

**ОБОСНОВАНИЕ КОРОТКОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧЕ  
О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ  
НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ  
ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ**

*Е. Н. Подольский*

**1. Постановка задачи.**

В плоскости  $xoy$  расположена периодическая решетка, образованная бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, параллельными оси  $ox$ . Период решетки равен  $2\pi$ , расстояние между соседними лентами —  $2\delta$ , так что ширина лент —  $2(\pi - \delta)$ . Начало координат находится в середине одной из щелей.

Сверху ( $z > 0$ ) под произвольным углом к этой решетке падает плоская электромагнитная волна

$$\vec{E}^n = \vec{e} e^{ik \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r})}; \quad \vec{H}^n = \vec{h} e^{ik \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r})} \quad (1)$$

(временной множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и дальше опускаем). Единичный вектор

$$\vec{n} = \{\alpha, \beta, -\gamma\} \quad (\gamma > 0)$$

задает направление падающей волны, постоянные векторы  $\vec{e}$  и  $\vec{h}$  связаны между собой, как известно, равенствами

$$\vec{h} = [\vec{n} \vec{e}]; \quad \vec{e} = [\vec{h} \vec{n}].$$

Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

Пусть  $E(x, y, z)$ ,  $H(x, y, z)$  — искомое поле. Как было показано в работе [1],  $x$ -составляющие этого поля имеют следующий вид:

$$E_x(x, y, z) = e_x e^{ik^2 x} v_e(y, z); \quad H_x(x, y, z) = h_x e^{ik^2 x} v_h(y, z), \quad (2)$$

где

$$v_e(y, z) = e^{ik^2 y} \left[ e^{-ik^2 z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{ik^2 \gamma_n |z|} e^{in y} \right], \quad (3)$$

$$v_h(y, z) = e^{ik^2 y} \left[ e^{-ik^2 z} + \frac{|z|}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{ik^2 \gamma_n |z|} e^{in y} \right], \quad (3')$$

$$\gamma_n = \sqrt{1 - \alpha^2 - \left(\beta + \frac{n}{k}\right)^2}, \quad (4)$$

причем знак у корня выбирается так, что  $\text{Im} \gamma_n > 0$ , а если  $\text{Im} \gamma_n = 0$ , то  $\text{Re} \gamma_n \geq 0$  (см. формулы (2), (2'), (4) работы [1]).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо неизвестные коэффициенты  $e_n$ ,  $h_n$  подобрать так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{iny} = 0 \quad \delta < |y| \leq \pi, \tag{5}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e_n e^{iny} = 0 \quad |y| < \delta, \tag{5'}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{iny} = 0 \quad |y| < \delta, \tag{6}$$

$$-\gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n h_n e^{iny} = 0 \quad \delta < |y| \leq \pi \tag{6'}$$

(см. формулы (6), (II), (12), (V) работы [1]).

При этом искомое поле выражается через компоненты  $E_x$ ,  $H_x$  по таким формулам:

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{ia}{k(1-\alpha^2)} \text{grad } E_x + \frac{1}{1-\alpha^2} \vec{\Pi} - \frac{i}{k(1-\alpha^2)} \text{rot } \vec{\Pi}^*, \\ \vec{H} = \frac{i}{k(1-\alpha^2)} \text{rot } \vec{\Pi} + \frac{ia}{k(1-\alpha^2)} \text{grad } H_x + \frac{1}{1-\alpha^2} \vec{\Pi}^*, \end{cases} \tag{7}$$

где  $\vec{\Pi}(\vec{\Pi}^*)$  — вектор,  $x$ -составляющая которого равна  $E_x$  ( $H_x$ ), а остальные составляющие равны нулю.

Здесь мы подробно рассмотрим только уравнения (5), (5'), так как уравнения (6), (6') исследуются совершенно аналогично.

