

В. И. АНТЮФЕЕВ, канд. техн. наук,  
 А. С. СУЛТАНОВ, канд. техн. наук,  
 Ю. В. ОВСЯННИКОВ, А. С. ВОРОНОВА,  
 В. Г. КУБАТА

## СИНТЕЗ МНОГОКАНАЛЬНОГО РАДИОМЕТРА С ЧАСТИЧНО ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ. Сообщение 1. ОПТИМИЗАЦИЯ МОДУЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

**Постановка задачи.** Радиометр представим состоящим из синтезируемой и заданной частей. Последняя состоит из  $N$  источников статистически независимых полезных шумовых сигналов  $1^1, \dots, 1^N$  с неизвестными абсолютными температурами  $T_1, \dots, T^N$ , усилителя высокой частоты (УВЧ) с известной средней шумовой температурой  $T_{ш}$  и медленно флуктуирующим коэффициентом усиления, устройства линейного уплотнения, включающего  $N$  модуляторов  $3, \dots, 3^N$ , на которые поступают модулирующие сигналы  $m_i(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), и сумматора 4 (рис. 1).

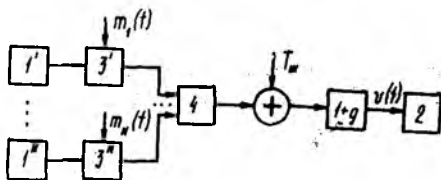


Рис. 1

Основываясь на общепринятых в радиометрии допущениях относительно характеристик действующих в схеме сигналов [1], нормированное относительно  $(k\Delta f T_{ш})^{1/2}$  напряжение на входе синтезируемой части 2 можно записать в виде

$$v(t) = \sqrt{1 + g} \left[ \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i(t) q_i u_i(t)} + u_{ш}(t) \right], \quad t \in [0, \tau],$$

где  $g_i = T_i / T_{ш}$  ( $i = \overline{1, N}$ ) — искомые относительные шумовые температуры источников полезного сигнала;  $u_i(t)$ ,  $u_{ш}(t)$  — соответствующие нормированные по мощности шумовые напряжения;  $g$  — неизвестная случайная величина, учитывающая квазистатистические относительные флуктуации коэффициента усиления высококачастотного тракта радиометра;  $\Delta f$  — полоса пропускания заданной части приемника;  $k$  — постоянная Больцмана.

Задача синтеза оптимального в смысле максимума правдоподобия радиометра формулируется следующим образом: требуется найти оценку максимального правдоподобия векторного параметра  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_N)$  сигнала  $\sum_{i=1}^N \sqrt{m_i(t) q_i u_i(t)}$ , наблюдаемого на фоне шума  $u_{ш}(t)$  при наличии мультипликативной помехи  $g$ . В соответствии с рассматриваемым методом при неизвестном  $g$  оценка векторного параметра  $\vec{q}$  должна находиться совместно с оценкой  $g$  [2].

Задачу будем решать в такой последовательности: сначала оценим предельную чувствительность радиометра и найдем оптимальную форму модулирующих напряжений  $m_i(t)$ , а затем синтезируем оптимальную структуру радиометра для оптимальных модулирующих функций.

*Оценка потенциальной чувствительности.* Логарифм функции правдоподобия параметров  $\bar{q}$  и  $g$  определяется выражением

$$\Lambda(\bar{q}; g) = \Lambda_0 - \Delta f \int_0^\tau \left\{ \ln(1+g) \left[ \sum_{i=1}^N m_i(t) q_i + 1 \right] + \frac{v^2(t)}{(1+g) \left[ \sum_{i=1}^N m_i q_i + 1 \right]} \right\} dt,$$

где  $\Lambda_0$  — не зависящая от  $\bar{q}$ ,  $g$  и  $u_i(t)$  величина. Тогда информационная матрица [2] имеет вид

$$F = \frac{\Delta f \tau}{T_w^2} \begin{bmatrix} M_1^2 & M_1 M_2 & M_1 M_N & \frac{M_1 T_w}{1+g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_N M_1 & M_N M_2 & M_N^2 & \frac{M_N T_w}{1+g} \\ M_1 T_w & \frac{M_2 T_w}{1+g} & \dots & \frac{T_w^2}{(1+g)^2} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $M_j(t) = m_j(t) / [1 + \sum_{i=1}^N m_i(t) q_i]$  (2),  $\bar{M}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau M_i(t) dt$ ,

