

О ВОЗМОЖНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЧЛЕНОВ РЯДА

Э. А. Кузьмин

Киев

В настоящее время для построения импульсных частотных характеристик разомкнутых дискретных автоматических систем (ДАС) широко применяются графические методы. Это объясняется их сравнительной простотой и доступностью, отсутствием сложных аналитических расчетов, наглядностью, возможностью использования экспериментально полученных результатов.

В основе большинства графических методов лежит формула, представляющая импульсную частотную характеристику разомкнутой ДАС $K^*(j\omega T)$ в виде бесконечной суммы смещенных частотных характеристик приведенной непрерывной части системы [1]:

$$K^*(j\omega T) = \frac{\omega_n}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_{\Phi.з.}[j(\omega + r\omega_0)] K_n[j(\omega + r\omega_0)], \quad (1)$$

где $K_{\Phi.з.}(j\omega)$ и $K_n(j\omega)$ — частотные характеристики формирующего элемента и непрерывной части соответственно;
 ω_0 — частота квантования.

Сущность графических методов заключается в замене бесконечного ряда (1) конечным и в графическом определении суммы конечного ряда, которое может проводиться как в натуральном масштабе частот [1], так и в логарифмическом масштабе [2]. Основным вопросом при этом в любом случае является выяснение числа членов ряда, допускающего такую замену, и величины погрешности, сопровождающей данную замену. Обычно число членов ряда определяется непосредственно в процессе построения. Графическое суммирование производится до тех пор, пока очередной член ряда (1) не станет пренебрежимо малым по сравнению с учтенными. В этом случае погрешность построения, по сути, остается невыясненной, так как остаток ряда (1) фактически приравнивается к первому отбрасываемому члену.

С точки зрения практического использования графических методов, безусловно, важно знать эту погрешность и связь ее величины с текущей частотой, частотой квантования и параметрами непрерывной части системы, а главное, с числом членов конечного ряда, выбранным для построения импульсной частотной характеристики. Знание этой погрешности и зависимости ее от числа членов, учитываемых при построении, позволяет обоснованно производить усечение бесконечного ряда, увеличивает уверенность в достоверности полученного результата.

Произведем некоторые преобразования выражения (1). Если в качестве формирующего элемента применяется фиксатор $K_{ф.}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$, его частотная характеристика имеет вид

$$K_{ф.}(j\omega) = \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j \frac{\omega T}{2}}.$$

Подставляя $K_{ф.}(j\omega)$ в выражение (1) и учитывая периодичность функций $\sin \frac{\omega + r\omega_0}{2} T$ и $e^{-j(\omega + r\omega_0) \frac{T}{2}}$, получим:

$$K^*(j\omega T) = \frac{\omega_0}{\pi} \sin \frac{\omega T}{2} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2})} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} K'_n[j(\omega + r\omega_0)],$$

где

$$K'_n(j\omega) = \frac{K_n(j\omega)}{j\omega}.$$

Погрешность графического построения импульсной частотной характеристики $\Delta K^*(j\omega T)$ при учете $2N + 1$ членов ряда может быть определена по формуле

$$\Delta K_{2N+1}(j\omega T) = \frac{\omega_0}{\pi} \sin \frac{\omega T}{2} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2})} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} K'_n[j(\omega + r\omega_0)] - \sum_{r=-N}^N K'_n[j(\omega + r\omega_0)] \right\}. \quad (2)$$

Таким образом, исследование погрешности $\Delta K_{2N+1}(j\omega T)$ сводится к определению остатка комплексного бесконечного ряда $\sum_{r=-\infty}^{\infty} K'_n[j(\omega + r\omega_0)]$ при его приближенном суммировании ($r = N$).

Выражая $K'_n[j(\omega + r\omega_0)]$ через вещественную и мнимую характеристики, можно получить иную форму записи для $\Delta K_{2N+1}^*(j\omega T)$:

$$\Delta K_{2N+1}^*(j\omega T) = \frac{\omega_0}{\pi} \sin \frac{\omega T}{2} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2})} [\Delta Re_{2N+1}^* + j \Delta Im_{2N+1}^*], \quad (3)$$

$$\Delta Re_{2N+1}^* = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Re'(\omega + r\omega_0) - \sum_{r=-N}^N Re'(\omega + r\omega_0) = Re^* - Re_{2N+1}, \quad (4)$$

$$\Delta Im_{2N+1}^* = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Im'(\omega + r\omega_0) - \sum_{r=-N}^N Im'(\omega + r\omega_0) = Im^* - Im_{2N+1}. \quad (5)$$

Такая форма записи позволяет исследовать погрешность $\Delta K_{2N+1}^*(j\omega T)$, а также погрешность по амплитуде ϵ и фазе Δ , изучая поведение двух вещественных бесконечных рядов Re^* и Im^* и возможность их приближенного суммирования.