В статье [1] с помощью метода, предложенного в работе [2], доказано, что система (5), (5') эквивалентна бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \frac{|p|}{\rho} \varepsilon_p V_n^p + 2x_{-1} R_n - i\gamma V_n^{m_0} \quad (n \neq 0, n \neq -1), \\ \theta x_0 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \frac{|p|}{\rho} \varepsilon_p V_0^p + 2x_{-1} R_0 - i\gamma V_0^{m_0}, \\ 0 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p \frac{|p|}{\rho} \varepsilon_p V_{|0|}^p + 2x_{-1} R_{|0|} + x_0 - i\gamma V_{|0|}^{m_0}, \end{cases} \tag{8}$$

где коэффициенты  $V_n^p$ ,  $R_n$ ,  $V_{|0|}^p$ ,  $R_{|0|}$ , выражаются через полиномы Лежандра и функции Лежандра второго рода (см. стр. 121, 122 работы [1]); неизвестные  $x_n$  связаны с исходными неизвестными  $e_n$  формулами

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n+\theta}{k} e_{n-m_0} \quad (n \neq 0, n \neq m_0); \\ x_{m_0} &= \beta (e_0 + 1); \\ x_0 &= \frac{1}{k} e_{-m_0}. \end{aligned}$$

( $m_0$  — ближайшее к  $k\beta$  целое число, т. е.  $k\beta = m_0 + \theta$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \theta < \frac{1}{2}$ ), а величины  $\varepsilon_p$  при фиксированных  $k$  и  $\alpha$  убывают при  $|p| \rightarrow \infty$  как  $p^{-2}$ .

Для получения приближенного решения в работе [1] система (8) заменялась конечной, которая получается из нее, если при всех  $|p| > N$

заменить коэффициенты  $\epsilon_p$  нулями. Однако для обоснования такого приближения необходимо показать, что бесконечная система (8) имеет единственное решение. Кроме того, этот метод непригоден для больших  $k$ , так как в этом случае нужно было бы решать конечную систему очень высокого порядка.

В настоящей статье мы, во-первых, докажем, что система (8) действительно имеет единственное решение, и, во-вторых, найдем коротковолновую асимптотику решения (т. е. исследуем случай  $k \rightarrow \infty$ ).

## 2. Существование и единственность решения

Для исследования системы (8) удобнее вернуться к исходным переменным  $e_n$ , после чего эта система примет такой вид:

$$e_n - \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_n^p e_p = b_n \quad (-\infty < n < \infty), \quad (9)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} A_n^p &= \frac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{(p+m_0)(n+m_0+\theta)} \epsilon_{p+m_0} V_{n+m_0}^{p+m_0} (1 - \delta_{-m_0}^p) + \epsilon_0 \frac{V_{n+m_0}^n}{n+m_0+\theta} \delta_{-m_0}^p - \\ &\quad - \frac{(1-\theta) p_{n+m_0}}{n+m_0+\theta} \delta_{-m_0}^p \quad (n \neq -m_0, n \neq -m_0 - 1), \\ A_{-m_0}^p &= -\frac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{p+m_0} \epsilon_{p+m_0} V_{\theta}^{p+m_0} (1 - \delta_{-m_0}^p) - \epsilon_0 V_{\theta}^0 \delta_{-m_0}^p + \\ &\quad + 2(1-\theta) R_{|\theta|} \delta_{-m_0}^p, \\ A_{-m_0-1}^p &= \frac{|p+m_0|(p+m_0+\theta)}{(1-\theta)(p+m_0)} \epsilon_{p+m_0} V_{\theta}^{p+m_0} (1 - \delta_{-m_0}^p) + \frac{\epsilon_0 V_{\theta}^0 - \theta}{1-\theta} \delta_{-m_0}^p, \\ b_n &= k |\beta| \frac{V_{n+m_0}^{m_0}}{n+m_0+\theta} \quad (n \neq -m_0, n \neq -m_0 - 1), \\ b_{-m_0} &= -k |\beta| V_{\theta}^{m_0}; \quad b_{-m_0-1} = \frac{k |\beta|}{1-\theta} V_{\theta}^{m_0} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

(здесь и в дальнейшем  $\delta_m^n = 0$  при  $m \neq n$ ,  $\delta_n^n = 1$ ).

