

А.И. КОЗАРЬ

РЕЗОНАНСНЫЕ МЕТАКРИСТАЛЛЫ

ИЗ МАЛЫХ
МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
СФЕР



Резонансные метакристаллы
из малых магнитоэлектрических
сфер

Resonant metacrystals made of small
magnetodielectric spheres

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

KHARKOV NATIONAL UNIVERSITY OF RADIO ELECTRONICS

Anatoliy I. Kozar

RESONANT METACRYSTALS
MADE OF SMALL MAGNETODIELECTRIC SPHERES

monograph

Kharkov

2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Козарь Анатолий Иванович

РЕЗОНАНСНЫЕ МЕТАКРИСТАЛЛЫ
ИЗ МАЛЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Монография

Харьков
2014

УДК 537.86
ББК 22.336
К 59

Рекомендовано к печати ученым советом Харьковского национального университета радиоэлектроники МОН Украины (протокол № 41 от 17.06.2014 р.)

Рецензенты

Н.Н. Колчигин – доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии в области науки и техники Украины, зав. кафедрой теоретической радиофизики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина МОН Украины;

М.А. Хажмурадов – доктор технических наук, профессор, начальник отдела математического моделирования Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины;

А.В. Грицунов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры микроэлектроники (МЭПУ) Харьковского национального университета радиоэлектроники МОН Украины

Козарь А.И.

К59 Резонансные метакристаллы из малых магнитодиэлектрических сфер: монография / А.И. Козарь, Украина – Харьков: ХНУРЭ, 2014. – 352 с.

ISBN 978-966-659-202-9

В монографии на основе интегральных уравнений макроскопической электродинамики предложен расчетный метод изучения рассеяния электромагнитных волн ограниченными резонансными метакристаллами из малых резонансных магнитодиэлектрических сфер, находящихся во внешней магнитодиэлектрической среде. Представлено аналитико-численное исследование рассеянных полей резонансными метакристаллами.

Монография предназначена для научных сотрудников, инженеров, студентов радиофизических и радиотехнических специальностей.

УДК 537.86
ББК 22.336

У монографії на основі інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки запропоновано розрахунковий метод вивчення розсіяння електромагнітних хвиль обмеженими резонансними метакристаллами із малих резонансних магнітодіелектричних сфер, які знаходяться у зовнішньому магнітодіелектричному середовищі. Представлено аналітико-чисельне дослідження розсіяних полів резонансними метакристаллами.

Монографія призначена для наукових співробітників, інженерів і студентів радіофізичних та радіотехнічних спеціальностей.

The monograph addresses the design method, based on integral equations of macroscopic electromagnetics, proposed for a study of scattering of electromagnetic waves by limited resonance metacrystals, made of small resonance magnetodielectric spheres, which are located in the magnetodielectric environment. The analytical-numerical investigations of fields scattered by resonance metacrystals are presented. The monograph is intended for researchers, engineers, and students in radiophysical and radiotechnical disciplines.

ISBN 978-966-659-202-9

© А.И. Козарь, 2014
© Харьковский национальный университет радиоэлектроники (ХНУРЭ), 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	11
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	14
ВВЕДЕНИЕ.....	15
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ДИФРАКЦИИ И УЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР.....	19
1.1. Формулировка задачи дифракции электромагнитных волн для резонансной системы малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.....	20
1.2. Учет электромагнитного взаимодействия и рассеяние электромагнитных волн на двух малых резонансных магнитодиэлектрических сферах.....	24
1.3. Численный анализ рассеяния электромагнитных волн малой резонансной магнитодиэлектрической сферой.....	42
1.4. Метод зеркальных изображений и рассеяние электромагнитных волн на малой резонансной магнитодиэлектрической сфере с плоским металлическим экраном.....	49
1.5. Способ задания топологической структуры для систем сфер.....	56
1.6. Построение структурных функций электромагнитного взаимодействия для резонансных систем малых резонансных магнитодиэлектрических сфер в свободном пространстве.....	57
1.7. Обоснование возможности экспериментальной оценки значений структурных функций электромагнитного взаимодействия резонансных систем малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.....	64
ГЛАВА 2. РЕЗОНАНСНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР.....	65
2.1. Рассеяние электромагнитных волн резонансными системами сложных двумерных решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел.....	65
2.2. Рассеяние электромагнитных волн резонансной линейной решеткой малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.....	78
2.3. Структурные функции электромагнитного взаимодействия линейной резонансной решетки малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.....	94

