

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**Пояснювальна записка**

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Комп'ютерне моделювання міцності та надійності елементів  
конструкцій з урахуванням дестабілізуючих факторів

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи ПМм-23-1

Антонов О.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика

113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Стрельнікова О.О.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Антонову Олександр Олексійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Комп'ютерне моделювання міцності та надійності елементів  
конструкцій з урахуванням дестабілізуючих факторів

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математичні моделі задач міцності надійності та  
коливань елементів енергетичного обладнання

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Стрельнікова О.О.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 75 с., 6 табл., 11 рис., 1 дод., 42 джерела.

ГІДРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ, ГІПЕРСИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛИ, МЕТОДИ СКІНЧЕННИХ ТА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ, СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ТРІЩИНИ.

Об'єкт дослідження – міцність, коливання та надійність елементів енергетичних машин з урахуванням дестабілізуючих факторів.

Мета роботи – розроблення математичних моделей та комп'ютерних програм для оцінки міцності та коливань елементів енергетичних машин, що взаємодіють із рідиною, або мають дефекти типу тріщини.

Методи дослідження – методи граничних інтегральних рівнянь, методи скінченних та граничних елементів, метод заданих форм.

Надійна експлуатація сучасної техніки призводить до необхідності вивчення міцності елементів конструкцій в умовах дії інтенсивних статичних та динамічних навантажень. Характерною рисою багатьох конструктивних елементів є робота при взаємодії з рідиною або газом. Математичні моделі, що описують динамічну поведінку таких елементів, побудовані з урахуванням цього, тобто. вирішувати завдання щодо визначення статичних і динамічних характеристик з урахуванням взаємодії двох середовищ. В останні роки намітилася тенденція до продовження ресурсу роботи обладнання, яке знаходиться в експлуатації протягом тривалого часу, та практично вичерпало свій нормативний ресурс. Елементи такого обладнання зазвичай мають дефекти типу тріщин і мікропор, причому ці дефекти часто утворюють скупчення або ланцюжки. В роботі проаналізовано дестабілізуючий вплив коливань на міцність конструктивних елементів, що при експлуатації взаємодіють з рідиною. Для визначення тиску рідини на тонкі поверхні використано методи теорії потенціалу, які дозволили отримати гіперсингулярні інтегральні рівняння відносно невідомих густин по-

тенціалів. Використано ефективний числовий метод обчислення сингулярних інтегралів. Саме густини потенціалів подвійного шару й визначають перепад тиску при двобічному обтіканні поверхні ідеальною нестисливою рідиною. Проведені числові дослідження з визначення частот та форм коливань консольних пластин, які моделюють лопаті гідротурбіни. Здійснено порівняння отриманих даних з даними експерименту. Метод заснований на використанні розкладень невідомих переміщень елементів конструкцій в рідині в ряди за формами коливань цих елементів без урахування приєднаних мас рідини. Проаналізовано міцність елементів конструкцій з тріщинами. Це дає можливість оцінювати міцність конструктивного елементу та здійснювати вибір параметрів навантаження таким чином, щоб забезпечити надійність функціонування елементів конструкцій при вібраціях.

## ABSTRACT

Introductory note: 75 pages, 6 tables, 11 figures, 1 appendix, 42 sources.

CRACKS, FINITE AND BOUNDARY ELEMENT METHODS, HYDRO-ELASTIC VIBRATIONS, HYPERSINGULAR INTEGRALS, SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS.

Object of research – strength, vibrations and reliability of elements of power machines taking into account destabilizing factors.

Purpose of work – developing mathematical models and computer codes for assessing the strength and oscillations of elements of power machines that interact with a liquid or have defects such as cracks.

Methods of research – methods of boundary integral equations, finite and boundary element methods, the method of given modes.

Reliable operation of modern technology leads to the need to study the strength of structural elements under conditions of intense static and dynamic loads. A characteristic feature of many structural elements is their operation in interaction with a liquid or gas. Mathematical models describing the dynamic behaviour of such elements are built taking this into account, i.e. to solve the problem of determining static and dynamic characteristics taking into account the interaction of two environments. In recent years, there has been a tendency to extend the service life of equipment that has been in operation for a long time and has practically exhausted its regulatory resource. Elements of such equipment usually have defects such as cracks and micropores, and these defects often form clusters or chains. The work analyses the destabilizing effect of forced vibrations on the strength of structural elements that interact with the liquid during operation. To determine the pressure of the liquid on thin surfaces, the methods of potential theory were used, which allowed us to obtain hypersingular integral equations for unknown potential densities. An effective numerical method for calculating singular integrals was used. It is the potential densities of

the double layer that determine the pressure drop during bilateral flow around the surface by an ideal incompressible liquid. Numerical studies were conducted to determine the frequencies and forms of vibrations of cantilever plates that model the blades of a Kaplan turbine. The obtained data were compared with experimental data. The method is based on expansions of unknown displacements of structural elements in the liquid into series according to the modes of vibrations of these elements without taking into account the attached masses of the liquid. The strength of structural elements with cracks was analysed. This makes it possible to estimate the strength of a structural element and select the load parameters in such a way as to ensure the reliability of the functioning of structural elements during vibrations.

## ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів .....	10
Вступ .....	11
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження .....	14
1.1 Системний аналіз задач комп'ютерного моделювання гідропружних коливачь конструкцій та задач механіки руйнування.....	14
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі гідропружних коливачь конструкцій та задач механіки руйнування.....	17
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....	19
1.4 Постановка задач дослідження .....	21
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	26
2.1 Гіперсингулярний інтеграл .....	26
2.2 Розрахункові моделі на основі методів теорії потенціалу та гіперсингулярних інтегральних рівнянь .....	27
2.3 Методи розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння, що описує крайові задачі для тіла з тріщиною .....	31
2.4 Застосування методу заданих форм при дослідженні частот та форм власних коливачь елементів конструкцій .....	36
Висновки за розділом 2 .....	38
3 Програмна реалізація .....	40
3.1 Програмний комплекс ANSYS .....	40
3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання задач гідропружності та механіки руйнування .....	42
3.3 Опис програми .....	44
Висновки за розділом 3 .....	46
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз .....	48
4.1 Обчислювальний експеримент для задач гідропружності .....	48
4.2 Обчислювальний експеримент для задач механіки руйнування .....	53

	9
Висновки за розділом 4 .....	55
Висновки .....	56
Перелік джерел посилання .....	58
Додаток А Лістинг програми .....	63

**ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ**

МСЕ – метод скінченних елементів;

МГЕ – метод граничних елементів;

КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень;

ГІР – гіперсингулярні інтегральні рівняння;

$E$  – модуль пружності, МПа;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;

$\rho_s$  – густина матеріалу оболонки, кг/м<sup>3</sup>;

$\rho_l$  – густина рідини, кг/м<sup>3</sup>.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Інтенсивний розвиток сучасної техніки призводить до необхідності вивчення міцності елементів конструкцій за умов дії інтенсивних статичних та динамічних навантажень. Характерною рисою багатьох конструктивних елементів є їх експлуатація при взаємодії з рідиною або газом. Математичні моделі, що описують динамічну поведінку таких елементів, мають бути побудовані з урахуванням цього, тобто. вирішувати задачі щодо визначення статичних і динамічних характеристик необхідно з урахуванням взаємодії двох середовищ. Особливу складність викликають задачі, коли потрібно визначити динамічні характеристики елементів конструкцій, що мають малу товщину, порівняно з іншими розмірами елемента. Саме такими елементами конструкцій є лопаті робочих коліс гідротурбін, компресорів, лопатки направляючих апаратів. Експлуатація таких елементів відбувається в умовах дії інтенсивних періодичних впливів. При цьому необхідно знати власні частоти коливань зазначених елементів з урахуванням приєднаних мас рідини, щоб зробити відбудову від небажаних резонансних частот. В останні роки намітилася тенденція до продовження ресурсу роботи обладнання, яке знаходиться в експлуатації протягом тривалого часу, та практично вичерпало свій нормативний ресурс. Елементи такого обладнання часто мають дефекти типу тріщин і мікропор, причому ці дефекти часто утворюють скупчення або ланцюжки. Здавалося б, це два різні завдання механіки суцільного середовища. Але їх поєднує фізична спільність. Як тріщина в пружному тілі, так і лопать в потоці рідини є розривами суцільності, а математичні моделі, що описують ці різні задачі, є диференціальними рівняннями або системами диференціальних рівнянь еліптичного типу. Для їх числового вирішення найбільш ефективно використовувати методи теорії потенціалу, що дозволяє звести розглянуті задачі в тривимірних областях до сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь, невідомі в яких розподілені лише на межі області, що розглядається. Тому є актуальним удосконалення методів числового розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних

рівнянь з подальшим застосуванням розроблених методів до вирішення практичних завдань визначення частот та форм власних коливань елементів конструкцій, що взаємодіють при експлуатації з повітряним або водним середовищем, а також до задач визначення довговічності елементів конструкцій з дефектами типу тріщини.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є розроблення математичних моделей та комп'ютерних програм для оцінки міцності та коливань елементів енергетичних машин, що взаємодіють із рідиною, або мають дефекти типу тріщини. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Комп'ютерне моделювання міцності та надійності елементів конструкцій з урахуванням дестабілізуючих факторів»;
- проаналізувати можливість та доцільність зведення крайових задач, що розглядаються до сингулярних або гіперсингулярних інтегральних рівнянь;
- модифікувати методи числового розрахунку;
- провести обчислювальні експерименти.

Можливі сфери застосування розробки "Комп'ютерне моделювання міцності та надійності елементів конструкцій з урахуванням дестабілізуючих факторів" охоплюють широкий спектр галузей, оскільки подібні технології дозволяють проводити детальний аналіз структурної поведінки під впливом різних несприятливих факторів. Основні напрями використання є такими:

- моделювання міцності і надійності матеріалів та конструкцій літаків, ракет і супутників для забезпечення безпеки та оптимізації ваги і витрат матеріалів в авіаційній та космічній промисловості;
- оцінка довговічності будівельних матеріалів і конструкцій, таких як мости, дамби, хмарочоси, з урахуванням факторів зносу, корозії та сейсмічної активності;
- аналіз надійності елементів енергетичних установок, зокрема турбін, трубопроводів, котлів та ядерних реакторів, для попередження аварій і підви-

щення ефективності;

– моделювання міцності медичних імплантатів, наприклад, протезів, для прогнозування їх довговічності і взаємодії з біологічними тканинами.

– оцінка надійності бронетехніки, зброї і військових споруд під впливом вибухів, ударів і корозії.

– аналіз міцності залізничних конструкцій, кораблів, підводних човнів і морських платформ з урахуванням впливу хвильових навантажень, корозії та інших морських факторів.

Таке моделювання дозволяє значно знизити витрати на фізичні випробування, прискорити процес розробки нових продуктів і забезпечити більш точні прогнози поведінки конструкцій в реальних умовах експлуатації.

*Об'єктом дослідження є міцність, коливання та надійність елементів енергетичних машин з урахуванням дестабілізуючих факторів.*

*Предметом дослідження є розрахункові схеми та методи числового розв'язання задач гідропружності та механіки руйнування із застосуванням гіперсингулярних рівнянь.*

**Методи дослідження.** У кваліфікаційній роботі використовуються методи граничних інтегральних рівнянь, методи скінченних та граничних елементів, метод заданих форм.

**Публікації.** Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на III International Scientific & Practical Conference, Learning & Teaching: In the World after the War: Conference Proceedings of Kharkiv, Ukraine, November 8, 2024 а також у межах науково-практичної конференції «Молодь і технічний прогрес в АПВ» 26-27 листопада 2024 року, Харків.

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Системний аналіз задач комп'ютерного моделювання гідропружних коливань конструкцій та задач механіки руйнування

Значна кількість сучасного енергетичного, машинобудівного та нафтохімічного обладнання працює в умовах підвищених технологічних навантажень. Елементи конструкцій піддаються дії короткочасних силових та температурних впливів, функціонують при взаємодії з оточуючим середовищем. Актуальними питаннями сьогодення залишаються проблеми обчислення міцносних та динамічних характеристик вказаного обладнання з метою уточнення залишкового ресурсу та забезпечення надійності та безпеки конструкцій при експлуатації.

