последовательность  $f^{(n)}(x)$  сходится равномерно на  $(-a, a)$ . Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = 1$ . Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)$ .

**4.8.** Функция  $f(x)$  имеет производные всех порядков на интервале  $(-1, 1)$ ; в точке  $x = 0$  все они отличны от 0. Пусть для  $0 < |x| < 1$  и натурального  $n$  написана формула Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n,$$

где  $(0 < \theta < 1)$ . Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ .

**4.9.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на  $[0,1]$ ,  $f'(0) = 1$  и  $f'(1) = 0$ . Доказать, что  $f'(c) = c$  в некоторой точке  $c \in (0,1)$ .

**4.10.** Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0,1]$  и дифференцируема на интервале  $(0,1)$ . Доказать, что если  $f(0) = f(1) = 0$ , то  $f'(x) = f(x)$  в некоторой точке  $x \in (0,1)$ .

**4.11.** Существует ли нелинейная функция, определенная на всей действительной оси, имеющая производные всех порядков и такая, что при любом натуральном  $n$  ее  $n$ -я производная всюду по модулю не превосходит  $1/2^n$ ?

**4.12.** а) Пусть функция  $f(x)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a,b]$  и имеет на нем не менее  $n$  нулей (с учетом кратности). Доказать, что

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|.$$

б) Функция  $f(x) \in C^2 [0,1]$  имеет не менее двух нулей на отрезке  $[0,1]$  (с учетом кратности) и, кроме того,  $|f''(x)| \leq 1$  для всех  $x \in [0,1]$ . Как велико может быть число  $\max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ ?

**4.13.** Действительная функция  $f$ , определенная в окрестности точки  $x$ , называется гладкой в этой точке, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 0.$$

1) Доказать, что если  $f$  имеет производную в точке  $x$ , то  $f$  является гладкой в  $x$ .

2) Доказать, что если функция  $f$  является гладкой во всех точках интервала, то она дифференцируема в несчетном множестве точек этого интервала.

3) Построить функцию, гладкую во всех точках интервала и недифференцируемую в некоторой его точке.

**4.14.** Доказать, что если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на  $\mathbf{R}$ , то функция  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ , доопределенная по непрерывности в нуле, также будет бесконечно дифференцируемой.

## 5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ

**5.1.** Найти положительную дифференцируемую на  $[0, +\infty)$  функцию  $f(x)$ , если известно, что при замене независимой переменной  $\xi = \int_0^x f(t)dt$  она переходит в функцию  $e^{-\xi}$ .

**5.2.** Функция  $f(x)$  интегрируема на  $[0, 1]$ , причем  $\int_0^1 f(x)dx > 0$ . Доказать, что существует отрезок  $[a, b] \subset [0, 1]$ , на котором  $f(x) > 0$ .

**5.3.** Определить объем тора (тела, полученного вращением круга радиуса  $R$  вокруг не пересекающей его оси). Расстояние от центра круга до оси равно  $d$ .

**5.4.** Доказать, что  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$ .

**5.5.** Пусть  $f(x)$  непрерывная на  $[a, b]$  и удовлетворяет соотношению  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ . Доказать, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a).$$

**5.6.** Доказать, что  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$  не зависит от величины  $\alpha$ .

**5.7.** Существует ли функция, непрерывная и положительная на  $[0, +\infty)$  такая, что  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  сходится, но  $f(x)$  не стремится к 0 при  $x \rightarrow +\infty$ ?

**5.8.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2 x}$ .

**5.9.** Вычислить предел  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ , где  $f(x) \in C[0, 1]$ .

**5.10.** Пусть непрерывная функция  $f(x)$  такова, что  $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$  при всех  $n \leq N$ . Показать, что  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  обращается в нуль по крайней мере  $N+1$  раз.

**5.11.** Функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , и для любого сегмента  $[\alpha, \beta]$  ( $a \leq \alpha < \beta \leq b$ ) имеет место неравенство  $\left| \int_\alpha^\beta f(x) dx \right| \leq M |\beta - \alpha|^{1+\delta}$  ( $M, \delta$  – положительные константы). Доказать, что  $f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ .

**5.12.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ .

**5.13.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx$ , зная, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**5.14.** Доказать, что для любого целого  $n$  справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0.$$

**5.15.** Вычислить  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx$ .

**5.16.** Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \cos x^n dx$ .

**5.17.** Найти интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$ .

**5.18.** Найти интеграл  $\int_0^1 e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$  с ошибкой не больше 0,2.

**5.19.** Доказать, что длина  $l$  эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  удовлетворяет неравенству

$$\pi(a+b) \leq l \leq \pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

**5.20.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  – взаимно-обратные непрерывные монотонно убывающие функции на  $(0, +\infty)$ , причем  $\int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{\infty} \psi(s) ds = a$ . Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \varphi^2(t) dt + \int_0^{\infty} \psi^2(s) ds \geq \frac{1}{2} a^{3/2}.$$

**5.21.** Пусть  $f(x)$  – положительная непрерывно дифференцируемая функция на интервале  $(0, +\infty)$ . Доказать, что  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{f} dx = \infty$ .

**5.22.** Функция  $f(x)$  непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$  и для любых чисел  $a, b$

$$f(a) + f(b) \geq \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Доказать, что  $f \equiv 0$ .

**5.23.** Пусть  $u(x)$  – положительная непрерывная функция, определенная на  $[0, +\infty)$ , причем  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{u(x)} < \infty$ . Доказать, что  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A^2} \int_0^A u(x) dx = \infty$ .

**5.24.** Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция такая, что для любого целого числа  $m$

$$\int_0^1 f(x+m) dx = 0.$$

Доказать, что найдется непрерывная функция  $g(x)$  такая, что

$$f(x) = \frac{d}{dx}(g(x) \sin \pi x).$$

## 6 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

**6.1.** Доказать тождество  $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$  при  $x > 1$ .

**6.2.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на всей оси, причем  $f(f(x)) = x$ . Доказать, что существует точка  $x_0$ , в которой  $f(x_0) = x_0$ .

**6.3.** Сколько действительных корней имеет уравнение  $e^x = ax^2$  в зависимости от параметра  $a$ ?

**6.4.** Доказать неравенство  $e^x > 1 + \ln(1+x)$ .

**6.5.** Доказать неравенство  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x$  при  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ .

**6.6.** Доказать неравенство  $\sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-\frac{u^2}{2}}\right)} < \int_0^u e^{-x^2/2} dx < \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-u^2}\right)}$ .

**6.7.** Найти множество всех таких действительных  $\alpha$ , что для любых положительных  $x$  и  $y$  выполнено неравенство

$$x \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} y + \frac{1}{\alpha} \frac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}.$$

**6.8.** Дана последовательность непрерывных на  $[a, b]$  функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , причем  $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1$ . Доказать, что можно найти номер  $N$  и числа  $c_1, c_2, \dots, c_N$  такие, что



**6.13.** Сколько существует членов последовательности  $a_n = \underbrace{\ln \ln \dots \ln}_n n$ ?

**6.14.** При каких  $x$  последовательность  $a_n = (1 + x/n)^{n+1}$  монотонно убывает, начиная с некоторого номера?

**6.15.** По окружности расставлено несколько чисел. Известно, что сумма любых трех рядом стоящих чисел не превосходит 3, а сумма любых пяти рядом стоящих чисел не превосходит 5.

Доказать, что сумма всех чисел максимальна тогда и только тогда, когда все они равны 1.

**6.16.** Доказать, что для положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  справедливо неравенство

$$(\max_{1 \leq i \leq n} x_i)(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

## 7 РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

**7.1.** Построить пример сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с положительными членами, у которого  $a_n \neq o(1/n)$ .

**7.2.** Привести пример такой последовательности натуральных чисел  $\{n_k\}$ , что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{n_k}} = \infty$ .

**7.3.** Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ ?

**7.4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ , где  $x_n$  – положительные

корни уравнения  $x = \operatorname{tg} x$ , занумерованные в порядке возрастания.

**7.5.** Пусть число  $\alpha > 0$ ,  $\{p_n\}$  – числовая последовательность, причем

$p_n > 0$ ,  $p_{n+1} \geq p_n$ . Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^\alpha}$  сходится.

**7.6.** Доказать равенство  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ .

**7.7.** Разложить  $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$  в степенной ряд.

**7.8.** Пусть  $\varphi(x)$  определена для положительных значений  $x$ , причем при достаточно больших  $x$  может быть представлена рядом.

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots,$$

где  $a_0, a_1, \dots$  – действительны. Доказать, что ряд  $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots$  сходится тогда и только тогда, когда  $a_0 = a_1 = 0$ .

**7.9.** Бесконечный в обоих направлениях ряд

$$\dots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^{\infty} f(t) dt + \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{t_1} f(t) dt + \dots$$

равномерно сходится к функции  $g(x)$ , причем  $g(0) = 2$ . Найти  $g(x)$ .

**7.10.** Вычислить сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ .

**7.11.** Последовательность  $\{x_n\}$  задается соотношениями

$$x_1 = a > 1, \quad x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 \quad (n \geq 1).$$

Найти  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ .

**7.12.** Доказать тождество  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ .

**7.13.** При каких  $x$  сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right)$ ?

**7.14.** Доказать, что существует бесконечно много положительных  $x$ , для которых сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$  есть рациональное число.

**7.15.** Последовательность положительных чисел  $\{x_n\}$  монотонно убывает, причем  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ . Доказать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \infty$ .

**7.16.** Множество точек, принадлежащих отрезку  $[0, 1]$ , обладает следующим свойством: каждый ряд, составленный из различных его элементов, сходится. Доказать, что это множество не более чем счетно.

## 8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**8.1.** Может ли функция  $x^2 \sin x$  быть решением на интервале  $(-a, a)$  ( $a > 0$ ) уравнения  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  с коэффициентами, непрерывными на этом интервале?

**8.2.** Доказать, что все решения уравнения  $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  ограничены на всей оси  $Ox$ .

**8.3.** Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  имело линейные независимые решения  $y_1$  и  $y_2$ , для которых  $y_2 = (y_1)^2$ .

**8.4.** Выразить через элементарные функции и интегралы от них общее решение дифференциального уравнения  $y'' - xy' - y = 0$ .

**8.5.** Доказать, что уравнение  $y' = y^2 + x$  с начальным условием  $y(0) = 0$  не имеет решения на интервале  $(0, 3)$ .

**8.6.** Точка движется по прямой так, что средняя скорость за любой промежуток времени равна среднему арифметическому скоростей на концах промежутка. Доказать, что точка движется с постоянным ускорением.

**8.7.** Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y'' + \frac{(y')^2}{y} = x' + \frac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases}$$

где  $x, y$  – функции от  $t$ .

**8.8.** Доказать, что каждое решение дифференциального уравнения  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2+t^4 + \cos x}$  ограничено.

## 9 АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

**9.1.** Найти все непрерывные на  $\mathbf{R}$  функции  $f(x)$ , удовлетворяющие условию  $f(x) = f(\sin x)$  при всех  $x$ .

**9.2.** Существует ли непрерывная функция  $f(x)$ , определенная на всей вещественной оси  $\mathbf{R}$ , такая, что  $f(f(x)) = e^{-x}$  для всех  $x \in \mathbf{R}$ ?

**9.3.** Доказать, что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

не является целым числом ни при каком значении  $n \in \mathbf{N}$ , большем 1.

**9.4.** Доказать, что любое число  $n \in \mathbf{N}$ , больше чем 32, представимо в виде суммы нескольких натуральных чисел, сумма обратных величин которых равна 1.

**Указание.** Значения  $n = 33, 34, 35, \dots, 73$  требуемому условию удовлетворяют.

**9.5.** Доказать, что любое простое число вида

$$2^{2^n} + 1 \quad (n \in \mathbf{N})$$

не представимо в виде разности пятых степеней двух натуральных чисел.

**9.6.** Доказать, что если длины сторон прямоугольника – нечетные числа, то внутри этого прямоугольника нет точки, расстояние от которой до любой из четырех его вершин является целым числом.

**9.7.** Доказать, что не существует правильной четырехугольной пирамиды, у которой длины всех ребер, полная поверхность и объем являются целыми числами.

**9.8.** Для заданных различных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{N}$  ( $n > 1$ ) и каждого значения  $i = 1, 2, \dots, n$  обозначено

$$p_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j).$$

Доказать, что при любом значении  $k \in \mathbf{N}$  число  $\sum_{i=1}^n a_i^k / p_i$  является целым.

**9.9.** Доказать, что существуют числа  $A$  и  $B$ , удовлетворяющие при любом значении  $n \in \mathbf{N}$  равенству

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A \operatorname{tg} n + Bn,$$

где обозначено

$$a_k = \operatorname{tg} k \operatorname{tg} (k - 1).$$

**9.10.** В последовательности положительных чисел  $a_0, a_1, \dots$  каждый из членов  $a_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) равен либо  $a_{n-1}/2$ , либо  $\sqrt{a_{n-1}}$ . Может ли эта последовательность иметь предел, принадлежащий интервалу  $(0; 1)$ ?

**9.11.** Для заданного натурального значения  $n \geq 3$  найти наибольшее возможное число возрастающих арифметических прогрессий, состоящих из трех членов, которые могут быть выбраны из какого-либо набора, содержащего ровно  $n$  различных чисел.

**9.12.** Числа 1, 9, 8, 1 являются соответственно четвертями первыми членами последовательности, в которой каждый из последующих членов равен

последней цифре суммы четырех предшествующих ему членов. Могут ли в этой последовательности встретиться числа 1, 2, 3, 4, идущими подряд?

**9.13.** Дана числовая последовательность  $\{a_n\}$ , удовлетворяющая неравенствам  $|a_{k+m} - a_k - a_m| \leq 1$  при  $k, m \in \mathbf{N}$ . Доказать, что для любых  $p, q \in \mathbf{N}$  выполнено неравенство

$$\left| \frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q} \right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

**9.14.** Доказать, что существует ровно одна последовательность целых чисел  $a_1, a_2, \dots$ , удовлетворяющая условиям

$$a_1 = 1, a_2 > 1, a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2} \text{ при } n \in \mathbf{N}.$$

**9.15.** Для заданного простого числа  $p$  найти количество различных последовательностей натуральных чисел  $a_0, a_1, \dots$ , удовлетворяющих равенствам

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1 \text{ при } n \in \mathbf{N}.$$

**9.16.** Доказать, что для последовательности чисел (Фибоначчи)  $a_1, a_2, \dots$ , заданной соотношениями

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ при } n \in \mathbf{N},$$

существует единственная тройка чисел  $a, b, c \in \mathbf{N}$ , удовлетворяющая условиям:  $b < a$ ,  $c < a$  и для любого значения  $n \in \mathbf{N}$  число  $a_n - nbc^n$  делится на  $a$ .

**9.17.** Найти все пары  $(x; y)$  положительных чисел, на которых достигается наименьшее значение функции

$$f(x; y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

и найти это наименьшее значение.

**9.18.** Для заданных чисел  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  определить, существуют ли точки  $x \in \mathbf{R}$ , в которых функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$$

принимает наименьшее значение. Если существуют, то найти все такие точки, а также наименьшее значение функции  $f(x)$ .

**9.19.** Даны положительные числа  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Для какой перестановки  $(b_1; b_2; \dots; b_n)$  этих чисел произведение

$$\prod_{i=1}^n (a_i + 1/b_i)$$

максимально?

**9.20.** Даны два положительных числа  $x_1, x_2$ , а про функцию  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , заданную формулой

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (\text{где } a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0),$$

известно, что  $f(0) = f(x_1) = 1$  и  $f'(x_2) = 0$ . Найти коэффициенты  $a, b, c$ .

**9.21.** Существует ли функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , удовлетворяющая для всех  $x \in \mathbf{R}$  неравенству

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$$

и не принимающая никакого значения более чем в одной точке?

**9.22.** Пусть непрерывные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют тождеству

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что если уравнение  $f(x) = g(x)$  не имеет действительных решений, то их не имеет также и уравнение  $f(f(x)) = g(g(x))$ .

**9.23.** Найти все числа  $d \in (0; 1]$ , обладающие следующим свойством: если  $f(x)$  – произвольная непрерывная функция, определенная при  $x \in [0; 1]$ , причем  $f(0) = f(1)$ , то существует число  $x_0 \in [0; 1 - d]$ , для которого

$$f(x_0) = f(x_0 + d).$$

**9.24.** Пусть функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  определена следующим образом:  $f(x) = 0$ , если  $x$  иррационально;  $f(p/q) = 1/q^3$ , если  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}$  и дробь  $p/q$  несократима. Доказать, что эта функция дифференцируема в каждой точке  $x = \sqrt{k}$ , где  $k$  – натуральное число, не являющееся квадратом целого числа.

**9.25.** Функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  удовлетворяет тождеству

$$f(xy) \equiv \frac{f(x) + f(y)}{x + y}, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad x + y \neq 0.$$

Существует ли такое значение  $x \in \mathbf{R}$ , для которого  $f(x) \neq 0$ ?

**9.26.** Найти все функции  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , удовлетворяющие тождеству

$$xf(y) + yf(x) \equiv (x+y)f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

**9.27.** Найти все функции  $f : \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ , удовлетворяющие тождеству

$$f(n+m) + f(n-m) \equiv f(3n), \quad n, m \in \mathbf{Z}^+, n \geq m.$$

**9.28.** Рассматриваются непостоянные функции  $f(n, m)$ , определенные на множестве всех пар целых чисел, принимающие целочисленные значения и удовлетворяющие тождеству

$$f(n, m) \equiv \frac{1}{4}(f(n-1, m) + f(n+1, m) + f(n, m-1) + f(n, m+1)) \quad n, m \in \mathbf{Z}.$$

Доказать, что:

а) такие функции существуют;

б) для любого значения  $k \in \mathbf{Z}$  каждая такая функция принимает значения как большие  $k$ , так и меньшие  $k$ .

**9.29.** Найти все пары ненулевых целых значений  $m \leq n$ , удовлетворяющих неравенству  $m+n \neq 0$  и тождеству

$$f_m(x, y)f_n(x, y) \equiv f_{m+n}(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad xy(x+y) \neq 0,$$

где обозначено

$$f_k(x, y) = (x^k + y^k + (-1)^k(x+y)^k)/k.$$

**Указание.** Пары  $m=2, n=3$  и  $m=2, n=5$  требуемым условиям удовлетворяют.

**9.30.** Доказать, что если функция  $f(x, y)$ , определенная на множестве

всех пар рациональных чисел и принимающая только положительные значения, удовлетворяет трем тождествам

$$\begin{aligned} f(xy, z) &\equiv f(x, z)f(y, z), \\ f(z, xy) &\equiv f(z, x)f(z, y), \\ f(x, 1-x) &\equiv 1, \quad x, y, z \in \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

то справедливы тождества

$$f(x, x) \equiv 1, f(x, -x) \equiv 1, f(x, y)f(y, x) \equiv 1, x, y \in \mathbf{Q}.$$

**9.31.** а) Доказать, что если непрерывная функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  удовлетворяет тождеству

$$f(f(f(x))) \equiv x, \quad x \in \mathbf{R},$$

то при любом значении  $x \in \mathbf{R}$  справедливо равенство  $f(x) = x$ .

б) Привести пример (разрывной) функции  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , удовлетворяющей условиям

$$g(x) \neq x \text{ и } g(g(g(x))) \equiv x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**9.32.** Доказать, что для корней  $x_1, x_2$  многочлена

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} \text{ где } p \in \mathbf{R}, p \neq 0,$$

выполнено неравенство  $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ .

**9.33.** Многочлен

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$$

с неотрицательными коэффициентами  $a_1, \dots, a_{n-1}$  имеет  $n$  действительных корней. Доказать, что  $P(2) \geq 3^n$ .

**9.34.** Многочлен

$$ax^n - ax^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b$$

имеет ровно  $n$  положительных корней. Доказать, что все эти корни равны между собой.

**9.35.** Доказать, что если многочлен  $P(x)$  степени  $n$  с действительными коэффициентами не имеет действительных корней, то многочлен

$$Q(x) = P(x) + \alpha P'(x) + \dots + \alpha^n P^{(n)}(x)$$

при любом значении  $\alpha \in \mathbf{R}$  тоже не имеет действительных корней.

**9.36.** Доказать, что для любого многочлена  $P(x)$  степени  $n > 1$ , имеющего  $n$  различных действительных корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , справедливо равенство

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0.$$

**9.37.** Сколько различных пар непересекающихся подмножеств имеет множество, состоящее из  $n$  элементов?

**9.38.** Множество  $X$  состоит из  $n$  элементов. Какое наибольшее число трехэлементных подмножеств можно выбрать в  $X$  так, чтобы любые два из них имели ровно один общий элемент?

**9.39.** В множестве, состоящем из  $n \geq 5$  элементов, выбрано  $n + 1$  различных трехэлементных подмножеств. Доказать, что найдутся два

выбранных подмножества, имеющих ровно один общий элемент.

**9.40.** Некоторые из городов  $P_1, \dots, P_{1983}$  соединены попарно некоторыми авиалиниями, принадлежащими компаниям  $A_1, \dots, A_{10}$ . Известно только, что из любого города можно перелететь в любой другой без пересадок и что каждая авиалиния действует в обоих направлениях. Доказать, что (как бы ни были города соединены авиалиниями) существует хотя бы одна компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе и с нечетным числом используемых авиалиний.

**9.41.** На внутренней обертке каждой шоколадки серии «Великий Математик» изображен один из  $n$  выдающихся математиков, причем портрет каждого из них встречается с одинаковой вероятностью, равной  $1/n$ . Сколько в среднем надо купить шоколадок, чтобы собрать полную коллекцию портретов?

## 10 ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

### 10.1. Полином вида

$$z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \dots - p_{n-1} z - p_n,$$

где

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0, p_1 + p_2 + \dots + p_n > 0$$

имеет единственный положительный нуль.

### 10.2. Если $z_0$ – любой нуль полинома

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n,$$

то  $|z_0|$  не может превосходить единственного положительного нуля  $\zeta$  полинома

$$z^n - |a_1|z^{n-1} - |a_2|z^{n-2} - \dots - |a_n|.$$

### 10.3. Нули полинома

$$P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n,$$

где  $a_n \neq 0$ , по модулю не меньше единственного положительного нуля полинома

$$z^n + |a_1|z^{n-1} + |a_2|z^{n-2} + \dots + |a_{n-1}|z - |a_n|.$$

**10.4.** Все нули полинома  $z^n + c$  лежат на окружности с центром  $z = 0$  и радиусом  $|c|^{1/n}$ .

**10.5.** Пусть  $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, d_n$  — положительные числа и

$$d_n \geq |a_1|d_{n-1} + |a_2|d_{n-2} + \dots + |a_n|d_0.$$

Нули полинома

$$z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n$$

не превосходя по модулю наибольшего из чисел

$$\frac{d_n}{d_{n-1}}, \sqrt{\frac{d_n}{d_{n-2}}}, \sqrt[3]{\frac{d_n}{d_{n-3}}}, \dots, \sqrt[n]{\frac{d_n}{d_0}}.$$

**10.6.** Корни уравнения

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

не превосходят по модулю наибольшего из чисел

$$n|a_1|, \sqrt{n|a_2|}, \sqrt[3]{n|a_3|}, \dots, \sqrt[n]{n|a_n|},$$

а также наибольшего из чисел

$$\sqrt[k]{\frac{2^n - 1}{\binom{n}{k}} |a_k|} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

**10.7.** Пусть  $p_0 > p_1 > p_2 > \dots > p_n > 0$ . Показать, что в единичном круге  $|z| \leq 1$  не содержится ни одного нуля полинома

$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n.$$

**10.8.** Если все коэффициенты  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  полинома

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n$$

положительны, то нули его лежат в круговом кольце  $\alpha \leq |z| \leq \beta$ , где  $\alpha$  – наименьшее, а  $\beta$  – наибольшее из чисел

$$\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_2}, \dots, \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

**10.9.** Если комплексные числа  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (т.е. представляющие их точки) лежат все по одну и ту же сторону от некоторой прямой, проходящей через точку 0, то

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \neq 0, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

**10.10.** Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — любые комплексные числа с суммой 0. Тогда каждая прямая  $g$ , проходящая через точку 0, разделяет числа  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , т.е. эти числа расположены частью по одну, частью по другую сторону от прямой  $g$ , если только они не все лежат на  $g$ .

**10.11.** Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — любые точки в комплексной плоскости,  $m_1 > 0, m_2 > 0, \dots, m_n > 0, m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$ . Тогда каждая прямая, проходящая через точку

$$z = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n,$$

разделяет точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , если только они не все расположены на этой прямой.

**Замечание.** Если рассматривать числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$  задачи 10.11 как массы, сосредоточенные в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то определенная там точка  $z$  будет представлять центр тяжести этого распределения масс. Зафиксируем точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  и рассмотрим всевозможные подобные распределения масс; тогда соответствующие им центры тяжести расположатся внутри некоторого (наименьшего) выпуклого полигона, содержащего точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Единственное исключение представляет случай, когда точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  все лежат на одной прямой. В этом случае центры тяжести будут заполнять наименьший отрезок, содержащий все рассматриваемые точки.

**10.12.** Производная  $P'(z)$  полинома  $P(z)$  не может иметь нулей вне наименьшего выпуклого полигона (соответственно наименьшего отрезка),

содержащего все нули  $P(z)$ , причем те нули  $P'(z)$ , которые отличны от нулей  $P(z)$ , лежат внутри этого полигона (отрезка).

**10.13.** Если числа  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  лежат все в угле  $-\alpha \leq \arg z \leq \alpha, \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то ряды  $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$  и  $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$  либо оба сходятся, либо оба расходятся.

**10.14** Пусть числа  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  лежат все в полуплоскости  $\Re z \geq 0$ . Если сходятся оба ряда

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + \dots,$$

то сходится также ряд

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 + \dots$$

**10.15.** Существуют такие комплексные последовательности  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , что все ряды

$$z_1^k + z_2^k + \dots + z_n^k + \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

сходятся, тогда как все соответствующие им ряды абсолютных значений

$$|z_1|^k + |z_2|^k + \dots + |z_n|^k + \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

расходятся.

**10.16.** Где расположены предельные точки последовательности  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  с общим членом

$$z_n = \left(1 + \frac{i}{1}\right) \left(1 + \frac{i}{2}\right) \left(1 + \frac{i}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{i}{n}\right)?$$

**10.17.** Ряд из комплексных членов, каждая часть которого сходится, должен сходиться абсолютно.

## 11 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**11.1.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – ненулевые вектора в линейном пространстве,  $A$  – линейное преобразование такое, что

$$Ax_1 = x_1, Ax_k = x_k + x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Доказать, что вектора  $x_1, \dots, x_n$  линейно независимы.

**11.2.** Известно, что матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  попарно перестановочны. Доказать, что найдутся действительные числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , не все равные нулю, такие, что  $\det(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0$ .

**11.3.** Пусть  $A$  – матрица порядка  $n$ , имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & & & \\ & \alpha_2 & 0 & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \\ \alpha_n & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти хотя бы один вектор  $x$  такой, что вектора  $x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x$  линейно независимы. Доказать, что если матрица  $A$  подобна диагональной матрице с числами  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  на диагонали, то все числа  $\beta_1, \dots, \beta_n$  попарно различны.

**11.4.** Вычислить  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1983}$ .

**11.5.** Пусть  $A$  – квадратная матрица и  $A^k = 0$ . Доказать, что  $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$ .

**11.6.** Пусть  $A$  и  $B$  – матрицы порядка  $n$ , причем матрица  $A$  обратима. Возможно ли равенство  $AB - BA = A$ ?

**11.7.** Найти матрицу  $P$  порядка  $n$  такую, что для любой матрицы  $A$  порядка  $n$  матрица  $AP$  отличается от  $A$  только перестановкой  $i$ -го и  $j$ -го столбцов.

**11.8.** Пусть  $A$  – невырожденная квадратная матрица, в каждой строчке которой стоит только одно число, отличное от нуля и равное  $+1$  или  $-1$ .

**11.9.** Рассматриваются действительные симметрические матрицы второго порядка с собственными значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Найти наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать элемент  $a_{12}$ .

**11.10.** Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого два элемента равны 4, а остальные 1 или  $-1$ .

**11.11.** В матрице  $A$  столбцы являются попарно ортогональными векторами. Доказать, что абсолютная величина определителя матрицы  $A$  равна произведению длин векторов – столбцов.

**11.12.** Вычислить определитель  $P_n = \det(\|p_{ij}\|)$ , где  $p_{ij} = 1$ , если  $i$  делит  $j$ , и  $p_{ij} = 0$ , если  $i$  не делит  $j$ . Найти значение определителя  $Q_n = \det(\|q_{ij}\|)$ , где  $q_{ij}$  – число общих делителей  $i$  и  $j$ .

**11.13.** Доказать, что если у квадратной матрицы  $A$  порядка  $n \times n$  все элементы, лежащие на главной диагонали, равны 0, то ее можно представить в виде  $A = BC - CB$ , где  $B, C$  – квадратные матрицы порядка  $n \times n$ .

**11.14.** Квадратная матрица  $A$  такова, что в каждом ее столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, который больше 1, и некоторый недиагональный, равный 1. Может ли матрица  $A$  быть вырожденной?

**11.15.** Пусть  $A, B$  – действительные симметрические матрицы одного порядка. Доказать, что  $\text{Tr}(ABAB) \leq \text{Tr}(A^2B^2)$ , где  $\text{Tr}(M)$  – след матрицы  $M$ . Когда имеет место равенство?

**11.16.** Доказать, что из любых пяти векторов в евклидовом пространстве можно выбрать два таких, что длина их суммы не превосходит длины суммы трех оставшихся.

**11.17.** Сумма длин нескольких векторов на плоскости равна  $\pi$ . Доказать, что можно выбрать несколько из них так, чтобы длина их суммы была не меньше 1.

**11.18.** Пусть  $A$  – положительно определенная симметричная матрица. Доказать неравенство

$$(\text{tr } A)(\text{tr } A^{-1}) \geq n^2.$$

**11.19.** Доказать, что если  $A$  и  $B$  – действительные положительно определенные симметричные матрицы порядка  $n$ , то

$$\det(A + B) \geq \det A + \det B.$$

## 12 ГЕОМЕТРИЯ

**12.1.** Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между большой и малой полуосями этого эллипса.

**12.2.** На отрезке  $[0,1]$  задана функция  $y = x^2$ . При каком положении точки  $t$  сумма площадей  $S_1$  и  $S_2$  имеет наименьшее и наибольшее значения (рис. 1)?

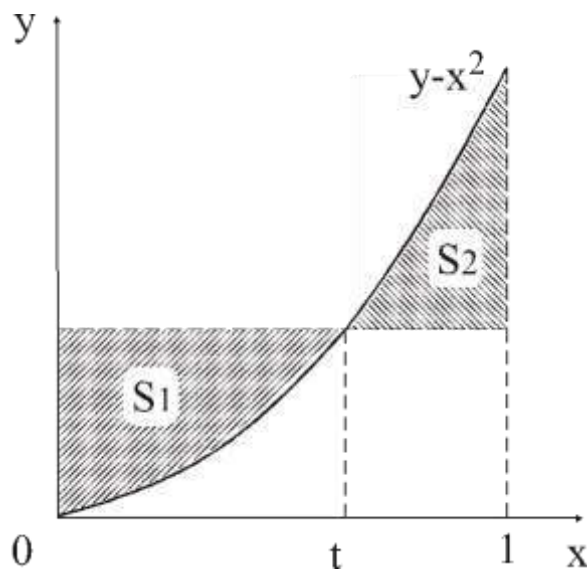


Рисунок 1 – Чертеж к задаче 12.2

**12.3.** Какой сектор следует вырезать из круга радиуса  $R$ , чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

**12.4.** На эллипсе  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  найти такую точку  $(x_0; y_0)$ , чтобы площадь треугольника, ограниченного касательной к эллипсу в этой точке и осями координат, была наименьшей.

**12.5.** На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ . Найти уравнение геометрического места точек, отстоящих от  $A$  на расстоянии вдвое больше, чем от  $B$ .

**12.6.** Найти уравнение геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из вершины параболы  $y^2 = -4ax$  на касательные к этой параболе.

**12.7.** Найти расстояние от параболы  $y = x^2$  до прямой  $x - y - 2 = 0$ .

**12.8.** На листе бумаги нарисован график  $y = \sin x$ . Лист свернут в цилиндрическую трубку, так что совмещены все точки, абсциссы которых отличаются на  $2\pi$ . Доказать, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.

**12.9.** Из одной точки проведены три некопланарных вектора  $a, b, c$ . Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору  $a \times b + b \times c + c \times a$ .

**12.10.** Можно ли накрыть всю плоскость конечным числом внутренностей парабол?

**12.11.** Установить взаимно однозначное соответствие между точками замкнутого и открытого кругов радиуса 1.

**12.12.** Пусть  $A$  – некоторое множество на прямой, все точки которого являются изолированными. Доказать, что  $A$  представляется в виде пересечения открытого и замкнутого множеств.

**13 ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ ПРЕДЛАГАЛИСЬ В СНГ И В  
СТРАНАХ ДАЛЬНЕГО ЗАРУБЕЖЬЯ ПРИ  
ПРОХОЖДЕНИИ КОНКУРСОВ С ПОСЛЕДУЮЩИМ  
ПРАВОМ ВЫЕЗДА В АНГЛИЮ, ГЕРМАНИЮ,  
ФРАНЦИЮ, США И ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ НА РАБОТУ В  
ОРГАНИЗАЦИИ, ТРЕБУЮЩИЕ ЗНАНИЙ В ОБЛАСТИ  
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ И  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**13.1.** Построить график функции

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(x^2/2\right)^n}.$$

**13.2.** Построить график функции

$$y = \cos(2 \arccos x).$$

**13.3.** Построить график функции

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \arctg x^n.$$

**13.4.** Построить кривую, заданную уравнением

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

**13.5.** Доказать, что в  $n$ -мерном евклидовом пространстве не существует  $n+2$  векторов, образующих попарно тупые углы.

**13.6.** Доказать, что если оси двух пересекающихся парабол перпендикулярны, то четыре точки пересечения принадлежат одной окружности.

**13.7.** Доказать, что если рациональная функция от  $x$  не меняется при замене  $x$  на  $\frac{1}{x}$ , то она является рациональной функцией от  $x + \frac{1}{x}$ .

**13.8.** Существуют такие точечные множества  $A$ , которые меньше самих себя, т.е. такие множества  $A$ , что  $A < A$ . Для ограниченных множеств  $A$  соотношение  $A < A$  невозможно.

Более удивительным кажется утверждение:

Существуют такие ограниченные множества  $A$  и  $B$  одного диаметра, что  $A < B$ . Для пары замкнутых ограниченных множеств  $A$  и  $B$  одного диаметра соотношение  $A < B$  невозможно.

**13.9.** Существуют ограниченные множества, равные своей собственной части. Такие множества не могут быть замкнутыми.

**13.10.** В каждом точечном множестве, состоящем из  $n$  точек, найдется не более чем  $n$  различных пар точек, реализующих наибольшее расстояние между точками этого множества.

**13.11.** Пусть  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  – последовательность независимых случайных величин таких, что  $\forall n \geq 1$ :

$$P\{\xi_n = 0\} = p_0, P\{\xi_n = 1\} = p_1,$$

где  $p_0$  и  $p_1$  – неотрицательные числа,  $p_0 + p_1 = 1$ . Какими должны быть числа  $p_0, p_1$ , чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\xi_n}}{n}$$

сходился с вероятностью 1?