$\overline{M_i M_j} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau M_i(t) M_j(t) dt$ . Элементы главного минора  $N$ -го порядка

обратной матрицы являются ковариациями  $R_{kl}$  оценок  $\hat{q}_k, \hat{q}_l$  ( $k, l = \overline{1, N}$ ) [2]. Для вычисления  $R_{kl}$  ограничимся случаем ансамбля функций  $\{M_i\}_{i=1}^N$  с одинаковыми интегральными характеристиками и введем класс семейств функций

$$Z = \{ \{M_i\}_{i=1}^N \in [L^2(0, \tau)]^N, \bar{M}_1 = \dots = \bar{M}_N = \gamma, M_i M_j = \begin{cases} \alpha, & i = j \\ \beta, & i \neq j \end{cases} \}, \quad (3)$$

где  $[L^2(0, \tau)]^N = \underbrace{L^2(0, \tau) \times \dots \times L^2(0, \tau)}_{N \text{ раз}}$ .

В результате вычисления матрицы, обратной к информационной (1), получим

$$R_{kl} = \frac{1}{\Delta f \tau (b-a)} \left[ \delta_{kl} - \frac{1}{N-1 + b/a} \right]. \quad (4)$$

Здесь  $a = \beta - \gamma^2$ ,  $b = a - \gamma^2$ .

Построим систему функций  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$  по правилу  $\mu_i(t) = M_i(t) - \gamma$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Используя определение (3), найдем

$$\mu_i \mu_j = \begin{cases} a - \gamma^2, & i = j; \\ \beta - \gamma^2, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Из соотношения (4) следует, что  $|R_{kl}| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow 1 + (a - \gamma^2)/(\beta - \gamma^2) \rightarrow \infty$  ( $k \neq l$ ), что возможно либо при  $N \rightarrow \infty$ , либо в случае  $\beta - \gamma^2$  для произвольного  $N > 1$ . Другими словами, взаимная ковариация оценок  $\hat{q}_k, \hat{q}_l$  обратно пропорциональна количеству уплотняемых сигналов и равна нулю в том случае, когда система  $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ , порожденная семейством  $\{M_i\}$ , ортогональна, как это следует из выражения (5).

Требуется найти семейство модулирующих функций  $\{m_i\}_{i=1}^N$  из класса  $L^2(0, \tau)$  интегрируемых по Лебегу на интервале  $[0, \tau]$  функций, удовлетворяющих естественному условию  $0 \leq m_i(t) \leq 1$  ( $i = \overline{1, N}$ ) (6) и минимизирующих дисперсии  $D_{q_i} = R_{ii}$  оценок максимального правдоподобия  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N$ .

Рассматривая совокупность выражений (2) как систему уравнений относительно функций  $m_j$ , найдем  $m_j(t) = M_j(t) / [1 - \sum_{i=1}^N M_i(t) q_i]$  (7). В силу равенств (2) и условий (6) функции семейства  $\{M_i\}$  ограничены, т. е.  $0 \leq M_i(t) \leq c$  ( $c > 0$ ) (8), поэтому для решения поставленной задачи достаточно найти оптимальную систему  $\{\hat{M}_i\}$  функций, минимизирующих дисперсии  $D_{b_i}$ , а ансамбль  $\{m_i\}$  построить с помощью соотношений (7).