Наиболее интересным вопросом при исследовании погрешности построения является определение возможности замены импульсной частотной характеристики $K^*(j\omega T)$ только первым членом ряда ($N = 0$), т. е. частотной характеристикой приведенной непрерывной части $\frac{\omega_0}{2\pi} K_{ф.}(j\omega) \times K_n(j\omega)$. В любом случае построение начинается именно с этого. Поэтому рассмотрим определение погрешности сначала для этого случая.

Задаваясь $N = 0$, выражения (4) и (5) могут быть записаны таким образом:

$$\Delta Re_i^* = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Re'(\omega + r\omega_0) - Re'(\omega) = \sum_{r=1}^{\infty} [Re'(\omega + r\omega_0) + Re'(\omega - r\omega_0)], \quad (6)$$

$$\Delta Im_i^* = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Im'(\omega + r\omega_0) - Im'(\omega) = \sum_{r=1}^{\infty} [Im'(\omega + r\omega_0) + Im'(\omega - r\omega_0)]. \quad (7)$$

Если каким-либо образом произвести определение этих бесконечных сумм, можно получить точное значение погрешностей $\Delta K_i^*(j\omega T)$, ϵ и Δ . Однако в общем случае такое суммирование является весьма трудоемким и приводит к громоздким вычислениям. В то же время при практических построениях вряд ли необходимо получать точное значение $\Delta K_i^*(j\omega T)$. Достаточно обычно бывает удостовериться в том, что погрешность построения не превосходит некоторой заданной величины, поэтому целесообразно произвести оценку погрешностей ΔRe_i^* и ΔIm_i^* сверху.

Рассмотрим такую оценку сначала для простейшего случая, положив, что передаточная функция непрерывной части $K_n(p)$ равна:

$$K_n(p) = \frac{k_0}{p + a}.$$

Отсюда

$$K_n^*(p) = \frac{k_0}{p(p + a)}.$$

При исследовании дискретных систем очень удобен прием перехода к безразмерным переменным, связывающим частоту и параметры системы с частотой квантования ω_0 . Введем такие переменные:

$$a = \frac{a}{\omega_0}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad q = \frac{p}{\omega_0}, \quad \omega T = 2x\pi$$

и запишем сразу выражение для частотной характеристики выбранной системы:

$$K_n^*(jx) = \frac{k_0}{\omega_0^2} \frac{1}{jx(a + jx)} = \frac{k_0}{\omega_0^2} \left[-\frac{1}{a^2 + x^2} - j \frac{a}{x(a^2 + x^2)} \right].$$

Множитель $\frac{k_0}{\omega_0^2}$ вынесем за знак суммы в выражении (2).

Выражения (6) и (7) при этом могут быть переписаны в таком виде:

$$\begin{aligned} \Delta Re_i^* &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{a^2 + (r+x)^2} - \frac{1}{a^2 + (r-x)^2} \right] = \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2(x^2 + r^2 + a^2)}{[(r+x)^2 + a^2][(r-x)^2 + a^2]}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta Im_i^* &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[-\frac{a}{(r+x)[(r+x)^2 + a^2]} + \frac{a}{(r-x)[(r-x)^2 + a^2]} \right] = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2x(x^2 + 3r^2 + a^2)}{(r^2 - x^2)[(r+x)^2 + a^2][(r-x)^2 + a^2]}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим возможности приближенного определения полученных сумм. Заметим, что оба ряда (8) и (9) являются рядами монотонными, поэтому к ним можно применить теорему сравнения, использующую понятие мажорирующего ряда [3]. Степень приближения суммы, полученной с использованием мажорирующего ряда, к точному значению суммы определяется выбором общего члена мажорирующего ряда. Очевидно, что общий член ряда (8) при увеличении r неограниченно приближается к выражению $\frac{2}{r^2}$. Скорость этого приближения определяется величиной относительной частоты x и параметра a . Поэтому естественно в качестве мажорирующего ряда принять ряд $2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$, сумма которого

известна и равна $2 \cdot \frac{\pi^2}{6}$. Так как в общем случае первый член исходного ряда может быть больше первого члена мажорирующего ряда, равного единице, последний должен быть умножен на некоторый коэффициент $D(x, a)$, который определяется приравниванием первых членов обоих рядов:

$$\frac{2(x^2 + 1 + a^2)}{[(1+x)^2 + a^2][(1-x)^2 + a^2]} = 2D(x, a). \quad (10)$$

При этом приближенное значение суммы ряда (8) запишется так:

$$\Delta Re_{1m}^* = -2D(x, a) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = -2D(x, a) \frac{\pi^2}{6}. \quad (11)$$

$D(x, a)$ зависит от параметра a и от рассматриваемой частоты x и должен учитываться лишь в том случае, если его значение больше единицы. Если при вычислении по формуле (10) $D(x, a)$ получается меньше единицы, в выражение (11) нужно подставлять $D(x, a) = 1$. В противном случае условия применения теоремы сравнения выполняться не будут [3].