**13.12.** Пусть  $\xi$  – случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним значением 0 и дисперсией 1. Определить все борелевские функции  $f \in L_1(\mathbf{R})$  такие, для которых

$$\forall a \in \mathbf{R} : Mf(a + \xi) = 0.$$

**13.13.** При рассмотрении многих вопросов встречаются матрицы вида:

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы называются циркулянтами. Определить собственные значения и собственные векторы таких матриц.

**13.14.** Доказать следующую теорему. Если  $(x, Ax) > 0$  для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $(x, Bx) = 0$ , где  $B$  – неотрицательно определенная матрица, то существует такое число  $\lambda$ , что квадратичная форма

$$(x, Ax) + \lambda(x, Bx)$$

положительно определена.

**13.15.** Доказать, что уравнение  $x^{n+1} = P(x)$ , где  $P(x)$  – многочлен  $n$ -й степени с положительными коэффициентами, имеет на полуоси  $(0; +\infty)$  ровно один корень.

**13.16.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{p}{n} \right)^n \right].$$

**13.17.** Доказать, что если из гармонического ряда вычеркнуть все члены, в знаменателях которых содержится цифра 3, то полученный ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{22} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{29} + \frac{1}{40} + \dots$$

сходится и его сумма меньше 25.

**13.18.** Доказать, что кривые 2-го порядка с одинаковым эксцентриситетом подобны.

**13.19.** Найти пересечение внутренностей всех ромбов, вписанных в данный эллипс.

**13.20.** Найти все точки плоскости, из которых данный эллипс виден под прямым углом.

**13.21.** Найти все матрицы 2-го порядка с действительными элементами, удовлетворяющие уравнению  $A^3 - 4A = 0$ , где  $0$  – нулевая матрица.

**13.22.** Проводник длины  $l_0$  разветвляется на одном из своих концов на  $k$  отдельных проводников длин  $l_s$  ( $S = 1, 2, \dots, k$ ), причем сила тока в соответствующих частях проводника есть  $i_0, i_1, \dots, i_k$ . Спрашивается, как надо выбрать площади поперечных сечений  $q_0, q_1, \dots, q_k$  отдельных частей проводника для того, чтобы при данной разности потенциалов  $E$  для цепей  $(l_0, l_1), (l_0, l_2), \dots, (l_0, l_k)$  пошло наименьшее количество материала  $V$  (рис.2).

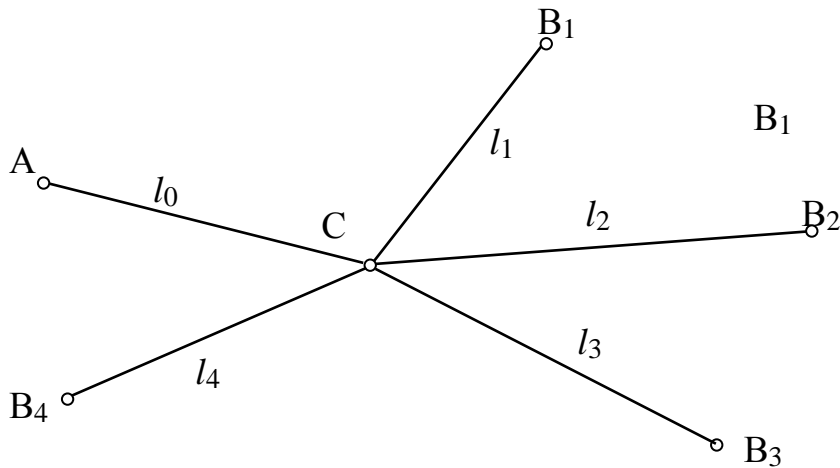


Рисунок 2 – Чертеж к задаче 13.22

Задачи для самостоятельного решения

**13.23.** Что можно сказать о теле, имеющем две различные оси вращения?

**13.24.** Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов может быть в городе из  $N$  домов? Заборы могут отгораживать как отдельные дома, так и группы домов, в том числе и весь город; не допускаются лишь заборы, не отгораживающие ни одного дома.

**13.25.** Если каждые три точки некоторого ограниченного точечного множества можно покрыть кругом радиуса  $R$ , то и все точки множества можно покрыть кругом этого радиуса.

Показать, что для любой комплексной матрицы справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|^2,$$

$$\sum_{i=1}^N |\operatorname{Re} \lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N \left| (a_{ij} + \bar{a}_{ij}) / 2 \right|^2,$$

$$\sum_{i=1}^N |\operatorname{Im} \lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N \left| (a_{ij} - \bar{a}_{ij}) / 2 \right|^2.$$

**13.26.** Определить минимум выражения

$$Q_N(x) = \int_0^\pi \left| e^{-i\theta} - \sum_{k=0}^N x_k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta.$$

**13.27.** К какому пределу стремится минимум выражения

$$Q_N(x) = \int_0^\pi \left| e^{-i\theta} - \sum_{k=0}^N x_k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta$$

при  $N \rightarrow \infty$ ? (Этот результат играет важную роль в теории прогнозирования.)

**13.28.** Определить минимум выражения

$$Q_N(x) = \int_0^1 \left| t^k - \sum_{i=0}^N x_i t^{\lambda_i} \right|^2 dt,$$

где  $\{\lambda_i\}$  – последовательность действительных чисел таких, что  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$

**13.29.** Найти минимальное и максимальное значения функции  $(x, Ax) + 2(b, x)$  на сфере  $(x, x) = 1$ . Сколько здесь имеется стационарных точек и все ли они действительны?

**13.30.** Построить линейный оператор, действующий в многомерных пространствах различных размерностей или зависящий от целочисленного параметра таким образом, что любая жорданова матрица (матрица, приведенная к жордановой форме) при определенном выборе параметра является жордановой формой матрицы указанного оператора.

**13.31.** Привести пример бесконечномерного банахового пространства  $B$  и всюду плотных линейных многообразий  $M_1$  и  $M_2$  в нем, которые имеют пустое пересечение:  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

**13.32.** Вывести формулу для вычисления объема  $n$ -мерного шара.

**13.33.** Имеется пара темных очков  $O_1$  и  $O_2$ , имеющих различные показатели пропускания (показатель пропускания – это отношение пропущенного очками света к падающему). Их владелец, желая максимально защитить себя от дневного света, одевает сначала одни очки, а затем другие. В каком порядке, в зависимости от показателя пропускания очков, их следует надеть, чтобы на глаза падало минимальное количество света.

**13.34.** Имеется бесконечное число очков с заданными показателями пропускания. Их владелец одевает их последовательно на себя. В каком порядке он их должен одевать, чтобы на глаза падало минимальное количество света? Каким условиям должны удовлетворять показатели поглощения бесконечного числа очков, чтобы их владелец, надев их все последовательно на себя, оказался бы в абсолютной темноте.

**13.35.** Существует ли ограниченная поверхность в трехмерном пространстве с бесконечным числом седловых точек.

**13.36.** В теореме Баноха о неподвижной точке утверждается, что если имеет место неравенство  $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  и выполняются некоторые другие условия, то отображение  $A$  полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку. Является ли это утверждение о существовании и единственности неподвижной точки верным, если указанное выше неравенство заменить неравенством

$$\rho(Ax, Ay) \leq \rho(x, y)?$$

Здесь и выше  $\rho(x, y)$  – расстояние между точками  $x$  и  $y$ .

**13.37.** Можно ли в трехмерном кубе (т.е. в обычном кубе) проделать дыру, сквозь которую пройдет куб, равный кубу с дырой? Под дырой в кубе

понимается следующее: сквозь эту дыру можно пропустить цепочку, застегнуть ее, после чего куб можно будет носить на цепочке.

**13.38.** Дан четырехмерный куб, определяемый как множество точек  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , для координат которых выполнено условие  $-1 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Можно ли в таком кубе проделать дыру, сквозь которую пройдет куб, конгруэнтный исходному (т.е. такой куб, который можно совместить с исходным кубом при соответствующем его перемещении в четырехмерном пространстве).

**13.39.** Трехмерный куб опирается своей вершиной  $A$  на плоскость так, что диагональ куба с концом в точке  $A$ , перпендикулярна плоскости. На плоскость падает пучок света, параллельный указанной диагонали. Найти форму тени, которую куб отбрасывает на плоскость.

**13.40.** Через центр трехмерного куба, перпендикулярно одной из его диагоналей проходит плоскость. Найти форму сечения куба этой плоскостью.

**13.41.** Через центр четырехмерного куба (см. задачу № 13.38), перпендикулярно одной из его диагоналей проведена трехмерная плоскость. Найти форму сечения куба этой плоскостью (сечение является трехмерным).

**13.42.** Четырехмерный куб (см. задачу № 13.38) опирается своей вершиной  $A$  на плоскость (она трехмерная), так, что диагональ куба с концом в точке  $A$  перпендикулярна этой плоскости. На плоскость падает пучок света, параллельный указанной диагонали. Найти форму тени, которую куб отбрасывает на плоскость.

**13.43.** В воду, находящуюся в сосуде, температура которой выше  $0^\circ C$ , опущен кусок льда. После этого уровень воды в сосуде фиксируется. После того как лед растаял, уровень воды в сосуде фиксируется вновь. Поднимется, опустится или останется неизменным уровень воды в сосуде после того как лед растаял? Считаем, что колебания на поверхности воды отсутствуют. Объемными расширениями (сжатиями), происходящими при изменении температуры пренебрегаем.

**13.44.** Можно ли вокруг выпуклой замкнутой кривой с непрерывной касательной описать квадрат.

**13.45.** Предложите способ введения полярных координат в  $n$ -мерном пространстве. Если вам удастся решить эту задачу, то попытайтесь найти выражение для якобиана, отвечающего переходу от прямоугольных координат в  $n$ -мерном пространстве к его полярным координатам.

**13.46. Задача – шутка.** В ожесточенном бою не менее 70% бойцов потеряли один глаз, не менее 75% – одно ухо, не менее 80% – одну руку и не менее 85% – одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

**13.47.** На фабрике, изготавливающей болты, машины  $A, B, C$  производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен машиной  $A$ ; машиной  $B$ ; машиной  $C$ ?

**13.48.** Большое число  $N$  людей подвергается исследованию крови, Это исследование может быть организовано двумя способами.

1. Кровь каждого человека исследуется отдельно. В этом случае потребуется  $N$  анализов.

2. Кровь  $k$  людей смешивается, и анализируется полученная смесь. Если результат анализа отрицателен, то этого одного анализа достаточно для  $k$  человек. Если же он положителен, то кровь каждого приходится исследовать затем отдельно, и в целом на  $k$  человек потребуется  $k + 1$  анализ. Предполагается, что вероятность положительного результата одна и та же для всех людей и что результаты анализов независимы в теоретико-вероятностном смысле.

1. Чему равна вероятность того, что анализ смешанной крови  $k$  людей будет положителен?

2. Чему равно математическое ожидание числа анализов  $\xi$ , необходимых при втором методе исследования?

3. При каком  $k$  достигается минимум математического ожидания числа необходимых анализов?

# РЕШЕНИЯ

## 1 МНОГОЧЛЕНЫ

**1.1.** Так как  $p'(1) = p'(3) = 0$ , то  $p'(x)$  – многочлен степени  $\geq 2$  и  $p(x)$  – многочлен степени не меньшей, чем 3. Положив  $p'(x) = A(x-1)(x-3) = A(x^2 - 4x + 3)$ , из условий  $p''(x)|_{x=1} < 0$  и  $p''(x)|_{x=3} > 0$  получим  $A > 0$ . Далее получим  $p(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right) + B$ , откуда  $p(1) = \frac{4}{3}A + B = 6$  и  $p(3) = B = 2$ .

Следовательно,  $B = 2$  и  $A = 3$ . Окончательно,  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ .

**1.2.** Пусть  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ,  $a_i > 0$ , и  $p(x) = p(-x)$ . Тогда  $q(x) = p(x) - p(-x) = 2a_{2m} x^{2m} + \dots + 2a_2 x^2 + 2a_0 = 0$ , т.е.  $a_{2i+1} = 0$  и  $p(x)$  содержит лишь четные степени  $x$ ;  $n = 2m$ . Тогда  $p'(x) = 2ma_{2m}x^{2m-1} + \dots + 2a_2x = 0$  при  $x = 0$ ;  $p''(x) = 2m(2m-1)a_{2m}x^{2m-2} + \dots + 2a_2 > 0$ , откуда и вытекает вогнутость графика  $p(x)$ ; единственная точка экстремума  $x = 0$ .

**1.3.** Имеем  $p(x) = 5 + (x-x_1)\dots(x-x_5)q(x)$ , где  $x_1, \dots, x_5$  – целые точки, в которых значение многочлена  $p(x)$  равно 5. Предположим, что для целого числа  $x_0$   $p(x_0) = 0$ ; тогда  $(x_0-x_1)\dots(x_0-x_5)q(x_0) = -5$ , причем  $x_0-x_1, \dots, x_0-x_5$  – различные целые числа, делящие  $(-5)$ . С другой стороны,  $-5$  имеет всего 4 различных целых делителя: 1,  $-1$ , 5 и  $-5$  – противоречие.

**1.4.** Пользуясь формулой Тейлора при  $x = a$ , перепишем многочлен  $p(x)$  в виде

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dots + \frac{p^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!} + \dots + \frac{p^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

(Остаточный член равен нулю, так как всюду  $p^{(n+1)}(x) = 0$ .) При  $x > a$  в силу условий на  $p^{(i)}(a)$  написанное равенство дает  $p(x) > 0$ , что и означает отсутствие корней, превосходящих  $a$ .

**1.5.** Рассмотрим  $p(x) = c_0x + \frac{c_1x^2}{2} + \dots + \frac{c_nx^{n+1}}{n+1}$ . По условию,  $p(1) = 0$ ; кроме того,  $p(0) = 0$ . Поэтому существует  $x_0 \in (0, 1)$  такое, что  $p'(x_0) = 0$ , но  $p'(x)$  совпадает с многочленом  $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ .

**1.6.** Если хотя бы один из  $p_i(x)$  — нулевой многочлен, то утверждение верно. Предположим, что все  $p_i(x)$  ненулевые. Если все  $n_i$  различны, то пусть без ограничения общности  $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ ; тогда  $n_i \geq i-1$  и  $n_1 + \dots + n_r \geq \frac{r(r-1)}{2}$ . Поэтому существуют  $i$  и  $j$ :  $n_i = n_j = n$  при  $i \neq j$ , т.е.  $p_i(x) = ax^n + \dots$ ,  $p_j(x) = bx^n + \dots$ , где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Пусть  $q(x) = p_i(x) - \frac{a}{b}p_j(x)$ . Система  $p_1(x), \dots, p_{i-1}(x), q(x), p_{i+1}(x), \dots, p_j(x), \dots, p_r(x)$  линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима исходная система, причем сумма степеней входящих в нее многочленов меньше, чем  $n_1 + \dots + n_r$ . Продолжая описанный процесс до получения нулевого многочлена, убеждаемся в линейной зависимости исходной системы.

**1.7.** Пусть  $p(z) = a_0 \prod_{k=1}^n (z - b_k)$ , где  $\text{Im} b_k > 0$ . Тогда  $p'(z) = a_0 \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (z - b_j) = \sum_{k=1}^n \frac{p(z)}{z - b_k} = p(z) \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - b_k}$  при  $z \neq b_k$ . Если  $\text{Im} z^* < 0$ , то  $z^* \neq b_k$  и  $p(z^*) \neq 0$ . Кроме того,  $\text{Im}(z^* - b_k) < 0$ ,  $\text{Im} \frac{1}{z^* - b_k} > 0$ , так что

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z^* - b_k}\right) > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{z^* - b_k} \neq 0, \quad \text{откуда и получаем} \quad p'(z^*) \neq 0.$$

Следовательно, все корни  $p'(z)$  лежат в верхней полуплоскости.

**1.8.** Имеем

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n),$$

то есть

$$-\ln(1-x)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{2x^k}{k} + o(x^n).$$

Но

$$\begin{aligned} -\ln(1-x)^2 &= -\ln(1-(2x-x^2)) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(2x-x^2)^k}{k} + o((2x-x^2)^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(2x-x^2)^k}{k} + o(x^n). \end{aligned}$$

Вычитая эти равенства почленно, получим, что данный многочлен есть  $o(x^n)$ , т.е. он делится на  $x^{n+1}$ .

**1.9.** Имеем  $p^{(p-1)}(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{n-p+1}x^{n-p+1}$ , где

$$a_0 = (p-1)!c_{p-1}, \quad a_2 = \frac{(p+1)!}{2!}c_{p+1}, \dots, \quad a_i = \frac{(p+i-1)!}{i!}c_{p+i-1}, \dots$$

Так как между любыми двумя нулями функции ее производная обращается в нуль в некоторой точке, то  $p^{(p-1)}(x)$  имеет  $(n-p+1)$  различных действительных корней, а  $p^{(p)}(x)$  —  $(n-p)$  корней, причем между каждыми

двумя соседними корнями  $p^{(p)}(x)$  лежит корень  $p^{(p-1)}(x)$ . Пусть  $c_{p-1}$  и  $c_{p+1}$  одного знака; без ограничения общности будем считать, что  $c_{p-1} > 0$ ,  $c_{p+1} > 0$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x = 0$  многочлен  $p^{(p-1)}(x)$  убывает слева от  $x = 0$  и возрастает справа от  $x = 0$ , причем  $p^{(p)}(0) = 0$ . Если  $p^{(p)}(x)$  не имеет других корней, то всюду  $p^{(p-1)}(x) > p^{(p-1)}(0) = a_0 > 0$ , что невозможно. Пусть  $x_0$  – корень  $p^{(p)}(x)$ , соседний с  $x = 0$ . Тогда на отрезке между 0 и  $x_0$   $p^{(p-1)}(x) \geq a_0 > 0$ , что противоречит существованию корня  $p^{(p-1)}(x)$  на этом отрезке.

**1.10.** Пусть  $f(x) = \prod_{i=1}^m (x - a_i)$ , тогда  $f(p(x)) = \prod_{i=1}^m (p(x) - a_i)$ ; пусть  $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$  – все различные целые  $a_i$ , тогда целые корни  $f(p(x))$  – целые корни уравнений  $p(x) = a_{i_1}, \dots, p(x) = a_{i_r}$ . Пусть  $p(x) = b_n x^n + \dots + b_0$ ; тогда число целых корней уравнения  $p(x) = a_{i_j}$  не превосходит  $n$ . Если  $x_0$  – любой целый корень этого уравнения и  $x_1$  – целый корень уравнения  $p(x) = a_{i_j}$  ( $j \neq 1$ ), то  $p(x_1) - p(x_0) = (x_1 - x_0)q = a_{i_j} - a_{i_1}$ , так что  $x_1 - x_0$  делит  $a_{i_j} - a_{i_1}$  и число целых корней уравнения  $p(x) = a_{i_j}$  не превосходит числа делителей  $a_{i_j} - a_{i_1}$ . Таким образом, число целых корней  $f(p(x))$  не превосходит  $n + c$ , где  $c$  – число различных целых делителей чисел  $a_{i_j} - a_{i_1}$ .

## 2 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛЫ

**2.1.** Если предел  $A$  существует, то он удовлетворяет соотношению  $A = 2 + \frac{1}{A}$ , откуда  $A = 1 + \sqrt{2}$ . Обозначим  $n$ -й член рассматриваемой последовательности  $1 + \sqrt{2} + \delta_n$ . Тогда

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}+\delta_n},$$

и при  $|\delta_n| < 1$  имеем

$$|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n| \left| \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |\delta_n|.$$

Но  $\delta_1 = 1 - \sqrt{2}$ ,  $|\delta_1| < \frac{1}{2}$ , так что  $|\delta_n| \leq \frac{1}{2^n}$  и  $|\delta_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда и вытекает, что предел  $A$  действительно существует и равен  $1 + \sqrt{2}$ .

**2.2.** Индукцией по  $n$  легко проверить, что точка  $M_n$  отстоит от точки  $A$  на  $\frac{2}{3} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$  длины отрезка  $AB$  (обозначим ее  $l$ ). Таким образом,  $\{M_n\}$  стремится к точке  $C$  отрезка  $AB$ , отстоящей от  $A$  на  $\frac{2}{3}l$ .

**2.3.** Предположим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$  существует. Тогда  $\sin(n+2) - \sin n \rightarrow 0$ , но  $\sin(n+2) - \sin n = 2 \sin 1 \cos(n+1)$ , откуда  $\cos n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Далее,  $\sin 2n = 2 \sin n \cos n \rightarrow 0$ , так что  $\sin 2n \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0$ , что невозможно в силу  $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ .

**2.4.** Имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{n + \frac{1}{i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2^{i/n}}{1 + \frac{1}{ni}}.$$

При  $i \geq 2$   $\frac{2^{i/n}}{1 + \frac{1}{ni}} = 2^{(i-1)/n} \cdot \frac{2^{1/n}}{1 + \frac{1}{ni}} \geq 2^{(i-1)/n} \cdot \frac{1 + \frac{\ln 2}{n}}{1 + \frac{1}{ni}} > 2^{(i-1)/n}$ , так что  $\frac{2^{i/n}}{1 + \frac{1}{ni}} = 2^{\xi_i}$

при  $\xi_i \in \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$ . Искомый предел равен, таким образом,  $\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$ .

**2.5.** Индукцией по  $n$  легко установить, что

$$x_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1} + b^n a = \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n a = \frac{1}{1 - b} + b^n \left( a - \frac{1}{1 - b} \right) \quad (b \neq 1).$$

Рассматриваемая последовательность сходится к  $\frac{1}{1-b}$ : 1) при  $|b| > 1$  и любом  $a$ , а также 2) при любом  $b \neq 1$  и  $a = \frac{1}{1-b}$ ; в остальных случаях она расходится.

**2.6.** Имеем

$$\left| x_{2n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2} \left| x_{2n-1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1 + x_{2n-2}}{2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{4} \left| x_{2n-2} - \frac{1}{3} \right|,$$

так что  $\{x_{2n}\} \rightarrow 1/3$ , и  $\{x_{2n+1}\} \rightarrow 2/3$  т.е. данная последовательность имеет две предельные точки:  $1/3$  и  $2/3$ .

**2.7.** Легко заметить, что  $\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{a_k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k + 1}{a_k} = \frac{a_n + 1}{n!}$ . Индукцией по  $n$ :

$a_n = n + n(n-1) + \dots + n(n-1) \dots 2 + n(n-1) \dots 2 \cdot 1$ , так что искомый предел равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

**2.8.** Пусть  $y(x) = \operatorname{arctg} x$ . При  $x = 0$   $y(x) = 0$ ; при  $x > 0$   $y'(x) = 1/(x^2 + 1) < 1$ , так что  $x > 0$   $y(x) < x$ . Поэтому последовательность  $\{x_n\}$

монотонно убывает; для каждого  $n$   $x_n > 0$ , так что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$ .

Переходя к пределу в соотношении  $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$  (что возможно в силу непрерывности  $y(x)$  на  $(-\infty, +\infty)$ ), имеем  $a = \operatorname{arctg} a$ , откуда  $a = 0$ .

**2.9.** Достаточно рассмотреть случай  $x \geq 0$ . При  $x = 0$  искомый предел равен 0. Пусть  $x > 0$ . Если  $a < 0$ , то, взяв последовательность, соответствующую  $-a$  (обозначим ее  $\{z_n\}$ ), будем иметь  $z_n = (-1)^{n-1} y_n$ . Поэтому достаточно рассмотреть  $a \geq 0$ . При  $0 \leq a \leq 1$  имеем  $y_n \geq 0$ ,  $y_{n+1} = a \sin y_n \leq y_n$ , т.е. предел существует и может быть найден из уравнения  $y = a \sin y$ ; он равен 0. При  $1 < a \leq \pi/2$  уравнение  $y = a \sin y$  имеет ненулевое решение  $y^*$ . Легко проверить, что при  $x < y^*$  последовательность  $\{y_n\}$  монотонно возрастает и стремится к  $y^*$ , оставаясь меньше, чем  $y^*$ , а при  $x > y^*$  — стремится к  $y^*$ , монотонно убывая. Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$  при  $a > 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  при  $-1 \leq a < 0$ ; при  $a < -1$  предел не существует.

**2.10.** Имеем  $2\pi n! = 2\pi n! \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} + R_{n+1} \right)$ , где  $R_{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+2)!}$ ,  $0 < \theta < 1$ , т.е.  $2\pi n! e = 2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , где  $N$  — целое;  $n \sin(2\pi n!) = n \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n \left(\frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ , что стремится к  $2\pi$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**2.11.** Очевидно,  $x_n \rightarrow 0$  и монотонно убывает. Имеем

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\sin^2 x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n-1}^2 \left( 1 - \frac{x_{n-1}^2}{3} + o(x_{n-1}^2) \right)} = \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{3} + o(1),$$

или  $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{3} + y_n$ , где  $y_n \rightarrow 0$ . Отсюда  $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{n-1}{3} + \sum_{k=2}^n y_k$ , т.е.  $\frac{3}{nx_n^2} = \frac{n-1}{n} + \frac{3}{nx_1^2} + \frac{3}{n} \sum_{k=2}^n y_k$ . Но  $\frac{3}{nx_1^2} \rightarrow 0$ ,  $\frac{3}{n} \sum_{k=2}^n y_k \rightarrow 0$  как последовательность средних арифметических. Отсюда  $\frac{3}{nx_n^2} \rightarrow 1$ , что и требовалось.

**2.12.** Пусть  $x_n = a + \alpha_n$ ,  $y_n = b + \beta_n$ , где  $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$z_n = ab + a \frac{\beta_1 + \dots + \beta_n}{n} + b \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_1}{n} = ab + a\gamma_n^{(1)} + b\gamma_n^{(2)} + \gamma_n^{(3)}.$$

Докажем, что  $\gamma_n^{(1)}, \gamma_n^{(2)}, \gamma_n^{(3)}$  стремятся к 0 при  $n \rightarrow \infty$ . По  $\varepsilon > 0$  найдем такое  $n_0$ , что при  $n > n_0$ ,  $|\beta_n| < \varepsilon$ . Тогда  $|\gamma_n^{(1)}| \leq \left| \frac{\beta_1 + \dots + \beta_{n_0}}{n} \right| + \varepsilon$ . Выберем  $N$  так, чтобы при  $n > N$  первое слагаемое было меньше  $\varepsilon$ . Тогда  $|\gamma_n^{(1)}| < 2\varepsilon$  при  $n > N$ . Аналогично доказывается, что  $\gamma_n^{(2)} \rightarrow 0$ . Так как  $\{\alpha_n\}$  – ограниченная последовательность, то для некоторого  $c$  имеем  $|\alpha_n| < c$ . Тогда  $|\gamma_n^{(3)}| \leq c \frac{|\beta_1| + \dots + |\beta_n|}{n} \rightarrow 0$ , ибо  $|\beta_n| \rightarrow 0$ .

**2.13.** Имеем  $\left| a_i^{(n+1)} - a_j^{(n+1)} \right| = \frac{|a_i^{(n)} - a_j^{(n)}|}{2}$ ; обозначив  $b_1^{(n)} = a_1^{(n)} - a_2^{(n)}$ ,  $b_2^{(n)} = a_2^{(n)} - a_3^{(n)}$ ,  $b_3^{(n)} = a_3^{(n)} - a_1^{(n)}$ , получим, что  $b_i^{(n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Далее, так как

$$a_1^{(n+1)} + a_2^{(n+1)} + a_3^{(n+1)} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + a_3^{(n)} = a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} = A,$$

то

$$a_1^{(n)} = \frac{1}{3}(A + b_1^{(n)} - b_3^{(n)}), \quad a_2^{(n)} = \frac{1}{3}(A + b_2^{(n)} - b_1^{(n)}),$$

$$a_3^{(n)} = \frac{1}{3}(A + b_3^{(n)} - b_2^{(n)}) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = \frac{1}{3}A.$$

**2.14.** Очевидно, достаточно доказать, что число таких  $i$ , что  $a_i > i$ , бесконечно. Пусть это не так, т.е. начиная с некоторого  $N$  выполняется  $a_i \leq i$ . Пусть  $\max_{1 \leq i \leq N} (a_i) = M$ . Рассмотрим числа  $a_1, a_2, \dots, a_{\max(M, N)}$ . Каждое из них не превосходит  $\max(M, N)$ , причем все они различны и каждое  $a_i$  больше единицы, откуда и вытекает противоречие.

**2.15.** Заметим, что  $k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1$ , т.е. рассматриваемая сумма есть

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!} \right) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!},$$

т.е.  $S_n \rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ .

**2.16.** Имеем  $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Следовательно,  $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$  ограничена и существует точная конечная нижняя грань  $\alpha = \inf \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда существует номер  $m$  такой, что  $\alpha \leq \frac{x_m}{m} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ . Представив произвольное натуральное  $n$  в виде  $n = qm + r$ , где  $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , найдем

$$x_n = x_{qm+r} \leq x_m + \dots + x_m + x_r = qx_m + x_r,$$

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{qx_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m} \cdot \frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{n},$$

$$\alpha \leq \frac{x_n}{n} < \left( \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n}.$$

Так как  $0 \leq r \leq m-1$ , то  $x_r$  ограничено некоторой константой  $c$  и при  $n > \frac{2c}{\varepsilon}$   $0 \leq \frac{x_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ , а тогда  $\alpha \leq \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon$ , так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$ .

**2.17.** Пусть  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$ ,  $r = \lfloor n^\alpha \rfloor$ . Представим  $e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$  в виде

$$\sum_{k=0}^{n-r} \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n-r+1}^n \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{n+r} \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n+r+1}^{2n+1} \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{n^{n-k+1}}{(n-k+1)!} : \frac{n^{n+k}}{(n+k)!} &= \frac{n(n+k(n+k-1))}{n^3} \times \\ &\times \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \dots \left( 1 - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \geq 1 - \frac{1^2 + \dots + (k-2)^2}{n^2} = 1 + o(1) \end{aligned}$$

при  $1 \leq k \leq r$ , так что рассматриваемое отношение стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$  и  $S_3 = S_2 + o(S_2)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Используя, например, формулу Стирлинга, нетрудно оценить далее  $S_1, S_4, S_5$  и показать, что  $S_1 = o(S_2)$ ,  $S_4 = o(S_2)$ ,  $S_5 = o(S_2)$ , откуда и будет вытекать требуемое утверждение.

**2.18. а)** Уравнение  $x^2 = a + x$  имеет единственный положительный корень  $c = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ . Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

Из определения последовательности  $\{x_n\}$  следует, что она возрастает. Для доказательства сходимости достаточно убедиться, что она ограничена сверху. Покажем индукцией по  $n$ , что  $x_n < c$ .

Имеем  $c^2 = c + a > a = x_1^2$ , т.е.  $x_1 < c$ . Если при некотором  $n$   $x_n < c$ , то  $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + c} = c$ . Значит,  $x_n < c$  при всех  $n$ .

Отсюда следует существование предела  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Переходя к пределу в равенстве  $x_{n+1}^2 = x_n + a$ , получаем  $d^2 = d + a$ . Так как  $d > 0$ , то  $d = c$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}.$$

б) Положим  $b_n = \frac{a_n}{e^{2^n}}$  ( $n \geq 1$ ) и  $y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_n}}}$ .

Имеем

$$\begin{aligned} y_n &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_{n-1} + \sqrt{a_n}/e^{2^{n-1}}}}} = \\ &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{a_{n-1}/e^{2^{n-1}} + \sqrt{a_n}/e^{2^{n-1}}}}} = \\ &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_{n-2} + (1/e^{2^{n-2}})\sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}} = \\ &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{a_{n-2}/e^{2^{n-2}} + (1/e^{2^{n-2}})\sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}} = \\ &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + (1/e^{2^{n-3}})\sqrt{a_{n-2} + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}} = \dots = \\ &= \frac{1}{e} \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}} = \frac{x_n}{e}, \end{aligned}$$

значит сходимость  $\{x_n\}$  равносильна сходимости  $\{y_n\}$ .

Для доказательства сходимости последовательности  $\{y_n\}$  заметим, что она возрастает, и нам достаточно проверить ее ограниченность сверху. По условию существует такое натуральное число  $n_0$ , что при

$n > n_0$   $\frac{1}{n} \ln(\ln a_n) < \ln 2$ . Преобразуем последнее неравенство  $\ln(\ln a_n) < n \ln 2$ ,  $a_n < e^{2n}$ ,  $a_n/e^{2n} < 1$ , т.е.  $b_n < 1$  при  $n < n_0$ . Обозначая  $a = \max(b_1, b_2, \dots, b_{n_0}, 1)$ , мы имеем  $b_n \leq a$  при всех натуральных  $n$ .

Положим  $z_1 = \sqrt{a}$ ,  $z_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$ ,  $z_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$ , ...

Имеем

$$y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_n}}} \leq \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} = z_n.$$

Но, как было доказано в п. а), последовательность  $\{z_n\}$  ограничена, значит, и последовательность  $\{y_n\}$  ограничена сверху, что и требовалось доказать.

**2.19.** Покажем, что если при каком-нибудь  $k$   $0 \leq a_k \leq 1$ , то последовательность  $\{a_n\}$  сходится.

Если  $0 \leq a_k \leq 1$ , то легко получить, что  $-1/4 \leq a_{k+1} \leq 0$ ,  $0 \leq a_{k+2} \leq 1$ ,  $-1/4 \leq a_{k+3} \leq 0$ ,  $0 \leq a_{k+4} \leq 1$  и т.д. Последовательность  $\{a_{k+2l}\}$  будет монотонно убывающей, так как

$$\begin{aligned} a_{k+2l+2} - a_{k+2l} &= (a_{k+2l+1})^2 - a_{k+2l+1} - a_{k+2l} = (a_{k+2l})^4 - 2(a_{k+2l})^3 = \\ &= (a_{k+2l})^3(a_{k+2l} - 2) \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому существует предел  $c = \lim_{l \rightarrow \infty} a_{k+2l}$ . Переходя к пределу при  $l \rightarrow \infty$

в равенстве

$$a_{k+2l+2} = a_{k+2l} + (a_{k+2l})^4 - 2(a_{k+2l})^3$$

и учитывая, что  $c \leq 1$ , мы получаем  $c = 0$ . Но тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{k+2l+1} = \lim_{l \rightarrow \infty} ((a_{k+2l})^2 - a_{k+2l}) = c^2 - c = 0,$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Покажем теперь, что последовательность  $\{a_n\}$  сходится, если при некотором  $k$   $0 \leq a_k \leq 2$ . В этом случае  $a_{k+1} \leq a_k \leq 2$ . Если  $a_{k+1} \geq 0$ , то  $a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 2$  и т.д. Поэтому либо последовательность  $\{a_{k+l}\}$  состоит из неотрицательных членов и является невозрастающей и, следовательно, имеет предел, либо при некотором  $l \geq 1$   $a_{k+l} < 0 \leq a_{k+l-1}$ . Но тогда  $0 \leq a_{k+l-1} \leq 1$  и, как было показано выше, в этом случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

В частности, последовательность  $\{a_n\}$  сходится, если  $0 \leq a_1 \leq 2$ .

Пусть теперь  $-1 \leq a_1 < 0$ . Тогда  $0 < a_2 \leq 2$ , и по доказанному выше снова последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел.