*Оптимизация класса модулирующих функций.* Рассматривая дисперсию  $D_{q_i}$  как функцию  $M_i$ , найдем оптимальную функцию  $M_i$ , минимизирующую функционал  $G(M_i) = [(N - 2)a + b] / \{(N - 1) \times \times a + b\} (b - a)$  (9) при ограничении (8), которое удобно представить в виде  $M_i(t) [M_i(t) - c] \leq 0$  (10). Построим лагранжиан задачи (9), (10)  $L(M_i, z_i) = G(M_i) - (z_i M_i (M_i - c))$  (11), где (...) скалярное произведение в  $L^2(0, \tau)$ ;  $z_i \in L^2(0, \tau)$ . Можно показать, что функционал (9) и ограничение (10) удовлетворяют условиям теоремы [3],

утверждающей, что элемент  $\hat{M}_i \in L^2(0, \tau)$  является оптимальным, если существует функция  $\hat{z}_i \in L^2(0, \tau)$ ,  $\hat{z}_i(t) \leq 0$ , такая, что  $(\hat{M}_i, \hat{z}_i)$  — седловая точка лагранжиана (11), т. е.  $L(\hat{M}_i, z_i) \leq L(\hat{M}_i, \hat{z}_i) \leq L(M_i, \hat{z}_i)$  (12). При этом должно выполняться условие дополнительной нежесткости  $(\hat{z}_i, \hat{M}_i (M_i - c)) = 0$  (13). Можно показать [4], что второе неравенство в формуле (12) является след-

ствием условия (13), а для выполнения первого необходимо, чтобы производная Гато лагранжиана  $L$  в точке  $\hat{M}_i$  обращалась в нуль, т. е.

$$\begin{aligned} \chi [M_j(t) - \gamma] - 2\chi [\hat{M}_i(t) - \gamma] - [2\hat{M}_i(t) - c] \hat{z}'_i(t) = 0, \quad (14) \\ \text{где} \\ \chi = a(N-1)[(N-2)a + 2b]; \quad \chi = (N^2 - 3N + 3)a^2 + 2(N-2)ab + \\ + b^2, \quad \hat{z}'_i(t) = \hat{z}_i(t)[(N-1)a + b]^2(b-a)^2. \end{aligned}$$

Введем лебеговы множества

$$\begin{aligned} P_i = \{t \in [0, \tau] | \hat{M}_i(t) = 0\}, \quad S_i = \{t \in [0, \tau] | 0 < \hat{M}_i(t) < c\}, \quad Q_i = \\ = \{t \in [0, \tau] | \hat{M}_i(t) = c\}. \end{aligned}$$

Из условия (13) следует, что  $\hat{z}_i(t) = 0$  при  $t \in S_i$  и  $\hat{z}_i(t) < 0$  при  $t \in P_i \cup Q_i$ .

Приравнивая нулю производную Гато лагранжиана  $L$  в точке  $\hat{M}_j$  ( $j \neq i$ ), получим

$$\chi [M_j(t) - \gamma] - 2\chi [\hat{M}_j(t) - \gamma] - [2\hat{M}_j(t) - c] \hat{z}'_j(t) = 0, \quad (15)$$

построим соответствующие множества  $P_j, S_j, Q_j$  и ограничимся случаем  $S_i = S_j = S$ . Запишем уравнения (14), (15) на множестве  $S$  для функций  $\hat{M}_i(t), \hat{M}_j(t)$ :

$$\begin{cases} \chi [\hat{M}_j(t) - \gamma] - 2\chi [\hat{M}_i(t) - \gamma] = 0, \\ \chi [\hat{M}_i(t) - \gamma] - 2\chi [\hat{M}_j(t) - \gamma] = 0; \end{cases}$$

Решение полученной системы определяется выражением  $\hat{M}_i(t) = M_j(t) = \gamma$  ( $t \in S$ ). Таким образом, множество значений функций из оптимального класса равно  $\{0, \gamma, c\}$ .

*Параметрическая оптимизация.* Для функций из оптимального класса в результате выполнения интегрирования найдем

$$\gamma = \frac{cp}{1-s}, \quad a = c^2 \left( r - \frac{p^2}{1-s} \right), \quad b = c^2 p \left( 1 - \frac{p}{1-s} \right), \quad (16)$$

где  $p = \text{mes } P_i / \tau$ ;  $s = \text{mes } S / \tau$ ;  $r = \text{mes } (P_i \cap P_j) / \tau$ ;