Из формул, выражающих величины  $V_n^p$ ,  $V_{\theta}^p$  через полиномы Лежандра  $P_n(\cos \delta)$ , и оценок

$$|P_n(\cos \delta)| < \frac{1}{\sqrt{|n| \sin \delta}}, \quad \epsilon_n = O(n^{-2}) \quad (|n| \rightarrow \infty) \quad (11)$$

вытекают следующие неравенства для матричных элементов  $A_n^p$  и правых частей  $b_n$ :

$$\left\{ \begin{aligned} |A_n^p| &< \frac{C}{\frac{1}{2}(|n| + 1)(|p| + 1)} \quad (n \neq p, n \neq -m_0), \\ |A_{-m_0}^p| &< \frac{C \ln(|p| + 1)}{p^2 + 1}, \\ |A_n^n| &< \frac{C}{n^2 + 1}, \quad |b_n| < \frac{C}{|n|^{\frac{3}{2}} + 1}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Из последних неравенств в свою очередь следует, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n^p|^2 < \infty$$

и, значит, матрица  $\|A_n^p\|$  порождает в гильбертовом пространстве  $l^2$  последовательностей  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  вполне непрерывный оператор.

Так как столбец правых частей системы (9) принадлежит  $l^2$  то в силу альтернативы Фредгольма для доказательства существования решения системы, принадлежащего  $l^2$ , достаточно доказать, что соответствующая однородная система не имеет ненулевых решений в этом пространстве.

Используя формулы (10) и оценки (11), можно показать, что любое решение  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  однородной системы

$$y_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_n^p y_p, \tag{9'}$$

принадлежащее  $l^2$ , имеет такой вид:

$$y_n = A \frac{P_{n+m_0}(\cos \delta)}{n+m_0+\theta} + B \frac{P_{n+m_0+1}(\cos \delta)}{n+m_0+\theta} + O(|n|^{-\frac{5}{2}}), \tag{13}$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые константы, зависящие от параметров задачи, но не зависящие от  $n$ .

Из этой формулы и равенства

$$\frac{\gamma_n}{|n+m_0+\theta|} = \frac{i}{k} + O(n^{-2}),$$

вытекающего из формулы (4) и определения числа  $m_0$ , следует также, что

$$\frac{|n+m_0|}{n+n_n} \gamma_n y_n = \frac{Ai}{k} P_{n+m_0}(\cos \delta) + \frac{Bi}{k} P_{n+m_0+1}(\cos \delta) + O(|n|^{-\frac{3}{2}}). \tag{14}$$

Поэтому функция

$$f_1(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} y_n e^{iny} \quad (-\pi \leq y \leq \pi) \tag{15}$$

является непрерывной функцией с абсолютно интегрируемой производной, а функция

$$f_2(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n y_n e^{iny} \quad (-\pi \leq y \leq \pi) \tag{16}$$

— абсолютно интегрируемой. Для доказательства последних утверждений нужно воспользоваться формулами (13) и (14) и известным разложением

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_n(\cos \delta) e^{iny} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{y}{2}}}{\sqrt{\cos y - \cos \delta}} & |y| < \delta \\ 0 & \delta < |y| \leq \pi. \end{cases}$$

Следовательно, к рядам (15) и (16) применимо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_1(y)} f_2(y) dy = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |y_n|^2.$$

С другой стороны, так как система (9) эквивалентна системе (5), (5'), то решение  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  соответствующей однородной системы (9') должно удовлетворять следующим равенствам:

$$f_1(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} y_n e^{iny} = 0, \quad \delta < |y| \leq \pi \tag{17}$$

$$f_2(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n y_n e^{iny} = 0, \quad |y| < \delta$$