Если же  $a_1 < -1$  или  $a_1 > 2$ , то мы имеем

$$a_2 > 2, a_3 - a_2 = a_2(a_2 - 2) > 0, a_3 > a_2 > 2,$$

$$a_4 - a_3 = a_3(a_3 - a_2) > 0, a_4 > a_3 > 2 \text{ и т.д.}$$

Предположим, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ . Тогда  $c^2 - c = 2$ , т.е.  $c = 2$  или  $c = 0$ , что невозможно, так как  $a_n \geq a_2 > 2$  при  $n \geq 2$ . Поэтому последовательность  $\{a_n\}$  расходится.

Итак,  $\{a_n\}$  имеет предел тогда и только тогда, когда  $-1 \leq a_1 \leq 2$ .

**2.20.** Положим  $f(x) = 2x^3 / (3x^2 - 1)$ . Так как  $f'(x) = (6x^4 - 6x^2) / (3x^2 - 1)^2 > 0$  при  $|x| > 1$  и  $f'(x) < 0$  при  $0 < |x| < \sqrt{3}/3$ ,  $\sqrt{3}/3 < |x| < 1$ , то функция  $f(x)$  возрастает на промежутках  $(-\infty, -1]$  и  $[1, \infty)$  и убывает на  $[-1, -\sqrt{3}/3)$ ,  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$  и  $(\sqrt{3}/3, 1]$ . Так как  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}-} f(x) = -\infty$ , то в силу монотонности и непрерывности  $f$

любому числу  $c \in (-\infty, 0]$  соответствует единственное  $x \in [0, \sqrt{3}/3)$  такое, что  $f(x) = c$ .

Положим  $a_0 = \sqrt{3}/3$ . Существует единственное  $a_1 \in [0, \sqrt{3}/3)$  такое, что  $f(a_1) = -a_0$ ; существует единственное  $a_2 \in [0, \sqrt{3}/3)$  такое, что  $f(a_2) = -a_1$  и т.д. Так как  $a_1 < a_0$  и  $f$  монотонно убывает на  $[0, \sqrt{3}/3)$ , то  $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$ . Поэтому существует предел  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Найдем его.

Легко видеть, что  $f(x) + x < 0$  при  $\sqrt{5}/5 < x < \sqrt{3}/3$  и  $f(x) + x > 0$  при  $0 < x < \sqrt{5}/5$ . Так как  $f(a_n) + a_n = a_n - a_{n-1} < 0$ , то  $a_n > \sqrt{5}/5$ ; отсюда  $A \geq \sqrt{5}/5$ . При этом строгое неравенство  $A > \sqrt{5}/5$  невозможно, так как  $f(A) + A = 0$ . Значит,  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{5}/5$ .

Если  $|a| = a_n$  при некотором  $n$ , то имеем  $x_1 = a$ ,  $x_2 = f(a) = -a_{n-1}$ , если  $a = a_n$ , и  $x_2 = f(a) = a_{n-1}$ , если  $a = -a_n$ , т.е.  $|x_2| = a_{n-1}$ . Аналогично,  $|x_3| = a_{n-2}, \dots, |x_{n+1}| = a_0 = \sqrt{3}/3$  и все последующие члены последовательности не определены.

Нет предела у последовательности  $\{x_n\}$  и тогда, когда  $|a| = \sqrt{5}/5$ . В этом случае  $x_2 = -x_1$ ,  $x_3 = -x_2 = x_1$ ,  $x_4 = -x_3 = -x_1$  и т.д.

Покажем, что если  $|a| \neq a_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) и  $|a| \neq \sqrt{5}/5$ , то последовательность  $\{x_n\}$  сходится.

Если  $a = 0$ , то  $x_n = 0$  при всех  $n$ . Если  $0 < |a| < \sqrt{5}/5$ , то  $x_1 = a$ ,  $|x_2| = |f(x_1)| = |f(|x_1|)|$ ; но  $0 < |f(|x_1|)| < |x_1|$ , поэтому  $|x_2| < |x_1|$ . Аналогично,  $|x_2| > |x_3| > \dots$

Значит, существует  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ ; при этом выполняются условия  $c \leq |x_1| < \sqrt{5}/5$  и  $|f(c)| = c$ , из которых следует, что  $c = 0$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$  и, стало быть,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $|x_k| > \sqrt{3}/3$  при некотором  $k$ . Так как функция  $f(x)$  нечетна, то можно ограничиться случаем  $x_k > \sqrt{3}/3$ .

Если  $x_k = 1$ , то  $x_{k+1} = 1$ ,  $x_{k+2} = 1$  и т.д. и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Если же  $\sqrt{3}/3 < x_k < 1$  или  $x_k > 1$ , то ввиду убывания  $f$  на  $(\sqrt{3}/3, 1]$  и возрастания на  $[1, \infty)$  мы

получаем  $x_{k+1} > 1$ . Легко проверить, что  $1 < f(x) < x$  при  $x > 1$ , поэтому  $x_{k+1} > x_{k+2} > x_{k+3} > \dots > 1$ , откуда следует сходимость  $\{x_n\}$ .

В частности,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  существует, если  $|a| > \sqrt{3}/3$ .

Нам осталось рассмотреть случай, когда  $\sqrt{5}/5 < |a| < \sqrt{3}/3$  и при этом  $|a| \neq a_n$  ( $n=1,2,\dots$ ). Найдется интервал  $(a_k, a_{k-1})$ , содержащий  $|a|$ . Имеем

$$\begin{aligned} f(|a|) &\in (-a_{k-2}, -a_{k-1}), \\ |x_2| = |f(a)| &= -f(|a|) \in (a_{k-1}, a_{k-2}), \\ |x_3| &= (a_{k-2}, a_{k-3}), \\ &\dots\dots\dots \\ |x_k| &\in (a_1, a_0), \end{aligned}$$

и, наконец,  $|x_{k+1}| > \sqrt{3}/3$ , но этот случай нами уже разобран.

**2.21.** Рассмотрим последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ , определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 &= \min(c_0, c_1, 4), \quad b_0 = \max(c_0, c_1, 4), \\ a_n &= 2\sqrt{a_{n-1}}, \quad b_n = 2\sqrt{b_{n-1}} \quad \text{при } n \geq 1. \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq 4, \quad b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 4.$$

Проверим индукцией по  $n$ , что  $a_n \leq \min(c_{2n}, c_{2n+1})$ . При  $n=0$  это следует из определения  $a_0$ . Пусть утверждение верно для  $n-1$ , т.е.  $a_{n-1} \leq c_{2n-2}, a_{n-1} \leq c_{2n-1}$ . Тогда

$$c_{2n} = \sqrt{c_{2n-1}} + \sqrt{c_{2n-2}} \geq 2\sqrt{a_{n-1}} = a_n,$$

$$c_{2n+1} = \sqrt{c_{2n}} + \sqrt{c_{2n-1}} \geq \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} \geq 2\sqrt{a_{n-1}} = a_n;$$

индуктивный переход установлен.

Аналогично доказывается, что  $b_n \geq \max(c_{2n}, c_{2n+1})$ .

Неравенства

$$a_n \leq \min(c_{2n}, c_{2n+1}) \leq \max(c_{2n}, c_{2n+1}) \leq b_n$$

перепишем в виде

$$a_n \leq c_{2n} \leq b_n, a_n \leq c_{2n+1} \leq b_n.$$

Легко проверить, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ ; отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1} = 4, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 4.$$

**2.22.** Имеем:

$$x_2 < 2x_1, x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1, \dots, x_n < nx_1, \dots$$

Отсюда следует, что при некотором  $m$  справедливо неравенство  $x_m < m-1$ . Далее,

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n^2/n^2}{x_n x_{n+1}} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)},$$

поэтому при  $n > m$

$$\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} = \left( \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_{m+1}} \right) + \left( \frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_{m+2}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) <$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{(m+1)m} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{m-1}, \\
&\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1} > 0, \text{ и } x_n < \frac{1}{1/x_m - 1/(m-1)}.
\end{aligned}$$

Так как правая часть последнего неравенства не зависит от  $n$ , то последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

**2.23.** Если  $c = 1$ , то утверждение очевидно: так как  $A$  и  $B$  бесконечны, то можно найти такую возрастающую последовательность  $\{a_n\}$ , что  $a_n \in A$ ,  $a_{n+1} \in B$ , и положить  $b_n = a_n + 1$ .

Пусть  $c > 1$ . Определим множества  $A_1$  и  $B_1$  следующим образом:

$$A_1 = \{x \in \mathbf{R} : [x] \in A\}, B_1 = \{x \in \mathbf{R} : [x] \in B\}.$$

Имеем  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ ,  $A_1 \cup B_1 = [1, \infty)$ .

Докажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие элементы  $a = a(\varepsilon) \in A_1$  и  $b = b(\varepsilon) \in B_1$ , что  $b > 1/\varepsilon$  и  $|a/b - c| \leq \varepsilon$ . Предположим, что при некотором  $\varepsilon > 0$  это неверно. Так как  $B$  бесконечно, то найдется элемент  $b_0 \in B$  такое, что  $b_0 > 1/\varepsilon$ . Рассмотрим последовательность множеств  $E_0, E_1, \dots$ , где

$$E_n = [b_0 c^n, b_0 (c + \varepsilon)^n].$$

Покажем индукцией по  $n$ , что  $E_n \subset B_1$ .

При  $n = 0$  это верно, так как  $E_0 = \{b_0\} \subset B \subset B_1$ . Пусть это справедливо при  $n - 1$  и  $b'$  – произвольный элемент  $E_n$ . Тогда найдется такой элемент  $b'' \in E_{n-1}$ , что  $c \leq b'/b'' \leq c + \varepsilon$ . (Можно положить, например,  $b'' = \sqrt[n]{b_0 (b')^{n-1}}$ ). По предположению индукции  $b'' \in B_1$ . Если бы  $b'$  принадлежало  $A_1$ , то мы имели

бы  $b'' \in B_1$ ,  $b' \in A_1$ ,  $|b'/b'' - c| \leq \varepsilon$ ,  $b'' > 1/\varepsilon$ , что противоречит нашему допущению. Значит,  $b' \in B_1$ . Так как  $b'$  – произвольный элемент  $E_n$ , то  $E_n \subset B_1$ .

Пусть  $n_0$  – столь большое натуральное число, что  $\left(\frac{c+\varepsilon}{c}\right)^{n_0} > c$ .

Докажем, что если  $b \geq b_0 c^{n_0}$ , то  $b \in E_n$  при некотором  $n$ . В самом деле, положим  $n = \left\lceil \frac{\ln(b/b_0)}{\ln c} \right\rceil$ . Тогда  $n \geq n_0$ ,  $b_0 c^n \leq b < b_0 c^{n+1}$ . Но

$$c^{n+1} = c^n c \leq c^n \left(\frac{c+\varepsilon}{c}\right)^{n_0} \leq c^n \left(\frac{c+\varepsilon}{c}\right)^n = (c+\varepsilon)^n$$

и, значит,  $b \in E_n$ . Мы видим, что

$$[b_0 c^{n_0}, \infty) \subset \bigcup_{n=n_0}^{\infty} E_n \subset B_1,$$

$$A_1 = [1, \infty) \setminus B_1 \subset [1, b_0 c^{n_0}),$$

но это противоречит бесконечности множества  $A$ .

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся  $a(\varepsilon) \in A_1$  и  $b(\varepsilon) \in B_1$  такие, что  $b > 1/\varepsilon$  и  $|a/b - c| \leq \varepsilon$ . Отсюда следует существование последовательностей  $\{a'_n\}$  и  $\{b'_n\}$  со свойствами

$$a'_n \in A_1, b'_n \in B_1, b'_{n+1} - b'_n \geq 1, a'_n/b'_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty).$$

Полагая  $a_n = [a'_n]$  и  $b_n = [b'_n]$ , мы получаем искомые последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ .

Случай  $c < 1$  сводится к только что разобранному: соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \text{ следует переписать в виде } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{c} \text{ и воспользоваться тем, что}$$

$$1/c > 1.$$

**2.24.** Предположим противное: существует такое  $M$ , что  $|x_n| \leq M$  для всех  $n$ . Окружим каждую точку  $x_n$  окрестностью радиуса  $1/(2n)$ . По условию эти окрестности не пересекаются, а поскольку все они принадлежат интервалу  $(-M - 1/2, M + 1/2)$ , то сумма длин их не больше  $2M + 1$ . С другой стороны, сумма длин первых  $N$  окрестностей равна

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty).$$

Противоречие.

**2.25.** Возьмем такие  $n_1$  и  $n_2$ , что  $|a_{n_1} - a_{n_2}| > 2$ , и такое  $n_3$ , что  $|b_{n_1} - b_{n_3}| > 1, |b_{n_2} - b_{n_3}| > 1$ . Если  $|a_{n_1} - a_{n_3}| > 1$ , то для решения задачи достаточно положить  $n = n_1, m = n_3$ ; если же  $|a_{n_1} - a_{n_3}| \leq 1$ , то  $|a_{n_2} - a_{n_3}| > |a_{n_1} - a_{n_2}| - |a_{n_1} - a_{n_3}| > 1$ , и можно взять  $n = n_2, m = n_3$ .

**2.26.** Если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) > a > 0$ , то для некоторой возрастающей последовательности  $\{n_k\}$   $x_{n_k} - x_{n_k+1} > a$ . Из условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = 0$  следует, что для произвольного  $N$  и  $n > n(N)$  выполняется неравенство  $(x_n - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_{n+2}) < a/N$ , откуда при  $n_k > n(N)$

$$\begin{aligned} x_{n_k+1} - x_{n_k+2} &> (x_{n_k} - x_{n_k+1}) - \frac{a}{N} > a \frac{N-1}{N}, \\ x_{n_k+2} - x_{n_k+3} &> (x_{n_k+1} - x_{n_k+2}) - \frac{a}{N} > a \frac{N-2}{N}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n_k+N-1} - x_{n_k+N} &> \frac{a}{N}. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$x_{n_k} - x_{n_k+N} > a \left( 1 + \frac{N-1}{N} + \dots + \frac{1}{N} \right) > \frac{N}{2} a.$$

Так как  $N$  произвольно, то это противоречит ограниченности  $\{x_n\}$ . Аналогично приводит к противоречию предположение

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) < 0. \text{ Значит, } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) \leq 0$$

и

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) \geq 0, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) = 0.$$

**2.27.** Не следует. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \cos(\pi \log_2 \log_2 n), \quad n > 1$$

( $x_1$  произвольно). Покажем, что если  $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 0$  – целые числа, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_{an^2+bn+c}) = 0$ . Для этого заметим, что при  $n > 1$

$$\begin{aligned} x_n + x_{n^2} &= \cos(\pi \log_2 \log_2 n) + \cos(\pi \log_2 \log_2 n^2) = \\ &= \cos(\pi \log_2 \log_2 n) + \cos(\pi \log_2 \log_2 n + \pi) = 0, \end{aligned}$$

и достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi \log_2 \log_2 (an^2 + bn + c)) - \cos(\pi \log_2 \log_2 n^2)) = 0.$$

Последнее соотношение следует из того, что при  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & \left| \cos(\pi \log_2 \log_2 (an^2 + bn + c)) - \cos(\pi \log_2 \log_2 n^2) \right| \leq \\ & \leq \left| \pi \log_2 \log_2 (an^2 + bn + c) - \pi \log_2 \log_2 n^2 \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \pi \left| \log_2 \log_2 ((a+b+c)n^2) - \log_2 \log_2 n^2 \right| \leq \\
&\leq \pi \left| \log_2 (2 \log_2 n + \log_2 (a+b+c)) - \log_2 (2 \log_2 n) \right| = \\
&= \pi \left| \log_2 \left( 1 + \frac{\log_2 (a+b+c)}{2 \log_2 n} \right) \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

(Мы воспользовались тем, что  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$  при любых  $x$  и  $y$ ).

В то же время  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ , ибо  $|x_n| = 1$  при  $n = 2^{2^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

### 3 НЕПРЕРЫВНОСТЬ

**3.1.** Например,  $y = \left| \operatorname{ctg} \pi x \right| + \left| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x} \right|$ .

**3.2.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда в силу равномерной непрерывности  $f(x)$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любых  $x, y > 0$  при  $|x - y| < \delta$  имеет место  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . В частности, это верно для любых  $x, y$  из  $\delta$ -окрестности нуля, и по критерию Коши  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  существует. Примером равномерно непрерывной на  $(0, +\infty)$  функции, для которой не существует  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ , является  $f(x) = \sin x$ .

**3.3.** Рассмотрим произвольную точку  $(x_0; y_0)$ . По заданному  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta_1 > 0$  так, чтобы при  $|y - y_0| \leq \delta_1$  выполнялось  $|f(x_0, y_0) - f(x_0, y)| < \varepsilon/2$ . Затем в силу непрерывности функции по  $x$  выберем  $\delta_2 > 0$  так, чтобы при  $|x - x_0| \leq \delta_2$  выполнялось  $|f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0 \pm \delta_1)| < \varepsilon/2$ . Без ограничения общности предположим, что  $f(x, y)$  монотонно возрастает по  $y$ . Тогда при  $|x - x_0| \leq \delta_2$ ,  $|y - y_0| \leq \delta_1$  имеем  $f(x, y_0 - \delta_1) \leq f(x, y) \leq f(x, y_0 + \delta_1)$ , причем

$$|f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0)| \leq \\ \leq |f(x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0 \pm \delta_1)| + |f(x_0, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

откуда  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$  и  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $(x_0; y_0)$  по совокупности переменных.

**3.4.** Пусть положение точки на окружности задается углом  $\varphi$  ( $-\infty < \varphi < +\infty$ ) (т.е. каждой точке соответствует бесконечно много значений  $\varphi$ ); тогда функция  $f$  есть  $f(\varphi)$  и непрерывна. Рассмотрим  $g(\varphi) = f(\varphi + \pi) - f(\varphi)$ . Имеем

$$g(\varphi + \pi) = f(\varphi + 2\pi) - f(\varphi + \pi) = f(\varphi) - f(\varphi + \pi) = g(\varphi),$$

и по теореме о среднем функция  $g(\varphi)$  обращается в 0 на отрезке  $[\varphi, \varphi + \pi]$  в некоторой точке  $\varphi^* : f(\varphi^* + \pi) = f(\varphi^*)$ , что и требовалось.

**3.5.** Имеем

$$\frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \\ = \frac{\sqrt{1 - (1 - x + o(x))} - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}}{\sqrt{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}} = \\ = \frac{\sqrt{x + o(x)} - \sqrt{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}}{\sqrt{x + o(\sqrt{x})}} = \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})},$$

что стремится к 1 при  $x \rightarrow +0$ .

**3.6.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы при  $|x - y| < \delta$  ( $x, y \geq 0$ ) выполнялось  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ . Пусть  $\{x_1, \dots, x_k\}$  – конечное множество точек отрезка  $[0, 1]$  такое, что для каждого  $x \in [0, 1]$  найдется такое  $i$ , что  $|x - x_i| < \delta$ . Тогда для любого  $x \geq 0$  существует натуральное  $n$  такое, что  $|x - x_i - n| < \delta$  при некотором  $i$ . Пусть  $|f(x_i + n)| < \varepsilon/2$  при  $n \geq N$  и для всех  $i = 1, \dots, k$ . Тогда при  $x > N + 1$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, k\}$  имеем  $|x - x_i - n| < \delta$ , где  $n \geq N$ , откуда  $|f(x)| \leq |f(x_i + n)| + |f(x) - f(x_i + n)| < \varepsilon$ , так что  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**3.7.** Пусть  $f(t)$  – четная периодическая функция с периодом 2, причем

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq 1/3, \\ \text{линейна на } [1/3, 2/3], \\ 1 & \text{при } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $\varphi(x)$ , определенную на  $[0, 1]$  и такую, что  $\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2^2}f(3^2x) + \frac{1}{2^3}f(3^4x) + \dots$ . Так как  $|f(t)| \leq 1$ , то ряд сходится равномерно и  $\varphi(x)$  непрерывна, причем  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ . Пусть  $y = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots$ , где  $a_i$  суть 0 либо 1, а  $\tilde{\alpha} = (a_1, a_3, a_5, \dots)$  – произвольная последовательность из 0 и 1. Обозначим  $x_{\tilde{\alpha}} = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \frac{2a_2}{3^3} + \dots$ . Тогда нетрудно проверить, что  $\varphi(x_0) = y$ , так что значение  $y$  принимается в континууме точек (ибо различных наборов  $\tilde{\alpha}$  – континуум).

**3.8.** Указанное в условии свойство эквивалентно ограниченности функции  $f(x)$  на интервале  $(0, 1)$ . Действительно, если  $f(x)$  ограничена, то в качестве  $\delta$  можно взять (при любом  $\varepsilon$ ) число  $2 \sup|f| + 1$ . Наоборот, если  $f$  обладает указанным в условии свойством, то положим  $\varepsilon = 1$ . Тогда для любого  $y \in (0, 1)$   $|f(x) - f(y)| < \delta$ , откуда следует ограниченность  $f$ .

Поэтому функции а), в) обладают данным свойством, а б) – нет.

**3.9.** Переобозначая  $x - h$  через  $x$ , имеем

$$|f(x + 2h) - f(x)| \leq h^2.$$

Докажем, что функция  $f$  дифференцируема и  $f'(x) \equiv 0$ . Действительно, при  $h > 0$

$$\left| \frac{f(x + 2h) - f(x)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{2h} = \frac{h}{2} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0+).$$

Точно так же

$$\left| \frac{f(x + 2h) - f(x)}{2h} \right| \leq \frac{h}{2} \quad (h \rightarrow 0+).$$

Поэтому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x = 0, \quad f \equiv \text{const}.$$

**3.10.** Пусть  $x, y$  – произвольные точки на прямой,  $x < y$ . Построим последовательности  $\{x_n\}, \{y_n\}$  следующим образом: точки  $x_n, y_n$  получаются из  $x$  и  $y$  соответственно гомотетией с центром в  $(x + y)/2$  и коэффициентом  $3^n$ . Из такого построения следует, что для любого  $n$  четверка чисел  $x_{n+1}, x_n, y_n, y_{n+1}$  образует арифметическую прогрессию. Следовательно,

$$|f(x_{n+1}) - f(y_{n+1})| \geq \pi |f(x_n) - f(y_n)|.$$

Индукцией по  $n$  отсюда получим

$$|f(x) - f(y)| \leq \pi^{-n} |f(x_n) - f(y_n)|. \quad (1)$$

Пусть точки  $x, y$  лежат в интервале  $(-A, A)$ , где  $A > 0$ . Найдем наибольшее  $n$  такое, что  $x_n, y_n$  лежат в интервале  $(-2A, 2A)$ . Тогда одна из точек  $x_{n+1}, y_{n+1}$  не лежит в  $(-2A, 2A)$ , откуда легко следует, что  $3^{n+1}(y-x)/2 > A$ ,  $n > \log_3(2A/(y-x)) - 1$ . На отрезке  $[-2A, 2A]$  функция  $f$  ограничена, пусть  $|f| \leq M$ . Тогда из (1) имеем

$$|f(x) - f(y)| \leq 2M\pi^{-n} \leq 2M\pi^{1 - \log_3(2A/(y-x))}.$$

Преобразовывая выражение справа, получим

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\log_3 \pi},$$

где  $C = \frac{2\pi M}{(2A)^{\log_3 \pi}}$ . Так как  $\log_3 \pi > 1$ , то из этого неравенства легко

следует  $f'(x) \equiv 0$  на  $(-A, A)$  (см. решение задачи 3.9). Так как интервал  $(-A, A)$  выбран произвольно, то  $f'(x) \equiv 0$   $f(x) = const$ .

Заметим, что число  $\pi$ , в условии задачи можно заменить на любое число, большее чем 3. Условию же  $|f(a) - f(d)| \geq 3|f(b) - f(c)|$  помимо константы удовлетворяет линейная функция (и множество других функций).

**3.11.** Каждая из функций  $\varphi(t), \psi(t)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до 0, когда  $t$  возрастает от 0 до  $+\infty$ . Каждая из них является непрерывной. (Действительно, если, скажем,  $\varphi(t)$  разрывна в некоторой точке, то в силу монотонности  $\varphi$  разрыв является разрывом 1-го рода, откуда следует, что областью определения обратной функции  $\psi$  не может быть  $(0, +\infty)$ .) Поэтому найдется точка  $t \in (0, +\infty)$  такая, что  $\varphi(t) = t$ . Но тогда  $\psi(\varphi(t)) = \psi(t)$ ,  $t = \psi(t)$ ,  $\varphi(t) = \psi(t)$ . Тем самым неравенство  $\varphi(t) > \psi(t)$  не может выполняться при всех  $t > 0$ .

**3.12.** В некоторой точке  $x$   $f(x) > 0$ , поэтому в окрестности этой точки найдется возрастающая арифметическая прогрессия  $a_0, b_0, c_0$  такая, что  $f(a_0) + f(b_0) + f(c_0) > 0$ . Точно так же найдется возрастающая арифметическая прогрессия  $a_1, b_1, c_1$  такая, что  $f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) < 0$ . Для каждого значения параметра  $t \in [0, 1]$  рассмотрим арифметическую прогрессию  $a(t), b(t), c(t)$ , где  $a(t) = a_0(1-t) + a_1t$ ,  $b(t) = b_0(1-t) + b_1t$ ,  $c(t) = c_0(1-t) + c_1t$ . Функция  $F(t) = f(a(t)) + f(b(t)) + f(c(t))$  непрерывно зависит от  $t$ , при  $t = 0$   $F(t) > 0$ , а при  $t = 1$   $F(t) < 0$ . Значит при некотором  $t$   $F(t) = 0$ , и соответствующая прогрессия  $a(t), b(t), c(t)$  является искомой.

**3.13.** Из условия  $f(x) \sim x \ln x$  ( $x \rightarrow \infty$ ) легко следует, что  $\ln f(x) \sim \ln x + \ln \ln x \sim \ln x$ . Поэтому  $f(x) \sim x \ln x \sim x \ln f(x)$ ,  $f(x)/\ln f(x) \sim x$ . Переобозначая  $f(x) = y$ ,  $x = \varphi(y)$ , получим  $\varphi(y) \sim y/\ln y$  ( $y \rightarrow \infty$ ).

**3.14.** Основная трудность в задаче в том, что функции  $f$  и  $g$  могут иметь различные периоды. Пусть период функции  $f$  равен  $T$ . Имеем  $f(x) - g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x+T) - g(x+T) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Вычитая из второго соотношения первое и учитывая, что  $f(x+T) - f(x) = 0$ , получим, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$g(x+T) - g(x) \rightarrow 0.$$

Но функция  $h(x) = g(x+T) - g(x)$  периодическая, так как  $g$  является периодической функцией. Очевидно, периодическая функция может иметь предел 0 на бесконечности, если только она тождественно равна нулю. Следовательно,  $g(x+T) \equiv g(x)$ , т.е. функция  $g$  также имеет период  $T$ . Положим теперь  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Эта функция периодическая (с периодом  $T$ ), стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , следовательно,  $h \equiv 0$ ,  $f \equiv g$ .

**3.15.** Пусть  $x_2 > x_1$ . Докажем, что  $f(x_2)/x_2 \geq f(x_1)/x_1$ . Хорда, соединяющая точки  $O$  и  $A_2$  графика функции  $y = f(x)$  (рис. 3), имеющие

абсциссы  $O$  и  $x_2$  соответственно, лежит выше графика по определению выпуклой вниз функции. В частности, она лежит выше точки  $A_1$  графика, имеющей абсциссу  $x_1$ . Сравнивая угловые коэффициенты прямых  $OA_1$  и  $OA_2$  получим искомое утверждение.

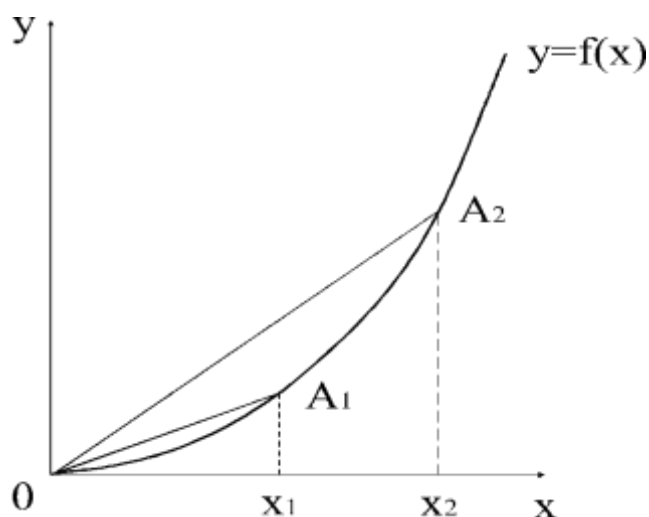


Рисунок 3 – Чертеж к задаче 3.15

**3.16.** График такой функции изображен на рис.4. Возьмем какую-либо строго монотонно возрастающую последовательность  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = 0$ , и определим  $f(x)$  согласно следующим правилам:  $f(a_n) = a_n$ , на каждом отрезке  $[a_n, a_{n+1}]$  график  $f$  состоит из двух прямолинейных отрезков таких, что  $f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) = a_{n+2}$ . Очевидно, построенная функция  $f$  непрерывно доопределяется в точках  $0, 1$ :  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ; в этих точках прообраз состоит из одной точки, а для любой другой точки  $y \in (0, 1)$  прообраз  $y$  состоит из трех точек.

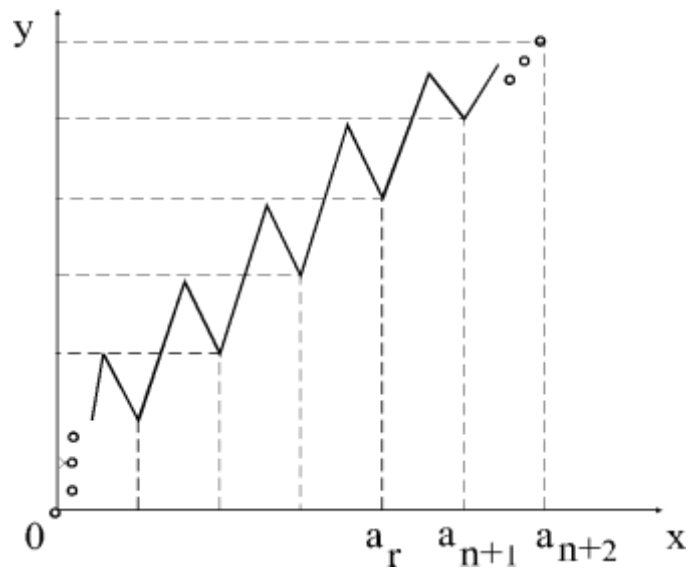


Рисунок 4 – Чертеж к задаче 3.16

**3.17.** Не существует. Предположим противное, что существует непрерывная функция  $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , такая, что при рациональном  $x$   $f(x)$  иррационально, а при иррациональном  $x$   $f(x)$  рационально. Посмотрим, каким может быть множество значений  $f(x)$ . Так как множество рациональных чисел счетно, то образ множества рациональных чисел не более чем счетный. Образ множества иррациональных чисел лежит во множестве рациональных чисел, т.е. опять-таки не более чем счетный. Итак, множество значений  $f$  не более чем счетно. Но множество значений непрерывной функции является промежутком, который состоит из одной точки или континуума точек. Тем самым  $f$  может принимать лишь одно-единственное значение. Однако это противоречит тому, что  $f$  принимает как рациональные, так и иррациональные значения. Значит, такой функции  $f$  не существует.

**3.18.** Условие на функцию  $f$  запишем в таком виде:

$$|f(a) - f(b)| \leq |a - b|, \quad (1)$$

причем равенство достигается только при  $a = b$ .

Обозначим  $f(0) = x$ ,  $f(x) = y$ . Тогда  $f(y) = 0$ . Применяя (1), последовательно находим

$$\begin{aligned} |x-0| &\geq |f(x) - f(0)| = |y-x| \geq |f(y) - f(x)| = \\ &= |0-y| \geq |f(0) - f(y)| = |x-0|. \end{aligned}$$

Поэтому во всех промежуточных неравенствах стоят равенства, откуда следует  $x = y = 0$ , т.е.  $f(0) = 0$ .

## 4 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

**4.1.** Дифференцируя почленно равенство  $f(-x) = -f(x)$ , получаем  $f'(-x) = f'(x)$ . В обратную сторону утверждение неверно, в чем легко убедиться, взяв, например,  $f(x) = x + 1$ .

**4.2.** Имеем  $f(-x) = f(x)$ ,  $-f'(-x) = f'(x)$ , откуда  $f'(0) = 0$ . Далее, по формуле Тейлора  $f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ , откуда видно, что при  $f''(0) > 0$  точка  $x = 0$  – точка локального минимума, а при  $f''(0) < 0$  – точка локального максимума.

**4.3.** Пусть  $f'(0) > 0$  (случай  $f'(0) < 0$  сводится к этому случаю заменой  $f(x)$  на  $-f(x)$ ). Тогда  $f'(1) < 0$ . Так как  $f(x)$  непрерывна на  $[0,1]$ , то существует точка  $x_0 \in [0,1]$ , где  $f(x)$  достигает максимального значения; покажем, что  $x_0 \in (0,1)$ . Так как  $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$ , где  $f'(0) > 0$ , то  $f(x) > f(0)$  для достаточно малых положительных  $x$  и  $x_0 \neq 0$ . Аналогично,  $x_0 \neq 1$ , т.е.  $x_0 \in (0,1)$  и  $f'(x_0) = 0$ .

**4.4.** Пусть уравнение асимптоты  $y = ax + b$ ; рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - ax - b$ . Очевидно,  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $g''(x) = f''(x) > 0$ .

Предположим, что в некоторой точке  $x_0$   $g'(x_0) = c > 0$ . Тогда при  $x > x_0$   $g'(x) > c$ , откуда  $g(x) > g(x_0) + c(x - x_0)$  ( $x > x_0$ ) и нарушается условие  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому всюду  $g'(x) \leq 0$  и  $g(x)$  монотонно не возрастает. Если для некоторого  $x_1$   $g(x_1) = K < 0$ , то при  $x > x_1$   $g(x) \leq K$ , что невозможно из-за  $g(x) \rightarrow 0$ . Поэтому  $g(x) \geq 0$ . При  $g(x_1) = 0$  имеем  $g(x) = 0$  при  $x > x_1$ , что противоречит условию  $g''(x) > 0$ . Таким образом, для любого  $x$   $g(x) > 0$ , что и требовалось.

#### 4.5. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\varphi(h)) - f(\varphi(0))}{h} \right| &= \left| \frac{f\left(h^2 \sin \frac{1}{h}\right) - f(0)}{h} \right| = \\ &= \left| \frac{f\left(h^2 \sin \frac{1}{h}\right) - f(0)}{h^2 \sin \frac{1}{h}} \right| \cdot \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq ch \sin \frac{1}{h} \end{aligned}$$

при  $h \rightarrow 0$ ,  $h \neq 0$ . Поэтому

$$\frac{d}{dx} f(\varphi(x)) \Big|_{x=0} = 0.$$

#### 4.6. Индукцией по $l$ нетрудно установить, что

$$f^{(l)}(x) = x^{k-2l} \left( p(x) \sin \frac{1}{x} + q(x) \cos \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0),$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  – многочлены, причем либо  $p(x)$ , либо  $q(x)$  имеет ненулевой свободный член. Если  $k - 2l \geq 2$  и уже установлено существование  $f^{(l)}(0) = 0$ , то

$$f^{(l+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{k-2l} \left( p(x) \sin \frac{1}{x} + q(x) \cos \frac{1}{x} \right)}{x} = 0$$

существует; при  $k - 2l < 2$  производная  $f^{(l+1)}(0)$  не существует. Непрерывность  $l$ -й производной в нуле имеет место при  $k - 2l > 0$ . Итак,  $f(x)$  дифференцируема в нуле  $[k/2]$  раз и  $[(k-1)/2]$  ее производных непрерывны в нуле.