Рассуждая подобным образом, можно получить, что приближенное значение ряда (9) равно:

$$\Delta Im_{1m}^* = 2x \cdot E(x, a) \cdot 3 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = 2x \cdot E(x, a) \cdot 3 \frac{\pi^2}{90}. \quad (12)$$

$$E(x, a) = \frac{3 + x^2 + a^2}{3(1-x^2)[(1+x)^2 + a^2][(1-x)^2 + a^2]}. \quad (13)$$

Коэффициент $E(x, a)$ также учитывается в том случае, если он получается больше единицы.

Таким образом, в рассматриваемом случае вычисление погрешности $\Delta K_1^*(jx\pi)$ производится достаточно просто. Вместе с тем проверочные расчеты показывают, что такой способ определения $\Delta K_1^*(jx\pi)$ дает удовлетворительную точность. В существенном диапазоне частот погрешность определения суммы не превосходит 10—15%. Описанная методика определения приближенного значения погрешности $\Delta K_1^*(jx\pi) \approx \Delta Re_{1m}^* + j\Delta Im_{1m}^*$ может быть распространена на определение погрешности для систем произвольного порядка. Такую возможность можно объяснить следующим образом. Переход от бесконечного ряда, соответствующего передаточной функции $K_n(s)$, к мажорирующему производится заменой общего члена заданного ряда выражением $\frac{F}{r^{2m}}$. При этом за счет

введения множителей $D(x, a)$ и $E(x, a)$ обеспечивается равенство первых членов обоих рядов в существенном диапазоне относительных частот x . Первый член заданного ряда представляет сумму смещенных частотных характеристик приведенной непрерывной части системы при $r = -1$ и $r = +1$. Поэтому погрешность приближения определяется в основном погрешностями замены членов ряда при $|r| > 1$. Естественно, чем выше порядок передаточной функции, тем меньше удельный вес этих членов, и следовательно, тем меньше погрешность при переходе к мажорирующему ряду. Проверочные расчеты подтверждают справедливость такого рассуждения. Поэтому можно в общем случае записать порядок приближенного определения погрешности $\Delta K_{1m}(jx\pi)$ для передаточной функции произвольного порядка.

По заданной передаточной функции $K_n(p) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (p + \chi_i)}{\prod_{i=1}^n (p + a_i)}$, вводя без-

размерные переменные, определяется передаточная функция

$$K_n(q) = \frac{K_n(q)}{q} \left(q = \frac{p}{\omega_0}, a_i = \frac{a_i}{\omega_0}, b_i = \frac{\chi_i}{\omega_0}, x = \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

В соответствии с выражениями (6) и (7) формируются общие члены рядов вещественных и мнимых частотных характеристик:

$$re_r = Re'(x+r) + Re'(x-r),$$

$$im_r = Im'(x+r) + Im'(x-r).$$

Для обоих рядов определяется показатель степени $2m$ общего члена мажорирующего ряда $\frac{F}{r^{2m}}$ как разность наивысших степеней переменной r знаменателя и числителя и коэффициент F , который равен множителю при наивысшей степени переменной r числителя re и im . В коэффициент F может входить относительная частота x .

Подстановкой $r = 1$ в выражения для re и im находятся значения $D(x, a) = \frac{re_1}{F_1}$ и $E(x, a) = \frac{im_1}{F_2}$. Учет $D(x, a)$ и $E(x, a)$ производится только в том случае, если их величина больше единицы. Составляется приближенное выражение для

$$\Delta K_{1m}^*(jx\pi) = \Delta Re_{1m}^* + j\Delta Im_{1m}^*,$$

$$\Delta Re_{1m}^* = F_1 \cdot D(x, a) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2m_1}},$$

$$\Delta Im_{1m}^* = F_2 E(x, a) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2m_2}}.$$

Значения суммы бесконечного ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2m}}$ в общем случае определяются в виде [4]:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2m}} = \frac{\pi^{2m} 2^{2m-1}}{(2m)!} B_m,$$

где B_m — числа Бернулли.

После определения значений ΔRe_{im}^* и ΔIm_{im}^* могут быть получены значения относительной погрешности по амплитуде ϵ и погрешности по фазе Δ :

$$\epsilon = \frac{\sqrt{(\Delta Re_{im}^*)^2 + (\Delta Im_{im}^*)^2}}{A^*} \approx \frac{\sqrt{(\Delta Re_{im}^*)^2 + (\Delta Im_{im}^*)^2}}{A_u}, \quad (14)$$

$$\Delta = \arctg \frac{\Delta Im_{im}^*}{\Delta Re_{im}^*}. \quad (15)$$

Таким образом, расчет погрешностей при замене импульсной частотной характеристики первым членом ряда сводится к определению вида общего члена ряда (6) и (7) и к нескольким простым вычислительным операциям.