из которых следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_1(y)} f_2(y) dy = 0,$$

а, значит, и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |y_n|^2 = 0.$$

Определяя вещественную и мнимую части в этом равенстве, имеем

$$\sum_{\text{Im} \gamma_n > 0} \text{Im} \gamma_n |y_n|^2 = 0,$$

$$\sum_{\text{Im} \gamma_n = 0} \text{Re} \gamma_n |y_n|^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая правило выбора знака в формуле (4), определяющей  $\gamma_n$ , получим, что  $y_n = 0$  для всех  $n$ , при которых  $\gamma_n \neq 0$ .

Величина  $\gamma_n$  может обратиться в нуль максимум при двух значениях  $n$ ; обозначим эти значения через  $m^+$  и  $m^-$ . Тогда

$$f_1(y) = y_{m^+} e^{im^+y} + y_{m^-} e^{im^-y},$$

и из равенства (17) следует, что  $y_{m^+} = y_{m^-} = 0$ .

Таким образом, однородная система (9') не имеет ненулевого решения в пространстве  $l^2$ .

Поэтому неоднородная система (9) при всех вещественных  $k$  имеет единственное решение, принадлежащее  $l^2$ , причем из оценок (12) и теорем Коха следует, что это решение может быть получено в виде отношений сходящихся бесконечных определителей Крамера.

Тем самым доказаны существование решения, его единственность и законность приближенного метода, использованного в работе [1].

### 3. Коротковолновая асимптотика решения

Пусть  $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — решение неоднородной системы (9), принадлежащее  $l^2$ . Из формул (10), оценок (11) и вида правых частей уравнений (9) следует, что для этого решения тоже справедливо представление (13) и формула (14), т. е.

$$e_n = A' \frac{P_{n+m_0}}{n+m_0+\beta} + B' \frac{P_{n+m_0+1}}{n+m_0+\beta} + O(|n|^{-\frac{5}{2}}), \quad (18)$$

$$\frac{|n+m_0|}{n+m} \gamma_n e_n = \frac{A'i}{k} P_{n+m_0} + \frac{B'i}{k} P_{n+m_0+1} + O(|n|^{-\frac{3}{2}}). \quad (19)$$

Положим

$$a_n = \frac{\sin n(\delta - \varepsilon^+ - \varepsilon^-)}{\pi n} \frac{\sin n\varepsilon^+}{n\varepsilon^+} \cdot \frac{\sin n\varepsilon^-}{n\varepsilon^-} - \delta_n^0, \quad (20)$$

$$\gamma_n = e_n - a_n,$$

где величины

$$\varepsilon^+ = \frac{\pi}{k(\sqrt{1-\alpha^2-\beta})}; \quad \varepsilon^- = \frac{\pi}{k(\sqrt{1-\alpha^2+\beta})} \quad (21)$$

выбраны, так, что произведение  $\sin n\varepsilon^+ \sin n\varepsilon^-$  обращается в нуль в тех точках, в которых обращается в нуль  $\gamma_n$ .

Коэффициенты  $a_n$  являются коэффициентами Фурье непрерывной функции, равной  $-1$  в интервалах  $\delta < |y| \leq \pi$  и нулю в интервале  $|y| < \delta - 2\varepsilon^+ - 2\varepsilon^-$ .