$\text{mes } P_i$  — мера Лебега множества  $P_i$ . Здесь учтены свойства (5) функций  $M_i$ . Параметр  $r$  естественно назвать коэффициентом перекрытия системы  $\{m_i\}$ . Подставив (16) в выражение (9), получим

$$G(p, r, s) = \frac{(N-2)r + p - (N-1)p^2/(1-s)}{(N-1)r + p - Np^2/(1-s)} \frac{1}{c^2(p-r)}. \quad (17)$$

Будем минимизировать функцию (17) по попеременным  $p, r, s$  при ограничениях  $0 \leq p, r, s \leq 1$ . Поскольку по последней переменной она является монотонно возрастающей,

$$G(p, r) = \inf_{s \in [0, 1]} G(p, r, s) = \frac{(N-2)r + p - (N-1)p^2}{(N-1)r + p - Np^2} \cdot \frac{1}{c^2(p-r)} \quad (18)$$

при  $s=0$ . Следовательно, оптимальные модулирующие функции  $\hat{M}_i(t)$  должны принадлежать классу цифровых функций, принимающих почти всюду значения 0, с. Обозначим  $Z_c = \{\{M_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{Z} \mid M_i(t) = 0 \text{ или } M_i(t) = c \text{ почти всюду } (i = \overline{1, N})\}$ .

Из выражений (2), (7) вытекает, что носители функций  $M_j$  и  $m_j$  совпадают, т. е.  $\text{supp } M_j = \text{supp } m_j (j = \overline{1, N})$ . Тогда с учетом свойств (6) максимально возможное значение параметра  $c$ , минимизирующее функцию (18) по этому параметру, определяется выражением

$$c = \left[ 1 + \inf_{t \in Y} \sum_{i=1}^N m_i(t) q_i \right]^{-1}, \quad \text{где } Y = \bigcup_{i=1}^N \text{supp } m_i \subseteq [0, \tau].$$

При этом  $\{m_i\}_{i=1}^N \in Z_1$  и  $M_i(t) = cm_i(t) (i = \overline{1, N})$ .

В дальнейшем ограничимся случаем  $N = 2^k - 1 (k \in \mathbb{N})$ , когда удастся выразить параметр  $c$  через интегральные характеристики семейства функций  $\{m_j\}$ . Для упрощения последующих выкладок положим  $q_1 = \dots = q_N = q$ . Тогда  $c = (1 + qn)^{-1}$ , где  $n = \sup_{t \in Y} \sum_{i=1}^N m_i(t)$ , т. е. для семейства  $\{m_i\} n \in \overline{1, N}$  — максимальное число функций ансамбля, имеющих общий носитель. В дальнейшем ограничимся следующим классом систем модулирующих функций:  $Z_1^n = \{\{m_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{Z}_1 \mid N = 2^k - 1, \sum_{i=1}^N m_i(t) = n \text{ для почти всех } t \in Y\}$ . Таким образом, каждое семейство  $\{m_i\} \in Z_1^n$  характеризуется параметрами  $p, r, n$ , которые не являются независимыми.

Чтобы исследовать функцию (14) на экстремум, сузим область ее определения. Приравнивая определитель Грама системы функций  $\{\mu_i = m_i - m\}$  к нулю, получим  $(p-r)^{N-1} [p - p^2 + (N-1)(r - p^2)] = 0$ , откуда с учетом неравенств  $r \geq 0$  и  $r \leq p$  (неравенство Шварца для функций из  $\{m_i\}$ ) находим область  $A = \{r \geq 0\} \cap \{r < p\} \cap \{r > p(N_p - 1) / (N-1)\}$  переменных  $r$  и  $p$ , в которой система функций  $\{\mu_i\}$  линейно независима (рис. 2). Исследуем поведение функции (15) в области  $A$  вдоль прямых  $r = p(x-1) / (N-1) (1 \leq x \leq N)$  (19). Можно показать, что при изменении  $x$  в интервале  $(i-1, i] n = i (i = \overline{1, N})$ , т. е.  $n = [x]$  ( $[x]$  — целая часть числа  $x$ ). Следовательно, прямыми  $r = p(n-1) / (N-1) (n = \overline{1, N})$  область  $A$  разбивается на зоны, имеющие форму усеченных конусов, каждая из которых отвечает своему числу  $n$  (при  $n=1$  зона вырождается