В сучасному світі багато обладнання відчуває значні технологічні навантаження. Воно піддається дії силових та температурних впливів та взаємодіє з оточуючим середовищем. На сьогодні існує питання визначення міцносних та динамічних характеристик такого обладнання задля уточнення строків його експлуатації та надійності.

Проблема гідропружної взаємодії є актуальною при повній або частковій взаємодії такого обладнання з водним або повітряним середовищем. Під час роботи обладнання відчуває навантаження з боку потоку, що викликає вимушені коливання. При близькості власних частот коливання в обладнанні та частот збуджуючих сил може виникнути резонанс, що призводить до несправності в роботі. Таким чином, одним із актуальних питань є визначення власних частот та форм вільних коливань елементів конструкцій під час взаємодії з водним або повітряним середовищем. На їх визначення значно впливають гідро-пружні ефекти, які варто враховувати.

Існує два класи проблем такої взаємодії: проблеми визначення вищеозначених факторів під час однобічної взаємодії з середовищем та під час двобічного контакту.

З погляду практики, особливий теоретичний та практичний інтерес представляє проблема взаємодії твердих та пружних тіл з рідиною. Багато прикладних завдань механіки тіла, що деформується, призводять до необхідності вивчення спільного руху твердих деформованих і рідких середовищ. Деякі з них були сформульовані та вирішені ще у ХІХ столітті. До них, зокрема, відноситься завдання про рух твердого тіла з порожниною, повністю заповненою ідеальною рідиною, що не стискається.

Нині інженерна практика висунула низку нових завдань взаємодії тіл із рідиною. Умовно ці завдання можна поділити на дві групи. До першої групи відносяться завдання про рух абсолютно твердих або твердих тіл, що деформуються, з порожнинами, частково або повністю заповненими рідиною. У разі ідеальної нестисливої рідини розглянуті задачі зводяться до вирішення внутрішнього (або зовнішнього) крайового завдання Неймана. До другої групи відносяться завдання про взаємодію тонкостінних твердих (або деформованих) елементів конструкцій при двосторонньому контакті з рідиною. Це крайові завдання Неймана у просторі з розрізом. В обох випадках застосування методів теорії потенціалу дозволяє звести розглянуті завдання до сингулярних (або гіперсингулярних) інтегральних рівнянь.

Великий внесок у розвиток проблеми взаємодії пружних конструкцій із рідиною зроблено в роботах [1; 2; 3; 4; 5; 6] та ін.

Зазначені роботи належать до вирішення завдань першої групи: у них вивчається взаємодія рідини із замкнутою пружною оболонкою. Хоча методи, розглянуті в цих роботах, не можуть бути безпосередньо прикладені до вирішення завдань про взаємодію пружних тонкостінних елементів конструкції з рідиною (при двосторонньому контакті), проте існує загальний підхід, характерний для великого класу задач гідропружності. Цей підхід полягає ось у чому. По-перше, при спільному вирішенні рівнянь руху оболонки в рідині використовуються власні функції завдання про вільні коливання оболонки, що не взаємодіє із середовищем. Другий загальної характерною рисою розглянутих завдань є побудова зворотного оператора для гідродинамічної частини завдання. У цьому ви-

користуються різні підходи. Так, у [7] застосовано метод аналітичного продовження, у [8] обернений оператор знаходиться шляхом вирішення спеціально введеної задачі на власні значення з параметром у граничній умові. У [9] до вирішення цього завдання застосований метод Рітца з координатними функціями, що включають нелінійний параметр, що варіюється. Використання методів скінченних різниць та скінченних елементів проведено у [10; 11]. У [12] розглянуто завдання гідропружності для напівсферичної оболонки, що містить рідину, що стискається. У [13] завдання визначення гідродинамічного тиску зведено до інтегрального рівняння.

На теперішній час накопичилась низка нагальних проблем, пов'язаних зі станом сучасного енергетичного та технологічного обладнання, яке тривалий час знаходиться в експлуатації та практично вичерпало свій нормативний ресурс. Таке обладнання зазвичай має різного роду дефекти, які при подальшій експлуатації можуть призвести до часткового або повного руйнування конструкції. З іншого боку, обладнання багатьох промислових підприємств працює в умовах підвищених технологічних навантажень. Існує також велика ймовірність наявності форс-мажорних обставин, пов'язаних з землетрусами, терактами, помилками персоналу. Це призводить до необхідності враховувати дію імпульсних та сейсмічних навантажень на елементи конструкцій. Найбільш вразливими при цьому є саме тонкостінні елементи конструкцій, при експлуатації яких необхідно враховувати ефекти взаємодії із зовнішнім середовищем.

З точки зору математичного моделювання тріщини в елементах конструкцій та тонкі пружні конструктивні елементи, що взаємодіють з рідиною, описуються схожими системами диференціальних або інтегральних рівнянь. Це можна пояснити з фізичної точки зору тим, що тріщини в тілах та конструктивні елементи в рідині можна трактувати як розриви суцільного середовища.

Тому для комп'ютерного моделювання таких об'єктів доцільно застосовувати схожі числові методи. На основі аналізу сучасного стану питання комп'ютерного моделювання міцності та надійності технологічного обладнання зроблено висновки про те, що на теперішній час найбільш ефективними є чис-

лові методи скінченних та граничних елементів. Найбільш цікавими та недостатньо розвиненими є методи граничних елементів для числового розв'язання тривимірних крайових задач механіки та математичної фізики, що зводяться до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Розвиненню таких числових методів та їх застосуванню для комп'ютерного моделювання дестабілізуючих факторів при експлуатації технологічного обладнання присвячена магістерська робота.

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі гідропружних коливань конструкцій та задач механіки руйнування

Багато сучасних машин і пристроїв працюють у все більш вимогливих технологічних умовах. Хоча польові експерименти вважаються найбільш надійним і ефективним інструментом оцінки міцності, їх проведення є дуже дорогою і не завжди безпечною процедурою. Тому для забезпечення надійної роботи обладнання необхідно ще на етапі проектування проводити аналіз міцносних і динамічних характеристик з використанням комп'ютерних технологій для проведення віртуальних випробувань. Це викликало стрімкий розвиток комп'ютерних методів аналізу, особливо в останні десятиліття. Більшість практичних завдань можна описати за допомогою крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних та їх систем. Числові методи розв'язування таких рівнянь поділяються на два основних класи: методи обласного типу (ОТ) і граничного типу (ГТ). Серед методів ДТ слід відзначити методи скінченних елементів [14] та скінченних різниць [15], а також методи скінченних об'ємів [16; 17]. Основні переваги методів граничного типу перед обласними полягають у зменшенні розмірності задачі на одиницю. Таким чином, протягом останніх десятиліть як інженери, так і вчені стали більше цікавитися такими методами зменшення розрахункової області [18]. Обчислювальні методи, такі як методи граничних елементів (МГЕ) та інші редуковані методи, є серед методів, які здатні забезпечити якісні числові результати при вирішенні різних інженерних за-

дач [19; 20]. Зауважимо, що родоначальником як обласних методів, так і методів граничного типу є метод зважених залишків. Різниця в методах ОТ і ГТ проявляється при використанні базових функцій. У методах ОТ базисними функціями є сингулярні або фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь. Це призводить до сингулярних або гіперсингулярних інтегральних рівнянь у зведенні проблем до поверхневих або контурних областей інтегрування. Тому актуальним є розробка нових ефективних методів числового розв'язання таких інтегральних рівнянь.

Гіперсингулярні інтегральні рівняння (ГІР) розглядаються як ефективний інструмент для розв'язування великого класу крайових задач механіки та математичної фізики. Серед них проблеми механіки руйнування тріщин [21], проблеми взаємодії рідини та конструкції [22], дифракції електромагнітних хвиль [23], проблеми аеродинаміки, що стосуються великих [24] і малих [25] вітряних і морських турбін [26], напруги слід зазначити аналіз деформації композитів і нанокompозитів [27]. Варто зазначити, що застосування сингулярних інтегральних рівнянь до крайових задач теорії потенціалу, механіки твердого тіла і рідини, математичної фізики привертає увагу інженерів і науковців із середини минулого століття, коли з'явилися перші фундаментальні праці в галузі науки і техніки. з'явилися області. Однак у ті роки складність як попередніх аналітичних розрахунків, так і відсутність ефективних чисельних схем не сприяли розвитку методу. Але сучасні можливості обчислювальної техніки дозволяють зробити рішучий крок до застосування цього складного апарату математичної фізики для вирішення актуальних інженерних задач [28]. Революційним кроком уперед стали дослідження Карлоса Бреббіа [29; 30], які є основоположними в області створення та розвитку методу граничних елементів (МГЕ). Метод спочатку був розроблений для проблем потенційної теорії [28], а пізніше розширений до проблем еластичності [31], використовуючи аналогію між фундаментальними рішеннями обох теорій. Зазначимо, що в [32] розглядалися переважно сингулярні інтегральні рівняння та їх системи без узагальнення на гіперсингулярні інтегральні рівняння. Одновимірні ГІР досліджені в [33], де були розроб-

лені методи сплайн-колокації зі сплайнами першого порядку для апроксимації розв'язків нелінійних гіперсингулярних інтегральних рівнянь. У [34] отримано аналітичний розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа на площині. Теоретичні аспекти ГІР описані в [35]. Питання чисельної реалізації та розробки ефективних методів розв'язування сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь розглядаються в роботах [36; 37; 38]. Водночас залишаються недостатньо дослідженими питання обґрунтування методів, оптимального вибору точок колокації, пошуку аналітичних розв'язків для алгоритмів тестування чисельних розв'язків гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР). Деякі з цих питань розглядаються в основному дослідженні.

### 1.3 змістовна та формальна постановка задачі

Кожна математична модель може бути зображена диференціальне рівняння з відповідними крайовими та початковими умовами. Зупинимось на формальній постановці крайової задачі. Введемо диференціальний оператор  $L$ , який описувати механічну поведінку матеріалу конструкції, або суцільного рідкого середовища в області  $\Xi$ . Розглянемо рівняння з правою частиною у вигляді дельта-функції  $\delta(x - x_0)$ , що моделює точкове навантаження, тобто

$$L(U(x)) = \delta(x - x_0), x \in \Xi.$$

Фундаментальний розв'язок  $G(x, x_0)$  цього рівняння задовольняє рівнянню

$$L(G(x, x_0)) = \delta(x - x_0).$$

Далі введемо поняття нормального диференціювання для векторного поля  $u$ , як

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\sigma(u) \cdot n),$$

де  $n$  – одиничний нормальний вектор до  $\partial\Xi$ ;

$\sigma(u)$  – аналог градієнту.

Побудуємо узагальнений потенціал подвійного шару для  $\phi$  на  $\partial\Omega$ :

$$(D\phi)(x) = \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y \phi(y)} dS(y), x \in \Xi.$$

Далі задовольняємо граничним умовам та отримуємо розв'язок сингулярного (або гіперсингулярного) інтегрального рівняння для задачі на границі області  $\partial\Omega$ .

В залежності від виду граничних умов маємо сингулярне інтегральне рівняння, якщо розглядається задача Дірихле (перша крайова задача), або гіперсингулярне інтегральне рівняння, якщо розглядається крайова задача Неймана (друга крайова задача).

Змістовна постановка задачі передбачає наступне:

- провести комп'ютерне моделювання елементів конструкцій для визначення їх міцності і надійності, враховуючи дестабілізуючі фактори, такі як тріщини, корозія, температурні впливи, і циклічні навантаження високої інтенсивності;

- визначити поведінку конструкції під впливом дестабілізуючих факторів, зокрема розрахувати напружено-деформований стан, оцінити розвиток тріщин та місця потенційного руйнування, якщо розв'язується задача механіки руйнування, та визначити частоти та форми коливань елемента конструкції при взаємодії з рілиною, якщо розглядається задача гідропружності.

Для числового моделювання будуть використані такі методи якчисельних методів, таких як метод граничних елементів (МГЕ) для розв'язання інтегральних рівнянь, та метод скінченних елементів (МСЕ) для розв'язання диференціальних рівнянь, які моделюють механічні властивості конструкцій.

Внаслідок проведення розрахунків очікується отримати прогнозовану поведінку конструкції під різними навантаженнями, виявити критичні точки і надати рекомендації щодо підвищення надійності конструкцій.