Так как коэффициенты  $e_n$  удовлетворяют равенствам (5), (5'), то

$$\varphi_1(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \eta_n e^{iny} = 0, \quad \delta < |y| \leq \pi \quad (22)$$

$$\varphi_2(y) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n \eta_n e^{iny} = - \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n e^{iny} \quad |y| < \delta, \quad (22')$$

причем из формул (18), (19) и (20) следует, что функция  $\varphi_1(y)$  является непрерывной функцией с абсолютно интегрируемой производной, а функция  $\varphi_2(y)$  абсолютно интегрируема на всем интервале  $[-\pi, \pi]$ . Поэтому к этим функциям применимо равенство Парсеваля:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} \varphi_2(y) dy.$$

Введем функцию

$$\varphi_3(y) = \gamma \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{iny},$$

где

$$d_n = \frac{\sin n(\delta + \varepsilon^+ + \varepsilon^-) \sin n\varepsilon^+ \sin n\varepsilon^-}{\pi n} - \delta_n^0,$$

равную нулю в интервале  $|y| < \delta$ . Так как функция  $\varphi_1(y)$  равна нулю вне этого интервала, то, учитывая равенство (22'), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} \varphi_2(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} [\varphi_3(y) + \varphi_2(y)] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_1(y)} [\varphi_3(y) - \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n e^{iny}] dy = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n} (\gamma d_n - \gamma_n a_n) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n |\eta_n|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n} (\gamma d_n - \gamma_n a_n). \quad (23)$$

Так как величины  $\gamma_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) могут быть либо неотрицательными (их конечное число), либо чисто мнимыми с положительной мнимой частью, то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| \cdot |\eta_n|^2 \leq 2 \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{\eta_n} |\eta_n|^2 \right|.$$

Используя неравенство Буняковского и формулу (23), получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| |\eta_n|^2 \leq 2 \sqrt{\left( \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| |\eta_n|^2 \right) \cdot \left( \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} \right)},$$

откуда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| |\eta_n|^2 \leq 4 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|}.$$

Для оценки правой части этого неравенства (при больших  $k$ ) разобьем ее на три слагаемых:

$$|n| < N_1; \quad N_1 \leq |n| \leq N_2; \quad |n| > N_2,$$

где

$$N_1 = \frac{1}{2} k (\sqrt{1 - \alpha^2} - |\beta|); \quad N_2 = 3k,$$

и воспользуемся легко проверяемыми неравенствами:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &> \frac{1}{2} \gamma; \quad \left| 1 - \frac{\gamma_n}{\gamma} \right| < \frac{3|n|}{k\gamma^2} \quad \text{при } |n| < N_1, \\ |\gamma_n| &< 4; \quad \left| \frac{\sqrt{\sin n\epsilon^+ + \sin n\epsilon^-}}{\gamma_n} \right| < \frac{\pi}{\gamma} \quad \text{при } N_1 \leq |n| \leq N_2, \\ 1 &< \frac{|\gamma_n|}{\gamma} < \frac{|n|}{k\gamma} \quad \text{при } |n| > N_2. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|n| < N_1} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} &\leq 4\gamma \sum_{|n| < N_1} \left| \frac{\sin n(\delta + \epsilon^+ + \epsilon^-) - \sin n(\delta - \epsilon^+ - \epsilon^-)}{\pi n} \right|^2 + \\ &+ 4\gamma \sum_{|n| < N_1} \frac{1}{\pi^2 n^2} \left| 1 - \frac{\gamma_n}{\gamma} \right|^2 < \frac{16\gamma}{\pi^2} \sum_{|n| < N_1} \left| \frac{\sin n(\epsilon^+ + \epsilon^-)}{n} \right|^2 + \\ &+ \frac{36 \cdot 2N_1}{k^2 \gamma^3 \pi^2} < \frac{C_1}{k\gamma \sqrt{1 - \alpha^2}}; \\ \sum_{N_1 < |n| < N_2} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} &\leq \frac{\gamma^2}{\pi^2} \sum_{N_1 \leq |n| \leq N_2} \left| \frac{\sqrt{\sin n\epsilon^+ + \sin n\epsilon^-}}{n\epsilon^+ \cdot n\epsilon^-} \right| \frac{1}{n^2 \gamma_n} + \\ &+ 4 \sum_{N_1 \leq |n| \leq N_2} \frac{1}{\pi^2 n^2} < \frac{C_2}{k\gamma^2 (1 - \alpha^2)^4}; \\ \sum_{|n| > N_2} \frac{|\gamma d_n - \gamma_n a_n|^2}{|\gamma_n|} &< 2\gamma \sum_{|n| > N_2} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{k} \sum_{|n| > N_2} \frac{|n|}{\pi^2 n^2 n^2 \epsilon^+ \epsilon^-} < \frac{C_3}{k \sqrt{1 - \alpha^2}} \end{aligned}$$

(все константы  $C_m$  не зависят от параметров задачи).