в отрезок  $[0, (N-1)^{-1}]$  оси  $r=0$ ) (рис. 2). Подставив выражение (19) в соотношение (18), получим

$$G(p, x) = \frac{(N-2)(x-1) + (N-1)[1 - (N-1)p]}{(x-Np)(N-x)p} \times \\ \times \{1 + q(1 + [x])\}^2. \quad (20)$$

По переменной  $p$  функция (20) имеет минимум в точке  $\hat{p} = (y - \omega) / (N-1)^2$  (21), равный

$$G(x) = G(\hat{p}, x) = \frac{(N-1)^4 \omega \{1 + q(1 + [x])\}^2}{(N-x)(y-\omega)[N(\omega-1) + x]}. \quad (22)$$

Здесь  $y = (N-2)(x-1) + N-1$ ;  $\omega = [y(1 - x/N)]^{1/2}$ . (23)

На рис. 2 штриховой линией показана кривая  $\hat{r} = \hat{r}(p)$ , заданная параметрически соотношениями (19), (21), (22) с помощью

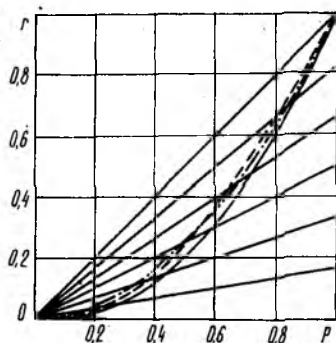


Рис. 2

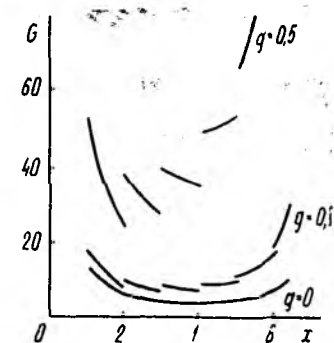


Рис. 3

параметра  $x \in [1, N]$  и соответствующая оптимальным значениям  $\hat{p}$ ,  $\hat{r}$ . Графики функции (22) для  $N=7$  при различных значениях  $q$  приведены на рис. 3, а их анализ показал следующее.

В случае  $q=0$   $G(x)$  непрерывна, имеет минимум в точке  $\hat{x} = (N+1)/2 = 4$ . При этом  $\hat{p} = 1/2$ ,  $\hat{r} = 1/4$ , а соответствующие функции оптимальной системы имеют вид  $\hat{m}_i(t) = \frac{1}{2} [1 - \text{wal}_i(t)]$  ( $i = \overline{1, N}$ ), где  $\text{wal}_i(t)$  — функция Уолша  $i$ -го номера.

При  $q > 0$   $G(x)$  имеет разрывы первого рода в тех точках, где  $x$  принимает целочисленные значения. По мере роста  $q$  оптимальный параметр  $\hat{x} = \arg \inf_{x \in [1, N]} G(x)$  смещается в область меньших зна-

чений, поэтому использование систем функций  $\{m_i\} \in Z_1^n$  с  $n > (N+1)/2$  (для которых  $p > 1/2$ ,  $r > 1/4$ ) нецелесообразно.

Так как справедливо равенство  $\inf_{x=1, N} G(x) = \inf_{x=1, (N+1)/2} G(x)$ , для нахождения предельной чувствительности радиометра достаточно