**4.7.** Пусть  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)$ . Почленно интегрируя, получим

$$\int_0^x g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)) = g(x) - 1.$$

Отсюда видно, что  $g(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $g'(x) = g(x)$  и начальному условию  $g(0) = 1$ , т.е.  $g(x) = e^x$ .

**4.8.** Разлагая  $f(x)$  до члена с  $x^{n+2}$ , находим

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(\theta' x)}{(n+2)!} x^{n+2} \quad (0 < \theta' < 1).$$

С другой стороны,  $f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0) \cdot \theta x + \frac{f^{(n+2)}(\theta'' \theta x)}{2} (\theta x)^2$ , где  $0 < \theta'' < 1$ . Подставляя это в первое соотношение, после упрощения и сокращения на  $x^{n+1}$ , получим

$$\theta \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+2)}(\theta'' \theta x)}{2(n!)} \theta^2 x = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(\theta' x)}{(n+2)!} x,$$

откуда, учитывая  $f^{(n+1)}(0) \neq 0$ , находим, что при  $x \rightarrow 0$   $\theta \rightarrow 1/(n+1)$ .

**4.9.** Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - x^2/2$ . Она дифференцируема на  $[0,1]$ , причем  $g'(x) = f'(x) - x$  при  $x \in [0,1]$ . В частности,  $g'(0) = 1, g'(1) = -1$ . Отсюда следует, что функция  $g$  не может достигать максимума на отрезке  $[0,1]$  в его концах. Значит,  $g$  достигает максимума в некоторой точке  $c \in (0,1)$ ; при этом  $g'(c) = 0$ , следовательно,  $f'(c) = c$ .

**4.10.** Положим  $g(x) = f(x)e^{-x}, x \in [0,1]$ . Так как  $g(0) = g(1) = 0$ , то по теореме Ролля  $g'(x) = 0$  в некоторой точке  $x \in (0,1)$ . Но  $g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x}$ . Значит,  $f(x) = f'(x)$ .

**4.11.** Существует. Например,  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ .

**4.12. а)** Докажем индукцией по  $k \geq 0$  следующее утверждение.

**Обобщенная теорема Ролля.** Если  $f \in C^k[a,b]$  и  $f$  имеет не менее  $(k+1)$  нуля с учетом кратности на  $[a,b]$ , то  $f^{(k)}$  имеет по крайней мере один нуль на  $[a,b]$ .

При  $k=0$  доказывать нечего. Пусть для  $k-1$  утверждение верно, проверим его для  $k$ . Пусть  $x_1, \dots, x_l$  — различные нули функции  $f$  на  $[a,b]$ , имеющие кратности  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  соответственно, причем  $\alpha_1 + \dots + \alpha_l \geq k+1$  и  $x_1 < \dots < x_l$ . Тогда  $f'(x)$  имеет в точке  $x_j$  нуль кратности  $\alpha_j - 1$  (если  $\alpha_j > 1$ ) и, кроме того, по теореме Ролля еще по крайней мере  $l-1$  нуль на интервалах  $(\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 1, \dots, l-1$ .

Общее число нулей  $f'(x)$  на  $[a,b]$  не меньше

$$\sum_{j=1}^l (\alpha_j - 1) + l - 1 \geq k - l + 1 + l - 1 = k.$$

Теперь остается применить предположение индукции для  $k-1$  к  $f'$ . Теорема доказана.

Обозначим теперь через  $x_1, \dots, x_n$   $n$  нулей функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ ; при этом среди чисел  $x_1, \dots, x_n$  могут быть совпадающие, нуль  $f$  может встречаться в этом наборе  $s$  раз, если его кратность не меньше  $s$ . Пусть  $x_0$  – произвольная точка из  $[a, b]$ , отличная от  $x_1, \dots, x_n$ .

Рассмотрим многочлен степени  $n$ :

$$P(x) = f(x_0) \frac{\prod_{j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1}^n (x_0 - x_j)}$$

и положим  $g(x) = f(x) - P(x)$ . Функция  $g(x)$  имеет своими нулями числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; при этом если какое-то число  $x_j$  ( $j \geq 1$ ) входит в набор  $\{x_1, \dots, x_n\}$   $s$  раз, то кратность нуля  $x_j$  не меньше  $s$ . Поэтому к функции  $g(x)$  применима обобщенная теорема Ролля, согласно которой  $g^{(n)}$  имеет хотя бы один нуль  $x'$  на  $[a, b]$ . Имеем

$$0 = g^{(n)}(x') = f^{(n)}(x') - P^{(n)}(x') = f^{(n)}(x') - \frac{n! f(x_0)}{\prod_{j=1}^n (x_0 - x_j)},$$

откуда следует, что

$$|f(x_0)| = \frac{\left| f^{(n)}(x') \right| \prod_{j=1}^n |x_0 - x_j|}{n!} \leq \frac{\left| f^{(n)}(x') \right| \cdot (b-a)^n}{n!} \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n)}(x) \right|.$$

Так как  $x_0$  произвольно, то

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n)}(x) \right|.$$

б) В силу п. а)  $\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq 1/2$ . Значение  $1/2$  достигается, например, для  $f(x) = x^2/2$ .

**4.13.** а) Если существует  $f'(x)$ , то

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x) + f'(x)h + o(h)) - 2f(x) + (f(x) - f'(x)h + o(h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0. \end{aligned}$$

б) Пусть  $x_1$  – некоторая точка интервала. Если отношение  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$  постоянно при  $x > x_1$ , то функция  $f(x)$  дифференцируема во всех точках  $x > x_1$ . В противном случае найдутся такие точки  $x_2$  и  $x_3$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$  что

$$u_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = u_3.$$

Можно считать, что  $u_2 < u_3$ . Докажем, что для любого  $u' \in (u_2, u_3)$  найдется точка  $x \in (x_1, x_3)$ ,  $x = x(u')$ , такая, что  $f'(x) = u'$ . При этом различным точкам  $u' \in (u_2, u_3)$  будут сопоставлены различные точки дифференцируемости  $f(x)$ , и несчетность последних будет доказана.

Каждой точке  $u' \in (u_2, u_3)$  сопоставим такое число  $x' \in (x_2, x_3)$ , что  $u' = \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1}$ . Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - (f(x_1) + u'(x - x_1))$ .

Имеем  $g(x_1) = g(x') = 0$ ,  $g(x_2) < 0$ . Пусть  $x$  точка отрезка  $[x_1, x']$ , в которой  $g$  достигает минимума. Тогда если  $x+h \in [x_1, x']$  и  $x-h \in [x_1, x']$ , то  $g(x+h) - g(x) \geq 0$ ,  $g(x-h) - g(x) \geq 0$  и

$$(g(x+h) - g(x)) + (g(x-h) - g(x)) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = o(h)$$

$(h \rightarrow 0)$ , поэтому  $g(x+h) - g(x) = o(h)$ , т.е.  $f(x+h) = f(x) + u'h + o(h)$ , или  $f'(x) = u'$ .

в) Рассмотрим на  $(-1, 1)$  функцию  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Она дифференцируема и, следовательно, является гладкой во всех точках  $x \neq 0$ . В точке  $x = 0$  функция  $f$  недифференцируема, однако и в этой точке она является гладкой, так как  $f(h) - 2f(0) + f(-h) = 0$  при любом  $h \in (-1, 1)$ .

**4.14.** При  $x \neq 0$  имеем

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y) dy = \int_0^1 f'(tx) x dt,$$

откуда

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \int_0^1 f'(tx) dt.$$

Очевидно, интеграл в правой части является бесконечно дифференцируемой функцией  $x$  при любом действительном  $x$ . Следовательно, функция  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ , определенная первоначально при  $x \neq 0$ , доопределяется до бесконечно дифференцируемой при всех  $x$  функции.

## 5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ

**5.1.** По условию  $e^{-\int_0^{\infty} f(t) dt} = f(x)$ , или  $\int_0^{\infty} f(t) dt = -\ln f(x)$ . Дифференцируя,

находим  $f'(x) = -(f(x))^2$ , причем  $f(0) = e^0 = 1$ . Отсюда  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

**5.2.** Так как  $f(x)$  интегрируема на  $[0,1]$ , то при любом выборе точек  $\xi_i$ ,  $\frac{i-1}{n} \leq \xi_i \leq \frac{i}{n}$ , сумма  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$  стремится к  $\int_0^1 f(x)dx$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если же на любом отрезке  $[a,b]$  существует точка, в которой  $f(x) \leq 0$ , то точки  $\xi_i$  можно выбирать так, что  $f(\xi_i) \leq 0$ ; при этом суммы  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$  будут неположительны, и их предел не может быть положительной величиной.

**5.3.** Пусть тор получается вращением окружности  $y = d \pm \sqrt{R^2 - x^2}$  относительно оси  $Ox$ ; тогда его объем равен

$$\begin{aligned} & \pi \int_{-R}^R \left( d + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-R}^R \left( d - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \\ & = 4\pi d \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\pi d R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 2\pi^2 d R^2. \end{aligned}$$

**5.4.** Сделаем замену переменной  $x^2 = y$ ; тогда

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \right).$$

Сделав во втором интеграле замену  $z + \pi = y$ , преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left( \frac{\sin y}{\sqrt{y}} - \frac{\sin y}{\sqrt{y + \pi}} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin y \left( \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y + \pi}} \right) dy,$$

что положительно, так как подынтегральная функция положительна на  $(0, \pi)$ .

**5.5.** Из непрерывности и выпуклости  $f(x)$  следует, что  $f(x) \leq \frac{f(a)(b-x) + f(b)(x-a)}{(b-a)}$  при  $x \in [a, b]$ . Отсюда получается правое неравенство. Для доказательства левого неравенства делаем замену переменной  $x = (a+b)/2 + t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) dt = \\ &= \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[ f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \right] dt \geq \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt = \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

**5.6.** Имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = J_1 + J_2.$$

Сделаем в первом интеграле замену  $x = 1/y$ , тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})} \\ J_1 + J_2 &= \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \end{aligned}$$

что не зависит от  $\alpha$ .

**5.7.** В качестве такой функции можно взять, например, функцию  $e^{-x} + h(x)$ , где  $h(x)$  – функция, равная нулю вне отрезков  $\left[ k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2} \right]$  ( $k = 2, 3, \dots$ ), равная единице при  $x = 2, 3, \dots$  и линейная на отрезках  $\left[ k - \frac{1}{k^2}, k \right]$  и  $\left[ k, k + \frac{1}{k^2} \right]$ .

**5.8.** Сходимость интеграла эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(\pi n+t)^\alpha \sin^2 t}.$$

Члены  $a_n$  этого ряда оцениваются

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(\pi(n+1))^\alpha \sin^2 t} \leq a_n \leq \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(\pi n)^\alpha \sin^2 t},$$

но

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+b^2 \sin^2 t} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+b^2 \sin^2 t} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+(b^2+1)y^2} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2+1}} \quad (y = \operatorname{tg} t).$$

Отсюда  $a_n \sim cn^{-\alpha/2}$ , т.е. интеграл сходится при  $\alpha > 2$  и расходится при  $\alpha \leq 2$ .

**5.9.** Обозначим  $A = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ ,  $A = |f(x_0)|$ . При  $p > 0$  имеем

$$\left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_0^1 A^p dx \right)^{1/p} = A.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ ; выберем  $\delta > 0$  так, что при  $|x - x_0| < \delta$   $|f(x_0)| \geq A - \frac{\varepsilon}{2}$ ; пусть  $0 \leq \alpha \leq x_0 \leq \beta \leq 1$  и  $0 < |\alpha - \beta| < \delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\geq \left( \int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left( \int_\alpha^\beta \left( A - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \left( A - \frac{\varepsilon}{2} \right) (\beta - \alpha)^{1/p} \geq A - \varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно больших  $p$ . Таким образом, искомый предел равен  $A$ .

**5.10.** Если  $f(x)$  удовлетворяет указанному условию, то для любого многочлена  $p(x)$  степени не выше  $N$  имеет место равенство  $\int_a^b p(x)f(x)dx = 0$ .

Пусть  $c_1, \dots, c_m$  — все нули  $f(x)$  на  $[a, b]$ , причем  $m \leq N$ ;  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$ . Выделим из них те точки  $c_{i_1}, \dots, c_{i_r}$  ( $i_1 < \dots < i_r$ ;  $r \leq m$ ), где  $f(x)$  меняет знак; тогда без ограничения общности  $f(x) \geq 0$  на  $[a, c_{i_1}]$ ,

$f(x) \leq 0$  на  $[c_{i_1}, c_{i_2}]$  и т.д. Пусть  $p(x) = \prod_{k=1}^r (c_{i_k} - x)$ ; тогда  $p(x)f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$  и

$p(x)f(x) > 0$  на каждом интервале  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_m, b)$ , так что  $\int_a^b p(x)f(x)dx > 0$ , хотя  $\deg p = r \leq N$  — противоречие.

**5.11.** Пусть  $\alpha \in (a, b)$ ,  $\varepsilon_k > 0$ , причем  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $\alpha + \varepsilon_k < b$

( $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда  $\left| \int_\alpha^{\alpha + \varepsilon_k} f(x)dx \right| \leq M\varepsilon_k^{1+\delta}$  и по теореме о среднем

$\int_\alpha^{\alpha + \varepsilon_k} f(x)dx = \varepsilon_k f(\alpha_k)$  при  $\alpha_k \in (\alpha, \alpha + \varepsilon_k)$ , откуда  $|f(\alpha_k)| \leq M\varepsilon_k^\delta$  и  $|f(\alpha_k)| \leq M\varepsilon_k^\delta$

при  $k \rightarrow \infty$ , что в силу непрерывности  $f(x)$  и  $\alpha_k \rightarrow \alpha$  дает  $f(\alpha) = 0$ , т.е.  $f(x) \equiv 0$  на  $(a, b)$ . Очевидно, что тогда  $f(x) \equiv 0$  и на  $[a, b]$ .

**5.12.** Так как  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ , то искомый интеграл равен

$$\sqrt{2} \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2\sqrt{2}.$$

**5.13.** Идея решения состоит в том, чтобы разложить подынтегральную функцию в ряд и проинтегрировать его почленно. Имеем

$$\ln x \ln(1-x) = \ln x \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln xx^n}{n}. \quad (1)$$

Каждый член полученного ряда легко проинтегрировать по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\frac{\ln xx^n}{n} dx &= -\frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 \ln x d(x^{n+1}) = -\frac{1}{n(n+1)} (\ln 1 \cdot 1^{n+1} - \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x \cdot x^{n+1}) + \\ &+ \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 x^{n+1} d(\ln x) = \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы убедиться в законности почленного интегрирования ряда (1), нужно показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $m_0 \in \mathbf{N}$ , что

$$\left| \int_0^1 \ln x \left( \ln(1-x) + \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n} \right) dx \right| < \varepsilon \quad (3)$$

при всех  $m \geq m_0$ .

По заданному  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta \in (0, 1/2)$  такое, что

$$\left| \left( \int_{\delta}^{\delta} + \int_{0}^{0} \right) \ln x \ln(1-x) dx \right| < \varepsilon/2.$$

Учитывая неравенства

$$\ln(1-x) < \ln(1-x) + \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n} < 0,$$

мы получаем

$$\left| \left( \int_{\delta}^{\delta} + \int_{0}^{0} \right) \ln x \left( \ln(1-x) + \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n} \right) dx \right| < \varepsilon/2. \quad (4)$$

Так как на отрезке  $[\delta, 1-\delta]$  функция  $\ln x \left( \ln(1-x) + \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n} \right)$  равномерно сходится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ , то при достаточно большом  $m$

$$\left| \int_{\delta}^{1-\delta} \ln x \left( \ln(1-x) + \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n} \right) dx \right| < \varepsilon/2.$$

Складывая полученное неравенство и (4), получаем требуемое неравенство (3) для всех  $m \geq m_0$ .

Почленно интегрируя (1) с учетом (2), мы находим значение данного интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

**5.14.** Сделав замену  $x - \pi = y$ , найдем, что данный интеграл равен  $\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin y + ny + n\pi) dy = (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin y + ny) dy = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна.

**5.15.** Каждый из интегралов  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^n}{\cos^2 x} dx$  при нечетном  $n$  равен нулю в

силу нечетности подынтегральной функции. Следовательно, искомый интеграл равен

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = 2.$$

**5.16.** Так как при  $0 \leq x < 1$  последовательность функций  $\{x^n\}$  монотонно стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos x^n dx = 1.$$

Найдем теперь  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \cos x^n dx$ . Для этого в интеграле сделаем замену  $x^n = y$ .

Имеем

$$\int_1^{\pi} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \int_1^{\pi^n} \cos y \frac{dy}{y^{1-1/n}} = \frac{1}{n} \int_1^{\pi^n} \frac{d \sin y}{y^{1-1/n}} = \frac{\sin y}{ny^{1-1/n}} \Big|_1^{\pi^n} + \frac{n-1}{n^2} \int_1^{\pi^n} \sin y \frac{dy}{y^{2-1/n}}.$$

Легко видеть, что при  $n \rightarrow \infty$  неинтегральные члены стремятся к нулю, а интеграл оценивается так:

$$\left| \frac{n-1}{n^2} \int_1^{\pi^n} \sin y \frac{dy}{y^{2-1/n}} \right| \leq \frac{n-1}{n^2} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{1.5}} = \frac{2(n-1)}{n^2} \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\pi^n} \cos x^n dx = 0$ .

Ответ:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \cos x^n dx = 1$ .

**5.17.** Разобьем данный интеграл на два слагаемых: первое – интеграл по отрезку  $[0, 1]$ , а второе – по  $[-1, 0]$ . Сделав во втором интеграле замену  $x \rightarrow -x$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} &= \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} + \int_0^1 \frac{dx}{(e^{-x} + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} \right) \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались очевидным тождеством

$$\frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1.$$

Ответ: данный интеграл равен  $\pi/4$ .

**5.18.** При  $x \in (0, \pi/2]$  функция  $\sin x/x$  монотонно убывает, поэтому при

$0 < x \leq 1$   $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin 1}{1} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$ . Так как

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} / \frac{\pi}{3} > 0,8, \quad \text{то } 1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq 0,8.$$

Поэтому, учитывая, что  $\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,72$ , получим

$$1,72 \geq \int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 e^x \frac{\sin x}{x} dx \geq 0,8 \int_0^1 e^x dx \geq 0,8 \cdot 1,7 = 1,36.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 e^x \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1,72 + 1,36}{2} = 1,54$$

с ошибкой не больше, чем  $(1,72 - 1,36)/2 = 0,18$ .

**5.19.** Эллипс можно задать параметрически формулами

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

где  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тогда для длины эллипса имеем

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2 + y^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt. \quad (1)$$

Оценивая интеграл в (1) по неравенству Коши – Буняковского, получим,

$$l^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) dt = 2\pi^2 (a^2 + b^2), \quad \text{откуда} \quad l \leq \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Для

получения оценки снизу воспользуемся следующим вариантом неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\sqrt{a^2 \tau + b^2 (1 - \tau)} \geq a\tau + b(1 - \tau), \quad (2)$$

где  $\tau \in [0, 1]$ . В частности, при  $\tau = 1/2$  получаем обычное неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным. Доказывается (2) следующим образом. Замечая, что  $a\tau + b(1 - \tau) = (a\sqrt{\tau})\sqrt{\tau} + (b\sqrt{1 - \tau})\sqrt{1 - \tau}$ , и

пользуясь неравенством Коши – Буняковского, получим  $(a\tau + b(1-\tau))^2 \leq (a^2\tau + b^2(1-\tau))(\tau + (1-\tau)) = a^2\tau + b^2(1-\tau)$ .

Полагая в (2)  $\tau = \sin^2 t$ , из (1) получим

$$l \geq \int_0^{2\pi} (a \sin^2 t + b \cos^2 t) dt = \pi(a + b).$$

**5.20.** Возьмем какие-либо числа  $p, q$  так, что  $p > 0, q > 0, pq = a$ , и разобьем подграфик функции  $s = \varphi(t)$  на три части, как показано на рис.5.

Обозначим площади этих частей буквами  $I, P, Q$  (рис. 5). Очевидно,  $P = \int_p^\infty \varphi(t) dt, Q = \int_q^\infty \psi(s) ds, I = a - P - Q$ . Пользуясь неравенством Коши – Буняковского, имеем

$$\int_0^\infty \psi^2(s) ds \geq \int_0^q \psi^2(s) ds \geq \frac{1}{q} \left( \int_0^q \psi(s) ds \right)^2 = \frac{1}{q} (I + P)^2.$$

Следовательно, используя аналогичное неравенство для функции  $\varphi$ , получим

$$\int_0^\infty \varphi^2 dt + \int_0^\infty \psi^2 ds \geq \frac{(I + Q)^2}{p} + \frac{(I + P)^2}{q} \geq \frac{2}{\sqrt{pq}} (I + Q)(I + P).$$

Здесь мы воспользовались неравенством  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ . Далее имеем

$$\frac{2}{\sqrt{pq}} (I + Q)(I + P) = \frac{2}{\sqrt{a}} (QP + I(I + Q + P)) = \frac{2}{\sqrt{a}} (QP + aI).$$

Очевидно, изменяя значения  $p$  и  $q$ , можно добиться того, что  $P = Q$ , т.е. каждая из площадей  $P, Q$  равна  $(a - l)/2$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} \varphi^2 dt + \int_0^{\infty} \psi^2 ds \geq \frac{2}{\sqrt{a}} \left( \frac{(a-I)^2}{4} + aI \right) = \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{(a+I)^2}{4} \geq \frac{1}{2} a^{3/2},$$

что и требовалось доказать.

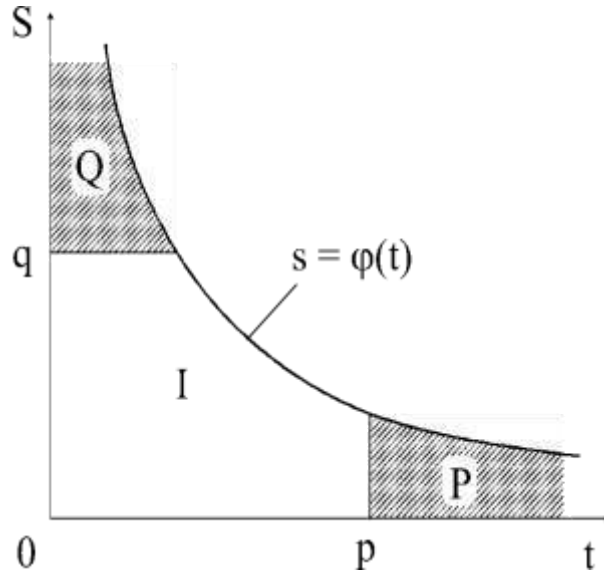


Рисунок 5 – Чертеж к задаче 5.20

**Замечание.** Очевидно, константа  $1/2$  в доказанном неравенстве достаточно грубая. Предлагаем читателю найти более точную константу и подумать над обобщением этой задачи, например, в следующем направлении: оценить снизу сумму

$$\int_0^{\infty} \varphi^{\alpha} dt + \int_0^{\infty} \psi^{\beta} ds, \text{ если } \int_0^{\infty} \varphi dt = \int_0^{\infty} \psi ds = a.$$

**5.21.** Если функция  $f$  ограничена сверху, то подынтегральная функция ограничена снизу положительным числом, и расходимость интеграла очевидна. Пусть  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , т.е. найдется последовательность  $x_k \rightarrow \infty$ , такая, что  $f(x_k) \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{f} dx \geq \int_0^{x_k} \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{f} dx \geq \int_0^{x_k} \frac{f'}{f} dx = \ln f(x_k) - \ln f(0) \rightarrow \infty$$

при  $k \rightarrow \infty$ , откуда и следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{f} dx = \infty.$$

**5.22.** Рассмотрим два случая.

1-й случай: для любого  $a \in \mathbf{R}$

$$\int_a^{\infty} f^2(x) dx \leq f(a). \text{ Обозначив } F(x) = \int_x^{\infty} f^2(t) dt,$$

$$\text{имеем } F'(x) = -f^2(x) \leq -\left(\int_x^{\infty} f^2(t) dt\right)^2, F'(x) \leq -F^2(x).$$

Выведем из этого неравенства, что  $F \equiv 0$ , и тогда  $f \equiv 0$  (заметим, что в первом случае мы не пользуемся данным в задаче неравенством). Если  $F \neq 0$ , то хотя бы в одной точке  $x_0$   $F(x_0) > 0$ . Тогда при  $x < x_0$  также  $F(x) > 0$ .

Проинтегрируем неравенство

$$F'(t)/F^2(t) \leq -1$$

по отрезку  $[x, x_0]$ , получим

$$-\frac{1}{F(t)} \Big|_x^{x_0} \leq -(x_0 - x),$$

$$\frac{1}{F(x)} \leq \frac{1}{F(x_0)} - (x_0 - x),$$

$$F(x) \geq \frac{1}{\frac{1}{F(x_0)} - (x_0 - x)}.$$

Но отсюда следует, что если  $x \rightarrow x_0 - 1/F(x_0)$  справа, то  $F(x) \rightarrow \infty$ . Противоречие.

2-й случай: для некоторого  $a \in \mathbb{R}$   $\int_a^\infty f^2(x)dx > f(a)$ . Тогда найдется столь большое число  $B$ , что при  $x \geq B$

$$\int_a^x f^2(t)dt > f(a).$$

Пользуясь неравенством  $f(x) + f(a) \geq \int_a^x f^2(t)dt$ , получим

$$f(x) \geq \int_a^x f^2(t)dt - f(a) > 0.$$

Положим  $F(x) = \int_a^x f^2(t)dt - f(a)$ . Тогда  $F'(x) = f^2(x) \geq F^2(x)$ . Так же, как в предыдущем случае, из неравенства  $F'(x) \geq F^2(x)$  при  $x \geq B$  находим

$$-\frac{1}{F(t)} \Big|_x^B \geq x - B,$$

$$F(x) \geq \frac{1}{\frac{1}{F(B)} + B - x},$$

откуда  $F(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow B + 1/F(B)$  слева. Полученное противоречие завершает доказательство.

**5.23.** Решение основано на неравенстве Коши – Буняковского; при  $A > B > 0$  имеем

$$\int_0^B u(x) dx \int_A^B \frac{dx}{u(x)} \geq \left( \int_A^B \sqrt{u(x) \frac{1}{u(x)}} dx \right)^2 = (B - A)^2.$$

Положив  $A = 2B$ , получим

$$\frac{1}{B^2} \int_B^{2B} u(x) dx \int_B^{2B} \frac{dx}{u(x)} \geq 1.$$

Так как  $\int_B^{2B} \frac{dx}{u(x)} \rightarrow 0$  при  $B \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{1}{B^2} \int_B^{2B} u(x) dx \rightarrow \infty,$$

откуда и получим искомое утверждение.

**Замечание.** Можно доказать, что если  $F(A) = \int_0^A u(x) dx$ , то  $\int_1^\infty \frac{tdt}{F(t)} < \infty$ .

Отсюда, в частности, следует, что при  $\int_0^\infty \frac{dx}{u(x)} < \infty$  выполняется

$$\overline{\lim}_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A^2 \ln A} \int_0^A u(x) dx = \infty.$$

**5.24.** Положим  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Тогда для целого  $n$  имеем

$$F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_0^1 f(x+n) dx = 0.$$

Так как  $F(0) = 0$ , то  $F(n) = 0$  для всех целых  $n$  и при этом

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{F(x)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow n} \frac{F(x) - F(n)}{x - n} \lim_{x \rightarrow n} \frac{x - n}{\sin \pi x} = f(n) \frac{(-1)^n}{\pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Поэтому функция

$$g(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{\sin \pi x}, & x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) \cdot \frac{(-1)^x}{\pi}, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

непрерывна и удовлетворяет тождеству  $F(x) \equiv g(x) \sin \pi x$ , т.е.

$$f(x) = \frac{d}{dx} (g(x) \sin \pi x).$$

## 6 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

**6.1.** Обозначим  $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ . Так как при  $x > 1$

$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ , то  $f(x)$  определена для указанных значений  $x$ , причем

непосредственно проверяется, что  $f'(x) \equiv 0$ . Так как, с другой стороны,

$$f(\sqrt{3}) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ то тождество доказано.}$$

**6.2.** Если всюду  $f(x) \neq x$ , то, в силу непрерывности, либо везде  $f(x) > x$ , либо  $f(x) < x$ . В первом случае  $f(f(x)) > f(x) > x$ , во втором  $f(f(x)) < f(x) < x$  и в обоих случаях равенство  $f(f(x)) = x$  невозможно.

**6.3.** При  $a \leq 0$  решений нет. При  $a > 0$  перепишем уравнение в виде  $e^x/x^2 = a$  и исследуем функцию  $f(x) = x^{-2}e^x$ . Имеем  $f'(x) = e^x(x-2)x^{-3}$ , так что  $f(x)$  возрастает от 0 до  $+\infty$  на промежутке  $(-\infty, 0)$ , убывает от  $+\infty$  до  $e^2/4$  на промежутке  $(0, 2]$  и возрастает от  $e^2/4$  до  $+\infty$  на  $[2, +\infty)$ . Следовательно, при  $0 < a < e^2/4$  имеется один корень, при  $a = e^2/4$  – два корня и при  $a > e^2/4$  – три корня.

**6.4.** Рассмотрим функцию  $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$ . Имеем  $f(0) = 0$ , так что достаточно доказать, что  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$ . Но  $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ , т.е.  $f'(x) > 0$  тогда и только тогда, когда  $g(x) = (1+x)f'(x) = e^x + xe^x - 1 > 0$  (при  $x > 0$ ). Далее имеем  $g(0) = 0$  и снова рассматриваем  $g'(x) = 2e^x + xe^x$ , что положительно при  $x > 0$ , так что  $g(x) > 0$  вместе с  $f(x) > 0$ .

**6.5.** Достаточно доказать, что  $\sin^3 x (\cos x)^{-1} \geq x^3$  при  $0 < x < \pi/2$ . При  $x = 0$  имеет место равенство, так что достаточно доказать, что  $(\sin^3 x \cos^{-1} x)' \geq 3x^2$ . Но  $(\sin^3 x \cos^{-1} x)' = 2 \sin^2 x + (\cos x)^{-2} - 1$ , и при  $x = 0$  снова имеем равенство. Дифференцируя далее аналогичным образом до тех пор, пока в правой части неравенства не возникнет 0, получим неравенство

$$-8 \sin 2x - 8 \sin x \cos^{-3} x + 24 \sin x \cos^{-5} x \geq 0.$$

Сокращая на  $\sin x$ , получим  $24 \cos^{-5} x - 8 \cos^{-3} x - 16 \cos x \geq 0$ , что очевидно верно, ибо  $\cos^{-5} x > \cos^{-3} x > \cos x$  в рассматриваемом промежутке.

**6.6.** Обозначим  $J = \int_0^u e^{-x^2/2} dx$ , тогда  $4J^2 = \int_{-u}^u \int_{-u}^u e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ . Переходя к

полярным координатам и интегрируя сначала по кругу радиуса  $u$ , расположенному внутри квадрата  $-u \leq x \leq u$ ,  $-u \leq y \leq u$ , а затем по кругу радиуса  $u\sqrt{2}$ , содержащему внутри себя этот квадрат, получим

$$2\pi \int_0^u e^{-r^2/2} r dr < 4J^2 < 2\pi \int_0^{u\sqrt{2}} e^{-r^2/2} r dr,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

**6.7.** Обозначим  $\varphi(y) = \frac{\alpha-1}{\alpha} y + \frac{1}{\alpha} \frac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}$ ; тогда  $\varphi'(y) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \left( 1 - \left( \frac{x}{y} \right)^\alpha \right)$ .

Заметим, что при  $\alpha=1$   $\varphi(y) \equiv x$ . Пусть  $\alpha < 1$ . Тогда при  $y < x$   $\varphi'(y) > 0$ ; при  $y = x$   $\varphi'(y) = 0$  и при  $y > x$   $\varphi'(y) < 0$ . Поэтому  $y = x$  – точка максимума для  $\varphi(y)$  и, так как  $\varphi(x) = x$ , неравенство  $x \leq \varphi(y)$  при  $y \neq x$  нарушается. Пусть теперь  $\alpha > 1$ . Тогда при  $y < x$   $\varphi'(y) < 0$ ; при  $y > x$   $\varphi'(y) > 0$ , и  $y = x$  – точка минимума для  $\varphi(y)$ , т.е. неравенство  $x \leq \varphi(y)$  выполнено для всех  $x, y > 0$ . Таким образом, искомое множество значений  $\alpha$  есть  $[1, +\infty)$ .

**6.8.** Пусть  $N > 10000(b-a)$ . Имеем  $\int_a^b \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_N^2(x) dx = N$ , так что по

теореме о среднем для некоторого  $x \in (a, b)$   $\varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_N^2(x) = \frac{N}{a-b}$ . Пусть

$$c_i = \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{\varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_N^2(x)}}, \text{ тогда } \sum_{i=1}^N c_i^2 = 1, \text{ причем}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) \right| &= \left| \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i^2(x)}{\sqrt{\varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_N^2(x)}} \right| = \\ &= \sqrt{\varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_N^2(x)} = \sqrt{\frac{N}{a-b}} > \sqrt{10000} = 100. \end{aligned}$$

**6.9.** После двойного логарифмирования неравенство приводится к виду

$\ln \ln a + a \ln b > \ln \ln b + b \ln a$  или, если обозначить  $x = \frac{\ln a}{\ln b} > 1$ ,  $y = \ln b > 0$ , к

виду  $\ln x > y(xe^y - e^{xy})$ . Пусть  $\varphi(x, y) = xe^y - e^{xy}$ , тогда  $\varphi'_y(x, y) = xe^y - xe^{xy} < 0$ ,

так что  $\varphi(x, y) < \varphi(x, 0) = x - 1$ . Если  $\varphi(x, y) \leq 0$ , то  $\ln x > y\varphi(x, y)$ . Пусть  $\varphi(x, y) > 0$ . Тогда  $\varphi(x, y) = e^y(x - e^{(x-1)y}) > 0$  и  $(x-1)y < \ln x$ , т.е. снова  $\ln x > (x-1)y > y\varphi(x, y)$ .