Таким образом, мы получили оценку

$$\sum_{|n| > N_2} \left| \frac{\gamma_n}{\gamma} \right| |\eta_n|^2 < \frac{C_4}{k\gamma^3 (1 - \alpha^2)^4}. \quad (24)$$

Из этого неравенства и формулы (4) следует для каждого фиксированного  $n$  при  $k \rightarrow \infty$  оценка  $\eta_n = O(k^{-\frac{1}{2}})$ , откуда, учитывая формулы (20) и (21), получим

$$e_n = \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* + O(k^{-\frac{1}{2}}).$$

Заметим, что эти оценки неравномерны по  $n$ . Равномерные оценки можно получить следующим образом. Величина  $\gamma_n$  как функция переменной  $n$  обращается в нуль в двух точках:  $k(\sqrt{1 - \alpha^2} - \beta)$  и  $-k(\sqrt{1 - \alpha^2} + \beta)$ . Выделим целую часть этих чисел:

$$\begin{aligned} k(\sqrt{1 - \alpha^2} - \beta) &= m^+ + \theta^+; \quad -k(\sqrt{1 - \alpha^2} + \beta) = \\ &= m^- + \theta^- \left( -\frac{1}{2} < \theta^\pm < \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Тогда, как легко проверить, при всех  $n$ , отличных от  $m^+$  и  $m^-$ ,

$$\left| \frac{\eta_n}{\gamma} \right| > \frac{C_5}{\sqrt{k} \gamma \sqrt[4]{1-a^2}},$$

откуда согласно (24) получим

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m^+, n \neq m^-)}}^{\infty} |\eta_n|^2 < \frac{C_6}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt[4]{1-a^2}}.$$

Для оценки  $|\eta_{m^+}|^2 + |\eta_{m^-}|^2$  введем функцию  $\tau^+(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n^+ e^{iny}$ , которая равна  $e^{im^+y}$  в интервалах  $\delta < |y| \leq \pi$  и нулю — в интервале  $|y| < \delta$ . Ее коэффициенты Фурье  $\tau_{m^+}^+$  и  $\tau_{m^-}^+$  равны

$$\tau_{m^+}^+ = \frac{\pi - \delta}{\pi}; \quad \tau_{m^-}^+ = -\frac{\sin(m^+ - m^-)\delta}{\pi(m^+ - m^-)} = O(k^{-1}).$$

Согласно равенству Парсеваля,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\tau_n^+|^2 = \frac{\pi - \delta}{\pi}.$$

Кроме того, из определения функции  $\tau^+(y)$  и формулы (22) следует

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\tau^+(y)} \varphi_1(y) dy = 0.$$

С другой стороны, по равенству Парсеваля этот интеграл равен

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\tau_n^+} \eta_n$ . Поэтому

$$|\tau_{m^+}^+ \eta_{m^+} + \tau_{m^-}^+ \eta_{m^-}| = \left| \sum_{\substack{n \neq m^+ \\ n \neq m^-}} \overline{\tau_n^+} \eta_n \right| \leq \sqrt{\left( \sum_{-\infty}^{\infty} |\tau_n^+|^2 \right) \left( \sum_{\substack{n \neq m^+ \\ n \neq m^-}} |\eta_n|^2 \right)} < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k} \gamma \sqrt[4]{1-a^2}}, \quad (25)$$