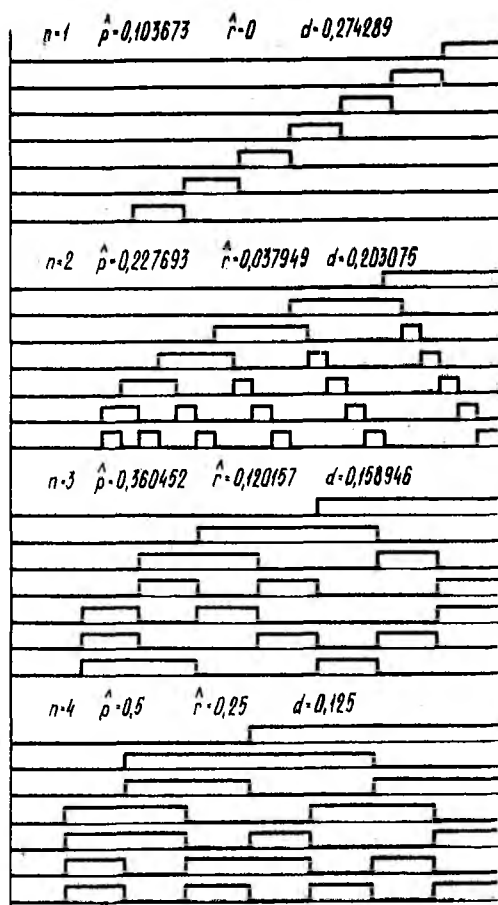


Рис. 4

вычислить  $G(x)$  в точках  $x=1, 2, \dots, (N+1)/2$  и взять наименьшее из полученных значений, которое определяет число  $n$ .

В случае  $q \gg 1$  получаем  $n=1$ , т. е. носители модулирующих функций не пересекаются, и оптимальным является радиометр с временным уплотнением сигналов, для которого  $\hat{r}=0$ ,  $\hat{p}=(N+\sqrt{N})^{-1}$ ,  $G_{\min}=(1+\sqrt{N})^2(1+q)^2$ .

Примеры систем из  $N=7$  функций с  $n=1, 2, 3, 4$  приведены на рис. 4, что доказывает существование подобных семейств из

класса  $Z_1^n$ . Все функции ансамбля могут быть периодически про-  
должены. Кроме  $p, r, n$ , на рис. 4 приведены оптимальные зна-  
чения параметра  $d = 1 - \text{mes} Y/\tau$ , характеризующего длительность  
интервала времени, в течение которого все модуляторы радиомет-  
ра находятся в закрытом состоянии. Можно показать, что  $d =$   
 $= 1 - pN/n$ .

Таким образом, коэффициент перекрытия  $\hat{r}$  оптимальных сис-  
тем модулирующих функций зависит от отношения сигнал-шум  
на входе. При малых отношениях оптимальным является радиометр с семейством функций Уолша, обладающих максимальным  
коэффициентом перекрытия  $\hat{r} = 1/2$ , а разделение канальных сиг-  
налов осуществляется по форме сигналов. По мере роста отно-  
шения сигнал-шум коэффициент перекрытия уменьшается, и начи-  
ная с некоторого значения, оптимальным становится приемник,  
в котором используется система функций с  $\hat{r} = 0$ , т. е. реализуется  
принцип временного уплотнения и разделения канальных сиг-  
налов.

При  $N=1$  полученные результаты полностью соответствуют  
полученным в работе [5] для одноканального модуляционного ра-  
диометра.

**Список литературы:** 1. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. М., 1973. 416 с. 2. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М., 1978. 296 с. 3. Экланд И., Геман Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979. 400 с. 4. Sakawa Y. Optimal control of certain type of linear distributed-parameter systems// IEEE Trans. on Automatic Control. 1966. 11, N1. P. 34—45. 5. Оптимальная структура и потенциальная чувствительность модуляционного радиометра /В. И. Антюфеев, А. С. Султанов, А. С. Воронова и др.//Радиотехника. 1987. Вып. 83. С. 82—87.

Поступила в редколлегию 12.01.89

УДК 550.385.37; 550.388.2

К. П. ГАРМАШ, А. М. ГОКОВ, А. И. ГРИТЧИН,  
В. А. МИСЮРА, д-р техн. наук,  
Л. Ф. ЧЕРНОГОР, д-р физ.-мат. наук

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЫ НА УДАЛЕННЫЕ МОЩНЫЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Землетрясения достаточной интенсивности могут служить фиксированным в пространстве и во времени источником возмущений в ионосфере. Впервые на это было указано в работе. [1]. Это относится как к стадии подготовки землетрясения, так и к моменту сейсмического толчка. До настоящего времени проведены немногочисленные наземные и спутниковые эксперименты по обна-