**6.10.** Складывая все уравнения системы, получим

$$(1 + 2 + \dots + n)(x_1 + \dots + x_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

откуда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{2(a_1 + \dots + a_n)}{n(n+1)}.$$

Вычитая из  $k$ -го уравнения  $(k+1)$ -е (в случае  $k=n$  вычитаем из  $n$ -го уравнения первое), имеем  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - nx_k = a_k - a_{k+1}$ , откуда

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{2(a_1 + \dots + a_n)}{n^2(n+1)} - \frac{a_k - a_{k+1}}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_n &= \frac{2(a_1 + \dots + a_n)}{n^2(n+1)} - \frac{a_n - a_1}{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Проверим, что формулы (1) действительно определяют решение. Для этого достаточно доказать существование решения, т.е. доказать, что определитель системы не равен нулю. В свою очередь это будет следовать из того, что система с нулевой правой частью имеет единственное нулевое решение. Действительно, в случае  $a_1 = a_2 = \dots = 0$  из (1) получим  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

**6.11.** Предположим сначала, что данная система имеет решение  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , в котором все числа  $z_1, z_2, \dots, z_n$  различны и не равны нулю. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно новых неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :





Доказательство поведем индукцией по  $n$ . Основание индукции при  $n = 1$  очевидно. Чтобы сделать индуктивный переход от  $n - 1$  к  $n$ , положим  $a'_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}/a_n$ . Тогда левая часть в (1) будет иметь вид цепной дроби с меньшим числом знаменателей, по предположению индукции она равна  $P'_{n-1}/Q'_{n-1}$ , где

$$P'_{n-1} = a'_{n-1}P_{n-2} + b_{n-2}P_{n-3}, \quad Q'_{n-1} = a'_{n-1}Q_{n-2} + b_{n-2}Q_{n-3}.$$

Подставляя значение  $a'_{n-1}$ , легко найдем

$$\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}} = \frac{(a_{n-1}P_{n-2} + b_{n-2}P_{n-3}) + \frac{b_{n-1}}{a_n}P_{n-2}}{(a_{n-1}Q_{n-2} + b_{n-2}Q_{n-3}) + \frac{b_{n-1}}{a_n}Q_{n-2}} = \frac{a_n P_{n-1} + b_{n-1}P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + b_{n-1}Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n},$$

что и требовалось доказать.

Применим лемму к последовательности  $a_n = 2n - 1$ ,  $b_n = -n^2$ ,  $n \leq 1$ ,  $b_0 = 1$ . Вычисляя  $P_n$  и  $Q_n$  согласно лемме, индукцией по  $n$  легко получим  $Q_n = n!$ ,  $P_n = (1 + 1/2 + \dots + 1/n)n!$ , откуда и следует, что данная в условии задачи цепная дробь равна  $1 + 1/2 + \dots + 1/n$ .

**6.13.** Существование  $a_n$  эквивалентно тому, что  $\underbrace{\ln \ln \dots \ln n}_{n-1} > 0$ , что в свою очередь эквивалентно тому, что  $\underbrace{\ln \ln \dots \ln n}_{n-2} > 1$ , или же

$\underbrace{\ln \ln \dots \ln n}_{n-3} > e$ ,  $\underbrace{\ln \ln \dots \ln n}_{n-4} > e^e$ , и т.д. В конце концов получим  $n > e^{e^{\dots e}}$ , где

число  $e$  повторяется  $n - 2$  раза. При  $n \leq 3$  это условие выполняется, а уже при  $n = 4$ , очевидно,  $4 < e^e$ . Тем более рассматриваемое условие не будет выполняться и при  $n > 4$ . Для аккуратного доказательства достаточно заметить, что  $e^x \geq 1 + x$ ,  $e^{e^e} \geq 1 + e^e > 5$ ,  $e^{e^{e^e}} > 6$  и т.д.

Ответ: существуют три члена последовательности  $\{a_n\}$ .

**6.14.** Рассмотрим функцию  $f(t) = (1+tx)^{1+1/t}$ . Очевидно,  $a_n = f(1/n)$ . Выясним сначала, как ведет себя  $f(t)$  при  $t \rightarrow 0+$ . Для этого найдем ее логарифмическую производную:

$$\frac{f'}{f} = (\ln f)' = \frac{1}{t^2} \left( -\ln(1+xt) + \frac{xt(1+t)}{1+xt} \right).$$

Разлагая каждое слагаемое по формуле Тейлора, получим

$$\frac{xt(1+t)}{1+xt} = xt + x(1-x)t^2 - x^2(1-x)t^3 + o(t^3), \quad (1)$$

$$\ln(1+xt) = xt - \frac{x^2}{2}t^2 + \frac{x^3}{3}t^3 + o(t^3). \quad (2)$$

Сравним коэффициенты при равных степенях  $t$ . Если

$$x(1-x) > -x^2/2,$$

то есть  $0 < x < 2$ , то  $f' > 0$  при малых  $t$ . Это значит, что последовательность  $a_n$  монотонно убывает при больших  $n$ . Если  $x(1-x) < -x^2/2$ , т.е.  $x < 0$  или  $x > 2$ , то  $f' < 0$ , и  $a_n$  монотонно возрастает при больших  $n$ . При  $x=0$   $a_n \equiv 1$ . Рассмотрим случай  $x=2$ . Тогда в разложениях (1), (2) коэффициенты при  $t$  и  $t^2$  совпадают. Сравним коэффициенты при  $t^3$ : в (1) он равен 4, а в (2)  $8/3 < 4$ . Следовательно,  $f' > 0$  при достаточно малых  $t > 0$ , и в этом случае опять же  $a_n$  монотонно убывает при больших  $n$ .

Ответ:  $0 < x \leq 2$ .

**6.15.** Пусть расставлено  $n$  чисел, и их сумма равна  $\sigma$ . Сумма любых трех рядом стоящих чисел не превосходит 3. Просуммировав все такие неравенства, получим  $3\sigma \leq 3n$ ,  $\sigma \leq n$ . При этом  $\sigma = n$  тогда и только тогда, когда сумма любых трех рядом стоящих чисел равна 3. Точно так же сумма любых пяти рядом стоящих чисел должна быть равна 5. Но тогда, очевидно, сумма любых

двух соседних чисел должна быть равна 2, а так как сумма трех рядом стоящих чисел равна 3, то каждое число равно 1. Итак, всегда  $\sigma \leq n$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа равны 1.

**6.16.** Заметим, что  $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = (x_1 + \dots + x_n) + (x_2 + \dots + x_n) + \dots + x_n$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} x_i(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) &\geq x_1(x_1 + \dots + x_n) + x_2(x_2 + \dots + x_n) + \dots + x_n^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i>j} x_i x_j \geq \frac{1}{2} \left( \sum x_i^2 + 2 \sum_{i>j} x_i x_j \right) = \frac{1}{2} (x_1 + \dots + x_n)^2. \end{aligned}$$

## 7 РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

**7.1.** Если  $n$  есть квадрат целого числа, то положим  $a_n = 1/n$ , иначе  $a_n = 1/n^2$ . Тогда  $a_n \neq o(1/n)$ , причем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, ибо любая его частичная сумма не превосходит  $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = c < \infty$ .

**7.2.** Рассмотрим последовательность  $\{n_k\}$  такую, что  $n_{k^3} = k^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а прочие члены образуют подпоследовательность  $1, 2^3, 2^3, 3^3, 3^3, 3^3, \dots, \underbrace{\dots, k^3, \dots, k^3, \dots}_k$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

С другой стороны, подпоследовательность последовательности  $\{n_{n_k}\}$ , соответствующая номерам  $k$ , не являющимся кубами целых чисел, имеет вид  $1^2, 2^2, 2^2, \dots, \underbrace{k^2, \dots, k^2}_k, \dots$ , так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{n_k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

**7.3.** Ряд сходится, если сходится ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ . Но  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$ , и исходный ряд сходится.

**7.4.** Очевидно,  $x_n \in \left( \frac{\pi}{2} + \pi(n-1), \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$ , откуда  $x_n \geq \frac{\pi}{2} + \pi(n-1) \geq n$  и  $\frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ . Поэтому рассматриваемый ряд мажорируется сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  и, следовательно, сходится.

**7.5.** Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}} - \frac{p_{n-1}}{p_n} \frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}} \right).$$

Если  $p_n \rightarrow +\infty$ , то ряд  $\frac{1}{p_0^{\alpha}} - \frac{p_0}{p_1} \frac{1}{p_0^{\alpha}} + \frac{1}{p_1^{\alpha}} - \frac{p_1}{p_2} \frac{1}{p_1^{\alpha}} + \dots$  знакочередующийся, с монотонно убывающими и стремящимися к 0 членами, так что он сходится вместе с рассматриваемым рядом. При  $p_n \rightarrow A < +\infty$  имеем  $\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\alpha}} \leq$

$\leq c(p_n - p_{n-1})$  для подходящей константы  $c$ , и рассматриваемый ряд мажорируется сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} c(p_n - p_{n-1}) = c(A - p_0)$ .

**7.6.** Имеем

$$x^{-x} = e^{-x \ln x} = 1 - x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-x \ln x)^k}{k!} + \dots,$$

причем ряд равномерно сходится на  $[0, 1]$ . Поэтому

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x dx.$$

Обозначим  $J_{k,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x dx$ , где  $k \geq 0$ ,  $m \geq 0$  – целые. Интегрируя по частям,

находим  $J_{k,m} = -\frac{m}{k+1} J_{k,m-1}$  при  $m \geq 1$ ,  $J_{k,0} = \frac{1}{k+1}$ , откуда

$$J_{k,k} = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$$

и

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

**7.7.** Обозначим данное выражение  $f(x)$ ; тогда  $\frac{f(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x^{16}}$  и

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^{16}}, \text{ откуда } f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^{16k} = 1 - x + x^{16} - x^{17} + \dots$$

**7.8.** Так как для достаточно больших  $x$  ряд  $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$  сходится, то при некотором  $x_0$   $\frac{a_n}{x_0^n} \rightarrow 0$ , так что существует  $c$  такое, что  $a_n \leq c^n$ . Тогда при  $x > 2c$

$$\left| \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \right| \leq \frac{c^2}{x^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = \frac{2c^2}{x^2},$$

то есть  $\varphi(n) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \varepsilon(n)$ , где для достаточно больших  $n$   $|\varepsilon(n)| < \frac{K}{n^2}$ . Теперь видно, что при  $a_0 = a_1 = 0$  ряд  $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots$  сходится, ибо мажорируется сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^2}$ . Если ряд  $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots$  сходится, то

$\varphi(n) \rightarrow 0$ , откуда  $a_0 = 0$ . Если при этом  $a_1 \neq 0$ , то  $\varphi(n) = \frac{a_1}{n} + \varepsilon(n) = a_1 \left( \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ , и из сравнения с гармоническим рядом видно, что ряд  $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots$  расходится – противоречие.

**7.9.** Аналогично тому, как это делается для обычных рядов, устанавливается возможность почленного дифференцирования данного ряда, после чего для  $g(x)$  получается соотношение  $g'(x) = g(x)$ , откуда  $g(x) = ce^x$  и, так как  $g(0) = 2$ ,  $g(x) = 2e^x$ .

**7.10.** Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} &= \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} \right) = \operatorname{Im} \left( e^{e^{ix}} \right) = \operatorname{Im} \left( e^{\cos x + i \sin x} \right) = \\ &= e^{\cos x} \operatorname{Im} \left( e^{i \sin x} \right) = e^{\cos x} \sin(\sin x). \end{aligned}$$

**7.11.** Последовательность  $\{x_n\}$  является неубывающей, так как  $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0$ . Значит, существует предел  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , конечный или бесконечный. Предположим, что  $c < \infty$ . Тогда  $c^2 - 2c + 1 = 0$ , откуда  $c = 1$ , но это невозможно, поскольку  $1 < a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq c$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

Докажем, что данный ряд сходится и его сумма равна  $1/(a-1)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2 - x_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x_2^2 - x_2} = \\ &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3 - 1} = \dots = \sum_{n=1}^N \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{N+1} - 1}, \end{aligned}$$

ТО ЕСТЬ

$$\frac{1}{a-1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{N+1} - 1} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

**7.12.** Преобразуем левую и правую части доказываемого равенства.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+1)} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+1)} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+2)} + \dots \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}; \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{x^k}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Справедливость равенства доказана.

**7.13.** Вопрос о сходимости имеет смысл рассматривать при  $x > 0$ , так как только в этом случае  $1 + (-1)^n/n^x > 0$  при любом  $n$  и все члены ряда определены.

Пусть  $x > 0$ . Тогда

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right) = \frac{(-1)^n}{n^x} - c_n, c_n > 0, c_n \sim \frac{1}{2n^{2x}}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$  сходится по признаку Лейбница, и поэтому сходимость исходного ряда равносильна сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2x}}$ , который сходится в случае  $x > 1/2$  и расходится при  $x \leq 1/2$ .

**7.14.** Заметим, что

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \right| \leq \frac{1}{m+x} \leq \frac{1}{m}$$

при всех  $m \in \mathbf{N}$  и  $x \geq 0$ . Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$  сходится равномерно на  $[0, +\infty)$ , и, значит, его сумма  $f(x)$  – непрерывная функция на  $[0, +\infty)$ . Имеем

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, ,$$

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln 2 < f(0), ,$$

и, значит, по теореме о промежуточном значении для любого рационального числа  $y \in (1 - \ln 2, \ln 2)$  найдется число  $x \in (0, 1)$  такое, что  $f(x) = y$ .

**7.15.** При  $t \geq 1$  справедливо неравенство

$$e^{-t} \geq \frac{1}{e^2} - 1 + \frac{1}{t}.$$

Действительно, если  $1 \leq t \leq 2$ , то

$$\frac{1}{e^2} - 1 + \frac{1}{t} \leq \frac{1}{e^2} \leq e^{-t},$$

а если  $t > 2$ , то

$$\frac{1}{e^2} - 1 + \frac{1}{t} < \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2} < 0 < e^{-t}.$$

Подставляя в это неравенство  $t = x_n/x_{n+1}$  и умножая на  $x_n$ , получим

$$x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \geq \frac{x_n}{e^2} - (x_n - x_{n+1}).$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1})$  абсолютно сходится, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{e^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1}) = \infty.$$

**7.16.** Обозначим данное множество через  $E$ . Для любого натурального  $n$  множество  $E_n = E \cap \{x \mid x \geq 1/n\}$  конечно, так как в противном случае из элементов  $E_n$  можно было бы составить расходящийся ряд. Поэтому множество  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  не более чем счетно.

## 8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**8.1.** Подставив  $y = x^2 \sin x$  в уравнение, получим

$$2 \sin x + 4x \cos x + x^2 \sin x (q(x) - 1) + \\ + 2xp(x) \sin x + x^2 p(x) \cos x = 0$$

тождественно на  $(-a, a)$ . Разделим обе части на  $x$ ; тогда при  $x \neq 0$ ,  $x \in (-a, a)$ :

$$2 \frac{\sin x}{x} + 4 \cos x + x \sin x (q(x) - 1) + 2p(x) \sin x + xp(x) \cos x = 0.$$

Но при непрерывных  $p(x)$  и  $q(x)$  левая часть стремится к 6 при  $x \rightarrow 0$ , и в некоторой окрестности нуля равенство нарушается. Поэтому  $y = x^2 \sin x$  не может быть решением данного уравнения при непрерывных  $p(x)$  и  $q(x)$  на интервале  $(-a, a)$ .

**8.2.** Легко видеть, что каждое решение  $y(x)$  есть непрерывная, дифференцируемая и монотонно возрастающая функция. Имеем

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{dt}{1+t^2+y^2}, \\ |y - y_0| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

**8.3.** Подставляя в уравнение  $y_1$  и  $y_2 = (y_1)^2$  вместо  $y$ , получаем два соотношения, связывающие  $p$  и  $q$ , откуда, исключая  $y_1$ , находим  $q' + 2pq + 3\sqrt{2}q^{3/2} = 0$ . Наоборот, если  $p$  и  $q$  связаны такой зависимостью, то исходное уравнение приводится к следующему:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{d}{dx} - 1\right) \left(\sqrt{\frac{2}{q}} \frac{d}{dx} - 2\right) y = 0;$$

решения его суть

$$y_n = \exp\left(n \int \sqrt{\frac{q}{2}} dx\right) \quad (n=1,2).$$

**8.4.** Данное уравнение равносильно уравнению  $(y' - xy)' = 0$ , т.е.  $y' - xy = C_1$ , откуда

$$y = C_1 e^{x^2/2} \left( \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt + C_2 \right).$$

**8.5.** Предположим, что  $y(x)$  – решение данного уравнения на интервале  $(0,3)$  и  $y(0)=0$ . Тогда всюду на данном интервале  $y' > 0$ , так что  $y(x)$  монотонно возрастает и  $y > 0$ . Рассмотрим функцию  $z(x) = \operatorname{arctg} y(x)$ . На  $(0,3)$  она дифференцируема и удовлетворяет соотношению  $\frac{z'(x)}{\cos^2 z} = \operatorname{tg}^2 z + x$ , причем  $0 < z(x) < \pi/2$ . Имеем  $z'(x) = \sin^2 z + x \cos^2 z \geq 1$  при  $x \geq 1$ , откуда  $z(x) \geq x - 1$ , так что  $z(2,9) \geq 1,9 > \pi/2$  – противоречие.

**8.6.** Если  $x(t)$  – перемещение за время  $t$ , то имеем уравнение

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{x'(t) + x'(t_0)}{2} \quad (1)$$

при любых  $t > t_0$ . По условию задачи функция  $x(t)$  дифференцируема в каждой точке (так как мгновенная скорость существует). Следовательно, в (1) левая часть дифференцируема по  $t$  (при фиксированном  $t_0$ ). Значит, и правая часть дифференцируема по  $t$ , т.е.  $x'(t)$  дифференцируема по  $t$ . Следовательно,  $x(t)$

дважды дифференцируема по  $t$ . Опять же из (1) следует, что и  $x'(t)$  дважды дифференцируема по  $t$ . Умножая (1) на  $t - t_0$  и дифференцируя по  $t$  дважды, получим

$$x''(t) = x''(t) + \frac{t - t_0}{2} x'''(t),$$

откуда  $x'''(t) \equiv 0$ ,  $x''(t) = \text{const}$ , что и означает равноускоренность движения.

**8.7.** Умножив первое уравнение на  $y$ , приведем его к виду  $(y'y)' = x'y + xy'$ , или, воспользовавшись вторым уравнением

$$(y'y)' = 1. \quad (1)$$

Второе уравнение перепишем так:

$$(xy)' = 1. \quad (2)$$

Из (1) последовательно получим  $y'y = t + c_1$ ,  $(y^2)' = 2t + 2c_1$ ,  $y^2 = t^2 + 2c_1t + c_2$ . Из (2) найдем  $xy = t + c_3$ ,  $x = (t + c_3)/y$ .

Ответ:  $y = \pm \sqrt{t^2 + 2c_1t + c_2}$ ,  $x = (t + c_3)/y$ .

**8.8.** Из данного уравнения следует, что

$$|dx/dt| \leq 1/(1+t^4).$$

Из формулы Ньютона-Лейбница для любых  $t_1$  и  $t_2$  получим

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$$

Из сходимости последнего интеграла и следует ограниченность  $x(t)$ .

## 9 АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

**9.1.** Возьмем произвольное число  $x$  и обозначим  $x_1 = \sin x$ ,  $x_2 = \sin x_1, \dots, x_n = \sin x_{n-1}, \dots$ . По условию  $f(x) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = \dots$ . Если  $0 \leq x_1 \leq 1$ , то мы получаем  $0 \leq x_2 = \sin x_1 \leq x_1$ ,  $0 \leq x_3 = \sin x_2 \leq x_2$  и т.д. Значит,  $\{x_n\}$  – невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, и, стало быть, существует предел  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Так как  $x_n = \sin x_{n-1}$ , то  $y = \sin y$ , т.е.  $y = 0$ . В силу непрерывности функции  $f$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0)$  и, значит,  $f(x) = f(0)$ .

Аналогично, если  $0 > x_1 \geq -1$ , то  $\{x_n\}$  – возрастающая последовательность отрицательных чисел, и снова мы получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0)$  и  $f(x) = f(0)$ .

Следовательно, в классе непрерывных функций только константы удовлетворяют данному уравнению.

**9.2.** Докажем, что при  $x \neq y$   $f(x) \neq f(y)$ . Действительно, если  $f(x) = f(y)$ , то  $f(f(x)) = f(f(y))$ , т.е.  $e^{-x} = e^{-y}$ , откуда следует, что  $x = y$ . Следовательно, данная непрерывная функция  $f$  является монотонной. Но тогда  $f(f(x))$  монотонно возрастает и не может быть равна  $e^{-x}$ . Следовательно, функции с указанным в условии свойством не существует.

**9.3.** Обозначив через  $k$  натуральное число, удовлетворяющее условию

$$2^k \leq n < 2^{k+1},$$

а через  $M$  – произведение всех нечетных чисел, не превосходящих  $n$ , умножим каждое слагаемое суммы

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

на произведение  $2^{k-1}M$ . Любое число  $m \in \mathbf{N}$  представимо в виде  $m = 2p \cdot q$ , где  $p \in \mathbf{Z}^+$ ,  $q$  – нечетное число. При этом, если  $m \leq n$ , то  $q \leq n$  (ибо  $q = m/2p \leq n$ ), а если, кроме того,  $m \neq 2^k$ , то  $p < k$  (действительно, в случае  $p > k$  имеем  $m = 2p \cdot q \geq 2^{k+1} > n$ , а в случае  $p = k$  имеем  $q \neq 1$  и  $m = 2p \cdot q \geq 2^k \cdot 3 > 2^{k+1} > n$ ). Поэтому число

$$a_m = \frac{1}{m} \cdot 2^{k-1}M$$

является целым при любом значении  $m = 1, 2, \dots, n$ , кроме одного (равного  $2^k$ ), следовательно, число

$$S \cdot 2^{k-1} \cdot M = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

не является целым. Таким образом, сумма  $S$  также не может быть целым числом.

**9.4.** Заметим, что если число  $n$  удовлетворяет условию задачи, то числа  $2n + 2$  и  $2n + 9$  тоже ему удовлетворяют. Действительно, если

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbf{N} \text{ и } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1,$$

то

$$2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_k + 2,$$

причем

$$\frac{1}{2a_1} + \dots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

и

$$2n + 9 = 2a_1 + \dots + 2a_k + 3 + 6,$$

причем

$$\frac{1}{2a_1} + \dots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Теперь докажем по индукции, что все числа  $n \geq 33$  удовлетворяют условию задачи. Числа 33, ..., 73 обладают нужным свойством. Пусть уже известно, что этим свойством обладают все числа от 33 до  $n-1$ , где  $n > 73$ . Если число  $n$  четно, то оно представимо в виде  $2m+2$ , а если нечетно – то в виде  $2m+9$ , где  $m \in \mathbf{N}, n > m \geq (74-9)/2 > 32$ . В обоих случаях, согласно доказанному выше, число  $n$  удовлетворяет условию задачи, поскольку число  $m$  этому условию удовлетворяет. Утверждение доказано.

**9.5.** Пусть, вопреки утверждению задачи, существуют числа  $n, m, k \in \mathbf{N}$ , удовлетворяющие равенству

$$2^{2^n} + 1 = m^5 - k^5,$$

причем число

$$m^5 - k^5 = (m - k)(m^4 + m^3k + m^2k^2 + mk^3 + k^4)$$

является простым. Тогда  $m - k = 1$  и

$$2^{2^n} + 1 = (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1,$$

поэтому число

$$2^{2^n} = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

делится на 5. Полученное противоречие доказывает справедливость требуемого утверждения.

**9.6.** Обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  расстояния от некоторой точки внутри прямоугольника до двух его противоположных сторон, а через  $y_1$  и  $y_2$  – расстояния до двух других его сторон. Тогда по условию стороны прямоугольника  $A = x_1 + x_2$  и  $B = y_1 + y_2$  являются нечетными числами.

Предположим, что найдутся числа

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{Z},$$

удовлетворяющие условиям

$$x_i^2 + y_j^2 = a_{ij}^2$$

(здесь и ниже  $i, j = 1, 2$ ). Обозначим

$$u_i = x_i AB, v_j = y_j AB.$$

Тогда имеем

$$u_1 - u_2 = (x_1 - x_2)AB = (x_1^2 - x_2^2)B = ((x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_1^2))B = (a_{11}^2 - a_{21}^2)B = C,$$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2)AB = A^2 B = D.$$

Аналогично получаем

$$v_1 - v_2 = (a_{11}^2 - a_{12}^2)A = E, v_1 + v_2 = AB^2 = F.$$

Наконец, имеем

$$u_i^2 + v_j^2 = (x_i^2 + y_j^2)A^2B^2 = a_{ij}^2A^2B^2 = b_{ij}^2.$$

При этом числа  $C, E$  и  $b_{ij}$  целые, а  $D$  и  $F$  нечетные. Предположим, что все числа  $u_i, v_j$  целые. Тогда одно из чисел  $u_1, u_2$  является нечетным (ибо их сумма нечетна) и одно из чисел  $v_1, v_2$  также нечетно. Обозначая эти два числа через  $u$  и  $v$ , а сумму их квадратов через  $b^2$ , имеем:

$$u^2 \equiv 1(\text{mod } 4), v^2 \equiv 1(\text{mod } 4),$$

и равенство

$$u^2 + v^2 = b^2$$

невозможно, так как

$$b^2 \not\equiv 2(\text{mod } 4).$$

Полученное противоречие доказывает, что не все числа  $u_i, v_j$  являются целыми. Поэтому хотя бы одно из целых чисел

$$U_i = 2u_i, V_j = 2v_j \quad (2u_i = D \pm C, 2v_j = F \pm E)$$

является нечетным. Пусть нечетным оказалось, например, число  $U_1$  (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда из равенства

$$u_1^2 + v_1^2 = b_{11}^2$$

получаем равенство

$$U_1^2 + V_1^2 = 4b_{11}^2,$$

которое невозможно, так как

$$U_1^2 \equiv 1 \pmod{4}, 4b_{11}^2 \equiv 0 \pmod{4}, \text{ но } V_1^2 \not\equiv 3 \pmod{4}.$$

Доказательство закончено.

**9.7.** Предположим, что указанная в задаче пирамида существует. Обозначим через  $g$  длину стороны квадрата, служащего ее основанием, а через  $h$  – высоту пирамиды. Тогда длина бокового ребра пирамиды, ее полная поверхность и объем равны соответственно

$$f = \sqrt{h^2 + 2(g/2)^2}, s = g^2 + 2g\sqrt{h^2 + (g/2)^2} \text{ и } v = g^2h/3.$$

Поскольку  $g, f, s, v \in \mathbf{N}$ , то числа

$$x = g^3, y = 6v, z = g(s - g^2), u = 2g^2f$$

являются натуральными, причем справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= g^6 + 36v^2 = 4g^4((g/2)^2 + h^2) = g^2(s - g^2)^2 = z^2, \\ x^2 + z^2 &= g^6 + 4g^4(h^2 + (g/2)^2) = 4g^4(h^2 + 2(g/2)^2) = u^2. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений в натуральных числах

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + z^2 = u^2, \end{cases}$$

имеет решения. Выберем среди них решение  $(x_0; y_0; z_0; u_0)$ , для которого величина  $x \in \mathbf{N}$  принимает наименьшее возможное значение  $x_0$ . Тогда числа  $x_0; y_0; z_0; u_0$  попарно взаимно просты. Действительно, если какие-либо два из них одновременно делятся на некоторое простое число  $p$ , то из равенств

$$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2, x_0^2 + z_0^2 = u_0^2, y_0^2 + u_0^2 = 2z_0^2$$

следует, что и два других числа также делятся на  $p$ . Но тогда набор  $(x_0/p; y_0/p; z_0/p; u_0/p)$  представляет собой решение системы, причем  $x_0/p < x_0$ , что противоречит выбору значения  $x_0$ . Кроме того, число  $x_0$  четно, а значит, числа  $y_0, z_0, u_0$  нечетны. Действительно, если  $x_0$  нечетно, то

$$x_0^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

а число  $u_0^2 = 2x_0^2 + y_0^2$  при делении на 4 дает остаток 2 или 3 (в зависимости от четности числа  $y_0$ ), чего не может быть. Из равенства  $x_0^2 = z_0^2 - y_0^2$  получаем равенство

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 = \frac{z_0 + y_0}{2} \cdot \frac{z_0 - y_0}{2},$$

причем натуральные числа  $(z_0 + y_0)/2$  и  $(z_0 - y_0)/2$  взаимно просты, так как в противном случае выполнялись бы соотношения

$$\begin{aligned} (z_0, y_0) &= (z_0, z_0 - y_0) \geq \left(z_0, \frac{z_0 - y_0}{2}\right) = \\ &= \left(z_0 - \frac{z_0 - y_0}{2}, \frac{z_0 - y_0}{2}\right) = \left(\frac{z_0 + y_0}{2}, \frac{z_0 - y_0}{2}\right) > 1, \end{aligned}$$

то есть числа  $z_0$  и  $y_0$  не были бы взаимно простыми. Следовательно, числа  $(z_0 + y_0)/2$ ,  $(z_0 - y_0)/2$  являются квадратами некоторых взаимно простых

чисел  $k, l \in \mathbf{N}$  соответственно, поэтому

$$x_0 = 2kl, y_0 = k^2 - l^2, z_0 = k^2 + l^2.$$

Аналогично, из равенства

$$x_0^2 = u_0^2 - z_0^2$$

вытекают соотношения

$$x_0 = 2mn, z_0 = m^2 - n^2, u_0 = m^2 + n^2,$$

для некоторых чисел  $m, n \in \mathbf{N}$ . Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} kl = mn, \\ k^2 + l^2 = m^2 - n^2. \end{cases}$$

Обозначим  $(k, m) = a$ , тогда

$$k = ab, m = ac, \text{ где } a, b, c \in \mathbf{N} \text{ и } (b, c) = 1.$$

Равенство  $kl = mn$  записывается в виде  $abl = acn$ , откуда  $bl = cn$  и  $l = cd$ , где  $d \in \mathbf{N}$  (ибо  $bl : c$ , но  $(b, c) = 1$ ). Следовательно,  $bcd = cn$ , откуда  $n = bd$ , причем из условия

$$1 = (k, l) = (ab, cd)$$

вытекает соотношение  $(a, d) = 1$ . Далее, имеем равенство

$$a^2b^2 + c^2d^2 = a^2c^2 - b^2d^2,$$

из которого получаем условие

$$(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 2a^2c^2.$$

Поскольку

$$(a^2 + d^2, a^2) = (d^2, a^2) = 1 \text{ и } (b^2 + c^2, c^2) = (b^2, c^2) = 1,$$

то последнее условие выполнимо лишь в следующих двух случаях:

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 2c^2, \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^2 + d^2 = c^2, \\ b^2 + c^2 = 2a^2. \end{cases}$$

В этих случаях соответственно имеем

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = c^2, \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} d^2 + b^2 = a^2, \\ d^2 + a^2 = c^2, \end{cases}$$

откуда получаем, что один из наборов

$$(b; d; c; a) \text{ или } (d; b; a; c)$$

удовлетворяет исходной системе наряду с набором

$$(x_0; y_0; z_0; u_0).$$

Так как  $x_0 = 2mn = 2mbd$ , то  $b < x_0$  и  $d < x_0$ , что противоречит выбору значения  $x_0$ . Утверждение доказано.

**9.8.** Докажем требуемое утверждение сначала для значений

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Построим многочлен степени не выше  $(n-1)$ , который в каждой точке  $a_i (i=1, 2, \dots, n)$  принимает значение  $a_i^k$ . Согласно формуле Лагранжа этот



корнями которого являются числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . В силу теоремы Виета коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_n$  этого многочлена являются целыми числами, при этом для каждого  $j = 1, 2, \dots, n$  выполнены равенства

$$a_j^n = -\sum_{i=1}^n c_i a_j^{n-i}.$$

Умножая первое равенство выписанной системы (1) на  $c_1$ , второе – на  $c_2, \dots$ , последнее – на  $c_n$ , а затем складывая все полученные равенства, имеем

$$\sum_{i=1}^n c_i b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \frac{a_j^{k-i}}{p_j} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{k-n}}{p_j} \sum_{i=1}^n c_i a_j^{n-i} = -\sum_{j=1}^n \frac{a_j^{k-n}}{p_j} a_j^n = -\sum_{j=1}^n \frac{a_j^k}{p_j} = -b_0,$$

то есть число

$$b_0 = -\sum_{i=1}^n c_i b_i$$

является целым, что и требовалось доказать.

### 9.9. Пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} 1 = \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{1 + \operatorname{tg} k \operatorname{tg}(k-1)}$$

(заметим, что ввиду иррациональности числа  $\pi$  выражение  $\operatorname{tg} k$  определено при всех  $k \in \mathbf{N}$ ), получаем при любом  $n \in \mathbf{N}$  равенства

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \operatorname{tg}(k-1) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1} - 1 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1} - n = \frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} 1} - n. \end{aligned}$$

Таким образом, числа  $A = 1/\operatorname{tg} 1$ ,  $B = -1$  удовлетворяют требованиям задачи.

**9.10.** Пусть  $A \in (0;1)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . Тогда найдется такое натуральное число  $N$ , что для всех номеров  $n \geq N$  имеют место оценки  $2A/3 < a_n < 4A/3$ . Если для любого  $n > N$  выполнено равенство  $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ , то, переходя в нем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n-1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} = \sqrt{A}.$$

Следовательно,  $A \in \{0;1\}$ , что противоречит условию  $A \in (0;1)$ . Если же для некоторого номера  $n > N$  равенство  $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$  не выполнено, то  $a_n = a_{n-1}/2 < (1/2) \cdot 4A/3 = 2A/3$ , т.е.  $a_n < 2A/3$ , что противоречит выбору числа  $N$ . Поэтому у последовательности  $\{a_n\}$  не может быть предела, лежащего в интервале  $(0;1)$ .

**9.11.** Рассмотрим число  $a_i$  из набора  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Количество трехчленных арифметических прогрессий, в которых это число является средним членом, не превосходит как  $i-1$ , так и  $n-i$ , поскольку на месте первого члена может стоять только одно из чисел  $a_1, \dots, a_{i-1}$ , а на месте последнего – одно из чисел  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ . Поэтому общее число прогрессий не превосходит суммы

$$\sum_{i=1}^n \min\{i-1, n-i\} = S.$$

Если  $n = 2l$  ( $l \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ ), то

$$S = \sum_{i=1}^l (i-1) + \sum_{i=l+1}^n (n-i) = l(l-1).$$

Если же  $n = 2l + 1$  ( $l \in \mathbf{N}$ ), то

$$S = \sum_{i=1}^l (i-1) + \sum_{i=l+1}^n (n-i) = l^2.$$

Заметим, наконец, что полученные оценки для количества прогрессий достигаются в случае последовательности  $a_i = i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**9.12.** Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  – указанная в задаче последовательность. Рассмотрим функцию, определенную на множестве целых чисел:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } x \text{ нечетно,} \end{cases}$$

и зададим последовательность  $\{b_n\}$  формулами  $b_n = f(a_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Тогда для любого  $n \in \mathbf{N}$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} b_{n+4} &= f(a_{n+4}) = f(a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) = \\ &= f(f(a_n) + f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + f(a_{n+3})) = f(b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}), \end{aligned}$$

поскольку число  $a_{n+4}$  является четным в том и только в том случае, если четна сумма  $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ . Первые 9 членов последовательности равны  $\{b_n\}$  соответственно 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1. Поэтому  $b_6 = b_1, b_7 = b_2, b_8 = b_3, b_9 = b_4$  и, вообще,  $b_{n+5} = b_n$ , а значит, в этой последовательности нули стоят только на местах с номерами вида  $n = 3 + 5k$  ( $k \in \mathbf{Z}^+$ ). Таким образом, в последовательности  $\{a_n\}$  разность номеров любых двух четных членов делится на 5. Следовательно, четверка чисел 1, 2, 3, 4 встретиться не может.