Аналогично, вводя функцию  $\tau^-(y)$ , равную  $e^{im^-y}$  в интервалах  $\delta < |y| \leq \pi$  и нулю — в интервале  $|y| < \delta$ , получим

$$|\tau_{m^+}^- \eta_{m^+} + \tau_{m^-}^- \eta_{m^-}| < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k} \gamma \sqrt[4]{1-a^2}}, \quad (26)$$

где

$$\tau_{m^+}^- = O(k^{-1}), \quad \tau_{m^-}^- = \frac{\pi - \delta}{\pi}.$$

Из неравенств (25) и (26) следует

$$|\eta_{m^+}| < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k} \gamma \sqrt[4]{1-a^2}}; \quad |\eta_{m^-}| < \frac{C_7}{\sqrt[4]{k} \gamma \sqrt[4]{1-a^2}}.$$

Окончательно получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\eta_n|^2 < \frac{C_8}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt[4]{1-a^2}}. \quad (27)$$

так что равномерно по  $n$  имеет место неравенство

$$|\eta_n| < \frac{C_9}{\sqrt{k} \gamma \sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Нетрудно показать также, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left[ a_n - \left( \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* \right) \right]^2 < \frac{C_{10}}{k}.$$

Таким образом, мы доказали, что при  $k \rightarrow \infty$  равномерно по  $n$  имеют место оценки

$$\begin{aligned} e_n &= a_n + O(k^{-1/4}), \\ e_n &= \frac{\sin n\delta}{\pi n} - \delta_n^* + O(k^{-1/4}). \end{aligned}$$

#### 4. Приближенные выражения для поля при больших $k$ и оценки погрешности

В предыдущем пункте мы показали, что при больших  $k$  коэффициенты  $e_n$  можно приближенно заменить на  $a_n$ , определяемые формулой (20), и функцию  $v(y, z)$  — на функцию

$$v^a(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{ik\gamma_n |z|} e^{in y} \right].$$

Построенное с помощью этой функции по формулам (2) и (7)\* поле  $\bar{E}^a, \bar{H}^a$  будет приближенным решением поставленной задачи дифракции.

Мы не можем ожидать, что это приближенное решение будет равномерно во всем пространстве приближаться к точному решению  $\bar{E}^T, \bar{H}^T$ , при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому в качестве меры погрешности приближенного решения выберем две интегральные энергетические величины: 1) энергию  $W(\epsilon, \zeta)$  разности точного и приближенного полей в параллелепипеде, ограниченном плоскостями  $x = 0, x = 1, y = \pi, y = -\pi, z = \epsilon, z = \zeta$  ( $\zeta > \epsilon \geq 0$ ), отнесенную к плотности энергии падающей волны (1); 2) поток энергии  $S(\zeta)$  этой разности полей через участок плоскости  $z = \zeta$  ( $\zeta > 0$ ), ограниченный плоскостями  $x = 0, x = 1, y = \pi, y = -\pi$ , который отнесен к потоку энергии падающей волны через ту же площадку.

Вычисляя определенные таким образом величины, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} W^{Ta}(\epsilon, \zeta) &= 2\pi(\zeta - \epsilon) \sum_{1 \text{ м } \gamma_n = 0} |\eta_n|^2 + \\ &+ \pi \sum_{1 \text{ м } \gamma_n > 0} \left[ |\eta_n| \frac{1 + \epsilon^2}{k(1 - \epsilon^2)} + \frac{1}{k|\gamma_n|} \right] |\eta_n|^2 (e^{-2k|\gamma_n|\epsilon} - e^{-2k|\gamma_n|\zeta}); \\ S^{Ta}(\zeta) &= \sum_{1 \text{ м } \gamma_n = 0} \left| \frac{\eta_n}{\gamma} \right| |\eta_n|^2. \end{aligned}$$

\* Для простоты будем считать падающую волну  $E$  поляризованной, т. е.  $h_x = 0$ . Тогда и  $H_x = 0$ . Общий случай рассматривается вполне аналогично.