2.4. Рассеяние электромагнитных волн резонансной плоской решеткой малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.....	102
2.5. Структурные функции электромагнитного взаимодействия плоской резонансной решетки малых резонансных магнитодиэлектрических сфер	110
2.6. Рассеяние электромагнитных волн резонансной плоской решеткой малых резонансных магнитодиэлектрических сфер при разных видах резонансов .	115
2.6.1. Структурный резонанс плоской решетки	118
2.6.2. Магнитный резонанс плоской решетки	124
2.6.3. Электрический резонанс плоской решетки	129
2.6.4. Вырожденный резонанс плоской решетки	134
2.7. Рассеяние электромагнитных волн резонансной системой из двух плоских решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер	145
2.8. Рассеяние электромагнитных волн резонансной системой, состоящей из линейной и плоской решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер	154

ГЛАВА 3. РЕЗОНАНСНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

3.1. Рассеяние электромагнитных волн резонансными сложными трехмерными решетками малых резонансных магнитодиэлектрических сфер с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел.....	159
3.2. Структурные функции электромагнитного взаимодействия трехмерной резонансной решетки малых резонансных магнитодиэлектрических сфер	173
3.3. Рассеяние электромагнитных волн резонансным кубическим кристаллом из малых магнитодиэлектрических сфер.....	178
3.3.1. Структурный резонанс кубического кристалла	179
3.3.2. Магнитный резонанс кубического кристалла	190
3.3.3. Электрический резонанс кубического кристалла	205
3.3.4. Вырожденный резонанс кубического кристалла	217
3.3.5. Рассеянное поле в окрестности ребра резонансного кубического кристалла	227
3.3.6. Запрещенные зоны резонансного кубического кристалла.....	232
3.3.7. Влияние каналов, полостей, резонансных дефектов на рассеивающие свойства резонансного кубического кристалла	233
3.3.8. Электромагнитная «невидимость» резонансного кубического кристалла, зеркало	238

3.4 Рассеяние электромагнитных волн резонансным кристаллом с кубической объемноцентрированной решеткой из малых магнитодиэлектрических сфер	242
3.5. Рассеяние электромагнитных волн на двух резонансных кубических кристаллах из малых магнитодиэлектрических сфер.....	250
3.6. Рассеяние электромагнитных волн на многослойных резонансных кубических структурах из малых магнитодиэлектрических сфер.....	255
3.7. Сопоставление численных результатов с экспериментальными данными.	256

ГЛАВА 4. СЛОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ С ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ, ЗАДАВАЕМОЙ СТРУКТУРАМИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ 258

4.1. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой геометрической прогрессией.....	259
4.2. Системы двумерных решеток с топологической структурой, задаваемой геометрической прогрессией.....	265
4.3. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой арифметической прогрессией	268
4.4. Системы двумерных решеток с топологической структурой, задаваемой арифметической прогрессией	276
4.5. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой числами Ферма (Тартальи)	279
4.6. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой пирамидальными (тетраэдрическими) числами.....	289
4.7. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой полигональными числами	294
4.8. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой треугольником чисел Паскаля	300
4.9. Системы двумерных решеток сфер с топологической структурой, задаваемой биномиальными коэффициентами	304
4.10. Системы двумерных решеток сфер с топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи	309

ГЛАВА 5. РЕЗОНАНСНЫЙ КУБИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ ИЗ МАЛЫХ СФЕР ВО ВНЕШНЕЙ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ..... 322

5.1. Вырожденный резонансный кубический кристалл во внешней диэлектрической и магнитной среде, снятие вырождения	322
--	-----

5.2. Резонансный кубический кристалл из малых пустотных сфер с материальным заполнением во внешней магнитоэлектрической среде с большим значением проницаемостей ϵ_0 и μ_0	324
5.3. Резонансный кубический кристалл во внешней диамагнитной среде, «эффект Мейснера».....	326
5.4. Влияние скачка проницаемостей внешней среды $\epsilon_0 = \mu_0 = \pm 1$ на рассеивающие свойства резонансного вырожденного кубического кристалла	330
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	339
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	340