**9.13.** Из условия имеем неравенства

$$a_{k+m} - 1 \leq a_k + a_m \leq a_{k+m} + 1, \quad k, m \in \mathbf{N}.$$

Докажем индукцией по  $q \in \mathbf{N}$ , что для любых  $p, q \in \mathbf{N}$  выполнены неравенства

$$a_{pq} - (q-1) \leq qa_p \leq a_{pq} + (q-1).$$

При  $q=1$  имеем верные неравенства. Пусть неравенства доказаны для числа  $q$ . Докажем их для числа  $q+1$ . Действительно, для любого значения  $p \in \mathbf{N}$  имеем

$$(q+1)a_p = qa_p + a_p \leq a_p + a_{pq} + (q-1) \leq a_{p+pq} + q = a_{p(q+1)} + q.$$

Аналогично доказывается, что

$$(q+1)a_p \geq a_{p(q+1)} - q.$$

Поменяв местами  $p$  и  $q$ , получаем неравенство

$$a_{pq} - (p-1) \leq pa_p \leq a_{pq} + (p-1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |pa_q - qa_p| &\leq \max \left\{ \left| a_{pq} + (p-1) - (a_{pq} - (q-1)) \right|, \left| a_{pq} + (q-1) - (a_{pq} - (p-1)) \right| \right\} = \\ &= p + q - 2 < p + q, \end{aligned}$$

а значит,

$$\left| \frac{a_q}{q} - \frac{a_p}{p} \right| < \frac{1}{q} + \frac{1}{p},$$

что и требовалось доказать.

**9.14.** Пусть последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет условию задачи.

Поскольку  $a_1 > 0, a_2 > 0$  и  $a_2^3 + 1 = a_1 a_3$ , то  $a_3 > 0$ . Аналогично получаем, что  $a_n > 0$  при  $n = 4, 5, \dots$ . Поэтому  $a_{n+2} = (a_{n+1}^2 + 1) / a_n$  при  $n \in \mathbf{N}$ , а значит,

$$\begin{aligned} a_3 &= (a_2^3 + 1) / a_1 = a_2^3 + 1, \\ a_4 &= (a_3^3 + 1) / a_2 = \left( (a_2^3 + 1)^3 + 1 \right) / a_2 = \\ &= (a_2^9 + 3a_2^6 + 3a_2^3 + 2) / a_2 = a_2^8 + 3a_2^5 + 3a_2^2 + 2 / a_2. \end{aligned}$$

Так как  $a_4 \in \mathbf{Z}$ , то число  $a_2 > 1$  является делителем двойки, т.е.  $a_2 = 2$ . Поскольку все остальные члены последовательности однозначно определяются первыми двумя ее членами, то указанная последовательность единственна. Докажем индукцией по  $n \in \mathbf{N}$ , что все члены этой последовательности – целые числа (т.е. она действительно удовлетворяет условиям задачи). Как было уже проверено, числа  $a_1, a_2, a_3, a_4$  являются целыми. Далее, пусть для некоторого значения  $n \geq 5$  доказано, что  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{Z}$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} a_n &= (a_{n-1}^3 + 1) / a_{n-2} = \left( \left( (a_{n-2}^3 + 1) / a_{n-3} \right)^3 + 1 \right) / a_{n-2} = \\ &= (a_{n-2}^9 + 3a_{n-2}^6 + 3a_{n-2}^3 + 1 + a_{n-3}^3) / a_{n-2} a_{n-3}^3, \end{aligned}$$

причем числитель полученной дроби делится на  $a_{n-3}^3$  поскольку число

$$(a_{n-2}^9 + 3a_{n-2}^6 + 3a_{n-2}^3 + 1 + a_{n-3}^3) / a_{n-3}^3 = a_{n-1}^3 + 1$$

является целым. Этот числитель делится и на  $a_{n-2}$ , так как

$$(a_{n-2}^9 + 3a_{n-2}^6 + 3a_{n-2}^3 + 1 + a_{n-3}^3) / a_{n-2} = a_{n-2}^8 + 3a_{n-2}^5 + 3a_{n-2}^2 + a_{n-4}.$$

Докажем, что числа  $a_{n-2}$  и  $a_{n-3}^3$  взаимно просты (откуда будет следовать, что числитель рассматриваемой дроби делится на произведение этих чисел). Действительно, этот факт вытекает из соотношений

$$(a_{n-2}, a_{n-3}) = \left( (a_{n-3}^3 + 1) / a_{n-4}, a_{n-3} \right) \leq (a_{n-3}^3 + 1, a_{n-3}) = (1, a_{n-3}) = 1.$$

Таким образом, число  $a_n$  является целым. Утверждение доказано.

### 9.15. Обозначим

$$S_n = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}};$$

тогда последовательность  $S_1, S_2, \dots$  состоит из одинаковых чисел в том и только в том случае, если для каждого  $n \in \mathbf{N}$  разность

$$S_{n+1} - S_n = \frac{a_0}{a_{n+1}} + \frac{p}{a_{n+2}} - \frac{p}{a_{n+1}} = \frac{p}{a_{n+2}} - \frac{p - a_0}{a_{n+1}}$$

равна нулю, т.е.  $a_{n+2} = (p / (p - a_0)) a_{n+1}$ . Пусть последовательность  $a_0, a_1, \dots$  удовлетворяет условию задачи, тогда при всех значениях  $n \geq 3$  выполнены равенства

$$a_n = (p / (p - a_0)) a_{n-1} = (p^2 / (p - a_0)^2) a_{n-2} = \dots = (p^{n-2} / (p - a_0)^{n-2}) a_2.$$

Поскольку  $a_n \in \mathbf{N}$ , а числа  $p$  и  $p - a_0$  взаимно просты (ибо  $0 < p - a_0 < p$ ), то число  $a_2$  делится на любую степень (с натуральным показателем) числа  $p - a_0$ , откуда  $p - a_0 = 1$ . Поэтому имеем равенства

$$a_0 = p - 1, \frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1, a_n = p^{n-2} a_2 \quad (a_1, a_2 \in \mathbf{N}) \text{ при } n = 3, 4, \dots$$

Выполнение же указанных равенств гарантирует, что последовательность удовлетворяет условию задачи, так как в этом случае имеем

$$S_1 = 1, S_{n+1} = S_n \text{ при } n \in \mathbf{N}.$$

Итак, задача свелась к нахождению по заданному простому числу  $p$  количества решений уравнения

$$\frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1$$

в натуральных числах. Перепишем уравнение в виде

$$pa_1 = a_2(a_1 - (p-1))$$

и заметим, что левая часть этого уравнения делится на  $p$ . Поэтому уравнение может иметь решение только при выполнении одного из двух условий  $a_2 = kp$  или  $a_1 - (p-1) = mp$ , где  $k, m \in \mathbf{N}$  (ибо  $a_2 > 0$ ,  $a_1 - (p-1) > 0$ ). При этом указанные два условия несовместны, так как если  $a_1 - (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $a_1 \equiv -1 \pmod{p}$ , левая часть уравнения не делится на  $p^2$  и, стало быть, число  $a_2$  не делится на  $p$ . Пусть  $a_2 = kp$ , тогда исходное уравнение перепишем в виде

$$a_1 = k(a_1 - (p-1)), \text{ т.е. } p-1 = (k-1)(a_1 - p+1).$$

Поэтому каждое решение в этой серии получается следующим образом: в качестве значения  $a_1 - p + 1$  нужно взять любой из делителей числа  $p-1$ , а затем положить  $a_2 = kp$ , где

$$k = (p-1)/(a_1 - p + 1) + 1.$$

Пусть теперь  $a_1 - (p-1) = mp$ , тогда исходное уравнение имеет решение в том и только в том случае, если

$$mp + p - 1 = a_2 m, \text{ т.е. } p - 1 = (a_2 - p)m.$$

В этой серии все решения получаются так: в качестве значения  $m$  нужно взять любой из делителей числа  $p - 1$ , а затем положить

$$a_2 = (p-1)/m + p, \quad a_1 = mp + p - 1.$$

Ни одно из полученных решений не может принадлежать обеим сериям сразу, так как иначе оно удовлетворяло бы двум исключаящим друг друга условиям. Поэтому количество решений уравнения, равное количеству искомых последовательностей, совпадает с удвоенным числом делителей числа  $p - 1$ .

**9.16.** Докажем, что тройка чисел  $a, b, c \in \mathbf{N}$ , где  $b < a$ ,  $c < a$ , удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$bc \equiv 1 \pmod{a}, \quad (1)$$

$$nbc^n + (n-1)bc^{n-1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a} \text{ при } n \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Пусть числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию задачи. Тогда условие (1) вытекает из соотношений

$$bc \equiv a_1 \pmod{a}, \quad a_1 = 1,$$

а с учетом соотношений

$$2bc^2 \equiv a_2 \pmod{a}, \quad a_2 = a_1$$

получаем и условие (2) при  $n = 1$ , которое в этом случае выглядит так:

$$bc \equiv 2bc^2 \pmod{a}. \quad (3)$$

Наконец, при остальных значениях  $n > 1$  условие (2) также выполнено, так как

$$\begin{aligned}
a_n &= nbc^n \pmod{a}, \\
a_{n-1} &\equiv (n-1)bc^{n-1} \pmod{a}, \quad a_{n+1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a}, \\
a_n + a_{n-1} &= a_{n+1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Пусть теперь числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  удовлетворяют условиям (1) и (2). Индукцией по  $n \in \mathbf{N}$  докажем, что каждое из чисел  $a_n - nbc^n$  делится на  $a$ . При  $n=1$  и  $n=2$  утверждение вытекает из условий (1) и (3) (последнее совпадает с условием (2) при подстановке  $n=1$ ), так как  $a_1 = a_2 = 1$ . Пусть для некоторого значения  $n > 1$  уже доказано, что числа  $a_n - nbc^n$  и  $a_{n-1} - (n-1)bc^{n-1}$  делятся на  $a$ . Тогда из условий (2) и (4) следует, что число

$$a_{n+1} - (n+1)bc^{n+1} \equiv \left( (a_n - nbc^n) + (a_{n-1} - (n-1)bc^{n-1}) \right) \pmod{a}$$

также делится на  $a$ . Заметим, что из условия (1) вытекают соотношения  $(b, a) = (c, a) = 1$ . При этом условие (2) равносильно тому, что каждое из чисел

$$d_n = (n+1)c^2 - nc - (n-1) = (n+1)(c^2 - c - 1) + (c+2)$$

при  $n \in \mathbf{N}$  делится на  $a$ , что (в свою очередь) имеет место тогда и только тогда, когда каждое из двух чисел

$$c^2 - c - 1 = d_2 - d_1 \quad \text{и} \quad c + 2 = d_1 - 2(c^2 - c - 1)$$

делится на  $a$ . Следовательно, число

$$(c^2 - c - 1) - (c+2)(c-3) = 5$$

должно делиться на  $a$ . Поскольку  $a > 1$ , то  $a=5$ , а из соотношений  $c+2 \equiv 0 \pmod{5}$ ,  $1 \leq c < 5$  и  $bc \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $1 \leq b < 5$  имеем  $c=3$ ,  $b=2$ . Для завершения доказательства остается заметить, что полученные значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$





при  $x = a_k$ .

**9.19.** Обозначим  $A = \prod_{i=1}^n a_i$ . Для чисел  $0 < a_1 < \dots < a_n$  имеем

$$\prod_{i=1}^n (a_i + 1/b_i) = \prod_{i=1}^n ((a_i b_i + 1)/b_i) = (1/A) \prod_{i=1}^n (a_i b_i + 1) \leq (1/A) \prod_{i=1}^n (a_i^2 + 1)$$

(для доказательства последнего неравенства достаточно заметить, что

$$(a_i b_i + 1)^2 = a_i^2 b_i^2 + 2a_i b_i + 1 \leq a_i^2 b_i^2 + a_i^2 + b_i^2 + 1 = (a_i^2 + 1)(b_i^2 + 1)$$

откуда

$$\prod_{i=1}^n (a_i b_i + 1)^2 \leq \prod_{i=1}^n (a_i^2 + 1)(b_i^2 + 1) = \prod_{i=1}^n (a_i^2 + 1)^2.$$

Равенство достигается, причем только если  $2a_i b_i = a_i^2 + b_i^2$ . Для всех  $i = 1, \dots, n$ . Таким образом, указанное в задаче произведение максимально только в случае

$$(b_1; \dots; b_n) = (a_1; \dots; a_n).$$

**9.20.** Условия задачи выполнены тогда и только тогда, когда

$$f(0) = c = 1$$

и справедливы равенства

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1^4 + bx_1^2 + 1 = 1, \\ f'(x_2) &= 4ax_2^3 + 2bx_2 = 0, \end{aligned}$$

из которых получаем

$$b = -2ax_2^2 \text{ и } ax_1^4 - 2ax_2^2x_1^2 = ax_1^2(x_1^2 - 2x_2^2) = 0,$$

а значит,  $x_1 = x_2\sqrt{2}$  (так как числа  $x_1, a$  отличны от нуля). Проверка показывает, что если  $x_1 = x_2\sqrt{2}$ , то функция

$$f(x) = ax^4 - 2ax_2^2x^2 + 1$$

удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, если  $x_1 \neq x_2\sqrt{2}$ , то указанной функции не существует, а если  $x_1 = x_2\sqrt{2}$ , то тройка  $(a; b; c)$  имеет вид  $(a; -2ax_2^2; 1)$  (где  $a$  – произвольное ненулевое число).

**9.21.** Докажем, что такой функции не существует. Действительно, в противном случае имеем:  $f(0) - (f(0))^2 \geq 1/4$ , т.е.  $(f(0) - 1/2)^2 \leq 0$ , откуда  $f(0) = 1/2$ . Аналогично получаем, что  $f(1) = 1/2$ , т.е.  $f(0) = f(1)$ , что невозможно.

**9.22.** Поскольку уравнение  $f(x) = g(x)$  не имеет действительных решений, то функция

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения при всех  $x \in \mathbf{R}$ . Поэтому функция

$$f(f(x)) - g(g(x)) = f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) = h(f(x)) + h(g(x))$$

не принимает нулевых значений ни при каком  $x \in \mathbf{R}$ .

**9.23.** Докажем, что любое число  $d = 1/k$ , где  $k \in \mathbf{N}$ , удовлетворяет условию задачи. Возьмем произвольную непрерывную функцию  $f(x)$  и число  $k > 1$  (число  $d = 1$  удовлетворяет условию, ибо  $f(0) = f(1)$ ). Рассмотрим

функцию

$$g(x) = f(x + 1/k) - f(x),$$

определенную на отрезке  $[0; (k-1)/k]$ . Поскольку сумма чисел

$$\begin{aligned} g(0) &= f(1/k) - f(0), g(1/k) = f(2/k) - f(1/k), \dots, g((k-1)/k) = \\ &= f(1) - f((k-1)/k) \end{aligned}$$

равна 0, то среди них есть как неположительные, так и неотрицательные числа. Поэтому в силу непрерывности функции  $g(x)$  существует число  $x_0$ , для которого  $g(x_0) = 0$ , т.е.

$$f(x_0 + 1/k) = f(x_0).$$

Пусть теперь дано число  $d \in (0; 1]$ , не равное  $1/k$  ни при каком значении  $k \in \mathbf{N}$ . Возьмем такое число  $k \in \mathbf{N}$ , для которого  $kd < 1 < (k+1)d$ , и рассмотрим произвольную непрерывную функцию  $f(x)$ , определенную на отрезке  $[0; d]$  и удовлетворяющую равенствам

$$f(0) = 0, f(1 - kd) = -k, f(d) = 1.$$

Продолжим эту функцию на отрезок  $[0; 1]$  таким образом, чтобы при каждом  $x \in [d; 1]$  выполнялось равенство

$$f(x) = f(x - d) + 1.$$

Полученная функция непрерывна, причем  $f(1) = f(1 - d) + 1 =$

$= f(1-2d)+2 = \dots = f(1-kd)+k = 0 = f(0)$  и при любом значении  $x \in [0; 1-d]$  имеют место соотношения  $f(x+d) = f(x)+1 \neq f(x)$ .

**9.24.** Пусть число  $k \in \mathbf{N}$  не является квадратом целого числа. Покажем, что  $f'(\sqrt{k}) = 0$ . Так как  $\sqrt{k} \notin \mathbf{Q}$ , то  $f(\sqrt{k}) = 0$ , и остается доказать, что предел

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{k}} f(x)/(x - \sqrt{k})$$

существует и равен 0. Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Существует лишь конечное число дробей  $p/q$  (всюду ниже  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}$ ), удовлетворяющих условиям

$$0 < q < 1/\varepsilon \text{ и } |p/q - \sqrt{k}| < 1.$$

Поэтому при некотором  $\delta \in (0; 1)$  в интервале

$$I_\delta = (\sqrt{k} - \delta; \sqrt{k} + \delta)$$

таких дробей нет совсем. Если  $x = p/q \in I_\delta$ , где  $p/q$  – несократимая дробь, то

$$q \geq 1/\varepsilon \text{ и } |\sqrt{k} + p/q| < \sqrt{k} + (\sqrt{k} + \delta) < 2\sqrt{k} + 1,$$

причем  $|kq^2 - p^2| \geq 1$  (ибо  $kq^2 - p^2 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ), следовательно, имеем

$$\left| \frac{f(x)}{x - \sqrt{k}} \right| = \left| \frac{f(p/q)}{p/q - \sqrt{k}} \right| = \frac{1}{q^3} \frac{|\sqrt{k} + p/q|}{|k - p^2/q^2|} = \frac{1}{q} \frac{|\sqrt{k} + p/q|}{|q^2k - p^2|} < \varepsilon(2\sqrt{k} + 1).$$

Если же число  $x \in I_\delta \setminus \{\sqrt{k}\}$  иррационально, то  $f(x) = 0$  и  $|f(x)/(x - \sqrt{k})| = 0$ . Утверждение доказано.

**9.25.** Положим  $y = 1$  в тождестве, выполненном для функции  $f(x)$ .

Тогда имеем тождество

$$f(x) \equiv (f(x) + f(1))/(x + 1) \quad (x \neq -1),$$

то есть  $xf(x) \equiv f(1)$ . При  $x = 0$  получаем  $f(1) = 0$ , а значит, при  $x \notin \{-1; 0\}$  имеем  $f(x) = 0$ . Далее, подставляя в исходное тождество значения  $y = 0$ ,  $x = 0$ , получаем  $f(0) = (f(2) + f(0))/2$ , откуда  $f(0) = f(2) = 0$ . Наконец, подставляя значения  $y = 0$ ,  $x = -1$ , получаем  $f(0) = -f(-1) - f(0)$ , откуда  $f(-1) = -2f(0) = 0$ . Таким образом, для функции  $f(x)$  доказано тождество  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

**9.26.** Положим в исходном тождестве  $x = y = 1$ , тогда получим  $2f(1) = 2(f(1))^2$ , т.е.  $f(1) = 0$  или  $f(1) = 1$ . Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) Если  $f(1) = 0$ , то, положив в тождестве  $y = 1$ , получим тождество  $f(x) \equiv 0$ .

б) Если  $f(1) = 1$ , то, снова положив  $y = 1$ , получим тождество  $f(x) + x \equiv (x + 1)f(x)$  т.е.  $x(f(x) - 1) \equiv 0$ , откуда при любом  $x \neq 0$  имеем  $f(x) = 1$ . Таким образом, для функции  $f(x)$  имеется две возможности: либо  $f(x) \equiv 0$ , либо

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ a & \text{при } x = 0, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Проверка показывает, что любая из этих функций удовлетворяет условию задачи.

**9.27.** Положив  $m = 0$  в исходном тождестве, для функции  $f(n)$  получим  $2f(n) \equiv f(3n)$  ( $n \in \mathbf{Z}^+$ ), а при  $n = m = 0$  имеем  $f(0) = 0$ . Далее, положив в тождестве  $n = m$ , получим

$$f(2n) + f(0) \equiv f(3n), \text{ т.е. } f(2n) \equiv f(3n).$$

Отсюда, с одной стороны, для любого значения  $m \in \mathbf{Z}^+$  имеем равенства

$$f(4m) = f(6m) \equiv f(9m),$$

а с другой стороны, из тождества при  $n = 3m$  получаем

$$f(4m) + f(2m) \equiv f(9m),$$

что возможно лишь в случае  $f(2m) \equiv 0$ . Следовательно, при любом значении  $n \in \mathbf{Z}^+$  имеем

$$f(n) = (1/2)f(3n) = (1/2)f(2n) = 0,$$

то есть исходному тождеству может удовлетворять (и действительно удовлетворяет) лишь функция  $f(n)$ , тождественно равная 0.

**9.28.** а) Например, функция

$$f(n, m) = n \quad (n, m \in \mathbf{Z})$$

удовлетворяет всем условиям задачи.

б) Пусть утверждение неверно, т.е. для некоторого числа  $k \in \mathbf{Z}$  все значения некоторой функции  $f(n, m)$ , удовлетворяющей условию задачи, например, не превосходят  $k$ . Тогда среди значений  $f(n, m)$  ( $n, m \in \mathbf{Z}$ ) найдется наибольшее, равное, скажем,  $l = f(n_0, m_0)$ . Этому же значению равны и все числа  $f(n_0 \pm 1, m_0)$ ,  $f(n_0, m_0 \pm 1)$ , так как в противном случае оказалось бы, что

$$f(n_0, m_0) = \frac{1}{4}(f(n_0 - 1, m_0) + f(n_0 + 1, m_0) + f(n_0, m_0 - 1) + f(n_0, m_0 + 1)) < l.$$

Рассуждая подобным образом, можно получить равенство

$$l = f(n_0, m_0) = f(n_0 \pm 1, m_0) = f(n_0 \pm 2, m_0) = \dots = f(n_0 \pm n, m_0) = \\ = f(n_0 \pm n, m_0 \pm 1) = f(n_0 \pm n, m_0 \pm 2) = \dots = f(n_0 \pm n, m_0 \pm m)$$

для любых значений  $n, m \in \mathbf{N}$ . Таким образом,  $f(n, m) \equiv l$ , что противоречит условию задачи.

**9.29.** Докажем, что никакие пары искомых значений, кроме приведенных в указании, не удовлетворяют требуемым условиям. Предположим, что некоторая целочисленная пара  $(m, n)$ , отличная от  $(2; 3)$  и  $(2; 5)$ , удовлетворяет неравенствам  $m \leq n$ ,  $mn(m+n) \neq 0$  и тождеству

$$f_m(x, y)f_n(x, y) \equiv f_{m+n}(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad xy(x+y) \neq 0,$$

где

$$f_k(x, y) = (x^k + y^k(-1)^k(x+y)^k) / k \quad \text{при } k \in \mathbf{Z}, k \neq 0.$$

Для каждого фиксированного значения  $y = y_0 \neq 0$  справедливы следующие утверждения. Если  $k < 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + y_0)^k = 0,$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x, y_0) = y_0^k / k.$$

Если число  $k \in \mathbf{N}$  четно, то

$$f_k(x, y) \equiv \frac{1}{k} \left( 2x^k + 2y^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i} \right),$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x, y_0)}{x^k} = \frac{2}{k}.$$

Наконец,  $f_1(x, y) \equiv 0$ , а если число  $k \in \mathbf{N}$  нечетно и  $k \neq 1$ , то

$$f_k(x, y) \equiv -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i},$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x, y_0)}{x^{k-1}} = -\frac{y_0}{k} C_k^{k-1} = -y_0.$$

Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть числа  $m, n \in \mathbf{N}$  четны. Тогда, учитывая исходное тождество, получаем

$$\frac{2}{m+n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0)}{x^m} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x, y_0)}{x^n} = \frac{4}{mn},$$

откуда  $(m+n)/2 = mn/4$ , т.е.  $(m/2-1)(n/2-1) = 1$ . Последнее условие выполняется лишь при  $n/2 = m/2 = 2$ , откуда  $m = n = 4$ , что невозможно, ибо

$$f_4(1,1)f_4(1,1) = (2 + 2^4)^2 / 4^2 = 81/4 \neq 129/4 = (2 + 2^8)/8 = f_8(1,1).$$

б) Пусть числа  $m, n \in \mathbf{N}$  нечётны. Тогда имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0)f_n(x, y_0)}{x^{m+n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{f_n(x, y_0)}{x^{m-1}} \frac{f_n(x, y_0)}{x^{n-1}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}} = \frac{2}{m+n},$$

что противоречит исходному тождеству.

в) Пусть одно из чисел  $m, n \in \mathbf{N}$  (обозначим его через  $p$ ) четно, а другое (обозначим его через  $q$ ) нечетно. Тогда  $q > 1$ , так как если  $q = 1$ , то  $f_q(1,1) = 0$  и в силу тождества имеем

$$f_{p+q}(1,1) = \frac{2 - 2^{p+q}}{p+q} = 0,$$

что невозможно, ибо  $p + q > 1$ . Поэтому получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_p(x, y_0) f_q(x, y_0)}{x^{p+q-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_p(x, y_0)}{x^p} \frac{f_q(x, y_0)}{x^{q-1}} = -\frac{2y_0}{p},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{p+q}(x, y_0)}{x^{p+q-1}} = -y_0,$$

откуда  $p = 2$ . Из тождества имеем

$$3 \cdot (2 - 2^q) / q = f_2(1,1) f_q(1,1) = f_{2+q}(1,1) = (2 - 2^{2+q}) / (2 + q),$$

то есть

$$3(2+q)(1-2^{q-1}) = q(1-2^{q+1}), \text{ или } 3+q = (6-q)2^{q-2}.$$

Поэтому  $q < 6$ , а так как  $q$  нечетно и  $q > 1$ , то  $q \in \{3; 5\}$ , что противоречит сделанному предположению.

г) Пусть  $m < 0$ , а число  $n \in \mathbf{N}$  четно. Так как  $n > m + n$ , то независимо от знака и четности числа  $m + n$  имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}} = 0,$$

в то время как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0) f_n(x, y_0)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x, y_0) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x, y_0)}{x^n} = \frac{2y_0^m}{mn} \neq 0.$$

д) Пусть  $m < 0$ , а число  $n \in \mathbb{N}$  нечетно. Тогда  $n \neq 1$ , так как если  $n = 1$ , то  $f_n(1, 1) = 0$ , и в силу тождества имеем

$$f_{m+n}(1, 1) = \frac{2 + (-1)^{m+n} 2^{m+n}}{m+n} = 0,$$

что невозможно, ибо  $m+n < 0$ . Поэтому, с одной стороны, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0) f_n(x, y_0)}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x, y_0) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x, y_0)}{x^{n-1}} = \frac{-y_0^{m+1}}{m} \neq 0.$$

С другой стороны, если  $m < -1$ , то  $n-1 > m+n$ , и независимо от знака и четности числа  $m+n$  имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{n-1}} = 0.$$

Поэтому число  $m$  может быть равным только  $-1$ . Тогда число  $m+n = n-1$  четно и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{n-1}} = \frac{2}{n-1}.$$

Итак, при каждом значении  $y_0 \neq 0$  справедливо равенство  $1/y_0 = 2(n-1)$ , что невозможно.

е) Пусть  $m, n < 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x, y_0) f_n(x, y_0) = y_0^{m+n} / mn,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{m+n}(x, y_0) = y_0^{m+n} / (m+n),$$

но равенство  $y_0^{m+n} / mn = y_0^{m+n} / (m+n)$  не имеет места, ибо  $mn > 0$ ,  $m+n < 0$ .

Таким образом, условию задачи удовлетворяют только две пары  $(m; n)$ :  $(2; 3)$  и  $(2; 5)$ .

**9.30.** Подставляя в первое исходное тождество для функции  $f(x, y)$  значения  $x = y = 0$  и  $x = y = 1$ , получаем равенства  $f(0, z) = 1$  и  $f(1, z) = 1$  соответственно. Далее, подставляя  $x = y = -1$ , имеем

$$1 = f(1, z) = f(-1, z)f(-1, z) = (f(-1, z))^2,$$

следовательно,  $f(-1, z) = 1$ . Аналогично из второго исходного тождества получаем равенства  $f(z, 0) = f(z, 1) = f(z, -1) = 1$ . Отсюда следует, что

$$f(0, 0) = 1 \text{ и } f(0, z)f(z, 0) = 1.$$

Остается доказать требуемые тождества для ненулевых значений  $x$  и  $y$ .  
При  $x \neq 0$  имеем

$$1 = f(1, z) = f(x, z)f(1/x, z),$$

поэтому

$$f(x, z) = 1 / f(1/x, z).$$

Далее получаем

$$1 = \frac{1}{f(x, 1-x)} = f\left(\frac{1}{x}, 1-x\right) = f\left(\frac{1}{x}, \frac{1-x}{x} \cdot x\right) = f(1/x, (1-x)/x)f(1/x, x).$$

Но поскольку

$$\begin{aligned} f(1/x, (1-x)/x) &= f(1/x, (1-x)/x) \cdot 1 = \\ &= f(1/x, 1/x - 1) f(1/x, -1) = f(1/x, 1 - 1/x) = 1, \end{aligned}$$

то  $f(1/x, x) = 1$ . Итак, имеем

$$1 = f(x, 1) = f(x, 1/x) = f(x, x) = f(x, x) f(x, -1) = f(x, -x),$$

то есть  $f(x, x) = f(x, -x) = 1$ . Наконец, при  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y) \cdot f(1/y, y) = f(x/y, y) = f(x/y, y) \cdot f(x/y, x/y) = \\ &= f(x/y, x) = f(x/y, x) \cdot f(1/x, x) = f(1/y, x) = 1/f(y, x). \end{aligned}$$

Следовательно,  $f(x, y) f(y, x) = 1$ .

**9.31.** а) Из условия задачи следует, что функция  $f(x)$  не принимает никакого значения более чем в одной точке  $x \in \mathbf{R}$ . Действительно, если  $u = f(x) = f(y)$  для некоторых  $x, y \in \mathbf{R}$ , то

$$x = f^3(x) = f^2(u) = f^3(y) = y.$$

Отсюда и из непрерывности функции  $f(x)$  следует, что она строго монотонна. В противном случае найдутся числа  $x_1 < x_2 < x_3$ , удовлетворяющие неравенствам

$$f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$$

или

$$f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3),$$

а значит, некоторое значение  $u$ , лежащее как между числами  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ , так

и между числами  $f(x_2)$  и  $f(x_3)$ , согласно теореме о промежуточном значении непрерывной функции, будет приниматься функцией  $f(x)$  в двух различных точках  $x_4 \in (x_1; x_2)$  и  $x_5 \in (x_2; x_3)$ , что невозможно. Итак, функция  $f(x)$  либо убывает, либо возрастает на всей числовой прямой. В первом случае функция  $f^2(x)$  возрастает, а функция  $f^3(x)$  убывает, поэтому тождество  $f^3(x) \equiv x$  выполняться не может. Допустим, что  $f(x)$  возрастает и  $f(x_0) \neq x_0$  при некотором значении  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Тогда, если  $f(x_0) > x_0$ , то

$$f^2(x_0) > f(x_0), f^3(x_0) > f^2(x_0) \text{ и } f^3(x_0) > x_0,$$

а если  $f(x_0) < x_0$ , то

$$f^2(x_0) < f(x_0), f^3(x_0) < f^2(x_0) \text{ и } f^3(x_0) < x_0.$$

В любом случае имеем противоречие с равенством  $f^3(x_0) = x_0$ . Таким образом, доказано тождество  $f(x) \equiv x, x \in \mathbf{R}$ .

б) Функция

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin \{1;2;3\}, \\ 2, & \text{если } x = 1, \\ 3, & \text{если } x = 2, \\ 1, & \text{если } x = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет всем требованиям задачи.

**9.32.** Используя теорему Виета ( $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = -1/(2p^2)$ ) и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел, получаем

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^4 - 2x_1 x_2 (2(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2) = \\ &= p^4 + \frac{1}{p^2} \left( 2p^2 + \frac{1}{2p^2} \right) = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} = 2 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**9.33.** Так как все коэффициенты многочлена  $P(x)$  неотрицательны, то ни один из его корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  не является положительным. Следовательно, этот многочлен имеет вид

$$P(x) = (x + \beta_1) \dots (x + \beta_n),$$

где  $\beta_i = -\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Используя теорему о средних, получаем неравенства

$$2 + \beta_i = 1 + 1 + \beta_i \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \beta_i} = 3\sqrt[3]{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая, что по теореме Виета  $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = 1$ , получаем

$$P(2) = (2 + \beta_1) \dots (2 + \beta_n) \geq 3^n \sqrt[3]{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = 3^n,$$

что и требовалось доказать.

**9.34.** Так как исходный многочлен имеет  $n$  положительных корней  $x_1, \dots, x_n$ , то его степень не меньше  $n$ . Поэтому  $a \neq 0$  и по теореме Виета имеем

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1, \\(-1)^n \sum_{i=1}^n x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n &= n^2 \frac{b}{a}, \\(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n &= \frac{b}{a},\end{aligned}$$

откуда  $b \neq 0$ . Учитывая теорему о средних, получаем условие

$$\begin{aligned}n^2 &= 1 \cdot \frac{(-1)^n n^2 b / a}{(-1)^n b / a} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq \\&\geq \left( n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \right) \left( n \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}} \right) = n^2,\end{aligned}$$

которое выполняется лишь в случае, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/n.$$

**9.35.** Имеем

$$Q'(x) = P'(x) + \alpha P''(x) + \dots + \alpha^{n-1} P^{(n)}(x)$$

(ибо  $P^{(n+1)}(x) = 0$ ). Поэтому

$$Q(x) - \alpha Q'(x) = P(x).$$

Без ограничения общности считаем, что старший коэффициент многочлена  $P(x)$  положителен. Так как этот многочлен не имеет

действительных корней, то его степень  $n$  – четное число, и для всех  $x \in \mathbf{R}$  выполнено неравенство  $P(x) > 0$ . Предположим, что многочлен  $Q(x)$  имеет действительные корни  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ . Пусть  $\alpha \geq 0$ . Тогда, так как старший коэффициент многочлена  $Q(x)$ , равный старшему коэффициенту многочлена  $P(x)$ , положителен, то  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = +\infty$ , откуда имеем  $Q(x) > 0$  при  $x > x_k$ . Поэтому  $Q'(x_k) \geq 0$  и

$$P(x_k) = Q(x_k) - \alpha Q'(x_k) \leq 0.$$

Если же  $\alpha < 0$ , то при  $x < x_1$  имеем  $Q(x) > 0$  (так как  $\deg Q(x) = n$  – четное число). Поэтому  $Q'(x_1) \leq 0$  и

$$P(x_1) = Q(x_1) - \alpha Q'(x_1) \leq 0.$$

В обоих случаях получено противоречие с неравенством  $P(x) > 0$ . Следовательно, многочлен  $Q(x)$  не имеет действительных корней.

