УДК 519.7

МОДЕЛИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЯ МНОЖЕСТВА ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ТИПА КОНУСА

ИВАЩЕНКО В.В., ПАРШИН О.В.

Рассматриваются характеристические свойства линейных предикатов, заданных на положительном конусе линейного пространства.

Во многих практических задачах, решение которых связано с применением компараторной идентификации, возникает ситуация, когда множество входных сигналов не является линейным или гильбертовым пространством, а составляет какую-либо его часть или подмножество [2].

Сначала рассмотрим случай положительного конуса K и на его примере поговорим об особенностях, которые здесь возникают (они характерны и для других вариантов).

Пусть предикат $E(x,y)$ задан на декартовом квадрате положительного конуса $K \subset < L,R >$. Необходимо найти характеристические свойства, обеспечивающие его представимость в виде линейного предиката. На первый взгляд может показаться, что эта задача полностью совпадает с той, которая решалась в работе [1]. Однако это не так. Сужение области определения предиката $E(x,y)$ приводит к ряду принципиальных отличий, которые не позволяют автоматически перенести условия, сформулированные в [1], на данный случай.

Рассмотрим свойство n – мерности. Оно гласит следующее: существует набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^n = L$ (в данном случае нам придется формулировать принадлежащий K), такой что для любого $x \in K$ найдется единственный набор чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$, для которого

$$E(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i) = 1.$$

Однако здесь сразу возникает замечание, которого не было ранее. Необходимо как-то регламентировать этот набор чисел с тем, чтобы обеспечить принадлежность к положительному конусу K линейной комбинацией $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i$. Это можно сделать, добавив условие, что числа $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n > 0$ (последнее влечет за собой трудность в доказательстве необходимости, так как придется доказывать положительность решения системы линейных уравнений) или каким-либо другим способом. Отсюда следует, что условие n – мерности требует изменения.

Непрерывность, в некоторых случаях, тоже нельзя сохранить. Например, в пространствах $L_2[a,b]$ любая окрестность точки положительного конуса содержит “проколы”, т.е. точки, ему не принадлежащие.

В целом ограничение на множестве входных сигналов заставляет постоянно следить за принадлежностью аргументов предикатов области его определения. Это обстоятельство вносит принципиальные изменения в формулировки аксиом и создает целый ряд технических трудностей при доказательстве. Таким образом, возникает необходимость подробного рассмотрения отдельных типов ограничения.

Как уже говорилось выше, начнем рассмотрение с положительного конуса K пространства $< L,R >$. Допустим, на нем задан линейный предикат

$$E(x,y) = D(F[x],F[y]), \tag{1}$$

где D – предикат равенства на

$$R^n \times R^n, F[x] = (f_1(x),...,f_n(x)), [f_i]_{i=1}^n -$$

линейно-независимые функционалы над $< L,R >$.

Предположим сначала, что $dim\, L$ конечно, но $dim\, L > n.$ Изучим некоторые свойства линейного предиката. Зафиксируем систему линейно-независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^n \in K$ и для произвольного $x \in K$ составим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ вида

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) f_k(e_i), k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Матрица этой системы, равная $A = (f_k(e_i))_{k,i=1}$, имеет определитель, равный нулю, если строки или столбцы ее линейно-независимы, т.е. найдется набор чисел $\lambda_1,...,\lambda_n$, для которых

$$f_k(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = 0, k = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0.$$

Это может происходить только в том случае, когда для функционала f_1, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in Kerf_1$.

Однако подобной ситуации всегда можно избежать. $Kerf_1$ представляет собой гиперплоскость пространства $< L,R >$, а $Z(\{e_i\}_{i=1}^n)$ – подпространство размерности $n.$ Всегда можно сделать выбор $\{e_i\}_{i=1}^n$ таким образом, чтобы $Kerf_1 \cap \zeta(\{e_i\}_{i=1}^n) = \varnothing.$ При таком выборе $det\, A \neq 0$ и система (2) будет иметь единственное решение. Оно характеризуется единственным подмножеством индексов $1,2,...,n$, обозначим его I(x), для которого $\alpha_i(x) \le 0$, если $i \in I(x)$, и $\alpha_i(x) > 0$, если $i \notin I(x)$. Обозначим

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x), & \mathrm{i} \notin \mathrm{I(x)}, \\ -\alpha_i(x), & \mathrm{i} \in \mathrm{I(x)} \end{cases}. \qquad (3).$$

Тогда система (2) с учетом линейности $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ может быть переписана в виде

$$f_k(x + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) e_i) = f_k(x + \sum_{i \bar{\in} I(x)} a_i(x) e_i, k = \overline{1,n}.$$

Заметим, что $a_i(x) \ge 0$ при любом i, поэтому

$$x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \quad \sum_{i \bar{\in} I(x)} a_i(x) e_i \in K.$$

Это означает, что для линейного предиката вида (1), заданного на $K \times K$, последние равенства эквивалентны

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \quad \sum_{i \,\bar{\in}\, I(x)} a_i(x) e_i) = 1. \qquad (4)$$

Таким образом, мы установили аналог свойства n – мерности для линейного предиката, заданного на положительном конусе. Сформулируем его.