Це дозволить ефективно оцінити надійність конструкцій і запобігти потенційним аваріям через конструктивні недоліки або несприятливі експлуатаційні умови.

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Досліджено концентрацію напружень у тривимірних тілах з плоскими тріщинами, що є критично важливим для оцінки міцності і довговічності матеріалів під час їх експлуатації. Проведений аналіз дозволяє визначити локальні зони високої напруги, які можуть призвести до подальшого розвитку тріщини і, зрештою, до руйнування всієї конструкції.

Також досліджено малі коливання моделей лопатей гідротурбін при їх взаємодії з ідеальною нестисливою рідиною. Ці коливання суттєво впливають на динамічні характеристики гідротурбін, визначаючи їх ефективність та довговічність під час експлуатації в різних режимах.

Хоча ці задачі належать до різних напрямків механіки суцільного середовища, є одна спільна риса: і тріщина в пружному тілі, і лопать гідротурбіни є розривами в суцільному середовищі. У випадку тріщини цей розрив проявляється у вигляді розділення матеріалу, тоді як лопать гідротурбіни, що взаємодіє з рідиною, створює розрив у потоках навколо неї.

В обох випадках задачі зведено до розв'язання гіперсингулярних інтегра-

льних рівнянь, що дозволяє врахувати складні граничні умови і взаємодію в області розриву. Використання таких рівнянь є ключовим для точної моделі поведінки матеріалів і конструкцій, забезпечуючи розв'язок задач, що виникають у механіці руйнування і гідродинаміці.

Цей підхід дозволяє глибше зрозуміти фізичні явища, що відбуваються в цих системах, і підвищити надійність та ефективність технічних об'єктів.

Спочатку розглянемо задачу малих коливань лопаті гідротурбіни в рідині та зведемо її до проблеми власних значень.

Рівняння руху пружного елемента мають вигляд

$$L(U) + M(U) = P_a, \quad (1.1)$$

де  $L, M$  – оператори пружних і масових сил;

$P_a$  – тиск рідини;

$U = (u_1, u_2, w)$  – вектор-функція переміщень.

Мають місце співвідношення:

$$L(u_k) = \Omega_k^2 M(u_k), (M(u_k), u_j) = \delta_{kj}.$$

Вважається, що рідина ідеальна та нестислива, а її рух є безвихровим. Рух рідини вивчається в тривимірному формулюванні методами теорії потенціалу. Передбачається, що вільні вихори не утворюються і не сходять з несучої поверхні. В таких умовах існує потенціал швидкостей

$$v(x, y, z, t) = \text{grad}\Phi(x, y, z, t),$$

що задовольняє всюди поза пластиною рівнянню Лапласа, а на лицьових поверхнях досліджуваного елемента  $S$  - умові непротікання.

На змоченій поверхні застосуємо інтеграл Коші-Лагранжа

$$P = -\rho_2 \left[ \frac{\partial \Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right] - (\text{grad}(\Phi^+ - \Phi^-), V_0),$$

де  $\rho_2$  – густина рідини;

$V_0$  – швидкість незбуреного потоку;

$\Phi^+, \Phi^-$  – граничні значення потенціалу швидкостей  $\Phi$  при прямуванні точки спостереження до вихрової поверхні вздовж нормалей  $n^+, n^-$ , відповідно.

Таким чином, треба визначити функції  $U, \Phi(x, y, z, t)$ , що задовольняють рівнянню руху, рівнянню Лапласа, умовам непротікання, закріплення елемента та згасання збуреної швидкості рідини на нескінченності.

Розглянемо задачу про малі гармонічні коливання пружної лопаті в рідині. Зобразимо шукані функції у вигляді

$$w(x, y, t) = \exp(i\Omega t) w(x, y),$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\Omega t) \varphi(x, y, z),$$

де  $\Omega$  – частота, а  $w$  – власна форма коливань елемента конструкції рідині.

Зобразимо функцію  $\varphi(x, y, z)$  як потенціал подвійного шару з невідомою густиною  $\Gamma(\xi), \xi \in S$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left[ \frac{1}{|x - \xi|} \right] dS_\xi. \quad (1.2)$$

Оскільки  $\Phi^+ - \Phi^- = \Gamma$ , то перепад тиску є пропорційним густині потенціалу  $\Gamma$ . Обчислюючи нормальну похідну потенціалу подвійного шару (1.2) і підставляючи отриманий вираз в граничні умови приходимо до гіперсингулярного граничного інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|} dS = f(x). \quad (1.3)$$

В розглянутому випадку маємо  $f(x) = i\Omega w$ .

Зобразимо невідоме переміщення в вигляді  $w = \sum_{k=1}^N c_k w_k$ , де  $w_k$  є формами коливань елементу конструкції у повітрі. Нехай функції  $\Gamma_k(\xi)$  є розв'язками гіперсингулярного рівняння (1.3) з правими частинами  $w_k$ . Позначимо  $\Gamma_k(x) = H(w_k)$ , де  $H$  – обернений оператор до інтегрального оператора в (1.3), приходимо до проблеми власних значень:

$$c_j \Omega_j^2 = \Omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \left[ \delta_{kj} + (H(w_k) \cdot w_j) \right]. \quad (1.4)$$

Тут  $P_{kj} = (H(w_k) \cdot w_j)$  є матрицею приєднаних мас рідини.

В [39] доведено, що задачу про визначення концентрації напружень в тривимірному тілі з дисковою тріщиною можна звести до такого гіперсингулярного рівняння:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|x-\xi|^3} dS_\xi = Mq(x), M = \frac{1-\nu}{E}. \quad (1.5)$$

Тут  $\alpha_3(\xi)$  є розривом переміщень, а коефіцієнт інтенсивності напружень обчислюється таким чином:

$$K_1(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \frac{E}{1-\nu} u_3(y), y \in S,$$

де  $r$  є відстанню між точкою  $y$  на контурі тріщини, та точкою  $x$  в околі вершини тріщини.

Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_1$  має вирішальне значення в механіці руйнування для оцінки поведінки тріщини у матеріалах, це важливий параметр, що характеризує напружено-деформований стан поблизу вершини тріщини в пружному тілі. Він визначає, наскільки концентруються напруження навколо тріщини під дією зовнішніх навантажень і служить критерієм для прогнозування зростання тріщини та остаточного руйнування матеріалу.  $K_1$  використовується для визначення критичного стану матеріалу, коли тріщина починає зростати. Якщо  $K_1$  досягає критичного значення  $K_{1c}$  (критичного коефіцієнта інтенсивності напружень), тріщина поширюється, що може призвести до раптового руйнування конструкції. Обчислення  $K_1$  дозволяє прогнозувати довговічність матеріалів і конструкцій, оцінюючи, як змінюється тріщина під дією циклічних або змінних навантажень. Це допомагає уникати катастрофічних відмов у критичних інженерних системах.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Гіперсингулярний інтеграл

Гіперсингулярний інтеграл — це інтеграл, в якому сингулярність підінтегральної функції має порядок, вищий за розмірність області інтегрування. Це означає, що сингулярність є настільки сильною, що стандартні методи для обчислення сингулярних інтегралів не застосовуються, і потрібно застосовувати спеціальні техніки для їх регуляризації або обчислення.

Формально гіперсингулярний інтеграл в одновимірному випадку можна записати як

$$I_1(x_0) = \int_L \frac{\Theta(x)}{(x-x_0)^2} dx,$$

який розуміємо в такому сенсі

$$I_1(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{L^*} \frac{\Theta(x)}{(x-x_0)^2} dx - \frac{2\Theta(x_0)}{\varepsilon} \right), \quad (2.1)$$

Де

$$L^* = \frac{L}{Q(x_0, \varepsilon)}; Q(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon); L = [-l, l]; x_0 \in L.$$

Граничне значення в (2.1) співпадає з граничним значенням

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{-l}^l \Theta(x) \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} \Big|_{y=0} dx = f(x_0), x_0 \in [-l, l],$$

де

$$\frac{\partial}{\partial y} = \ln \frac{1}{r} \Big|_{y=0} = - \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Аналогічно, в двовимірному випадку гіперсингулярний інтеграл визначається як границя нормальної похідної потенціалу подвійного шару, коли точка спостереження прямує до межі розрахункової області

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2\pi} \iint_{S^*} \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n \partial N} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi - \frac{2\Theta(x)}{\varepsilon} \right],$$

У двовимірному випадку гіперсингулярний інтеграл часто виникає в контексті потенціалу подвійного шару (double-layer potential), особливо при застосуванні методу граничних елементів для задач, пов'язаних з механікою тріщин, акустикою або електростатикою.

У цьому випадку гіперсингулярний інтеграл визначається як границя нормальної похідної потенціалу подвійного шару, коли точка спостереження наближається до межі області інтегрування.

## 2.2 Розрахункові моделі на основі методів теорії потенціалу та гіперсингулярних інтегральних рівнянь

Спочатку розглянемо розрахункові моделі на основі методів теорії потенціалу та гіперсингулярних інтегральних рівнянь для визначення частот і форм коливань елементів конструкцій з урахуванням приєднаних мас рідини.

Розглянуто коливання квадратної пластини зі стороною  $a$  і товщиною  $h$ . Вивчалися коливання в повітрі та з урахуванням приєднаних мас рідини.

Визначив розв'язок рівняння (1.3), далі обчислюємо частоти  $\Omega$  коливань

пластини в рідині з застосуванням розв’язку проблеми власних значень (1.4), а за знайденими коефіцієнтами  $c_k$ , знаходимо власні форми коливань.

На рисунку 2.1 зображені форми коливань обчислені за формулами

$$w_k(x, y) = w_{lm}(x, y) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b},$$

$$k = 1(l = 1, m = 1), k = 4(l = 2, m = 2),$$

та отримані чисельно за допомогою проєкційного методу значення густини потенціалу  $\Gamma_k(x, y)$ , які зображені лініями рівня.

Бачимо схожий характер поведінки функцій  $w_k(x, y)$  та  $\Gamma_k(x, y)$ .

Надалі використовуємо отримані власні форми як базисні функції для розв’язання задач про вимушені коливання тонких пластин з урахуванням приєднаних мас рідини.

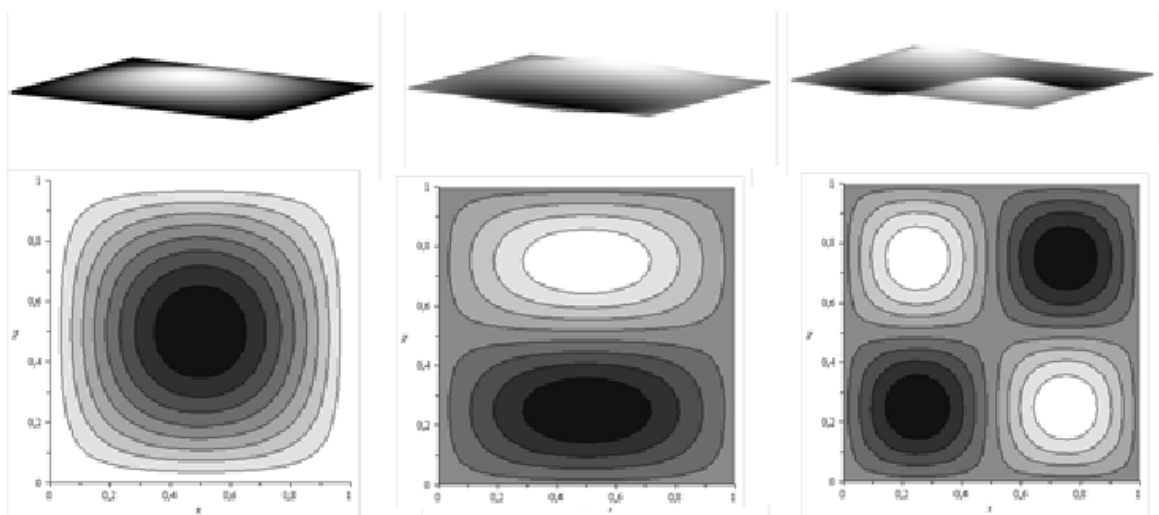


Рисунок 2.1 – Форми коливань та густини потенціалу

У таблиці 2.1 наведені значення частот коливань цієї пластин в повітрі і в воді і проведено порівняння з теоретичними і експериментальними даними з робіт [9; 10].