Используя полученные оценки (24), (27), получим следующие оценки погрешности приближенного решения:

$$W^{Ta}(0, \zeta) < \frac{C_{11}(\zeta+1)}{\sqrt{k}\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}}; \quad S^{Ta}(\zeta) < \frac{C_{12}}{k\gamma^3(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь в качестве  $v_\varepsilon(y, z)$  функцию

$$v^K(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n\delta}{n\delta} - \delta_n^0 \right) e^{ik\gamma_n |z|} e^{in\delta y} \right]. \quad (29)$$

Легко видеть, что функция  $v^K(y, z)$  соответствует решению задачи по методу Кирхгофа — Зоммерфельда, когда величина  $E_x(x, y, z)$  полагается в щелях равной  $x$ -составляющей вектора  $\vec{E}$  падающей волны (и, естественно, на решетке равной нулю).

Оценивая разность между  $\vec{E}^\alpha$ ,  $\vec{H}^\alpha$  и кирхгофовским приближением  $\vec{E}^K$ ,  $\vec{H}^K$ , определяемым функцией  $v^K(y, z)$ , получим

$$W^{aK}(\varepsilon, \zeta) < \frac{C_{13}(\zeta+1)}{k\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{C_{14}|\ln \varepsilon|}{k^2(1-\alpha^2)};$$

$$S^{aK}(\zeta) < \frac{C_{15}}{k\gamma^3(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда, используя оценки (28), получим оценку погрешности кирхгофовского приближения:

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{TK}(\varepsilon, \zeta) < \frac{C_{16}(\zeta+1)}{\sqrt{k}\gamma^2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{C_{14}|\ln \varepsilon|}{k^2(1-\alpha^2)}; \\ S^{TK}(\zeta) < \frac{C_{17}}{k\gamma^3(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right. \quad (30)$$

Сделаем, наконец, еще один огрубляющий шаг: разложим в выражении (29)  $\gamma_n$  по степеням  $\frac{1}{k}$  и ограничимся двумя первыми членами разложения. Тогда получим в качестве приближения для  $v_\varepsilon(y, z)$  функцию

$$v^r(y, z) = e^{ik\beta y} \left[ e^{-ik\gamma z} + e^{ik\gamma |z|} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n\delta}{n\delta} - \delta_n^0 \right) e^{in\delta} \left( \frac{\gamma^2}{1-\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Эта функция определяет приближение геометрической оптики. Она имеет разрывы вдоль определенных лучей, исходящих из ребер решетки (параллельных направлению распространения падающей волны в нижней полуплоскости и параллельных направлению распространения отраженной от всей оси  $oy$  волны в верхней полуплоскости).

Если с помощью функции  $v^r(y, z)$  вычислить по формулам (2), (7) соответствующее электромагнитное поле  $\vec{E}^r, \vec{H}^r$  во всех точках, не ле-

жащих на плоскостях разрывов, то аналогично предыдущему можно показать, что для погрешностей  $W^{T\Gamma}(0, \zeta)$  и  $S^{T\Gamma}(\zeta)$  справедливы оценки

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{T\Gamma}(0, \zeta) < \frac{C_{18}(\zeta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt{1 - \alpha^2}}; \\ S^{T\Gamma}(\zeta) < \frac{C_{19} \zeta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k} \gamma^2 \sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{C_{20}}{k \gamma^3 (1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right. \quad (31)$$

Таким образом, формулы (30) и (31) дают строгое обоснование приближений Кирхгофа — Зоммерфельда и геометрической оптики с оценкой погрешности при  $k \rightarrow \infty$  в выбранных нами энергетических метриках.

Автор статьи выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Подольский. Дифракция электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на плоскую металлическую решетку. «Уч. зап. мех.-матем. ф-та и Харьковского матем. об-ва», сер. 4, 30 (1964).
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко и В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4 (1962).