CONTENTS

PREFACE.....	11
ABBREVIATIONS.....	14
INTRODUCTION.....	15
CHAPTER 1. EQUATIONS OF DIFFRACTION AND REGARD FOR ELECTROMAGNETIC INTERACTION FOR LIMITED RESONANCE SYSTEMS OF SMALL RESONANCE MAGNETODIELECTRIC SPHERES	19
1.1 Formulation of a problem of electromagnetic waves diffraction for a resonance system of small resonance magnetodielectric spheres	20
1.2 Regard for electromagnetic interaction and scattering of electromagnetic waves by two small resonance magnetodielectric spheres	24
1.3 Numerical analysis of electromagnetic waves scattering by a small resonance magnetodielectric sphere.....	42
1.4 The image method and scattering of electromagnetic waves by a small resonance magnetodielectric sphere with a plane metallic screen.....	49
1.5 A way of assignment of a topological structure for a system of spheres.....	56
1.6 Construction of a structure function of electromagnetic interaction for resonance systems of small resonance magnetodielectric spheres in free space.....	57
1.7 Substantiation of the possibility to experimentally evaluate structure functions of electromagnetic interaction of resonance systems of small resonance magnetodielectric spheres.....	64
CHAPTER 2. LIMITED ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL RESONANCE CRYSTAL LATTICES MADE OF SMALL RESONANCE MAGNETODIELECTRIC SPHERES	65
2.1. Scattering of electromagnetic waves by resonance systems of composite 2-D lattices made of small resonance magnetodielectric spheres with the topological structure prescribed by a natural scale of numbers	65
2.2. Scattering of electromagnetic waves by a linear resonance lattice made of small resonance magnetodielectric spheres	78
2.3. Structure functions of electromagnetic interaction of the linear resonance lattice made of small resonance magnetodielectric spheres	94
2.4. Scattering of electromagnetic waves by a plane resonance lattice made of small resonance magnetodielectric spheres	102
2.5. Structure functions of electromagnetic interaction of the plane resonance lattice made of small resonance magnetodielectric spheres	110

2.6. Scattering of electromagnetic waves by the plane resonance lattice under different kinds of resonances.....	115
2.6.1. Structure resonance of the plane lattice	118
2.6.2. Magnetic resonance of the plane lattice	124
2.6.3. Electric resonance of the plane lattice.....	129
2.6.4. Degenerate resonance of the plane lattice.....	134
2.7. Scattering of electromagnetic waves by the resonance system of two plane lattices made of small resonance magnetodielectric spheres	145
2.8. Scattering of electromagnetic waves by the resonance system consisting of linear and plane lattices made of small resonance magnetodielectric spheres.....	154

CHAPTER 3. LIMITED 3-D RESONANCE CRYSTAL LATTICES MADE OF SMALL RESONANCE MAGNETODIELECTRIC SPHERES..... 159

3.1. Scattering of electromagnetic waves by resonance composite 3-D lattices made of small resonance magnetodielectric spheres with a topological structure prescribed by a natural scale of numbers	159
3.2. Structure functions of electromagnetic interaction of the 3-D resonance lattice made of small resonance magnetodielectric spheres	173
3.3. Scattering of electromagnetic waves by a resonance cubic crystal made of small resonance magnetodielectric spheres	178
3.3.1. Structure resonance of the cubic crystal.....	179
3.3.2. Magnetic resonance of the cubic crystal	190
3.3.3. Electric resonance of the cubic crystal.....	205
3.3.4. Degenerate resonance of the cubic crystal.....	217
3.3.5. Scattered field about the crystal edge.....	227
3.3.6. Forbidden region of the cubic crystal.....	232
3.3.7. Influence of channels, cavities, and resonance defects on scattering properties of the cubic crystal	233
3.3.8. Electromagnetic «invisibility» of the resonance cubic crystal, reflector. 238	
3.4. Scattering of electromagnetic waves by a resonance crystal with a cubic body-centered lattice made of small resonance magnetodielectric spheres.....	242
3.5. Scattering of electromagnetic waves by two resonance cubic crystals made of small resonance magnetodielectric spheres.....	250
3.6. Scattering of electromagnetic waves by multilayer resonance cubic structures made of small resonance magnetodielectric spheres	255

CHAPTER 4. COMPOSITE LIMITED CRYSTAL LATTICES WITH A TOPOLOGICAL STRUCTURE PRESCRIBED BY STRUCTURES OF INTEGERS..... 258

4.1. Composite 3-D lattices with a topological structure prescribed by a geometric series	259
4.2. Systems of 2-D lattices with a topological structure prescribed by a geometric series	265
4.3. Composite 3-D lattices with a topological structure prescribed by an arithmetical progression	268
4.4. Systems of 2-D lattices with a topological structure prescribed by an arithmetical progression	276
4.5. Composite 3-D lattices with a topological structure prescribed by Fermats (Tartaglia numbers)	279
4.6. Composite 3-D lattices with a topological structure prescribed as pyramidal (tetrahedral) numbers	289
4.7. Composite 3-D lattices with a topological structure prescribed by polygonal numbers	294
4.8. Composite 3-D lattices with a topological structure prescribed by a triangle of Pascal's numbers	300
4.9. Systems of 2-D lattices with a topological structure prescribed by binomial coefficients	304
4.10. Systems of 2-D lattices with a topological structure prescribed by a Fibonacci series	309