Таблиця 2.1 – Безрозмірний частотний параметр  $\lambda$  для квадратної пластинки

n	в повітрі			з урахуванням приєднаних мас рідини		
	експеримент [9]	теорія [9]	МСЕ [10]	експеримент [9]	теорія [9]	МДО
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.500	4.70	4.241
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00
4	27.15	-	27.81	-	-	13.70
5	30.75	31.10	31.34	17.0	18.74	16.43

Тут

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}.$$

Отримані дані дають змогу дослідити вимушені коливання пластинки під дією гармонічного збудження.

Далі розглянуті крайові задачі Неймана для тіл із розрізами у вигляді кола, еліпса або чотирикутника (рис. 2.2), до яких можна звести визначення концентрації напружень у тілі з тріщиною.

Цю задачу зведено до гіперсингулярного інтегрального рівняння у вигляді (1.5), яке для кола має аналітичний розв'язок.

Кругова область  $S$  розбивалася на  $N_\varphi \times N_R$  граничних елементів зі сталою апроксимацією.

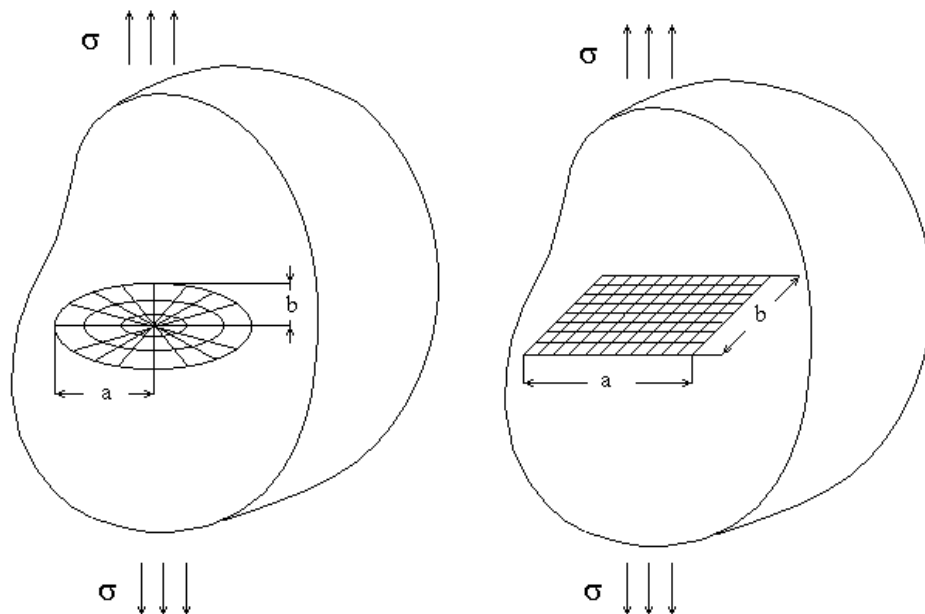


Рисунок 2.2 – Тіла з плоскою тріщиною

У табл. 2.2 наведені результати розрахунків.

У другому стовпці наведені аналітичні значення  $\Gamma(x_1, x_2)$ , у третьому і четвертому – чисельні (у центрах ваги граничних елементів).

У п'ятому стовпці наведені результати обчислень з урахуванням асимптотичної поведінки розв'язку

$$\Gamma(x_1, x_2) = A\sqrt{d(x_1, x_2)},$$

де  $d(x_1, x_2)$  – відстань від точки  $(x_1, x_2)$  до межі області.

При збільшенні кількості граничних елементів чисельний розв'язок збігається до аналітичного.

У точках, близьких до межі області, спостерігається втрата точності. Видно, що похибку можна зменшити при урахуванні асимптотики.

Таблиця 2.2 – Порівняння чисельних і аналітичного розв’язків для кола

$r$	Аналітичний розв’язок	Числові розв’язки		
		$N_\varphi = 30, N_R = 20$	$N_\varphi = 60, N_R = 20$	$N_\varphi = 60, N_R = 20$
0.025	-1.272841595	-1.213396484	-1.273952973	-1.273954563
0.225	-1.240592108	-1.177062644	-1.240936569	-1.240936768
0.625	-0.993922301	-0.906926547	-0.991213849	-0.991245670
0.825	-0.719549337	-0.629054699	-0.720815022	-0.719081502
0.925	-0.483789142	-0.415668766	-0.500051262	-0.480051262
0.975	-0.282920015	-0.263781438	-0.301128610	-0.283011286

### 2.3 Методи розв’язання гіперсингулярного інтегрального рівняння, що описує крайові задачі для тіла з тріщиною

Слід зауважити, що гіперсингулярні рівняння для тривимірного тіла з круговою пласкою тріщиною і рівняння для визначення тиску на змочені поверхні лопаті є однаковими. Але для кругової тріщини можливо звести двовимірні рівняння до одновимірних, що суттєво зменшує вимірність задачі.

Припустимо, що функції  $w_k, \Gamma_k$  не залежать від окружної координати  $\theta$ , тобто будемо розглядати задачу в аксіально-симетричному формулюванні. З переходом до циліндричної системи координат та враховуючи припущення про аксіальну симетричність задачі, знаходимо, що гіперсингулярний інтегральний оператор, що розглядається, набуває вигляду

$$A\Gamma_k = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\rho) \frac{\rho d\Theta d\rho}{\left(\sqrt{a-b\cos(\Theta-\Theta_0)}\right)^3} = -w_k(\rho_0).$$

Записуємо цей інтеграл як повторний

$$A\Gamma_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \rho \Gamma_k(\rho) \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\left(\sqrt{a-b\cos(\Theta-\Theta_0)}\right)^3} \right] d\rho = -w(\rho_0).$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі заміну змінної

$$\psi = \Theta - \Theta_0, \Theta = \psi + \Theta_0, d\Theta = d\psi.$$

Оскільки під знаком інтегралу знаходиться періодична функція, що інтегрується за періодом, то границі інтегрування не зміняться. Тобто, можемо брати не  $(0, 2\pi)$  а  $(-\pi, \pi)$ . Отримаємо для внутрішнього інтегралу вираз

$$I_1(\rho, \rho_0) = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{a-b\cos\psi}\right)^3}.$$

Після перетворень одержимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right)^3} = \frac{1}{k'^2} E(k), E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi, k'^2 = 1-k^2.$$

Оскільки

$$k'^2 = 1-k^2 = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b},$$

то для внутрішнього інтегралу маємо

$$I_1(\rho, \rho_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}(a-b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi = \frac{4}{(\rho+\rho_0)(\rho-\rho_0)^2} E(k),$$

де  $E(k)$  – повний еліптичний інтеграл другого роду.

Таким чином, отримано одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння для визначення функцій  $\Gamma_m(\rho)$  за відомими функціями  $w_m(\rho), m=1,2,\dots$  у такому вигляді

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma_m(\rho) \frac{\rho E(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = -w_m(\rho_0). \quad (2.2)$$

Зазначимо, що ядро цього інтегрального оператора має такий вигляд:

$$K(\rho, \rho_0) = \frac{\rho E(k)}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2}.$$

Це ядро має особливість типу  $(\rho - \rho_0)^{-2}$ .

Для числового розв'язання рівняння (2.2) був використаний метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини на елементах [22].

Розглянуто круг з радіусом  $R=1$  м. Обиралось 100 граничних елементів. Співставлення числових та аналітичних результатів подано на рис. 2.3. Аналітичний розв'язок обчислено за формулою

$$\Gamma_m(\rho) = 4\sqrt{R^2 - \frac{\rho^2}{\pi}}.$$

Права частина в (2.2) обиралась рівною одиниці.

Тут суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку, точками позначені числові дані, отримані запропонованим методом.

Зауважимо, що практично у всіх точках відрізка  $[0, R]$  отримано точність  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

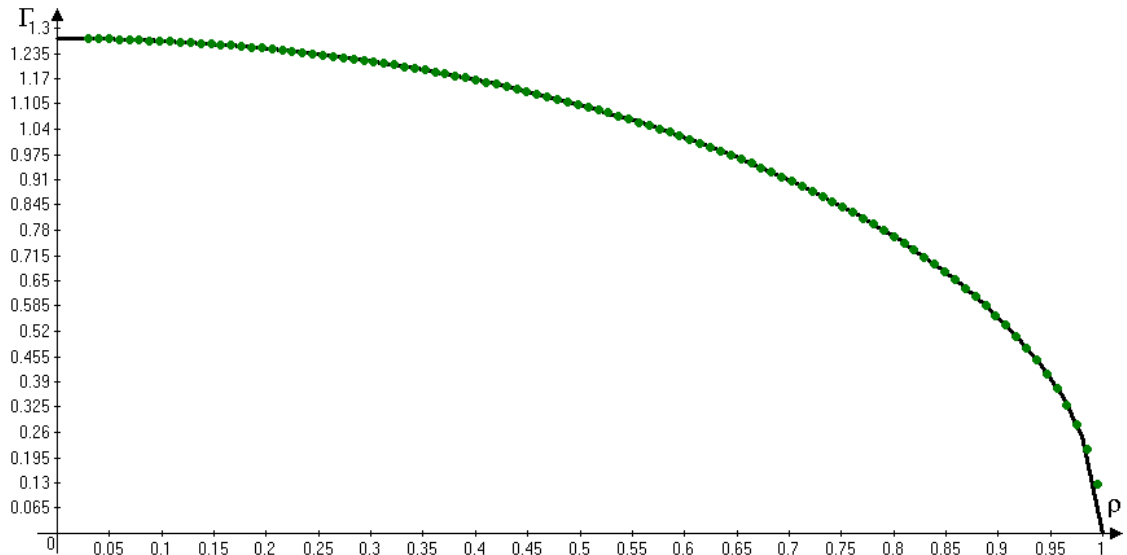


Рисунок 2.3 – Числовий та аналітичний розв’язки гіперсингулярного рівняння

Винятком є точки поблизу кінців інтервалу. Оскільки при  $\rho, \rho_0$ , близьких до нуля, в рівнянні (2.2) виникає додаткова особливість, в [14] запропоновано замінити відрізок інтегрування на  $[\delta, R]$ . У наведених розрахунках обрано  $\delta = \frac{0.0025}{R}$ . При  $\rho$ , близьких до 1, точність може бути збільшена за рахунок врахування поведінки розв’язку на кінцях інтервалу інтегрування [22]. Зазначимо, що при використанні методу граничних елементів для двовимірної області в [22] використано 1200 граничних елементів, а отримана точність становить  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Ці дані свідчать про ефективність запропонованого методу. Але одновимірні гіперсингулярні рівняння на колі мають обмежену область застосування.

Досліджені різні типи елементів, що застосовуються для розв’язання ГР у двовимірних задачах. Для кожного типу з єдиних позицій проведено аналіз щодо такого вибору точок колокації, аби відповідні чисельні реалізації МГЕ були стійкими до похибок. Виявився цікавий факт: для деяких типів елементів таких точок немає зовсім, тобто на простих і зовні привабливих елементах неможливо побудувати стійкі до похибок чисельні схеми. Для інших – такі точки існують, і їх рівно стільки, скільки необхідно для побудови СЛАР. Проведені дослідження

дозволили зробити висновок, що для сталої густини у просторовому випадку такі точки співпадають із центрами ваги граничних елементів. На рис. 2.4 зображені лінії рівня функцій-відгуків, для трикутного та чотирикутного елементів граничних елементів:

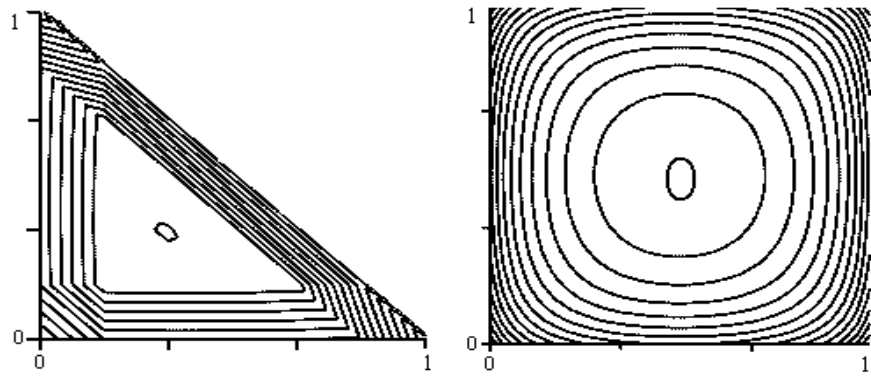


Рисунок 2.4 – Лінії рівня функцій відгуків від постійної густини

Практично досліджено швидкість збіжності методу граничних елементів при використанні різних типів апроксимації густини. Отримані результати проілюстровано на рис. 2.5.