Будем говорить, что предикат $E(x,y)$ обладает свойством n – мерности, если существует система линейно-независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^n \in K$ такая, что для любого $x \in K$ найдется единственный набор чисел $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{n,...,n\}$, для которых $a_i(x) \ge 0$, при $i \in I(x)$, $a_i(x) > 0$, при $i \,\bar{\in}\, I(x)$ и имеет место равенство (4).

Сформулируем еще набор свойств, которым удовлетворяет предикат $E(x,y)$ и в справедливости которых легко убедиться непосредственной проверкой.

Однородность. Если $E(x,y) = 1$, то для любого $\lambda > 0$ $E(\lambda x, \lambda y) = 1$.

Аддитивность. Для произвольных $x, y, x`, y` \in K$ из равенств $E(x,y) = 1, E(x`,y`)$ вытекают равенства $E(x + x`, y + y`) = 1, E(x + y`, y + x`) = 1$.

Полуаддитивность. Для произвольных $x, y, z \in K$ из равенства $E(x+z, y+z) = 1$ вытекает $E(x,y) = 1$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему об условиях существования линейных предикатов на положительном конусе.

Теорема. *Для того чтобы предикат $E(x,y)$, заданный на $K \times K$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами n – мерности, однородности, аддитивности и полуаддитивности.*

Доказательство. Фактически необходимость сформулированных выше условий уже доказана. Остановимся на достаточности.

Допустим, предикат $E(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда из n – мерности и аддитивности при произвольных $x, y \in K$ будем иметь

$$E(x + \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i, \ \sum_{i \in I(x)} a_i(x) e_i) = 1,$$

$$E(y + \sum_{i \in I(y)} a_i(y) e_i, \ \sum_{i \in I(y)} a_i(y) e_i) = 1,$$

$$E(x + y + \sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x) e_i + a_i(y) e_i + $$

$$+ \sum_{i \in I(x) \backslash I(y)} a_i(x) e_i) + \sum_{i \in I(y) \backslash I(x)} a_i(y) e_i, \qquad (5)$$

$$\sum_{i \in I(x) \backslash I(y)} (a_i(x) + a_i(y)) e_i + \sum_{i \in I(x) \backslash I9y)} a_i(y) e_i) +$$

$$+ \sum_{i \in I(y) \backslash I(x)} a_i(x) e_i) = 1, \qquad (6)$$

где через $\overline{I}(x)$ мы обозначили множество индексов, равное $\{1,...,n\} \backslash I(x)$, и использовали равенство

$$I(x) \backslash I(y) = \overline{I}(y) \backslash \overline{I}(x).$$

Введем теперь следующие множества:

$$N_1 = \{i \in I(x) \backslash I(y) : a_i(x) \ge a_i(y)\},$$

$$N_2 = \{i \in I(x) \backslash I(y) : a_i(x) < a_i(y)\},$$

$$N_3 = \{i \in I(y) \backslash I(x) : a_i(y) \ge a_i(x)\},$$

$$N_4 = \{i \in I(y) \backslash I(x) : a_i(y) < a_i(x)\},$$

и воспользуемся полуаддитивностью. Тогда равенство (6) можно переписать в следующем виде:

$$E(x + y + \sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x) e_i + a_i(y)) e_i +$$

$$+ \sum_{i \in N_1} (a_i(x) - a_i(y)) e_i + \sum_{i \in N_3} (a_i(y) - a_i(x)) e_i,$$

$$\sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (a_i(x) + a_i(y)) e_i +$$

$$+ \sum_{i \in N_2} (a_i(y) - a_i(x)) e_i + \sum_{i \in N_4} (a_i(x) - a_i(y)) e_i) = 1. \qquad (7)$$

Заметим, что множества

$$I(x) \cap I(y), \quad \overline{I}(y) \cap \overline{I}(x), \{N_i\}_{i=1}^4 -$$

непересекающиеся и в объединении дают все множество индексов. В этом случае из n – мерности и равенства (7) вытекает

$$I(x + y) = (I(x) \cap I(y)) \cup N_1 \cup N_3,$$

$$a_i(x+y)=\begin{cases} a_i(x)+a_i(y), i\in I(x)\cap I(y), \\ a_i(x)-a_i(y), i\in N_1, \\ a_i(y)-a_i(x), i\in N_2, \\ a_i(x)+a_i(y), i\in \overline{I}(x)\cap \overline{I}(y), \\ a_i(x)-a_i(y), i\in N_4, \\ a_i(y)-a_i(x), i\in N_3. \end{cases}$$

Так как из (3) вытекает

$$a_i(x)=\begin{cases} a_i(x), i\in \overline{I}(x), \\ -a_i(x), i\in I(x), \end{cases}$$