### 9.36. Разложим исходный многочлен на множители:

$$P(x) = a(x - x_1) \dots (x - x_n), \text{ где } a \neq 0.$$

Тогда

$$P'(x) = P_1(x) + \dots + P_n(x),$$

где через  $P_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) обозначен многочлен степени  $n - 1 \geq 1$ , удовлетворяющий тождеству

$$(x - x_k)P_k(x) \equiv P(x).$$

Заметим, что  $P_k(x_i) = 0$  при  $k \neq i$ , а значит,

$$P'(x_i) = P_i(x_i) \neq 0.$$

Рассмотрим многочлен

$$F(x) = -1 + \frac{P_1(x)}{P'(x_1)} + \dots + \frac{P_n(x)}{P'(x_n)},$$

степень которого (если  $F(x) \neq 0$ ) не превышает числа  $n - 1$ . Для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  имеем равенства

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^n \frac{P_j(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = \frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0,$$

а значит, многочлен  $F(x)$  имеет  $n$  различных корней. Следовательно,  $F(x) \equiv 0$ . Так как старший коэффициент каждого из многочленов  $P_k(x)$  равен  $a$ , то коэффициент многочлена  $F(x)$  при  $x^{n-1}$  равен выражению

$$\frac{a}{P'(x_1)} + \dots + \frac{a}{P'(x_n)},$$

но этот коэффициент равен нулю. Отсюда вытекает утверждение задачи.

**9.37.** Найдем количество различных пар непересекающихся подмножеств при условии, что в паре выделены первое и второе подмножества. Для каждого из  $n$  элементов есть 3 возможности: его можно или включить в первое подмножество, или включить во второе подмножество или не включать ни в одно из них. Поэтому количество указанных пар равно  $3^n$ . Среди них есть одна пара, в которой оба подмножества пусты. Оставшиеся  $(3^n - 1)$  пары в свою очередь разбиваются на двойки совпадающих пар, если разрешить переставлять в парах местами первое и второе подмножества. Таким образом, существует  $(3^n - 1)/2$  (неупорядоченных) пар подмножеств, из которых хотя бы одно не пусто. Всего же имеется  $(3^n - 1)/2 + 1 = (3^n + 1)/2$  различных пар подмножеств,

удовлетворяющих условию задачи.

**9.38.** Обозначим искомое число через  $k_n$ . Предположим, что в множестве  $X$  выбраны  $k_n$  трехэлементных подмножеств, любые два из которых имеют ровно один общий элемент. Возможны три случая.

а) Никакой элемент множества  $X$  не входит более чем в два трехэлементных множества. Пусть одно из множеств есть  $\{a; b; c\}$ . Тогда любое из оставшихся множеств пересекается с множеством  $\{a; b; c\}$ , причем среди этих оставшихся множеств не более одного множества содержит элемент  $a$ , не более одного – элемент  $b$  и не более одного – элемент  $c$ . Поэтому всего множеств не более  $1 + 3 \cdot 1 = 4$ , т.е.  $k_n \leq 4$ .

б) Существует элемент множества  $X$ , входящий в три трехэлементных множества, но никакой элемент множества  $X$  не входит более чем в три трехэлементных множества. Тогда, если  $\{a; b; c\}$  – одно из множеств, то любое из оставшихся множеств пересекается с ним, причем не более двух из этих оставшихся множеств содержит элемент  $a$ , не более двух – элемент  $b$  и не более двух – элемент  $c$ . Поэтому всего множеств не более  $1 + 3 \cdot 2 = 7$ , т.е.  $k \leq 7$ .

в) Существует элемент  $a$  множества  $X$ , принадлежащий по крайней мере четырем трехэлементным множествам. Тогда все остальные элементы этих четырех множеств различны, а любое из оставшихся множеств также должно содержать элемент  $a$  (иначе такое множество имело бы по одному различному общему элементу с каждым из четырех множеств, т.е. содержало бы по меньшей мере 4 элемента). Таким образом, в этом случае имеем  $1 + 2 \cdot k_n \leq n$ , т.е.  $k_n \leq [(n-1)/2]$ .

Для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  имеем  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_3 = k_4 = 1$ ,  $k_5 = 2$ . Пусть  $n = 6$ . Тогда ни один элемент не принадлежит сразу трем множествам, иначе их объединение состояло бы из 7 элементов. Поэтому имеет место случай а) и  $k_6 \leq 4$ . С другой стороны, существует пример четырех множеств: если  $X = \{a; b; c; d; e; f\}$ , то трехэлементными подмножествами могут быть  $\{a; b; c\}$ ,  $\{c; d; e\}$ ,  $\{e; f; a\}$ ,  $\{b; d; f\}$ . Таким образом,  $k_6 = 4$ . Пусть  $n \in \{7; 8; \dots; 16\}$ .

Тогда, если имеет место случай в), то количество множеств не превосходит  $\lfloor (16-1)/2 \rfloor = 7$ ; если же имеет место случай а) или б), то это количество также не превосходит 7. С другой стороны, если множество  $X$  среди своих элементов содержит 7 элементов  $a, b, c, d, e, f, g$ , то существует пример семи трехэлементных подмножеств:  $\{a; b; c\}$ ,  $\{c; d; e\}$ ;  $\{e; f; a\}$ ,  $\{b; d; f\}$ ,  $\{a; g; d\}$ ,  $\{b; g; e\}$ ,  $\{c; g; f\}$ . Таким образом  $k_n = 7$  при  $n = 7, 8, \dots, 16$ . Наконец, если  $n \geq 17$ , то в любом из случаев а), б), в) справедлива оценка  $k_n \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ , причем эта оценка достигается при следующем выборе трехэлементных подмножеств: один из элементов является общим для всех множеств, а остальные элементы (кроме, быть может, одного в случае четного  $n$ ) разбиваются на пары и образуют с общим элементом требуемые подмножества. Таким образом,

$$k_n = \lfloor (n-1)/2 \rfloor \text{ при } n \geq 17.$$

**9.39.** Предположим противное. Тогда любые два из выбранных подмножеств либо не пересекаются, либо имеют ровно два общих элемента. Если подмножества  $A$  и  $B$  имеют ровно два общих элемента, то будем писать  $A \sim B$ . Пусть  $A, B, C$  – три подмножества. Докажем, что если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$ . Действительно, пусть  $A = \{a; b; c\}$ ,  $B = \{a; b; d\}$ . Так как множество  $C$  должно иметь с множеством  $B$  два общих элемента, среди которых обязательно есть  $a$  или  $b$ , то  $C$  пересекается с  $A$ , а значит,  $C \sim A$ . Таким образом, все выбранные подмножества разбиваются на классы, в каждом из которых любые два разных множества имеют ровно два общих элемента, а множества из разных классов не пересекаются. Для каждого класса множеств возможны 3 случая:

- 1) класс ровно 3 элемента;
- 2) класс охватывает ровно 4 элемента;
- 3) класс охватывает больше 4 элементов.

В первом случае класс состоит ровно из одного множества, втором – количество множеств не больше четырех (так как у множества из 4 элементов существует всего 4 различных трехэлементных подмножества). Рассмотрим третий случай. Пусть выбраны два множества из рассматриваемого класса:  $A = \{a; b; c\}$  и  $B = \{a; b; d\}$ . Существует элемент  $e$ , отличный от  $a, b, c, d$  и

принадлежащий некоторому множеству  $C$  из этого класса. Из условий  $A \sim C$  и  $B \sim C$  получаем, что  $C = \{a; b; e\}$ . Поэтому и любое множество  $D$  из этого класса в силу условий  $A \sim D$ ,  $B \sim D$ ,  $C \sim D$  содержит элементы  $a$  и  $b$ . Тогда количество множеств в классе ровно на 2 меньше количества элементов в этом классе (каждому элементу, отличному от  $a$ ,  $b$ , соответствует ровно одно множество, которому он принадлежит). Таким образом, в каждом классе количество множеств не больше количества элементов. Однако общее количество множеств больше общего количества элементов. Противоречие.

**9.40.** Докажем индукцией по  $n \in \mathbf{N}$ , что если есть  $n$  компаний  $A_1, \dots, A_n$  и  $N$  городов  $P_1, \dots, P_N$ , причем  $N > 2^n$  и любые два города соединены авиалиниями, то хотя бы одна компания сможет обеспечить круговое путешествие с нечетным числом авиалиний. Поскольку  $1983 > 1024 = 2^{10}$ , то требуемое в задаче утверждение будет доказано. Если  $n = 1$ , то  $N \geq 3$  и  $P_1 P_2 P_3 P_1$  – искомое путешествие. Пусть утверждение доказано для числа  $n - 1$ . Докажем его для числа  $n$ . Пусть все круговые путешествия компании  $A_n$  состоят из четного числа авиалиний (иначе утверждение можно считать доказанным). Тогда разобьем города на две группы

$$R = \{R_1; \dots; R_k\} \text{ и } Q = \{Q_1; \dots; Q_m\}$$

следующим образом. Положим  $P_1 \in R$ . Далее все города, в которые можно прилететь на самолетах компании  $A_n$  без пересадок из  $P_1$ , включим в группу  $Q$ . Все города, в которые можно прилететь на самолетах компании  $A_n$  из городов, лежащих в  $Q$ , без пересадок, включим в  $R$ , и т.д. При этом никогда не случится так, что два города из одной группы ( $R$  или  $Q$ ) связаны авиалинией компании  $A_n$  (иначе появится круговое путешествие с нечетным числом авиалиний). Если мы исчерпали все города, в которые можно прилететь из  $P_1$ , на самолетах компании  $A_n$ , то включим в  $R$  любой из оставшихся городов и продолжим описанные действия (до тех пор, пока все города не будут распределены по группам). Хотя бы в одной из групп  $R$  или  $Q$  находится более

чем  $2^{n-1}$  городов (ибо  $k + m = N > 2^n$ ), а внутри каждой из этих групп все перелеты обеспечивают компании  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  (так как компания  $A_n$  соединяет только города из  $R$  с городами из  $Q$ ). Остается применить предположение индукции.

**9.41.** Назовем особой такую шоколадку, на которой изображен портрет, ранее не встречавшийся. Пусть среди купленных шоколадок имеется ровно  $k$  различных. Обозначим через  $M_k$  среднее количество шоколадок, которое надо купить после этого, чтобы последняя из них оказалась особой. Тогда с вероятностью  $(n - k)/n$  очередная шоколадка будет особой, а с вероятностью  $k/n$  будет куплена неособая шоколадка, после чего среднее количество шоколадок, которые последуют до особой, снова равно  $M_k$ . Получаем уравнение

$$M_k = \frac{n - k}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} (1 + M_k),$$

откуда  $M_k = n/(n - k)$ . Тогда среднее число шоколадок, которые надо купить, равно

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n - k} = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right).$$

## 10 ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**10.1.** Функция  $p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_n z^{-n}$  монотонно убывает от  $\infty$  до 0, когда  $z$  монотонно возрастает вдоль положительной оси, следовательно, она принимает значение 1 в одной и только одной точке  $\zeta$ . Имеем:

$$z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \dots - p_n > 0 \text{ или } \leq 0$$

смотря по тому, будет ли  $z > \zeta$  или  $z \leq \zeta$ .

**10.2.** Имеем:

$$|z_0|^n = |a_1 z_0^{n-1} + a_2 z_0^{n-2} + \dots + a_n| \leq |a_1| |z_0|^{n-1} + |a_2| |z_0|^{n-2} + \dots + |a_n|,$$

следовательно, согласно 10.1  $|z_0| \leq \zeta$ .

**10.3.** Применить 10.2 к  $a_n^{-1} z^n P(z^{-1})$ .

**10.4.** Вспомогательные полиномы, рассматриваемые в задачах 10.2 и 10.3, в данном случае тождественно совпадают и равны  $z^n - |c|$ .

**10.5.** Пусть  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| > 0$  (в противном случае утверждение тривиально). Согласно 10.2 достаточно доказать, что положительное число  $\zeta$ , для которого

$$\zeta^n = |a_1| \zeta^{n-1} + |a_2| \zeta^{n-2} + \dots + |a_n|,$$

удовлетворяет неравенству

$$\zeta \leq \max \left( \frac{d_n}{d_{n-1}}, \sqrt{\frac{d_n}{d_{n-2}}}, \dots, \sqrt[n]{\frac{d_n}{d_0}} \right).$$

Из неравенства

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \zeta^{-k} = 1 \geq \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{d_{n-k}}{d_n}$$

вытекает, что

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \left| \zeta^{-k} - \frac{d_{n-k}}{d_n} \right| \geq 0.$$

Следовательно, среди чисел  $\zeta^{-k} - \frac{d_{n-k}}{d_n}$  имеется по крайней мере одно неотрицательное.

**10.6.** а) Полагаем в 10.5  $d_n = n$ , далее  $d_{n-k} = |a_k|^{-1}$  для  $a_k \neq 0$  и  $d_{n-k} = \varepsilon^{-1}$  для  $a_k = 0$  ( $\varepsilon > 0$ ). Имеем:

$$\sqrt[k]{\frac{d_n}{d_{n-k}}} = \begin{cases} \sqrt[k]{n|a_k|} & \text{для } a_k \neq 0, \\ \sqrt[k]{n\varepsilon} & \text{для } a_k = 0. \end{cases}$$

Беря теперь  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем наше утверждение.

б) Полагаем в 10.5

$$d_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1,$$

далее,  $d_{n-k} = \binom{n}{r} |a_k|^{-1}$ , для  $a_k \neq 0$  и  $d_{n-k} = \varepsilon^{-1}$  для  $a_k = 0$  ( $\varepsilon > 0$ ). Дальше рассуждаем, как в а).

**10.7.** При  $|z| \leq 1, z \neq 1$  имеем:

$$\begin{aligned} & \left| (1-z)(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n) \right| = \\ & = \left| p_0 - (p_0 - p_1)z - (p_1 - p_2)z^2 - \dots - (p_{n-1} - p_n)z^n - p_n z^{n+1} \right| \geq \\ & \geq p_0 - \left| (p_0 - p_1)z + (p_1 - p_2)z^2 + \dots + p_n z^{n+1} \right| > \\ & > p_0 - (p_0 - p_1 + p_1 - p_2 + \dots + p_n) = 0, \end{aligned}$$

так как  $(p_0 - p_1)z, (p_1 - p_2)z^2, \dots, p_n z^{n+1}$  не могут все иметь одинаковый аргумент (за исключением случая  $z \geq 0$ , когда утверждение и без того очевидно). Более слабый результат ( $<$  вместо  $\leq$ ) прямо вытекает из 10.2.

**10.8.** Заменяем  $z$  на  $\frac{z}{\rho}$ , соответственно на  $\frac{\rho}{z}$  ( $\rho$  положительно), и к полученному таким образом уравнению, подобрав соответственным образом  $\rho$ , применяем 10.7 (во втором случае предварительно умножив обе части уравнения на  $z^n$ ).

**10.9.** Мы можем принять, что прямой, рассматриваемой в задаче, служит мнимая ось, и  $\Re z_\nu > 0$  при всех значениях (этого всегда можно добиться путем умножения на множитель вида  $e^{i\alpha}$ ). Тогда также  $\Re \frac{1}{z_\nu} > 0$  и

$$\Re(z_1 + z_2 + \dots + z_n) > 0, \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n \neq 0,$$

$$\Re\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}\right) > 0, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

Утверждение сохраняет силу и тогда, когда все точки расположены в замкнутой полуплоскости, определяемой заданной прямой, если только не все они лежат на этой прямой.

**10.10.** См. 10.9.

**10.11.** Применяем 10.10 к  $m_1(z_1 - z), m_2(z_2 - z), \dots, m_n(z_n - z)$ . Какова бы ни была прямая  $g'$ , проходящая через  $z = 0$ , точка  $z_\nu$  всегда лежит по ту же сторону прямой  $g$ , проходящей через  $z$  параллельно  $g'$ , по которую  $m_\nu(z_\nu - z)$  лежит относительно прямой  $g'$ .

**10.12. Первое решение.** Вектор, определяемый комплексным числом  $\frac{1}{z-a}$ , представляет силу, приложения к  $a$  в направлении  $z$ , обратно пропорциональную расстоянию между этими двумя точками. Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — нули  $P(z)$  и  $z$  — отличный от них нуль  $P'(z)$ . Тогда

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{z - z_v} = 0,$$

то есть

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = 0,$$

и, значит,  $z$  представляет положение равновесия материальной точки, притягиваемой неподвижными точками  $z_1, z_2, \dots, z_n$  с силами, обратно пропорциональными расстоянию. Если бы теперь  $z$  лежала вне наименьшего выпуклого полигона, содержащего все  $z_v$  то силы, с которыми действуют на  $z$  отдельные точки, давали бы результирующую, отличную от нуля, что невозможно.

**Второе решение.** В тех же обозначениях, что и выше, имеем:

$$\frac{z - z_1}{|z - z_1|^2} + \frac{z - z_2}{|z - z_2|^2} + \dots + \frac{z - z_n}{|z - z_n|^2} = 0,$$

откуда

$$z = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1),$$

где  $v$ -я «масса»  $m_v$  пропорциональна  $\frac{1}{|z - z_v|^2}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ).

**10.13.** Полагая  $z_n = x_n + iy_n$ , имеем  $|z_n| \leq \frac{x_n}{\cos \alpha}$ . Тем самым из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  вытекает и сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ . Обратное очевидно.

**10.14.** Положим  $z_n = x_n + iy_n$ . Из предположения задачи вытекает последовательно сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2),$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^2 - y_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2.$$

**10.15.** Пример:  $z_n = e^{2\pi i n \theta} (\ln(n+1))^{-1}$ ,  $\theta$  иррационально. Сумма  $\sum_{v=1}^n e^{2\pi i v k \theta}$  при  $n \rightarrow \infty$  остается ограниченной.

**10.16.** Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|^2 = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \dots = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)_{x=i} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}.$$

Положим  $i + n = \sqrt{1+n^2} e^{2\pi i \vartheta_n}$ ,  $0 < \vartheta_n < \frac{1}{4}$ , тогда  $\operatorname{tg} 2\pi \vartheta_n = \frac{1}{n}$ ,

следовательно, ряд  $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n + \dots$  расходится, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = 0$ . Имеем:

$$\arg z_n = 2\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n - [\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n]).$$

Предельные точки последовательности  $z_n$  заполняют окружность

$$|z| = \left(\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**10.17.** Если четыре части ряда, состоящие каждая из членов, содержащихся в одном и том же замкнутом квадранте ( $\Re z \geq 0$ ,  $\Im z \geq 0$  и т.д.), сходятся, то ряд сходится абсолютно.

## 11 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**11.1.** Утверждение доказывается индукцией по  $n$ . Основание при  $n = 1$  очевидно. Осуществим индуктивный переход от  $n - 1$  к  $n$ . Пусть вектора  $x_1, \dots, x_n$  линейно зависимы, т.е.  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$  для ненулевого набора чисел  $c_1, \dots, c_n$ . Тогда  $c_1Ax_1 + \dots + c_nAx_n = 0$ . Вычитая из второго равенства первое и замечая, что  $Ax_1 - x_1 = 0$  и  $Ax_k - x_k = x_{k-1}$  при  $k \geq 1$ , получим  $c_2x_1 + c_3x_2 + \dots + c_nx_{n-1} = 0$ . В силу предположения индукции  $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ , откуда и  $c_1 = 0$ , получили противоречие с предположением линейной зависимости  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**11.2.** Из перестановочности матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  следует, что у них существует общий собственный вектор. Действительно, пусть  $\lambda_1$  – какое-то собственное число матрицы  $A$  (может быть, комплексное),  $V_1$  – соответствующее собственное подпространство оператора  $A$ . Тогда оператор  $B$  отображает  $V_1$  в  $V_1$ . Действительно, если  $x \in V_1$ , т.е.  $Ax = \lambda_1x$ , то  $A(Bx) = BAx = \lambda_1Bx$ , т.е.  $Bx \in V_1$ . Следовательно, найдется собственное число  $\lambda_2$  оператора  $B$  в  $V_1$  и собственное подпространство  $V_2 \subset V_1$ . Аналогично оператор  $C$  отображает  $V_2$  в  $V_2$ , поэтому найдется собственное число  $\lambda_3$  и собственный вектор  $x \in V_2$ , который является также собственным вектором операторов  $A$  и  $B$ .

Комплексные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  являются двумерными векторами над полем  $\mathbf{R}$ . Поэтому они линейно зависимы над  $\mathbf{R}$ , т.е. для ненулевого набора действительных чисел  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3 = 0.$$

Следовательно,  $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(x) = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3)x = 0$ , тем самым матрица  $\alpha A + \beta B + \gamma C$  вырождена.

**11.3.** Искомый вектор  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . Нетрудно проверить, что

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A^{n-1}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

то есть вектора  $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$  действительно образуют базис.

Если матрица  $A$  подобна диагональной, то существует базис  $e_1, \dots, e_n$ , состоящий из собственных векторов матрицы  $A$ . Пусть соответствующие собственные числа есть  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Если найденный выше вектор  $x$  имеет разложение

$$x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n,$$

то

$$Ax = \beta_1 x_1 e_1 + \dots + \beta_n x_n e_n,$$

$$A^2x = \beta_1^2 x_1 e_1 + \dots + \beta_n^2 x_n e_n,$$

.....

$$A^{n-1}x = \beta_1^{n-1} x_1 e_1 + \dots + \beta_n^{n-1} x_n e_n.$$

Так как вектора  $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$  образуют базис, то отсюда следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \dots & \beta_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

невырождена, и, следовательно, все  $\beta_i$  различны.

**11.4.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда  $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , а так как  $1983 \equiv -1 \pmod{4}$ , то  $A^{1983} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**11.5.** Действительно,  $(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = E - A^k = E$ .

**11.6.** Невозможно. Действительно, из равенства  $AB - BA = A$  следует  $ABA^{-1} - B = E$ . Но матрицы  $B$  и  $ABA^{-1}$  подобны и тем самым имеют одинаковый след (это можно доказать, например, так:  $\det(ABA^{-1} - \lambda E) = \det(A(B - \lambda E)A^{-1}) = \det(B - \lambda E)$ , т.е. характеристические полиномы матриц  $B$  и  $ABA^{-1}$  совпадают, а след матрицы является коэффициентом ее характеристического полинома при  $(-\lambda)^{n-1}$ , где  $n$  – порядок матриц).

Следовательно,  $\text{tr}(ABA^{-1} - B) = 0$ , но  $\text{tr}E = n \neq 0$ .

**11.7.** Матрица  $P$  получается из единичной матрицы перестановкой  $i$ -го и  $j$ -го столбцов.

**11.8.** Заметим, что матрицы, указанные в условии задачи, образуют группу по умножению: легко проверяется, что произведение двух таких матриц удовлетворяют условию, а обратная матрица совпадает с транспонированной.

Так как эта группа конечного порядка, то для некоторого натурального  $k$   $A^k = E$ , откуда  $A^{k-1} = A^{-1} = A^T$ .

**11.9.** Любую симметрическую матрицу второго порядка можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

откуда  $a_{12} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos t \sin t = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2t$ , так что

$$(a_{12})_{\max} = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2}, \quad (a_{12})_{\min} = -\frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2}.$$

**11.10.** Определитель  $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$  равен 25, покажем, что большее

значение невозможно. Действительно, если в матрице элементы, равные 4, находятся в одной строке (столбце), то, раскладывая его по этой строке (столбцу) найдем, что значение определителя не превосходит  $4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 = 18$ . Если элементы, равные 4, находятся в разных строках и столбцах, то определитель равен сумме членов, абсолютная величина одного из которых равна 16, двух  $-4$  и трех  $-1$ . Если хотя бы один из членов равен  $(-16)$  или  $(-4)$ , то величина определителя меньше чем 25, поэтому максимальный

определитель перестановкой строк и столбцов приводится к виду  $\begin{vmatrix} 4 & \varepsilon & \gamma \\ -\varepsilon & 1 & \delta \\ \nu & -\delta & 4 \end{vmatrix}$ ,

где  $\varepsilon, \delta, \gamma, \nu \in \{-1, +1\}$ , а максимальное значение такого определителя, очевидно, равно 25.

**11.11.** Матрица  $B = A^* A$  представляет собой диагональную матрицу, у которой по главной диагонали стоят квадраты длин векторов – столбцов матрицы  $A$ . Но  $\det B = \det^2 A$ , а  $\det B$  равен произведению ее диагональных элементов, что и доказывает предложение.

**11.12.** Так как при  $j < i$   $p_{ij} = 0$ , то матрица  $\|p_{ij}\|$  треугольная и  $P_n = 1$ . Рассмотрим матрицу  $\|q_{ij}^{(k)}\|$  размера  $(n-k) \times (n-k)$ , где  $q_{ij}^{(k)}$  – число общих делителей  $i+k$  и  $j+k$  больших, чем  $k$ . Пусть уже доказано, что  $Q_k = \det \|q_{ij}^{(k)}\|$  и  $k < n-1$  (при  $k=0$  это верно). Тогда, очевидно,  $q_{11}^{(k)} = 1$  и  $q_{i1}^{(k)} = 1$ , если  $i+k$  делится на  $k+1$  и  $q_{i1}^{(k)} = 0$  в противном случае. Вычитая первую строку из каждой строки с номером, делящим  $k+1$ , получаем матрицу, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \vdots & & \\ 0 & & & \\ & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ & \vdots & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} A, \text{ где } A = \|q_{ij}^{(k+1)}\| \text{ т.е. } Q_k = \det \|q_{ij}^{(k+1)}\|. \text{ При } k = n-1 \text{ получаем } Q_k = 1.$$

**11.13.** Пусть  $B = \|b_{ij}\|$ ,  $C = \|c_{ij}\|$ , где при  $i \neq j$   $b_{ij} = c_{ij} = \frac{a_{ij}}{j-i}$ ,  $b_{ii} = 0$ ,  $c_{ii} = i$ . Тогда элемент матрицы  $BC - CB$  с индексами  $i$  и  $j$  есть

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj} - \sum_{k=1}^n c_{ik} b_{kj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n b_{ik} b_{kj} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n b_{ik} b_{kj} + b_{ij} j - i b_{ij} = (j-i) b_{ij} = a_{ij}$$

при  $i \neq j$  и равен 0 при  $i = j$ .

**11.14.** Предположим, что  $A = \|a_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq n}$  вырождена. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация ее строк, равная 0:  $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n = 0$ , где  $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ . Пусть  $\lambda_s$  – максимальный по модулю коэффициент; имеем

$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{js} = 0$ , а с другой стороны, эта сумма равна  $\lambda_s a_{ss} + \lambda_r a_{rs}$  при некотором  $r$ , причем  $a_{rs} = 1$  и  $a_{ss} > 1$ , так что  $\lambda_r = -a_{ss} \lambda_s$  и  $|\lambda_r| > |\lambda_s|$  – противоречие. Следовательно,  $A$  – невырожденная матрица.

**11.15.** Пусть  $T$  – ортогональная матрица, приводящая матрицу  $A$  к диагональному виду:  $\tilde{A} = T^{-1}AT$ ,  $\tilde{B} = T^{-1}BT$ . Тогда

$$\begin{aligned}\text{Tr}(ABAB) &= \text{Tr}(T^{-1}ABABT) = \text{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}), \\ \text{Tr}(A^2B^2) &= \text{Tr}(T^{-1}A^2B^2T) = \text{Tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2).\end{aligned}$$

Пусть  $\tilde{A} = \|a_{ij}\|$ ,  $\tilde{B} = \|b_{ij}\|$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Тогда

$$\text{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2,$$

ибо  $\tilde{B}$  – симметричная матрица,

$$\text{Tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ii}^2b_{ij}^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2)b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2b_{ii}^2,$$

так что

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}) - \text{Tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2a_{ii}a_{jj} - a_{ii}^2 - a_{jj}^2)b_{ij}^2 = \\ &= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Равенство имеет место при соблюдении условия  $a_{ii} - a_{jj} \neq 0 \Rightarrow b_{ij} = 0$ ; в этом случае, как легко проверить, матрицы  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ , а с ними и матрицы  $A$  и  $B$  перестановочны; очевидно, это условие является и достаточным для равенства  $\text{Tr}(ABAB)$  и  $\text{Tr}(A^2B^2)$ .

**11.16.** Пусть для векторов  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  условие задачи не выполняется, а именно:  $|x_1 + x_2| > |x_3 + x_4 + x_5|$ , и аналогичные неравенства выполняются для всех перестановок данных векторов. Возводя указанное неравенство в квадрат, получим  $x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1, x_2) > x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2(x_3, x_4) + 2(x_4, x_5) + 2(x_3, x_5)$  (здесь  $x_i^2$  обозначает скалярное произведение  $(x_i, x_i)$ ). Складывая все аналогичные неравенства, получаемые перестановками векторов  $x_i$ , найдем

$$4 \sum_{i=1}^5 x_i^2 + 2 \sum_{i>j} (x_i, x_j) > 6 \sum_{i=1}^5 x_i^2 + 3 \cdot 2 \sum_{i<j} (x_i, x_j),$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 + 2 \sum_{i<j} (x_i, x_j) < 0,$$

$$\left( \sum_{i=1}^5 x_i \right)^2 < 0,$$

то есть получили противоречие.

**11.17.** Пусть все вектора выходят из начала координат – точки  $O$ . Зафиксируем полярную ось и обозначим через  $e_\varphi$  единичный вектор, образующий угол  $\varphi$  с полярной осью ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Решение задачи основано на следующем факте: для любого вектора  $\nu$  имеет место равенство

$$|\nu| = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |(\nu, e_\varphi)| d\varphi. \quad (1)$$

Действительно, если полярный угол вектора  $\nu$  равен  $a$ , то правая часть в (1) равна

$$\frac{|\nu|}{4} \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi - a)| d\varphi = \frac{1}{4} |\nu| \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = |\nu|.$$

Если  $v_1, \dots, v_n$  – данные вектора, то из (1) имеем

$$\pi = \sum_{k=1}^n |v_k| = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n |(v_k, e_\varphi)| d\varphi.$$

Поэтому найдется такой угол  $\varphi$ , что

$$\sum_{k=1}^n |(v_k, e_\varphi)| \geq \frac{4\pi}{2\pi} = 2. \quad (2)$$

Обозначим через  $u_1, u_2, \dots, u_m$  те из векторов  $v_k$ , для которых  $(v_k, e_\varphi) \geq 0$ , а через  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-m}$  – те, для которых  $(v_k, e_\varphi) < 0$ . Из (2) следует, что либо  $\sum_{i=1}^m (u_i, e_\varphi) \geq 1$ , либо  $\sum_{i=1}^{n-m} -(\omega_i, e_\varphi) \geq 1$ . Следовательно, либо  $|u_1 + \dots + u_m| \geq 1$ , либо  $|\omega_1 + \dots + \omega_{n-m}| \geq 1$ , что и требовалось доказать.

**11.18.** Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные числа матрицы  $A$ , то неравенство задачи эквивалентно следующему

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \right) \geq n^2,$$

что в свою очередь эквивалентно известному неравенству между средним арифметическим и средним гармоническим:

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \geq \frac{n}{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \dots + 1/\lambda_n}.$$

**11.19.** Решим сначала задачу в частном случае, когда  $A = I$  – единичная матрица. В некотором ортонормированном базисе матрица  $B$  имеет

диагональный вид с собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  на диагонали. Поэтому

$$\begin{aligned} \det(I+B) &= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n) > \\ &> 1+\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n = \det I + \det B. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к общему случаю. Найдем такой положительно определенный оператор  $C$ , чтобы  $A = C^2$ . Наиболее просто он ищется в собственном базисе оператора  $A$ : если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные числа  $A$ , то в этом базисе матрица оператора  $C$  будет диагональной с числами  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$  на диагонали. Далее имеем  $A+B = C^2 + B = C(I + C^{-1}BC^{-1})C$ , поэтому  $\det(A+B) = (\det C)^2 \det(I + C^{-1}BC^{-1}) \geq \det A(1 + \det(C^{-1}BC^{-1})) = \det A + \det B$ . Здесь мы воспользовались тем очевидным фактом, что оператор  $C^{-1}BC^{-1}$  симметричен и положительно определен.

## 12 ГЕОМЕТРИЯ

**12.1.** Пусть дан эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , причем  $a \leq b$ . Тогда  $\frac{x^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{b^2}$ ,

$\frac{y^2}{b^2} \leq \frac{y^2}{a^2}$ , откуда для точки эллипса  $(x; y)$ :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b,$$

что и требовалось доказать.

**12.2.** Имеем

$$S_1 = t^3 - \int_0^t t^2 dt = \frac{2}{3}t^3,$$

$$S_2 = \int_t^1 t^2 dt - t^2(1-t) = \frac{1}{3} - t^2 + \frac{2}{3}t^3,$$

$$S_1 + S_2 = \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{3} - t^2,$$

$$(S_1 + S_2)' = 4t^2 - 2t,$$

и эта производная отрицательна при  $0 < t < 1/2$ , положительна при  $t > 1/2$  и равна нулю при  $t = 1/2$ . Отсюда  $(S_1 + S_2)_{\min} = 1/4$  достигается для  $t = 1/2$ , а  $(S_1 + S_2)_{\max} = 2/3$  — при  $t = 1$ . Задачу можно решать и из геометрических соображений, рассматривая кривую, симметричную кривой  $y = x^2$  относительно вертикальной прямой  $x = 1/2$ .

**12.3.** Пусть вырезан сектор в  $\varphi$  радиан; тогда на оставшейся части можно свернуть коническую воронку высоты  $h = R \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi - \varphi}{2\pi}\right)^2}$ , с радиусом основания  $r = \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} R$ . Обозначим  $x = \left(\frac{2\pi - \varphi}{2\pi}\right)^2$ ; тогда задача сводится к отысканию максимума выражения  $x\sqrt{1-x}$ , который достигается при  $x = 2/3$ , т.е. максимальный объем воронки имеем при  $\frac{2\pi - \varphi}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , или  $\varphi = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .

**12.4.** Уравнение касательной к эллипсу в точке  $(x_0; y_0)$  имеет вид  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ . Отсюда находим, что отрезки на осях координат, отсекаемые касательной, равны  $\frac{a^2}{x_0}$  и  $\frac{b^2}{y_0}$ . Тогда площадь треугольника равна  $\frac{ab}{2} \left| \frac{a}{x_0} \cdot \frac{b}{y_0} \right|$ . Так как  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , то  $\left| \frac{x_0}{a} \right| \left| \frac{y_0}{b} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = \frac{1}{2}$ , причем равенство

достигается при  $\left| \frac{x_0}{a} \right| = \left| \frac{y_0}{b} \right|$ . Следовательно, искомыми точками будут точки  $\left( \pm \frac{a}{\sqrt{2}}; \pm \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$ .

**12.5.** Поместим начало координат на прямой  $AB$  в точке, делящей расстояние  $AB$  в отношении  $2:1$ . Обозначив расстояние  $OB$  через  $c$ , имеем для любой точки  $M(x; y)$ , принадлежащей данному геометрическому месту точек,  $AM = 2MB$ , или

$$\sqrt{(x+2c)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

откуда  $(x-2c)^2 + y^2 = 4c^2$  – окружность радиуса  $2c$  с центром в точке  $(2c; 0)$ .

**12.6.** Уравнение касательной  $l_1$ , проведенной к параболе в точке  $(x_0; y_0)$ , имеет вид  $4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0$ ; уравнение перпендикуляра  $l_2$  к  $l_1$ , опущенного из  $(0; 0)$ , имеет вид  $y_0x - 2ay = 0$ . Координаты  $(x; y)$  точки пересечения  $l_1$  и  $l_2$  находятся теперь из системы

$$\begin{cases} 4ax + 2yy_0 - y_0^2 = 0, \\ y_0x - 2ay = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = \frac{y_0^3}{2(y_0^2 + 4a^2)}, \\ x = \frac{ay_0^2}{y_0^2 + 4a^2}. \end{cases}$$

Исключая параметр  $y_0$ , получаем

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0.$$

**12.7.** Расстояние от точки  $P(x; x^2)$  до точки  $Q(y; y-2)$  равно  $\sqrt{(x-y)^2 + (x^2 - y + 2)^2} = \sqrt{\varphi(x, y)}$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2(x-y) - 2(x^2 - y + 2)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  при  $y = \frac{x^2 + x}{2} + 1$  — точка минимума  $\varphi(x, y)$  при фиксированном  $x$ . Подставляя

такое  $y$  в выражение для  $\varphi(x, y)$ , получаем выражение  $R^2(x) = 2\left(\frac{x^2 - x}{2} + 1\right)^2$ .