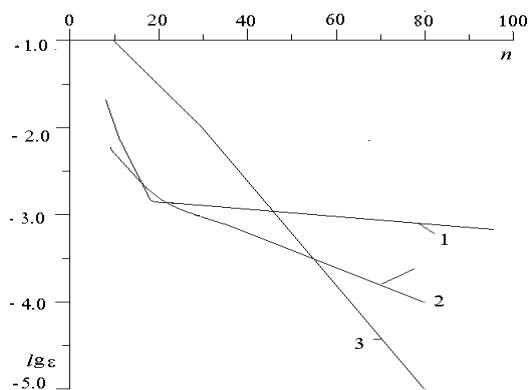


Рисунок 2.5 – Швидкість збіжності.

Тут зображені графіки величини  $lg \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – похибка) у залежності від числа  $n$  вузлових невідомих для лінійних (крива 1), квадратичних (крива 2) та кубічних (крива 3) елементів. Аналіз чисельних результатів показав, що лінійні елементи вже при їх малій кількості дають непогану точність; але вона повільно

збільшується при зростанні їх числа. Швидкість збіжності при використанні квадратичних елементів змінюється за квадратичним законом, кубічних – за кубічним.

#### 2.4 Застосування методу заданих форм при дослідженні частот та форм власних коливань елементів конструкцій

Практично у всіх подальших застосуваннях будемо використовувати метод заданих форм.

Розглянемо задачу про вільні коливання пружних елементів конструкцій в ідеальній нестисливій рідині.

Систему рівнянь руху будемо записувати у вигляді (1.1).

Розглянемо задачу про малі гармонічні коливання пружного елемента конструкції в потоці. Зобразимо вектор  $U$  у формі  $U = ue^{i\Omega t}$ , де  $\Omega$  - частота, а  $u$  - власна форма коливань елемента в рідині.

Шукатимемо власні форми коливань у рідині у вигляді

$$u = \sum_{k=1}^N c_k u_k, \quad (2.3)$$

де  $u_k$  – власні форми коливань елемента конструкції без врахування приєднаних мас рідини (форми коливань у вакуумі);

$c_k$  – невідомі коефіцієнти.

Іншими словами, форму коливань деформованого елемента в рідині визначимо як лінійну комбінацію власних форм коливань цього ж елемента у вакуумі.

Мають місце такі співвідношення [21]:

$$L(u_k) = \Omega_k^2 M(u_k), (M(u_k), u_j) = \delta_{kj}.$$

Отже,

$$(L(u_k), u_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj}.$$

Де  $\Omega_k$  –  $k$ -а частота власних коливань елемента у вакуумі.

Ці співвідношення показують, що власні форми коливань елемента у вакуумі ортонормовані за матрицею мас.

Нехай  $n$  – позитивна нормаль до поверхні. Розглянемо праву частину рівнянь (2.4). Зазначимо, що  $P_a = Pn$  внаслідок того, що ідеальна рідина створює лише нормальний тиск на зануреному тілі.

Оскільки рідина ідеальна нестислива, а всюди поза несучою поверхнею  $S_1$  і вихрового сліду  $S_2$  за нею рух рідини є безвихровим, то існує потенціал швидкостей, що задовольняє гармонічному рівнянню.

У разі гармонічних коливань у припущенні, що швидкість потоку, що набігає, дорівнює нулю, відповідно до інтегралу Коші-Лагранжа величина  $P$  може бути подана таким чином:

$$P = -\rho_2 \frac{\partial(\Phi^+ - \Phi^-)}{\partial t} = -i\rho_2 \Omega (\varphi^+ - \varphi^-) e^{i\Omega t},$$

де  $\Phi = \varphi e^{i\Omega t}$ .

Рівняння руху двох середовищ і гранична умова сумісності запишуться у вигляді

$$L(u) + M(u) = (0, 0, i\Omega \rho_2 (\varphi^- - \varphi^+)), \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S^+} = i\Omega w, \nabla \varphi \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty).$$

Таким чином, потрібно визначити функції  $u$ ,  $\varphi$ , що задовольняють сис-

темі диференціальних рівнянь (2.3), умовам непротікання та згасання збуреної швидкості рідини на нескінченності, а також умовам закріплення деформованого елемента.

Рівняння (2.3) розв'язуємо для кожній окремій формі коливань елементу конструкції у повітрі (тобто без врахування приєднаних мас рідини), тобто індекс  $k$  в рівняннях (2.3) минаємо для спрощення.

## Висновки за розділом 2

Встановлено, що метод граничних елементів є потужним інструментом для аналізу тиску рідини та концентрації напружень у тілах з тріщинами, зокрема, для задач із складною геометрією. Завдяки використанню граничних умов на межі області, МГЕ дозволяє зменшити розмірність задачі на одиницю та суттєво скоротити обчислювальні витрати порівняно з традиційними методами, такими як метод скінченних елементів.

Метод граничних елементів продемонстрував високу точність у визначенні концентрації напружень навколо кругової тріщини. Результати моделювання дозволили отримати детальну картину розподілу напружень та визначити критичні зони, що є ключовим для прогнозування подальшого зростання тріщини.

Дослідження показало, що МГЕ є також ефективним для задач гідродинаміки, зокрема для визначення розподілу тиску рідини навколо твердих тіл. Це відкриває перспективи для його застосування у гідравлічних системах та інших технічних конструкціях, що взаємодіють із рідинами.

Застосування методу заданих форм у задачах гідропружних коливань, коли форма коливань в рідині розкладається в ряд по формах коливань елемента без врахування рідини, є важливим кроком для спрощення задачі (це метод узагальнених координат).

Такий підхід дозволяє врахувати вплив рідини на коливання пружного ті-

ла, зменшуючи складність задачі до розв'язання тільки для пружного елемента, що значно знижує обчислювальні витрати і забезпечує більш ефективний аналіз. Дослідження показало, що МГЕ є також ефективним для задач гідродинаміки, зокрема для визначення розподілу тиску рідини навколо твердих тіл. Це відкриває перспективи для його застосування у гідравлічних системах та інших технічних конструкціях, що взаємодіють із рідинами.

Отримані результати мають практичне значення для інженерних застосувань, зокрема для проектування конструкцій із підвищеною стійкістю до розвитку тріщини та для оптимізації систем, що працюють у рідинному середовищі.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Програмний комплекс ANSYS

Програмний комплекс ANSYS має кілька ключових переваг при отриманні форм коливань елементів конструкцій, що не взаємодіють із рідиною:

- ANSYS використовує передові числові методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ), для точного визначення власних форм і частот коливань елементів конструкцій. Це дозволяє отримати високоточні результати навіть для складних геометричних форм об'єктів і матеріальних характеристик.

- програмний комплекс підтримує широкий набір елементів для моделювання різних типів конструкцій: балки, пластини, оболонки, тверді тіла тощо. Це дозволяє моделювати елементи конструкцій з будь-якою геометрією та матеріальними властивостями (наприклад, пластичні деформації та деформації повзучості) забезпечуючи універсальність підходу.

- дружній інтерфейс ANSYS забезпечує легкість створення моделі, задання граничних умов та проведення аналізу. Користувачі можуть швидко налаштувати параметри моделювання та отримати результати.

- ANSYS дозволяє автоматизувати процеси моделювання та аналізу, включаючи автоматичну генерацію сітки та оптимізацію параметрів моделі. Це значно прискорює процес отримання форм коливань і робить його менш трудомістким.

- програмний комплекс має потужні інструменти для аналізу та візуалізації результатів, включаючи графічне відображення форм коливань і анімацію. Це полегшує розуміння поведінки конструкції під час коливань та допомагає у прийнятті обґрунтованих інженерних рішень.

- ANSYS підтримує модальний аналіз для визначення власних частот і форм коливань, а також гармонічний аналіз для оцінки реакції конструкції на гармонічні навантаження. Це дозволяє всебічно досліджувати динамічні властивості конструкції.

– програмний комплекс дозволяє задавати складні граничні умови та зовнішні впливи, що можуть впливати на форми коливань. Це забезпечує реалістичність моделювання та підвищує достовірність результатів.

– ANSYS дозволяє моделювати конструкції з різними матеріалами, включаючи композити, метали, пластики та інші матеріали з лінійними та нелінійними механічними властивостями. Це дає змогу врахувати вплив матеріальних характеристик на форми коливань.

Завдяки цим перевагам, ANSYS є одним із найпотужніших інструментів для отримання форм коливань елементів конструкцій, що не взаємодіють із рідиною, забезпечуючи точність, ефективність та універсальність у вирішенні таких задач.

Але є недоліки ANSYS при моделюванні взаємодії з рідиною. Так, ANSYS має деякі недоліки при моделюванні взаємодії конструкцій з рідиною, зокрема коли необхідно дискретизувати весь об'єм рідини, а не лише його межу, як це робиться в методі граничних елементів (МГЕ).

Для моделювання взаємодії конструкцій з рідиною в ANSYS зазвичай використовується метод скінченних елементів (МСЕ), що вимагає дискретизації всього об'єму рідини. Це призводить до значного збільшення кількості елементів у моделі та, відповідно, до значних обчислювальних витрат.

Дискретизація всього об'єму рідини потребує великого обсягу оперативної пам'яті та потужних обчислювальних ресурсів, що може бути обмежуючим фактором для задач із великим об'ємом рідини або складними геометричними формами. Налаштування моделі з дискретизацією об'єму рідини є більш складним та трудомістким, ніж у випадку методів, які працюють лише з граничними умовами. Це вимагає додаткових зусиль для генерації сітки та забезпечення її якості.

Процес розв'язання задач із дискретизацією об'єму рідини може займати значно більше часу, ніж при використанні методів, які працюють лише з межами області (наприклад, метод граничних елементів). Це може стати проблемою для задач, що вимагають швидкого аналізу або численних ітерацій.

Для задач, де необхідно моделювати великі об'єми рідини навколо конструкцій, метод дискретизації всього об'єму може бути менш ефективним, ніж МГЕ, який дозволяє працювати лише з граничними умовами, зменшуючи розмірність задачі.

Ці недоліки роблять ANSYS менш зручним для задач, де потрібно моделювати великі об'єми рідини або де обчислювальні ресурси обмежені. У таких випадках метод граничних елементів (МГЕ) може бути більш придатним завдяки своїй ефективності при роботі з граничними умовами.

У кваліфікаційній роботі ANSYS використовується тоді, коли неможливо обчислити форми коливань конструкцій за допомогою аналітичних методів або одновимірних МСЕ.

### 3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання задач гідропружності та механіки руйнування

Алгоритм розв'язання задач комп'ютерного моделювання в гідропружності та механіці руйнування, який використовує метод заданих форм і зводить обидві задачі до гіперсингулярних інтегральних рівнянь, має наступні риси.

Метод заданих форм передбачає зображення форми коливань елемента конструкції у вигляді суперпозиції базисних функцій, які відповідають формам коливань без урахування впливу рідини. Цей підхід спрощує розв'язання задачі, зменшуючи її розмірність та обчислювальну складність.

У задачах гідропружності, де рідина вважається ідеальною та нестисловою, а її рух безвихровим, використання методу заданих форм дозволяє ефективно моделювати взаємодію між рідиною та конструкцією. Базисні функції обираються на основі форм коливань елемента без урахування приєднаних мас рідини. В цій кваліфікаційній роботі застосовуються аналітичні вирази для форм коливань, але цей підхід дає лише ефективні тестові приклади. На їх основі визначається необхідне число скінченних елементів для розв'язання більш

складних задач.

Гіперсингулярні інтегральні рівняння виникають при моделюванні тріщин у пружних тілах, де необхідно точно описати поведінку напружень та деформацій поблизу тріщини. Ці рівняння враховують сингулярності, пов'язані з наявністю тріщин, що дозволяє отримати більш точні результати в аналізі напружено-деформованого стану конструкцій з дефектами.