то если рассмотреть $a_i(x+y)$, получим

$$a_i(x+y)=a_i(x)+a_i(y). \qquad (8)$$

Действительно, пусть $i\in I(x)\cap I(y)$, тогда $i\in I(x+y)$ и

$$a_i(x+y)=-a_i(x+y)=a_i(x)-a_i(y)=a_i(x)+a_i(y).$$

Допустим, $i\in N_1$, значит, $i\in I(x+y)$ и

$$a_i(x+y)=-a_i(x+y)=a_i(y)-a_i(x)=a_i(x)+a_i(y),$$

так как $i\in I(x)\setminus I(y)$, в силу определения N_1 и т.д. Рассмотрев все шесть случаев, легко убедиться, что при любом индексе i выполняется равенство (8) для произвольных $x,y\in K$. Таким образом, функционалы $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ аддитивны. Покажем их однородность для $\lambda>0$.

Действительно, для произвольного $x\in K$ и $\lambda>0$ из $n-$ мерности и однородности следует

$$E(x+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i, \sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i)=1,$$

$$E(\lambda x+\sum_{i\in I(x)} \lambda a_i(x)e_i, \sum_{i\in I(x)} \lambda a_i(x)e_i)=1.$$

Последнее равенство означает, что $I(x)=I(\lambda x)$ и $a_i(\lambda x)=\lambda a_i(x), i=\overline{1,n}$. Следовательно,

$$\lambda a_i(x)=a_i(\lambda x), i=\overline{1,n}, \lambda>0.$$

Поскольку положительный конус в линейном пространстве воспроизводящий, то функционалы $a_i(x)$ могут быть продолжены до линейных на всем пространстве $<L,R>$.

Докажем теперь одно вспомогательное утверждение.

Утверждение. Если предикат $E(x,y)$ обладает перечисленными в теореме свойствами, то он рефлексивен, симметричен, транзитивен.

Действительно, для любого $x\in K$ из $n-$мерности и аддитивности вытекает

$$E(x+\sum_{i\in I(x)} \lambda_i(x)e_i, \sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i)=1,$$

$$E(x+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)e_i, x+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)e_i)=1, ;$$

учитывая полуаддитивность, имеем $E(x,x)=1$.

Далее, если $E(x,y)=1$ и из рефлексивности $E(y,y)=1$, то при помощи аддитивности и полуаддитивности получим $E(2y,x+y)=1$ и $E(y,x)=1$.

Теперь допустим, что $E(x,y)=1$, $E(y,z)=1$, тогда ясно, что $E(x+y,y+z)=1$ и $E(x,z)=1$. Утверждение доказано.

Пусть $E(x,y)=1$. Используя свойства теоремы и доказанное утверждение, нетрудно убедиться в правильности следующей цепочки равенств:

$$E(x+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i, y+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i)=1, \qquad (9)$$

$$E(x+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i, \sum_{i\in \overline{I}(x)} a_i(x)e_i)=1, \qquad (10)$$

$$E(y+\sum_{i\in I(x)} a_i(x)e_i, \sum_{i\in \overline{I}(x)} a_i(x)e_i)=1. \qquad (11)$$

Из единственности $I(x)$ и набора чисел $\{a_i(x)\}_{i=1}^n$ имеем $I(x)=I(y)$ и $a_i(x)=a_i(y)$, что означает $E(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(x)=\alpha_i(y), i=1,n, \qquad (12)$$

поскольку цепочку равенств (9)-(12) можно провести и в обратном порядке. Все это означает, что предикат $E(x,y)$ представим в виде

$$E(x,y)=D(\alpha(x),\alpha(y)),$$

где $\alpha(x)=(\alpha_1(x),...,\alpha_n(x))$.

Таким образом, для того, чтобы он был линейным, осталось показать, что набор линейных функционалов $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ – линейно-независим.

Действительно, в противном случае можно считать, без ограничения общности, что $\alpha_1(x)=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\alpha_i(x)$.

Однако из рефлексивности предиката $E(x,y)$, примененной к вектору e_1, получим $E(e_1,e_1)=1$. Следовательно, из $n-$мерности вытекает, что $\alpha_1(e_1)=1, \alpha_2(e_1)=...=\alpha_n(e_1)=0$. Тогда из предположения линейной зависимости функционалов $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ вытекает, что 1=0. Противоречие. Следовательно, функционалы $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно-независимы, а предикат $E(x,y)$ линеен. Теорема доказана.

Литература: 1. *Воскобойник О.Н., Иващенко В.В.* Компараторная идентификация абстрактных линейных операторов // АСУ и приборы автоматики, 2000. Вып.113. 2000. С.35-41. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта: Проблемы и перспективы.Т.3. Харьков, Выща шк., 1987. 158 с.

Поступила в редколлегию 11.12.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

Иващенко Валерий Владимирович, аспирант ХНУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

Паршин Олег Владимирович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник кафедры ПМ ХНУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.