Так как  $x^2 - x \geq -1/4$  и достигает этого наименьшего значения при  $x = 1/2$ , то

$\min R^2(x) = 2\left(\frac{-1/4}{2} + 1\right)^2 = 2(7/8)^2$  достигается при  $x = 1/2$ ; при этом искомое

наименьшее расстояние  $R(x) = \frac{7}{8}\sqrt{2}$ .

**12.8.** Расположим цилиндр радиуса 1 в пространстве так, чтобы он высекал на плоскости  $Oxy$  единичную окружность с центром в точке  $O$  и осью его служила бы ось  $Oz$ . Проведем через ось  $Ox$  и точку  $(0; 1; 1)$  плоскость  $\pi$ . Пусть  $P$  — точка, принадлежащая пересечению  $\pi$  с цилиндром и проектирующаяся в точку  $Q$  единичной окружности. Нетрудно теперь проверить, что если  $Q$  соответствует углу  $x$  поворота радиус-вектора, то  $|PQ| = \sin x$ .

**12.9.** Достаточно показать, что вектор  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  перпендикулярен каждому из векторов  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ . Имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + \\ &+ (\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}), \end{aligned}$$

где  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})$  — смешанное произведение. Учитывая  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$  и  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , получаем, что последнее выражение равно 0.

Аналогично,  $(c - a, a \times b + b \times c + c \times a) = 0$ . Если  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ , то векторы  $a, b, c$  компланарны.

**12.10.** Рассмотрим параболу  $y = ax^2$ ,  $a > 0$ . Нетрудно проверить, что ее внутренность расположена внутри острого угла, образованного прямыми  $y = \pm kx - \frac{k^2}{4a}$ , где  $k > 1$ , и для достаточно большого  $k$  этот угол можно взять сколь угодно малым. Поэтому если бы плоскость можно было покрыть внутренностями  $n$  парабол, то ее можно было бы покрыть и внутренностями  $n$  углов величиной  $\varepsilon < 2\pi/n$ , что, как легко убедиться, невозможно.

**12.11.** Для установления взаимно однозначного соответствия между точками замкнутого круга  $K$  радиуса 1 и открытого круга  $K'$  того же радиуса рассмотрим систему окружностей  $K_n$  радиуса  $1/n$  с центром в центре круга  $K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда (если считать, что центры  $K$  и  $K'$  совпадают)  $K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = K' \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} K_n$ , так что на этом множестве можно определить тождественное взаимно однозначное соответствие, после чего взаимно однозначно отобразить каждую окружность  $K_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) круга  $K$  на окружность  $K_{n+1}$ .

**12.12.** Пусть  $M$  – множество предельных точек множества  $A$ . Легко проверить, что  $M$  замкнуто. Так как все точки  $A$  изолированы, то  $A \cap M = \emptyset$ . Поэтому  $A = (A \cup M) \cap (R \setminus M)$ , где  $A \cup M$  – замыкание множества  $A$ ;  $R \setminus M$  – дополнение  $M$  до прямой  $R$  – открыто.

**13 ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ ПРЕДЛАГАЛИСЬ В СНГ И В  
СТРАНАХ ДАЛЬНЕГО ЗАРУБЕЖЬЯ ПРИ  
ПРОХОЖДЕНИИ КОНКУРСОВ С ПОСЛЕДУЮЩИМ  
ПРАВОМ ВЫЕЗДА В АНГЛИЮ, ГЕРМАНИЮ,  
ФРАНЦИЮ, США И ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ НА РАБОТУ В  
ОРГАНИЗАЦИИ, ТРЕБУЮЩИЕ ЗНАНИЙ В ОБЛАСТИ  
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ И  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**13.1.** Рассмотрим поведение  $y(x)$  на различных промежутках:

1)  $0 \leq x < 1$ :

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^n}{n} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1.$$

2)  $x = 1$ :  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1.$

3)  $1 < x < 2$ :  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \frac{x^n}{2^n}} = x.$

4)  $x = 2$ :  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot 2} = 2.$

5)  $x > 2$ :  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1} = \frac{x^2}{2}.$

6)  $-1 < x < 0$ :  $y = 1.$

7)  $-2 \leq x \leq -1$  – предел не существует.

8)  $x < -2$ :  $y = \frac{x^2}{2}.$

**13.2.** Функция  $y = \cos(2 \arccos x)$  определена при  $-1 \leq x \leq 1$ . При всех значениях  $x$ , удовлетворяющих этому неравенству,

$$y = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

**13.3.** При  $x > 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n = \frac{\pi}{2}(x-1)$ ;

при  $x = 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n = 0$ ;

при  $|x| < 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n = 0$ ;

при  $x \leq -1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n$  не существует.

График изображен на рис. 6.

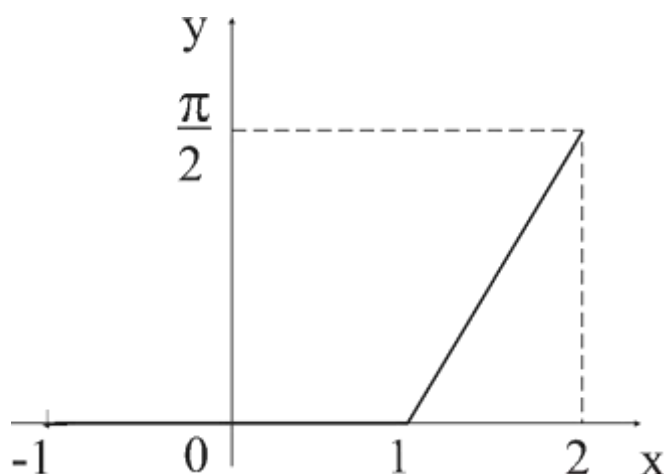


Рисунок 6 – Чертеж к задаче 13.3

**13.4.** В полярной системе координат уравнение имеет вид

$$r = \frac{3 \sin 2\varphi}{2 \sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} = \frac{3 \sin 2\varphi}{\sqrt{2} (2 - \sin 2\varphi) \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Так как  $r \geq 0$ , то для  $\varphi$  имеем три возможных промежутка:  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$\frac{3\pi}{4} < \varphi \leq \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\frac{\pi}{4}$ . Так как при замене  $\varphi$  на  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  выражение для  $r$  не

изменяется, кривая симметрична относительно оси  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . При  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

возрастает от 0 до  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ , при  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\frac{\pi}{4}$   $r$  возрастает от 0  $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$  до  $+\infty$

$\left(\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}\right)$ . При  $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}$   $r = -\frac{1+o(1)}{\sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$ , т.е. кривая имеет асимптоту,

определяемую уравнением  $r = -\frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$  или  $y = -(1+x)$ . Кривая

изображена на рис. 7.

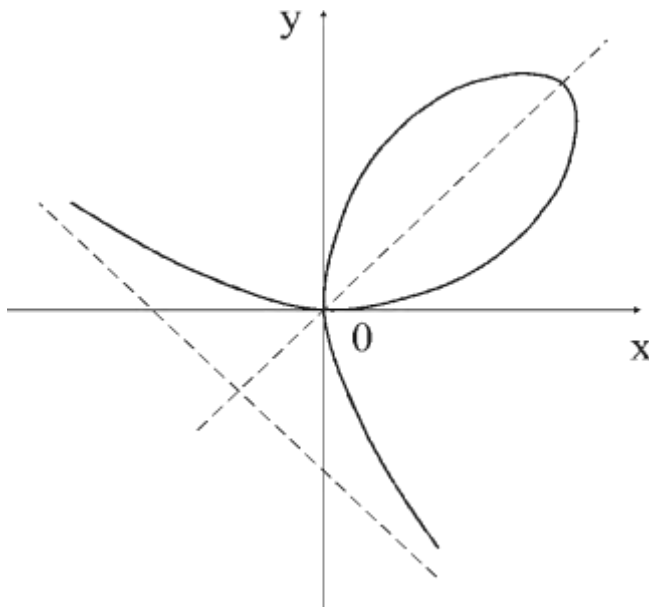


Рисунок 7 – Чертеж к задаче 13.4

**13.5.** Предположим противное: пусть векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+2}$  попарно образуют тупые углы, т.е. все скалярные произведения  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j < 0$  при  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n+2$ ).

Обозначим вектор  $-\mathbf{e}_{n+2}$  через  $\mathbf{a}$ ; в этом случае

$$\mathbf{e}_i \mathbf{a} > 0, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j > 0 \text{ при } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (1)$$

Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$  линейно зависимы, так как пространство  $n$ -мерно:

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_{n+1} \mathbf{e}_{n+1} = 0, \quad (2)$$

причем не все  $\lambda_i = 0$ . Пусть вектор  $\mathbf{a}$  имеет координаты  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ ; тогда в силу условия (1), первые координаты векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$  будут положительны. Отсюда заключаем, что среди коэффициентов  $\lambda_i$  в равенстве (2) должны быть как положительные, так и отрицательные числа. Обозначив сумму всех членов  $\lambda_j \mathbf{e}_j$  с отрицательными  $\lambda_j$  через  $\mathbf{v}$ , а сумму членов  $\lambda_j \mathbf{e}_j$  с положительными  $\lambda_j$  через  $\mathbf{u}$ , перепишем равенство (2) в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . Умножив это соотношение скалярно на  $\mathbf{u}$ , получим

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{u}. \quad (3)$$

Но в силу соотношения (1)  $\mathbf{v}\mathbf{u} < 0$ ; с другой стороны,  $\mathbf{u}\mathbf{u} \geq 0$ .

Полученное противоречие и доказывает теорему.

**13.6 Первое решение.** Пусть уравнения данных парабол имеют вид

$$y - A(x - a)^2 = 0 \text{ и } x - B(y - b)^2 = 0.$$

Пучок кривых 2-го порядка, проходящих через точки пересечения наших парабол, записывается уравнением

$$y - A(x - a)^2 + \lambda[x - B(y - b)^2] = 0,$$

где  $\lambda$ -параметр. Легко видеть, что при  $\lambda = \frac{A}{B}$  кривая пучка является

окружностью.

**Второе решение.** Пусть точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$  пересечения данных парабол  $y = A(x - a)^2$  и  $x = B(y - b)^2$  отвечают комплексным числам  $z_1, z_2, z_3, z_4$  ( $z_j = x_j + iy_j, j = 1, 2, 3, 4$ , где  $(x_j, y_j)$  – координаты точек пересечения парабол). Так как эти точки неколлинеарные, то для доказательства того, что они лежат на одной окружности, достаточно показать, что их сложное отношение  $W(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}$  вещественно.

Уравнения парабол приводят к следующему уравнению четвертого порядка, которому должны удовлетворять абсциссы  $x_1, x_2, x_3, x_4$  точек пересечения парабол:

$$x = B[A(x - a)^2 - b^2], BA^2x^4 - 4BA^2ax^3 + \dots = 0.$$

Сумма корней этого уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv \sigma = \frac{4BA^2a}{BA^2} = 4a.$$

Покажем, что мнимая часть сложного отношения чисел  $z_1, z_2, z_3, z_4$  равна нулю. Воспользовавшись тем, что  $y_i = A(x_i - a)^2$ , получим

$$\begin{aligned} W(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \frac{[(x_3 - x_1) + i(y_3 - y_1)][(x_4 - x_2) + i(y_4 - y_2)]}{[(x_4 - x_1) + i(y_4 - y_1)][(x_3 - x_2) + i(y_3 - y_2)]} = \\ &= \frac{(x_3 - x_1) \{1 + i[A(x_3 - a)^2 - 2aA]\} (x_4 - x_2) \{1 + i[A(x_4 - a)^2 - 2aA]\}}{(x_4 - x_1) \{1 + i[A(x_4 - a)^2 - 2aA]\} (x_3 - x_2) \{1 + i[A(x_3 - a)^2 - 2aA]\}} = \\ &= W(x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{(\text{вещ}) + i(A\sigma - 4aA)}{(\text{вещ}) + i(A\sigma - 4aA)} = \text{вещественному числу.} \end{aligned}$$

**Третье решение.** В расширенной (до проективной) евклидовой плоскости две пересекающиеся параболы определяют пучок кривых второго порядка, пересекающих несобственную прямую в парах точек, принадлежащих одной инволюции. Двойными точками этой инволюции являются несобственные точки данных парабол. Обе несобственные точки лежат на

перпендикулярных, согласно условию задачи, осях данных парабол, поэтому циклические точки плоскости принадлежат этой инволюции. Следовательно, в пучке кривых второго порядка должна содержаться кривая второго порядка, проходящая через обе циклические точки. Такой кривой является или окружность, или пара прямых, одна из которых является несобственной, или пара изотропных прямых. Но четыре вещественные точки пересечения двух парабол не принадлежат одной прямой или паре изотропных прямых, откуда следует, что четыре точки пересечения обоих парабол принадлежат одной окружности, что и требовалось доказать.

### 13.7. Пусть

$$f(x) = \frac{x^k (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)}{x^l (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m)},$$

где  $a_0, b_0, a_n, b_m$  не равны нулю. Используя условие задачи, получаем:

$$\frac{x^{2(l-k)+m-n} (a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)}{(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0)} \equiv \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_m}. \quad (1)$$

Степени знаменателей одинаковы; поэтому одинаковы и степени числителей. Следовательно,  $m - n = 2(k - l)$ ;  $m$  и  $n$  одновременно четны и нечетны. Из соотношения (1) можно заключить, что

$$P_m(x) = b_m x^m + \dots + b_0 \equiv b_0 x^m + \dots + b_m$$

и

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \equiv a_0 x^n + \dots + a_n.$$

Откуда  $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots; b_0 = b_m, b_1 = b_{m-1}, \dots$ . Следовательно,  $P_m(x)$  и  $P_n(x)$  – так называемые возвратные многочлены, которые представимы в следующем виде: если  $n$  четно:  $n = 2n'$ , то  $P_{2n'}(x) = x^n \varphi_{n'}(z)$ , где

$z = x + \frac{1}{x}$ ,  $\varphi_{n'}(z)$  – многочлен степени  $n'$ ; если  $n$  нечетно:  $n = 2n' + 1$ , то

$P_{2n'+1}(x) = (x+1)x^{n'}\varphi_{n'}(z)$ , где  $z = x + \frac{1}{x}$ ,  $\varphi_{n'}(z)$ , – многочлен степени  $n'$ .

Далее, возможны два случая:

а)  $m = 2m'$  и  $n = 2n'$  четны. Тогда

$$f(x) = \frac{x^k x^{n'} \varphi_{n'}(z)}{x^l x^{m'} \varphi_{m'}(z)} = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)} x^{k-l+n'-m'} = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)};$$

б)  $m = 2m' + 1$  и  $n = 2n' + 1$  нечетны. Тогда

$$f(x) = \frac{(x+1)x^{k+n'}\varphi_{n'}(z)}{(x+1)x^{l+m'}\varphi_{m'}(z)} = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)} x^{k-l+n'-m'} = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)}.$$

**13.8.** Здесь доказательство первой части теоремы доставляется примером.

Рассмотрим на плоскости комплексных чисел множество  $A$ , состоящее из точек  $z_n = e^{i\pi/3n}$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , и множество  $B$ , состоящее из точки  $z'_0 = 0$  и точек  $z'_m = e^{i\pi/3m}$ , где  $m = 1, 2, \dots$  (рис.8). Очевидно, что  $D(A) = D(B) = 1$ . Отображение  $\varphi$  множества  $A$  на множество  $B$  определим формулой

$$\varphi(z_n) = z'_{n-1}.$$

Так как

$$|z_n - z_m| = |z'_n - z'_m| = 2 \sin\left(\frac{n\pi - m\pi}{6mn}\right)$$

при  $n > m > 1$ , то, очевидно,

$$\begin{aligned} |z_n - z_m| &= 2 \sin \frac{(n-m)\pi}{6nm} < 2 \sin \frac{(n-m)\pi}{6(n-1)(m-1)} = \\ &= |z'_{n-1} - z'_{m-1}| = |\varphi(z_n) - \varphi(z_m)|. \end{aligned}$$

А так как, кроме того,

$$|z_n - z_1| < 1 = |z'_{n-1} - z'_0| = |\varphi(z_n) - \varphi(z_1)|,$$

то отображение  $\varphi$  увеличивает все расстояния, откуда следует, что  $A < B$ .

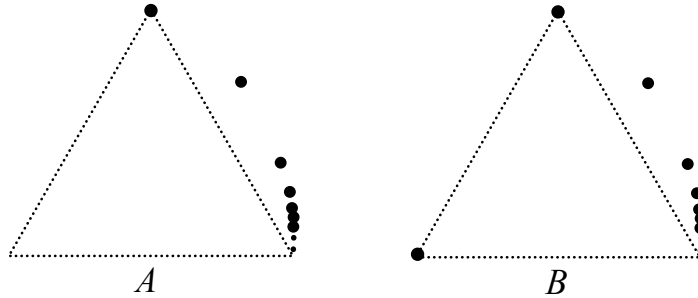


Рисунок 8 – Чертеж к задаче 13.8.

**13.9.** Первая часть теоремы устанавливается построением примера. Вот этот пример. Пусть  $P_0$  и  $Z$  – какие-либо две различные точки и  $\varphi$  – поворот вокруг точки  $Z$  на угол, несоизмеримый с полным углом, т.е. на такой угол  $w$ , число  $w/\pi$  иррационально. Обозначим, далее, через  $A_0$  множество точек  $P_n = \varphi^n(P_0)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , т.е. множество точек, полученных из точки  $P_0$   $n$ -кратным повторением поворота  $\varphi$ . Множество  $A_1 = \varphi(A_0)$  равно множеству  $A_0$ , (поскольку оно получается из  $A_0$  поворотом  $\varphi$ ); в то же время оно является (собственной) частью множества  $A_0$ , так как множество  $A_1$  не содержит точки  $P_0$ . В самом деле, точка  $P_0$  могла бы принадлежать множеству  $A_1$  лишь в том случае, если для некоторого  $m > 0$  было бы выполнено равенство  $P_m = P_0$ , т.е.  $mw \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ; но это невозможно в силу наложенного на угол  $w$  условия.

Этот простой пример приводит к множеству  $A_0$ , содержащему такую точку  $P_0$ , что  $A_0 \cong A_0 \setminus \{P_0\}$ , где знак  $\cong$  означает равенство множеств, (т.е. возможность совмещения этих множеств при помощи движения плоскости, а знак  $\setminus$  символизирует теоретико-множественную разность множеств). Существует ли такое множество  $A$ , что для любой его точки  $P$  имеет место

равенство  $A \cong A \setminus \{P\}$ ? Оказывается, что это невозможно. Более того, не существует множества  $A$  такого, что  $A \cong A \setminus \{P\}$  и  $A \cong A \setminus \{Q\}$ , где  $P$  и  $Q$  – две различные точки множества  $A$ .

**13.10.** То, что (при  $n > 2$ ) существуют  $n$ -точечные множества, в которых  $n$ -кратно реализуется наибольшее расстояние, показывает нижеследующая конструкция: рассмотрим множество, состоящее из произвольной точки  $P$  и  $n-1$  таких точек окружности единичного радиуса с центром в точке  $P$ , что наибольшее расстояние между ними равно единице. (Для нечетного  $n$  примером может служить также правильный  $n$ -угольник.).

Заметим еще, что в каждом множестве диаметра 1, содержащем  $3n$  точек, имеется не более чем  $3n^2$  пар точек, расстояние между которыми не меньше  $1/\sqrt{2}$ . Эту оценку для числа точек нельзя понизить, даже заменив расстояние  $1/\sqrt{2}$  расстоянием  $1-\varepsilon$ . Последнее видно из рассмотрения множества вершин  $n$  концентрических правильных треугольников с параллельными сторонами, длины сторон которых возрастают от  $1-\varepsilon$  до 1. (Близкий характер имеют задачи об оценке наименьшего возможного числа  $k(n)$  различных расстояний между  $n$  точками. Ясно, что  $k(n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , где прямыми скобками обозначена целая часть числа; для того чтобы убедиться в этом, достаточно предположить, что наши  $n$  точек являются вершинами правильного  $n$ -угольника. Если  $n$  точек являются вершинами выпуклого  $n$ -угольника, то число различных состояний между ними всегда  $\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ; однако точное значение функции  $k(n)$  остается неизвестным.)

На вопрос, какие расстояния можно реализовать, отвечают теоремы типа теоремы Штейнгаузена-Радемахера, которые, по существу, принадлежат теории меры и не могут быть отнесены к комбинаторной геометрии. Однако, оказывается возможным сформулировать теоремы такого рода, в которых предположения заимствованные из теории меры, заменены другими, имеющими чисто теоретико-множественный характер.

**13.11.** Для независимых случайных величин  $\eta_n = \frac{(-1)^{\xi_n}}{n}$ ,  $n \geq 1$ , применима теорема о трех рядах. Заметим, что

$$M\eta_n = \frac{p_0}{n} - \frac{p_1}{n}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} M\eta_n$  сходится тогда и только тогда, когда  $p_0 = p_1$  (необходимое условие

сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\xi_n}}{n}$ ). Если  $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\xi_n}}{n}$  сходится почти наверное.

**13.12.** Предположим, что функция  $f$  удовлетворяет условию задачи. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} Mf(a + \xi) da = M \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(a + \xi) da = \\ &= M \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-\xi)t} f(u) du = M e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(u) du = e^{-t^2/2} \widehat{f}(t), \end{aligned}$$

где  $\widehat{f}$  – преобразования Фурье функции  $f$ . Отсюда  $f \equiv 0$ , и по свойствам преобразования Фурье  $f(x) = 0$  почти всюду по мере Лебега.

**13.13.** Пусть  $r_1$  – корень скалярного уравнения  $r^N = 1$ . Положим

$$y_1 = c_0 + c_1 r_1 + \dots + c_{N-1} r_1^{N-1}.$$



$$(x, Bx) = \sum_{i=1}^k \mu_i y_i^2, \mu_i > 0, 1 \leq k < N. \quad (1)$$

Так как  $B$  по предположению – неотрицательно определенная матрица, то форма  $(x, Bx)$ , как мы знаем, может быть приведена к виду (1). Это же преобразование, примененное к форме  $(x, Ax)$ , дает

$$(x, Ax) = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} y_i y_j. \quad (2)$$

Если квадратичная форма  $(x, Ax)$  положительна при всех  $x$  таких, что  $(x, Bx) = \sum_{i=1}^k \mu_i y_i^2 = 0$ , то неравенство

$$\sum_{i,j=k+1}^N c_{ij} y_i y_j > 0 \quad (3)$$

должно выполняться для всех нетривиальных наборов значений переменных  $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N$ .

В  $(N-k)$ -мерном пространстве векторов  $(y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_N)$  произведем ортогональное преобразование, которое приводит квадратичную форму (3) к сумме квадратов. Это преобразование не затрагивает переменных  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . В  $N$ -мерном пространстве векторов  $y$  запишем это преобразование в виде  $y = Sw$ . Тогда

$$\begin{aligned} (x, Ax) = Q(w) &= \sum_{i,j=1}^N c_{ij} y_i y_j = \\ &= \sum_{i=k+1}^N \mu_i w_i^2 + \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=1}^k d_{ij} w_i w_j + \sum_{i,j=1}^k d_{ij} w_i w_j, \end{aligned}$$

и теперь наша задача сводится к доказательству того, что квадратичная форма

$$\lambda \sum_{i=1}^k \mu_i w_i^2 + Q(\mathbf{w})$$

является положительно определенной, если  $\mu_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$ , и  $\lambda$  достаточно велико. Для завершения доказательства следует использовать следующий результат: квадратичная форма

$$\lambda \sum_{i=1}^k b_i x_i^2 + \sum_{i=k+1}^N b_i x_i^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^N a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j$$

будет положительно определенной, если  $b_i > 0$  и параметр  $\lambda$  достаточно велик.

**13.15. Указание:** исследовать многочлен  $t^{n+1}P(1/t) - 1$  при  $t \in [0; +\infty)$ . Другое решение основано на правиле Декарта: число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами отличается от числа перемен знака коэффициентов этого многочлена (причем коэффициенты, равные нулю, не учитываются) на неположительное четное число. А многочлен  $x^{n+1} - P(x)$  имеет ровно одну переменную знака.

**13.16.** Ряд расходится, поскольку его общий член

$$a_n = \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{p}{n} \right)^n \geq \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \neq 0$$

не удовлетворяет необходимому условию сходимости.

**13.17.** Сходимость знакоположительного ряда не изменяется при перегруппировке членов, поэтому запишем его как

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq 3)}}^9 S_k(n),$$

где

$$S_k(n) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i \notin I_3)}}^{10^n - 1} \frac{1}{10^n \cdot k + i}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k = \overline{1, 9},$$

$I_3$  – множество чисел, содержащих в десятичной записи цифру 3, и

$$A = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq 3)}}^9 \frac{1}{i} = \frac{6289}{2520} < 2,5.$$

Тогда в каждой группе  $S_k(n)$  имеется 9 слагаемых монотонно убывающих от первого члена к последнему, откуда

$$S_k(n) < \frac{9^n}{10^n \cdot k} = \frac{(0,9)^n}{k} \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq 3)}}^9 S_k(n) < (0,9)^n \cdot A.$$

Итак, наш ряд мажорируется рядом  $A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (0,9)^n = 10A < 25$ .

**13.18.** Значение эксцентриситета  $\varepsilon$  однозначно определяет тип кривой. Расположим эти кривые так, чтобы у них совпадали фокусы (для эллипсов – левые, гипербол – правые, для окружностей – центры), а директрисы были параллельны. Зададим полярную систему координат с полюсом в указанном общем фокусе и полярной осью, перпендикулярной к директрисам и направленной в сторону, противоположную ближайшей к полюсу директрисе. Тогда полярные уравнения данных кривых имеют вид

$$\rho = \frac{p_i}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi},$$

где  $\rho$  и  $\varphi$  – полярные координаты, а  $p_i - const$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда для любого  $\varphi \in [0; 2\pi]$  точки  $M_1$  и  $M_2$ , находящиеся на соответственно первой и второй

данных кривых и наблюдаемые под этим углом из полюса, отстоят от последнего на расстоянии  $\rho(M_1)$  и  $\rho(M_2)$ , находящиеся в постоянной пропорции

$$\frac{\rho(M_1)}{\rho(M_2)} \equiv \frac{\rho_1}{\rho_2} = const$$

независимо от величины угла  $\varphi$ .

**13.19. Ответ:** круг с центром в центре эллипса, имеющий радиус  $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

**Решение.** Эллипс является результатом равномерного сжатия окружности вдоль одного из ее диаметров. При этом параллелограмм получается только из параллелограмма, а, значит, ромб является результатом сжатия прямоугольника, вписанного в окружность, и потому центр его симметрии совпадает с центром эллипса. Диагонали любого вписанного ромба пересекаются в центре эллипса под прямым углом и делятся в этой точке пополам. Обратно, концы любых двух перпендикулярных диаметров эллипса являются вершинами вписанного ромба. Пусть точки  $M_1$  и  $M_2$  с радиус-векторами

$$\overline{OM_1} \cong \rho_1(\cos\alpha; \sin\alpha) \text{ и } \overline{OM_2} \cong \rho_2(\cos(\alpha \pm \pi/2); \sin(\alpha \pm \pi/2))$$

лежат на эллипсе  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Тогда

$$\rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \text{ и } \rho_2^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$$

и высота треугольника  $OM_1M_2$ , опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле

$$h = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{|M_1M_2|} \Rightarrow h^2 = \frac{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Это значит, что все ромбы, вписанные в эллипс, имеют одну и ту же вписанную окружность. Можно показать, что для любой точки  $H$  этой окружности  $Q$  эллипс отсекает от касательной к  $Q$ , проведенной в точке  $H$ , хорду, которая является стороной ромба, вписанного в эллипс. Отсюда сразу вытекает, что любая точка  $P$ , лежащая вне круга радиуса  $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  лежит вне некоторого ромба, вписанного в эллипс. Для этого достаточно найти точку пересечения  $H$  отрезка  $OP$  с окружностью  $Q$  и провести через  $H$  касательную к окружности  $Q$ . Итак, пересечением всех ромбов будет общий круг, вписанный в каждый из них.

**13.20. Ответ:** все точки окружности с центром в центре эллипса и радиусом  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

**Указание:** доказать, что для эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  прямая  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ , где  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , является касательной тогда и только тогда, когда

$$A^2 a^2 + B^2 b^2 = (Ax_0 + By_0)^2.$$

**13.21. Ответ:** матрица  $A = \pm \begin{vmatrix} x & a \\ b & y \end{vmatrix}$ , где

а) невырожденный случай:

тип A1  $A = \pm 2E$ , где  $E$  – единичная матрица;

$$\text{тип A2} \begin{cases} x = \sqrt{4 - ab} \\ y = -\sqrt{4 - ab} \\ \forall a, b \in \mathbf{R} : a \cdot b \leq 4 \end{cases}$$

б) вырожденный случай:

$$(B1) \begin{cases} x = 1 + \sqrt{1-ab} \\ y = 1 - \sqrt{1-ab} \\ \forall a, b \in \mathbf{R} : a \cdot b \leq 1 \end{cases} \quad (B2) \begin{cases} x = 1 - \sqrt{1-ab} \\ y = 1 + \sqrt{1-ab} \\ \forall a, b \in \mathbf{R} : a \cdot b \leq 1 \end{cases}$$

$$(B3) \quad A = 0$$

где  $0$  – нулевая матрица.

**Решение.** В дальнейшем будем всегда полагать, что

$$A = \begin{vmatrix} x & a \\ b & y \end{vmatrix}.$$

Невырожденный случай.

Если  $\det A \neq 0$ , то  $\exists A^{-1}$ , умножая на которую обе части исходного уравнения, получим:  $A^2 - 4E = 0 \Leftrightarrow A^2 = 4E$ , откуда

$$\begin{cases} x^2 + ab = y^2 + ab = 4 \\ a(x+y) = b(x+y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1) Пусть  $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ . Тогда

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4-ab} \\ y = -\sqrt{4-ab} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{4-ab} \\ y = \sqrt{4-ab} \end{cases} \quad \text{– тип } A2.$$

2) Пусть  $x + y \neq 0$ . Тогда  $a = b = 0$  и  $(1) \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 4$ .

Поскольку

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

имеют тип  $A2$ , то остается только  $A = \pm 2E$  – тип  $A1$ .

Вырожденный случай.

Пусть

$$\det A = xy - ab = 0^*) \Leftrightarrow xy = ab. \quad (2)$$

В этом случае

$$A^2 = \begin{vmatrix} x^2 + ab & a(x+y) \\ b(x+y) & y^2 + ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 + xy & a(x+y) \\ b(x+y) & y^2 + xy \end{vmatrix} = (x+y) \cdot A,$$

Откуда  $A^3 = (x+y)A^2 = (x+y)^2 A$  и  $A^3 - 4A = ((x+y)^2 - 4)A$ .

Тогда исходное уравнение эквивалентно следующему

$$(x+y-2)(x+y+2) \cdot A = 0. \quad (3)$$

В силу равенства (2) по формулам Виета получаем:

$$1) \text{ при } x+y=2 \Rightarrow \begin{cases} x=t_2 \\ y=t_1 \end{cases} \quad (\text{тип } B1) \text{ или } \begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \end{cases} \quad (\text{тип } B2), \quad \text{где}$$

$$t_1 = 1 - \sqrt{1-ab} \text{ и } t_2 = 1 + \sqrt{1-ab};$$

$$2) \text{ при } x+y=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=-t_2 \\ y=-t_1 \end{cases} \quad (\text{тип } B1) \text{ или } \begin{cases} x=-t_1 \\ y=-t_2 \end{cases} \quad (\text{тип } B2);$$

$$3) \text{ пусть } \begin{cases} x+y \neq 2, \\ x+y \neq -2. \end{cases} \text{ Тогда из (3) следует, что } A=0.$$

**13.22.** Обозначим буквой  $c$  сопротивление проволоки из данного вещества, длина которой и площадь поперечного сечения равны единице.

---

\*) В этом случае хотя бы одна из матриц  $A-2E$  и  $A+2E$  является невырожденной, поскольку:

$$\det(A-2E) = xy - ab + 4 - 2(x+y) = -2(x+y-2)$$

$$\det(A+2E) = xy - ab + 4 + 2(x+y) = 2(x+y-2)$$

и система  $\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=-2, \end{cases}$  очевидно, несовместна.

Функция  $V$  переменных  $q_0, q_1, \dots, q_k$  наименьшее значение которой ищется, будет

$$V = l_0 q_0 + l_1 q_1 + \dots + l_k q_k.$$

Принимая во внимание данную разность потенциалов  $E$ , можем написать  $k$  соотношений

$$\varphi_S = c \left( \frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_S i_S}{q_S} \right) - E = 0 \quad (S = 1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

Составим функцию

$$\Phi = (l_0 q_0 + l_1 q_1 + \dots + l_k q_k) + \sum_{S=1}^k \lambda_S \left[ c \left( \frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_S i_S}{q_S} \right) - E \right].$$

Приравнявая нулю частные производные от  $\Phi$  по  $q_0, q_1, \dots, q_k$ , получим

$$\left. \begin{aligned} l_0 - \frac{c l_0 i_0}{q_0^2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) &= 0, \\ l_S - \frac{\lambda_S c l_S i_S}{q_S^2} &= 0 \quad (S = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из условия (1) получим

$$\frac{l_1 i_1}{q_1} = \frac{l_2 i_2}{q_2} = \dots = \frac{l_k i_k}{q_k} = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0};$$

обозначив буквой  $\sigma$  общую величину этих отношений, можем написать

$$q_S = \frac{l_S i_S}{\sigma} \quad (S = 1, 2, \dots, k), \quad \sigma = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) имеем

$$\lambda_S = \frac{q_S^2}{c i_S} = \frac{l_S^2 i_S}{c \sigma^2}.$$

Подставив эти выражения  $\lambda_S$  в первое из уравнений (2), получим

$$q_0^2 = \frac{i_0}{\sigma^2} (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \dots + l_k^2 i_k), \text{ или}$$

$$q_0 = \frac{\sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \dots + l_k^2 i_k)}}{\frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}},$$

откуда окончательно

$$q_0 = \frac{c}{E} \left[ l_0 i_0 + \sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \dots + l_k^2 i_k)} \right].$$

Подставляя это выражение  $q_0$  в соотношение (3), получим для  $q_1, q_2, \dots, q_k$ :

$$q_S = \frac{c l_S i_S}{E} \left( 1 + \frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \dots + l_k^2 i_k)}} \right) \quad (S = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, необходимые условия максимума и минимума  $V$  дают нам единственную систему положительных значений для  $q_0, q_1, \dots, q_k$ ; но из физических соображений ясно, что при некотором выборе площадей поперечных сечений должно получаться наименьшее количество материала, и можно поэтому утверждать, что полученные значения  $q_0, q_1, \dots, q_k$  и дадут решение задачи.