В даній роботі розв'язання гіперсингулярних рівнянь для двовимірних областей здійснюється шляхом вирішення розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь у такому вигляді

$$\sum_{k=1}^N H_{kj} \Gamma_k = f(x_{0j}); j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

де елементи матриці  $H$  обчислюються за формулами

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \frac{([l_i \times r_i] \cdot n)}{[l_i \times r_i]^2} \left[ \frac{(l_i \cdot r_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(l_i \cdot r_i)}{r_i} \right], \quad (3.2)$$

отриманими в [39]. В (3.2) введені такі позначення:  $m$  – число сторін в  $k$ -ому граничному елементі; вектори  $r_k$ ,  $l$ ,  $n$  задаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} r_k &= (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0); l_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i); \\ n &= (n_1, n_2, n_3); i = 1, 2, \dots, m; x_{m+1} = x_1; y_{m+1} = y_1; z_{m+1} = z_1; r_k = |r_k|. \end{aligned}$$

Праві частини в (3.1) відповідають змісту задачі, що розв'язується. Це можуть бути значення форм коливань «сухого» елемента конструкції, або навантаження, які діють на береги тріщини.

Після того, як тиски рідини отримано, переходимо до розв'язання проблеми власних значень, що описана рівнянням (1.4). Після розв'язання цього рівняння знаходимо форми та частоти коливань досліджуваного елемента з

урахуванням приєднаних мас рідини.

У механіці руйнування гіперсингулярні інтегральні рівняння використовуються для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень, що є критичними для оцінки стійкості конструкцій з тріщинами.

Розв'язки гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачах механіки руйнування дають змогу побудувати коефіцієнти інтенсивності напружень, які надалі використовуються при дослідженні руйнування конструкції.

Обидві задачі – гідропружності та механіки руйнування – зведені до розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Це дозволяє використовувати єдиний математичний апарат для аналізу різних фізичних явищ, що спрощує розробку універсальних числових методів та програмних реалізацій.

Такий підхід забезпечує високу точність моделювання складних явищ, пов'язаних з взаємодією рідини та пружних елементів, а також з розвитком тріщин у матеріалах. Використання гіперсингулярних інтегральних рівнянь дозволяє детально врахувати особливості поведінки системи в критичних точках, що є важливим для прогнозування надійності та довговічності конструкцій.

Загалом, поєднання методу заданих форм та гіперсингулярних інтегральних рівнянь у комп'ютерному моделюванні задач гідропружності забезпечує ефективний та точний інструмент для аналізу складних інженерних задач, пов'язаних з динамікою рідин та поведінкою матеріалів з дефектами.

### 3.3 Опис програми

Спочатку опишемо пакет програм для знаходження частот та форм коливань елементів конструкцій з урахуванням приєднаних мас рідини. Перша програма DYNAMICS, яка працює в цьому програмному пакеті, обчислює частоти та форми коливань елементу конструкції, що не взаємодіє з рідиною. Ця програма розроблена в ІЕМС НАН України на основі одновимірного методу скінченних елементів та має обмежене застосування, а саме її застосовують для ро-

зрахункових областей, що мають осьову симетрію. Як допоміжна підпрограма тут використовується процедура TETRA, що знаходить власні вектори та значення квадратної матриці.

Далі працює програма HMATRIX, яка будує матрицю для розв'язання дискретного гіперсингулярного рівняння. Використовуються дві такі програми: одна визначає розв'язувальну матрицю для двовимірного гіперсингулярного рівняння. Тут використовуються формули (3.2). Друга програма (написана автором кваліфікаційної роботи) реалізує одновимірний випадок гіперсингулярного інтегрального рівняння, яке подано формулою (2.2). Використано одновимірний метод граничних елементів із сталою апроксимацією густини, тобто вважалося, що на кожному граничному елементі густина дорівнює деякій заздалегідь невідомій константі. Ця процедура використовує підпрограми ELIC, що обчислює еліптичні інтеграли, що фігурують в (2.2). При цьому використовується такий алгоритм.

Обчислюється інтеграл у вигляді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta}} = \frac{\pi}{2AGM(a, b)},$$

де середнє арифметико-геометричне значення обчислюється за алгоритмом Гауса

$$AGM(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Тут

$$a_0 = a, b_0 = b, a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, b_1 = \sqrt{a_0 b_0}, \dots, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \dots$$

точність обчислень  $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$  досягається за 6 кроків.

Далі працює програма WATER, в якій знаходяться частоти та форми коливань елементу конструкції при взаємодії із рідиною. Тут як вхідні дані вводяться частоти та форми коливань елементу конструкції, що отримані при роботі програми DYNAMICS або шляхом використання пакету ANSYS, вони використовуються далі для обчислення правих частин розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), далі визивається процедура HMATRIX, а потім процедура GGELG, що розв'язує СЛАР. Далі програма WATER формує матрицю жорсткості та матрицю приєднаних мас і визиває процедуру TETRA для обчислення частот та форм коливань елементів конструкцій, що взаємодіють із рідиною.

Програма CRACK проводить обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тіл із тріщиною. В ній вхідними даними є геометричні параметри тріщини (довжина в одновимірному випадку, радіус кругової тріщини або її розміри в вертикальному та горизонтальному напрямках в двовимірному випадку та розподіл навантажень на границях тріщини. Цей розподіл або описують за допомогою аналітичних формул, або наводять дані, отримані за допомогою пакету ANSYS. Тобто отримані для конструкції без тріщини в зонах найбільшої концентрації напружень. Ці дані використовуються для побудови правої частини. Далі формується матриця СЛАР за допомогою програми HMATRIX, і розв'язується СЛАР з використанням стандартної процедури GGELG. Після отримання розв'язку СЛАР обчислюються коефіцієнти інтенсивності напружень. Тобто для двох різних із фізичної точки зору задач використовуються схожі програмні реалізації, які використовують однакові процедури. Це зумовлено інтерпретацією тріщини та лопаті та розриву суцільного середовища.

Висновки за розділом 3

Висновки за розділом програмна реалізація полягають у такому.

Інтеграція різних підходів. Використання ANSYS для загальних обчис-

лювальних задач і програм на VISUAL FORTRAN для специфічних алгоритмів дозволяє поєднати зручність і потужність комерційного програмного забезпечення з гнучкістю власних розробок.

Ефективність обчислень. Програми на VISUAL FORTRAN, зазвичай оптимізовані для наукових розрахунків, можуть забезпечити ефективну обробку специфічних математичних моделей або великих обчислювальних задач, доповнюючи можливості ANSYS.

Гнучкість моделювання. Використання VISUAL FORTRAN програм може дозволити включення нових або модифікованих фізичних моделей, які можуть бути недостатньо підтримані стандартними модулями ANSYS.

Точність результатів. ANSYS пропонує потужні інструменти для автоматичної генерації сіток і розв'язання задач кінцевих елементів, а також перевірені алгоритми, що підвищують точність обчислень. Програми на VISUAL FORTRAN можуть бути спеціально адаптовані для уникнення чисельних помилок у специфічних умовах. Крім того, вони дають змогу побудови тестових задач, що розв'язні з високою точністю.

Успішне використання такої комбінації інструментів вимагає високого рівня компетенції як у використанні ANSYS, так і в програмуванні на VISUAL FORTRAN.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

### 4.1 Обчислювальний експеримент для задач гідропружності

Як тестова задача розглядалися коливання квадратної пластини зі стороною  $a$  та товщиною  $h$  (геометричні параметри та механічні властивості взяті з роботи [4]). Вивчалися коливання як без, так і з урахуванням приєднаних мас рідини.

У таблиці 4.1 наведено значення частот коливань цієї пластин у повітрі та у воді та проведено порівняння з теоретичними та експериментальними даними з роботи [4]. Розглядався безрозмірний частотний параметр, що обчислюється за формулою  $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}$ .

Таблиця 4.1 – Частоти коливань квадратної пластинки

В повітрі			В воді		
Експеримент	Теорія	МСЕ	Експеримент	Теорія	МГЕ
[4]	[4]		[4]	[4]	
3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
8.32	8.55	8.547	4.5	4.7	4.24
20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00
27.15	-	27.81	-	-	13.70
30.75	31.10	31.34	17.0	18.74	16.43

Результати показують, що метод дискретних особливостей може бути успішно застосований для вирішення задач гідропружних коливаннях лопатей у воді. На рис. 4.1 показані перші дві форми коливань консольної прямокутної пластинки у воді. Зазначимо, що в даному завданні форми коливань у рідині та повітрі практично збігаються.

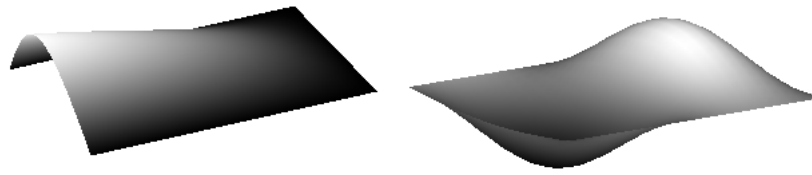


Рисунок 4.1 – Форми коливань квадратної пластинки.

Далі розв'язано задачу про вільні коливання консольних циліндричних панелей у воді, що моделюють лопаті робочих коліс радіально-осьових гідротурбін. Розглядаються малі коливання консольних циліндричних панелей (рис. 4.2), занурених в ідеальну рідину, що не стискається.

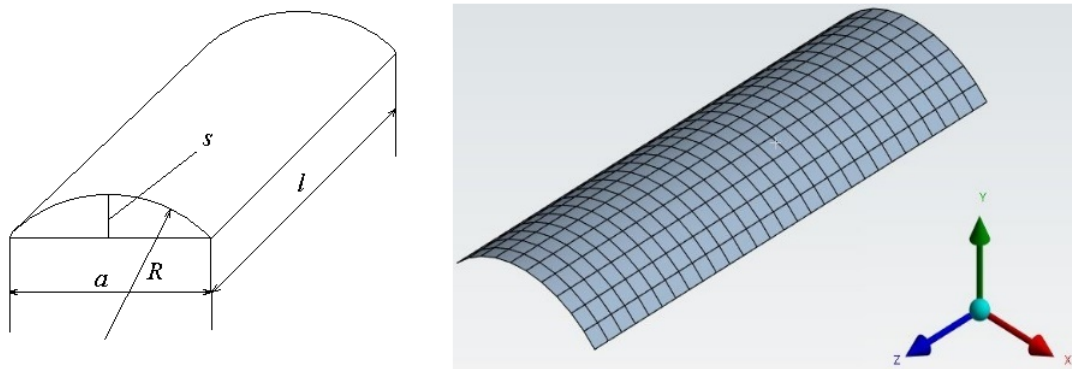


Рисунок 4.2 – Циліндрична панель з розбиттям на граничні елементи

Рух рідини вивчається у тривимірній постановці. Швидкість потоку, що набігає, приймається рівною нулю. Передбачається, що рух рідини є потенційним. Розв'язання задачі щодо визначення частот коливань панелі у вакуумі проведено МСЕ [16]. Розкладемо форми коливань оболонки в рідині у ряди за власними формами її коливань у вакуумі. Для визначення тиску рідини, що відповідає  $k$ -ій формі вільних коливань панелі у вакуумі  $w_k(x, t)$ , використовуємо гіперсингулярне інтегральне рівняння виду (1.4).

При цьому область інтегрування розбивалася на кінцеве число чотирику-

тних підобластей  $N_s$ , у кожній з яких невідома щільність замінювалася постійною величиною. Розрахунки проведені для сталеві циліндричної консольної панелі з наступними розмірами  $l=1\text{ м}$ ;  $a=0.2\text{ м}$ . У табл.4.2 надані значення частот вільних коливань циліндричної панелі у вакуумі та в рідині при  $d=0.1\text{ м}$ .