Описанное определение погрешности при построении с учетом только первого члена ряда может быть проведено либо предварительно для определения диапазона частот, в котором эта погрешность меньше заданной, либо в процессе построения. В последнем случае расчет используется как проверочный.

Очевидно, что подобным же образом могут быть определены погрешности, если построение $K^*(j\omega T)$ производится с учетом нечетного числа членов ряда. Однако если вычислены погрешности, появляющиеся при учете первого члена ряда, дальнейшее исследование может проводиться следующим образом.

Погрешности ΔRe_k^* и ΔIm_k^* , определяемые выражениями (4) и (5), могут быть записаны в следующем виде:

$$\Delta Re_k^* = Re^* - (Re_1' + Re_2' + \dots + Re_k') = \Delta Re_1' - (Re_2' + \dots + Re_k'),$$

$$\Delta Im_k^* = Im^* - (Im_1' + Im_2' + \dots + Im_k') = \Delta Im_1' - (Im_2' + \dots + Im_k'),$$

где $k = 1, 2, 3$ — число учитываемых членов.

Отсюда понятно, что каждая последующая погрешность может быть вычислена, если известны $\Delta Re_1'$ и $\Delta Im_1'$, а также смещенные частотные характеристики непрерывной части системы.

Применение предлагаемых способов определения погрешностей построения характеристики $K^*(j\omega T)$ может производиться перед построением для определения требуемого числа членов таким образом, чтобы погрешность была меньше наперед заданной, в процессе построения для определения необходимости учета следующего члена ряда и после построения для контроля полученной погрешности. Предложенная методика в принципе допускает графическое определение требуемых вещественных и мнимых характеристик, что может значительно облегчить расчет.

Можно сделать еще несколько замечаний, касающихся графического построения импульсной частотной характеристики.

Как следует непосредственно из выражения (2), коэффициент передачи системы может быть вынесен из-под знака суммы как общий множитель. Поэтому на величину относительной погрешности по амплитуде ϵ коэффициент передачи не влияет. Далее, если положить $K_n(p) = \frac{1}{p^k}$,

т. е. если в состав непрерывной части системы входят только интегрирующие звенья, очевидно, в зависимости от порядка k либо $Re'(\omega)$, либо $Im'(\omega)$ будет равна нулю. Следовательно, если непрерывная часть системы состоит только из интегрирующих звеньев, фазовая погрешность при аппроксимации импульсной частотной характеристики любым числом членов отсутствует.

Ряды, составленные из мнимых частотных характеристик, являются знакопеременными, так как $Im'(\omega)$ является нечетной функцией частоты $(\omega + j\omega_0)$. Если в выражение для $Im'(\omega + j\omega_0)$ подставить значение $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, ряд будет иметь следующий вид:

$$Im_k = Im'\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + Im'\left(-\frac{\omega_0}{2}\right) + Im'\left(\frac{3\omega_0}{2}\right) + Im'\left(-\frac{3\omega_0}{2}\right) + \\ + \dots = Im'\left(\frac{\omega_0}{2}\right) - Im'\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + Im'\left(\frac{3\omega_0}{2}\right) - Im'\left(\frac{3\omega_0}{2}\right) + \dots,$$

т. е. на частоте, равной половине частоты квантования, члены ряда попарно уничтожаются и его сумма для четного числа членов равна нулю.

Так как на этой же частоте $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ ($\omega T = \pi$), импульсная частотная характеристика принимает действительное значение [1], то при аппроксимации импульсной частотной характеристики четным числом членов ряда на частоте, равной половине частоты квантования, для любой передаточной функции непрерывной части фазовая погрешность отсутствует.

В заключение можно отметить, что описанная методика расчета погрешностей при замене импульсной частотной характеристики частотной характеристикой непрерывной части системы может применяться не только при графическом построении характеристики $K^*(j\omega T)$, но и в любом случае, когда требуется определить возможность и условия такой замены. Она может быть использована, например, при исследовании возможности сведения импульсной системы к системе непрерывной, что позволяет непосредственно применить к импульсной системе все методы теории непрерывных систем, при определении возможности моделирования непрерывной части системы на цифровой вычислительной машине и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962.
2. Л. Т. Кузин, И. А. Каленик. Графический метод построения логарифмических частотных характеристик дискретно-непрерывных систем. Вопросы радиоэлектроники, серия XII, вып. 7, 1963.
3. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. I. ГИФМЛ, М., 1963.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1952.