Таблиця 4.2 – Частоти коливань циліндричної панелі

номер частоти	$h/R=0.01$			$h/R=0.02$			$h/R=0.04$		
	в повітрі	в воді	форми	в повітрі	в воді	форми	в повітрі	в воді	форми
1	17.4	6.15	1↔1	18.3	8.22	1↔1+2	17.0	6.34	1↔1
2	23.1	11.1	2↔2	26.0	7.87	2↔2+1	34.5	9.27	2↔2
3	75.3	36.5	3↔3	67.8	28.7	3↔3	74.7	28.2	3↔3
4	104	38.0	4↔4	141	47.0	4↔4	138	50.1	4↔4
5	144	71.2	5↔5	160	79.0	5↔5	154	77.9	5↔5

У графах «Форми» символ  $\leftrightarrow$  показує, яка форма коливань у вакуумі відповідає відповідній формі коливань рідини. При збільшенні кількості утримуваних форм у вакуумі результати для перших п'яти частот і форм у воді практично не змінювалися. На рис.4.3 показані форми коливань циліндричної оболонки у вакуумі для  $d=0.2$ ,  $\frac{h}{R}=0.02$ .

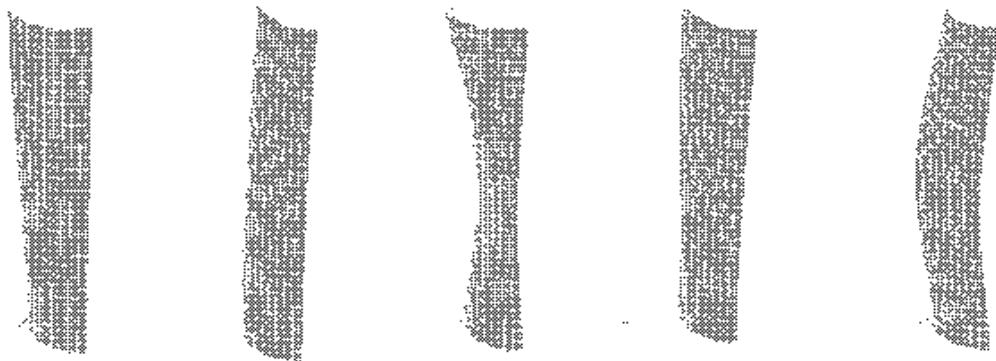


Рисунок 4.3 – Форми коливань циліндричної панелі

Далі методом нормальних форм досліджено частоти та режими вільних коливань кільцевої лопатки ротора турбомашини (рис. 4.4).

Лопатка представлена циліндричним тонким тілом, розмірами 0,15 м у висоту і 0,1 м в ширину, з профілем НАСА [41] з максимальною шириною 0,025 м. Матеріал леза – сталь із щільністю 7850 кг/м<sup>3</sup>, коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  0,3 і модулем Юнга 210 ГПа. Для кріплення розглядалося жорстке вбудовування. Як зазначалося раніше, перевага застосованого методу нормальних мод полягає в його здатності використовувати різні методи для визначення власних частот і мод структурного елемента в повітрі без урахування ефекту додаткової маси навколишньої рідини. Тут використовується метод скінченних елементів, реалізований в ANSYS [42].

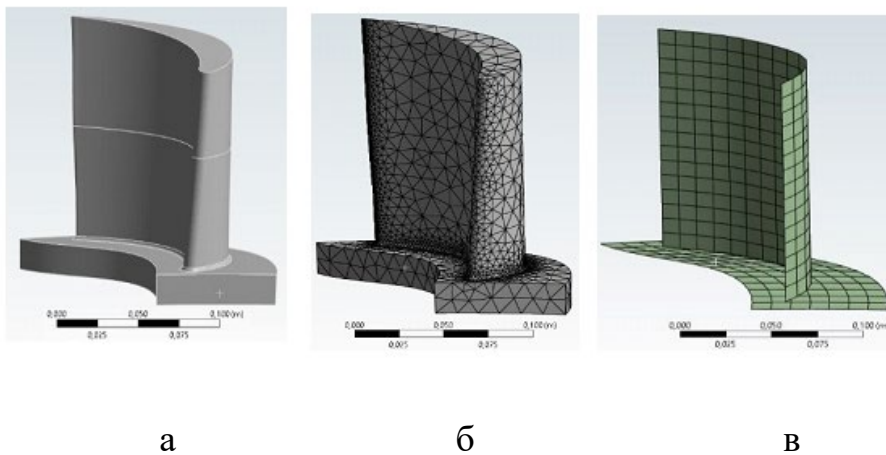


Рисунок 4.4 – Кільцева лопатка, її МСЕ та МГЕ дискретизації

Скінченно-елементна модель із 50 000 елементів показана на рис. 4.4б). В результаті модального аналізу отримано 5 власних форм і відповідних власних частот конструкції. Після визначення форм коливань лопаток у повітрі використовуємо їх як праві частини в гіперсингулярних рівняннях (1.4). Тут розглядалася середня поверхня елемента конструкції, рис. 4.4в). Частоти коливань лопатки в повітрі та воді представлені в таблиці 4.3. Слід зазначити, що форми коливань лопаті у вакуумі та воді мають незначні відмінності. Значення частоти, якщо враховувати додані маси рідини, помітно нижчі, ніж частоти коливань

лопаті в повітрі. Зі збільшенням числа частот цей коефіцієнт зменшення зменшується. Застосування гіперсингулярних інтегральних рівнянь виявляється ефективним методом для розгляду взаємодії елементів конструкцій при взаємодії з рідинами порівняно з іншими підходами. Використання сингулярних рівнянь з ядром типу Коші вимагає чисельного інтегрування по двох близько розташованих поверхнях. Навпаки, методи скінченних елементів вимагають дискретизації всього об'єму, зайнятого рідиною та елементом конструкції.

Таблиця 4.3 – Частоти коливань лопатки

n	1	2	3	4	5	6
Повітря	1275	1997	3050	3618	4569	5078
Волаг	657	1109	1750	2321	4002	4399

На рис. 4.5 показано перші шість форм коливань лопатки.

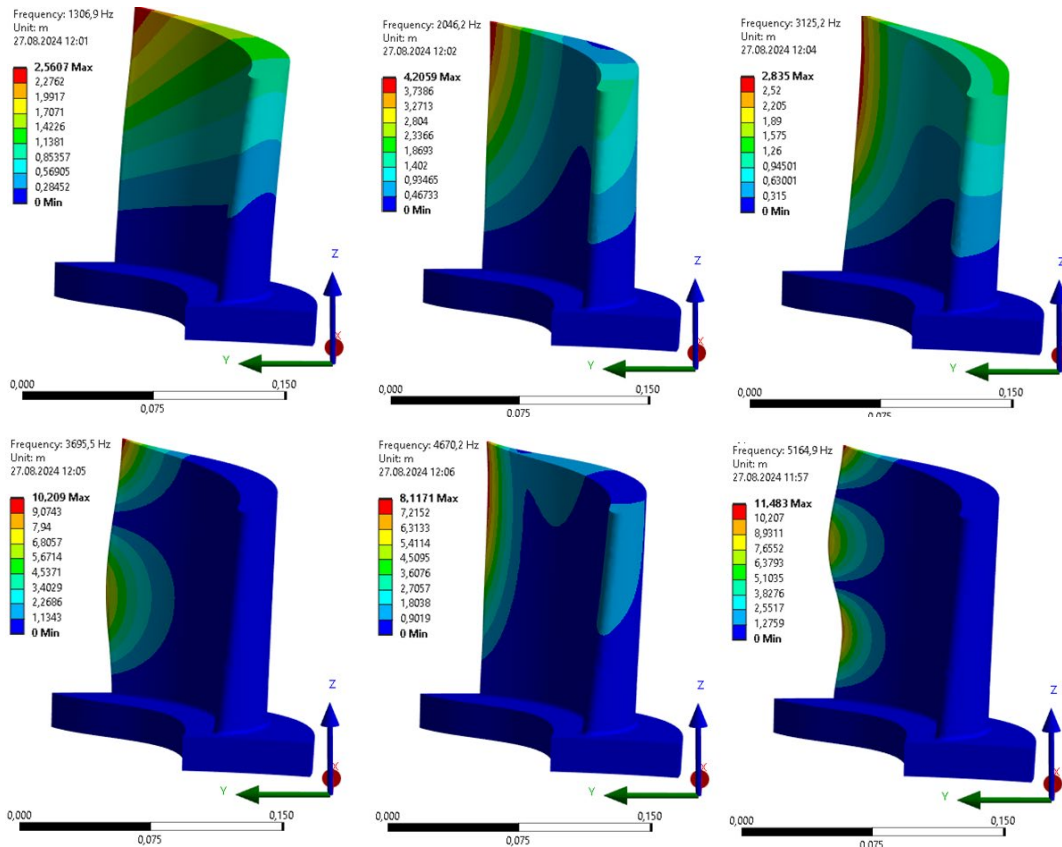


Рисунок 4.5 – Форми коливань лопатки

## 4.2 Обчислювальний експеримент для задач механіки руйнування

Розглянуто тріщина у формі плаского круга в необмеженому пружному тілі при рівномірному розтягу  $\sigma$ .

Надано аналіз, застосовуючи як МГЕ, так і МСЕ для оцінки коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН).

В аксіально-симетричному двовимірне ГР зводиться до одновимірного гіперсингулярного рівняння (2.2), обидва ГР розглядаються для оцінки КІН нижче.

При використанні МСЕ розглядається тріщина в призматичному зразку з характерним розміром  $L$ ,  $\frac{R}{L} = 0.005$ . Крім того, використовуються аналітичні розв'язки для оцінки точності.

В разі одновісного розтягу  $\sigma$  для точного опису концентрації напружень необхідний лише КІН  $K_I$ . На рисунку 4.6 показано, як проведено дискретизацію розрахункові області для тріщини у формі пенні для МСЕ та МГЕ.

У чисельному моделюванні обрано  $R = 0.005$  м і  $\sigma = 1$  МПа. Для реалізації МСЕ розглядається тріщина у формі плаского круга в прямокутному зразку, зображена на рисунку 4.6а).

Половина скінченно-елементної сітки складається з 43124 скінченних елементів, тоді як сітка граничних елементів для числового розв'язку рівняння (1.4) з постійною апроксимацією густини містить 9546 елементів.

Для порівняння також розв'язується одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння (2.2). Тут областю інтегрування є сегмент  $[0, R]$ , який розділений на  $N_1 = 150$  одновимірних граничних елементів з використанням наближення постійної густини.

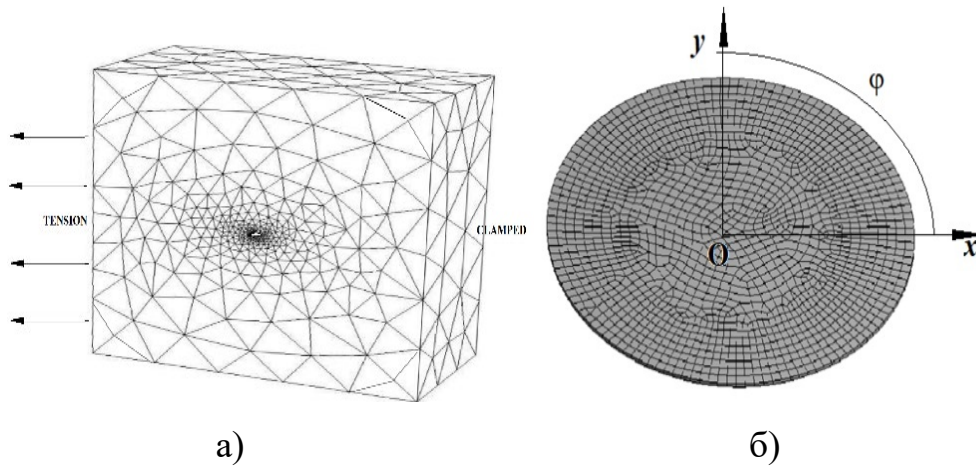


Рисунок 4.6 – Дискретизація розрахункових областей:

а – скінченно-елементна сітка-паралелепіпед із круговою тріщиною;

б – гранично-елементна сітка для кругової тріщини

Розглянута задача є еталонною і може бути використана для визначення необхідної кількості як скінченних, так і граничних елементів для досягнення заданої точності розрахунку. Таблиця 4.4 ілюструє чисельні результати безрозмірної оцінки  $\frac{K_I}{\sqrt{R}}$  з використанням як аналітичного розв'язку ГР так і чисельного розв'язку рівнянь (1.4) і (2.2), а також порівняння з чисельним розв'язком МСЕ [44].

Таблиця 4.4 – Порівняння числових та аналітичних розв'язків

Кут	Аналітичний розв'язок	МГЕ, дво-вимірне ГР	МГЕ, одно-вимірне ГР	МСЕ
10	1.12827	1.13212	1.12988	1.14217
30	1.12827	1.12925	1.12837	1.14207
50	1.12827	1.12876	1.12830	1.14204
70	1.12827	1.12842	1.12828	1.14203
90	1.12827	1.12830	1.12828	1.14200

Найбільш точні результати отримуються за допомогою одновимірного ГР, але він обмежений круговими та еліптичними областями інтеграції.

#### Висновки за розділом 4

Метод, заснований на використанні гіперсингулярних інтегральних рівнянь та метод заданих форм використано для розв'язання деяких задач з гідропружності та механіки руйнування. Для перевірки запропонованого методу порівнюємо результати числового моделювання для одновимірних і двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь з аналітичними даними та результатами, отриманими методом скінченних елементів. Порівняння показало, що запропонований підхід забезпечує високу точність обчислень, особливо в задачах, де необхідно враховувати вплив гіперсингулярних компонентів. Обмеження запропонованого підходу полягає у врахуванні гіперсингулярних інтегралів по поверхнях, що не дозволяє врахувати товщину оболонки. Це може призводити до певних похибок при моделюванні конструкцій, де товщина є суттєвим фактором. Проте, у випадках, коли товщина досить мала і нею можна знехтувати, запропонований метод демонструє значні переваги. Запропонований метод суттєво скорочує комп'ютерний час чисельного аналізу та розкриває нові якісні можливості моделювання як динамічної поведінки конструкцій, що взаємодіють з рідинами, так і тіл з тріщинами. Скорочення часу обчислень досягається завдяки зменшенню розмірності задачі та ефективнішому розв'язуванню інтегральних рівнянь, що дозволяє аналізувати більш складні системи в реальному часі. Але є деякі недоліки та обмеження. Знаходження фундаментальних розв'язків систем диференціальних рівнянь є складною математичною проблемою, яка потребує значних обчислювальних ресурсів. Після дискретизації це призводить до системи лінійних рівнянь з дуже щільною матрицею, що може ускладнити їх ефективне розв'язання. В таких випадках необхідно застосовувати спеціальні чисельні методи для роботи з щільними матрицями, що може потребувати додаткових витрат часу на оптимізацію обчислень.

## ВИСНОВКИ

У роботі досліджено коливання конструктивних елементів, які під час експлуатації взаємодіють із рідиною. Для обчислення тиску рідини на тонкі поверхні застосовано методи теорії потенціалу, що дозволило отримати гіперсингулярні інтегральні рівняння для невідомих густин потенціалів. Використано ефективний числовий підхід для обчислення сингулярних інтегралів. Саме густини потенціалів подвійного шару визначають перепад тиску при обтікання поверхні ідеальною нестисливою рідиною з обох боків. Проведено числові розрахунки для визначення частот і форм коливань консольних пластин, що моделюють лопаті гідротурбіни, з порівнянням отриманих результатів із експериментальними даними. Метод ґрунтується на розкладанні невідомих переміщень елементів конструкцій у рідині в ряди за формами їх коливань, без врахування приєднаних мас рідини. Розв'язано еталонну задачу щодо визначення концентрації напружень у тілі з круглою пласкою тріщиною.

Отримані результати чисельного моделювання задач гідропружності та механіки руйнування демонструють високу точність і відповідність сучасним вимогам наукових досліджень. Порівняння чисельних даних з аналітичними розв'язками і результатами, отриманими методом кінцевих елементів, підтверджує задовільну відповідність заявлених цілей та сучасного рівня наукових знань у галузі гідропружності та механіки руйнування.

Отримані результати можуть бути впроваджені у різні галузі промисловості та будівництва, зокрема для моделювання динамічної поведінки складних гідропружних систем, таких як гідротурбіни, дамби та підводні конструкції. В механіці руйнування результати знаходять застосування у авіації, космічній галузі та виробництві машин, де важливо прогнозувати руйнування структур під дією сил та навантажень.

Наукова значущість роботи полягає у поглибленні розуміння складних процесів гідропружності та механіки руйнування, що знайшли проведення у наукових дослідженнях. Технічна значущість полягає у використанні одержан-

них результатів у розробці та поліпшенні сучасних технологій. Соціально-економічна значущість створює передумови для підвищення надійності та безпеки технічних систем, що матиме позитивний вплив на економіку.

Продовження досліджень за тематикою гідропружності та механіки руйнування з використанням запропонованого підходу здається доцільним, оскільки це сприяє подальшому розвитку числових методів, що дозволить розробляти більш надійні та безпечні технічні системи.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Hrennikoff A. Solution of problem of elasticity by framework method. *J. of Applied Mechanics*. 1941. №8. P. 169-175.
2. Courant R. Variational methods for solutions of problems of equilibrium and vibration. *Bulletine of the American Mathematical Society*. 1943. №49. P. 1-23.
3. Argiris J.H. Energy theorems of structural analysis. Part I. General theory. *Aircraft Engineering*. 1954. Vol. 26, № 308. P. 347-356.
4. Stiffness and deflection analysis of complex structures / Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp J. L. *J. of Aeronautic Sciences*. 1956. №23. P. 805-823.
5. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study / Suzan J. Obaiys, Rabha W. Ibrahim, F. Ahmad. Springer Nature Switzerland AG 2019 D. Andrica, T. M. Rassias (eds.), *Differential and Integral Inequalities, Springer Optimization and Its Applications* 151.
6. Верушкін І. О., Кононенко Є. С. Дослідження гідропружних коливань елементів конструкцій з використанням методів скінчених та граничних елементів. *Вісник Харківського Національного університету імені В.Н. Каразіна*. 2021. С. 16-28.
7. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells / Degtyarev K., Glushich P., Gnitko V., Strelnikova E. *Int. Journal of Modern Physics and Applications*. 2015. № 1(4). P. 159–168.
8. Galerkin free element method and its application in Fracture Mechanics / B. B. Xu, X. W. Gao, W. Jiang, M., Cui, L. Jun, *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. №218. P. 55-65.
9. Stresses in constant tapered beams with thin-walled rectangular and circular cross sections / P. Bertolini, M. A. Eder, L. Taglialegne, P. S. Valvo. *Thin-Walled Structures*. 2019. №137. P. 527–540.
10. Rokach V. Smoothed finite element method for stress intensity factor estimation: benefits and limitations, *Computational Engineering, Finance, and Science*,

2019. P. 6-10.

11. Crack Propagation Law of Reinforced Concrete Beams / Y. Yang, H. Yang, Z. Fan, Z. Mu. *Appl. Sci*, 2024. №409. P. 404-438.

12. Simionato F., Daros C. H., Boundary element method analysis for mode III linear fracture mechanics in anisotropic and nonhomogeneous media, *Z Angew Math Mech*. 2019. №99. P. 180-211.

13. Functionally Graded Plate Fracture Analysis Using the Field Boundary Element Method / Palladino S., Esposito L., Ferla P., Minutolo V. *Appl. Sci*. 2021. №11. P. 2-15.

14. Modelling Thermal Stresses in Laminated Aircraft Elements of a Complex Form with Account of Heat Sources. / Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misiura S., Misiura, I. In: *Cioboată D.D. (eds) International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) - 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, Springer, Cham, 2023. №534. P. 233–246.*

15. Numerical simulation of Fluid–Structure Interaction problems with viscoelastic fluids using a log-conformation reformulation / Moreno L., Castañar I., Codina R., Baiges J., Cattoni D. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023. №410. P. 59-86.

16. Tip Leakage / Lampart P., Yershov S., Rusanov A., Szymaniak M. Main Flow Interactions in Multi-Stage HP Turbines with Short-Height Blading, *ASME Turbo Expo*, GT-2004-53882, 2004, P. 1359-1367.

17. Rusanov A., Chugay M., Rusanov R. Advanced Computer Technologies in the New Flow Part Development for Reactive Type HPC Steam Turbine of T-100 Series. In: *Altenbach, H., et al. Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2023. P. 55-63.

18. Rungamornrat J, Sukulthanasorn N, Mear ME Analysis for T-stress of cracks in 3D anisotropic elastic media by weakly singular integral equation method. *Comput Methods Appl Mech Eng*. 2019. №34. P. 1004–1029.

19. Bai Zi-Q., Gu Y., Fan C. M. A direct Chebyshev collocation method for the numerical solutions of three-dimensional Helmholtz-type equations. *Engineering*

*Analysis with Boundary Elements*. 2019. №104. P. 26-33.

20. Recent Advances and Emerging Applications of the Boundary Element Method / Y. J. Liu, S. Mukherjee, N. Nishimura, M. Schanz, W. Ye, A. Sutradhar, E. Pan, A. Dumont, A. Frangi, A. Saez. *Applied Mechanics Reviews*. 2011. №64 (3). P. 2-38.

21. Derivation of hyper-singular integral equations for thermoelectric bonded materials featuring a crack parallel to interface / Nordin M. H., Hamzah K. B., Khashiie N. S., Waini I., Zainal N. A. Sayed Nordin S. K. *Mathematical modeling and computing*. 2023. №10 (4), P. 1230–1238.

22. Gimperlein H., Oezdemir C., Stephan E. P. A time-dependent FEM-BEM coupling method for fluid-structure interaction in 3D. *Applied Numerical Math*. 2020. № 152, P. 49 – 65.

23. Hewett D. P., Langdon S. Chandler-Wilde S. N. A frequency-independent boundary element method for scattering by two-dimensional screens and apertures, *IMA J. Numer. Anal.* 2015. №35, P. 1698–1728.

24. Sumbatyan M.A., Mescheryakov K.I. Two-dimensional integral equation for a thin wind turbine blade rotating in the round tunnel. *Mechanics Research Communications*. 2017. №85. P. 1-4.

25. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyariov K. Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades. In: *Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2022. ICTM 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*, 2022. №657. P. 11-24.

26. Salvatore F., Sarichloo Z., Calcagni D. Marine Turbine Hydrodynamics by a Boundary Element Method with Viscous Flow Correction. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2018. № 6(2). P. 59-65.

27. Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods / Sierikova O., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K. *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2021*. P.

351-356.

28. On projection method for numerical solution of hypersingular integral equations of the first kind combined with quadrature methods / Elahi M. Mahmoudi Y., Salimi Shamloo A., Jahangiri Rad M. *Physica Scripta*. 2023. №98(4). P. 22-29.

29. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag: Berlin and New York. 1984. 484 p.

30. Brebbia C.A. The birth of the boundary element method from conception to application, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017. №77. P. iii-x.

31. Rizzo F. J. and Shippy D. J. A Boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions, *Mech. Res. Comm.* 1979. №6, P. 99-103.

32. Kostenko O. V. A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. *Mathematical Modelling and Analysis*. 202328(4), P. 689–714.

33. Obaiys S. J., Ibrahim R. W., Ahmad A. F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. In: *Andrica, D., Rassias, T. (eds) Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications. Springer Cham*. 2019. №151. P. 79-98.

34. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. / Gnitko V. I., Karaiev A. O., Degtyariov K. G., Vierushkin I. A., Strelnikova E. A. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2022. №134, P. 67-79.

35. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations / Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. №111 P. 78-87.

36. Langrenne C., Garcia A., Bonnet M. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2015. №138. P. 3332-3340.

37. Groh G.G., A theorem on the potential of a double layer. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1991. №161(2), P. 576-586.

38. Elkhoury M., Kiwata T. Aoun E. Experimental and numerical investigation

of a three-dimensional vertical-axis wind turbine with variable-pitch, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2015. №139, P. 111-123.

39. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory / E. Strelnikova, N. Choudhary, K. Degtyariov, D. Kriutchenko, I. Vierushkin. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024. Vol. 169. №8. P. 2-19.

40. Muthuveerappan G. Ganesan N., Veluswami M. A. Vibration of square cantilever plate immersed in water. *Journal of Sound and Vibration*. 1978. Vol. 61, №3, P. 467-470.

41. Computer Program To Obtain Ordinates for NACA Airfoils. Langley Research Center, NASA. 1996. 27 p.

42. Liu, GR. The smoothed finite element method (S-FEM): A framework for the design of numerical models for desired solutions. *Front. Struct. Civ. Eng.* 2019. P. 13, 456–477.