CHAPTER 5. RESONANCE CUBIC CRYSTAL MADE OF SMALL SPHERES IN THE MAGNETODIELECTRIC ENVIRONMENT

5.1. Degenerate resonance cubic crystal in the dielectric and magnetic environment, degeneration canceling	322
5.2. Resonance cubic crystal of small cavity spheres in mgnedielectric environment with large values of permittivity ϵ_0 and permeability μ_0	324
5.3. Resonance cubic crystal in the diamagnetic environment, «Meissner's effect»	326
5.4. Influence of a jump in the environment permittivity and permeability $\epsilon_0 = \mu_0 = \pm 1$ on scattering properties of the resonance degenerate cubic crystal	330

CONCLUSION

REFERENCES

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие рентгеновской радиотехники и рентгеновской оптики кристаллов связано с использованием материалов, у которых на первый план выступают дискретность их структуры и связанные с ней резонансные явления. Аналогичная ситуация возникает при решении структурных проблем в нанотехнологиях. Взаимодействие электромагнитного излучения и кристаллов в резонансной области носит сложный характер и недостаточно изучено. Разработка методов электромагнитного моделирования явлений в кристаллических решетках может помочь в их изучении. В монографии предложена аналитическая теория, позволяющая проводить анализ электромагнитных явлений в искусственных резонансных кристаллах (метакристаллах) из малых резонансных магнитоэлектрических тел сферической формы, находящихся в однородной изотропной магнитоэлектрической внешней среде, когда решеточные (структурные) резонансы и внутренние резонансы малых сфер кристалла могут совмещаться.

Используемый в работе подход основан на интегральном методе макроскопической электродинамики и носит аналитико-численный характер. В монографии произведено аналитическое исследование резонансных явлений в ограниченных многочастичных пространственно-упорядоченных структурах, которое сопровождается численным анализом этих явлений. Введено представление о структурных функциях электромагнитного взаимодействия магнитного и электрического типов для дискретных ограниченных кристаллов, позволяющих исследовать резонансные явления в кристаллах.

Для описания внутренней и внешней геометрической структуры ограниченных кристаллов использовались различные структуры целых чисел: натуральный ряд чисел; геометрическая прогрессия; арифметическая прогрессия; числа Ферма (Тартальи); пирамидальные (тетраэдрические) числа; полигональные числа; треугольник чисел Паскаля; биномиальные коэффициенты; числа Фибоначчи.

Построенные математические модели помогут при разработке новых видов искусственных кристаллических материалов с резонансными свойствами и при изучении резонансных явлений в реальных кристаллах.

Результаты проведенных исследований отвечают на вопросы о поведении искусственных кристаллов в резонансной области и затрагивают проблему разработки радиофизических методов моделирования этих явлений для реальных кристаллов.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам за сделанные замечания, которые были учтены при подготовке монографии к изданию.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

Обозначения, использованные при построении графиков:

$$|E_{расc}| = |E_{расc}(\vec{r})| / |E_0(\vec{r})|, |H_{расc}| = |H_{расc}(\vec{r})| / |E_0(\vec{r})| \quad - \quad \text{относительные}$$

величины рассеянных электрических и магнитных полей;

TE_{10n}, TM_{10n} – внутренние моды колебаний сфер, где $n = 1, 2, 3, \dots$;

1^M – магнитный, $1^Э$ – электрический резонансы рассеяния сферы;

$1^{M,Э}$ – вырожденный резонанс рассеяния сферы;

1^{cm} – структурный (решеточный) резонанс рассеяния;

$1^M + 1^{cm}, 1^Э + 1^{cm}$ – совмещенные резонансы рассеяния магнитного (M) и электрического ($Э$) типов со структурным (решеточным) (cm) резонансом рассеяния;

$1^{M,Э} + 1^{cm}$ – совмещенный вырожденный резонанс рассеяния ($M, Э$) и структурный (решеточный) (cm) резонанс;

$1^M + 1^Э + 1^{cm}$ – совмещенные магнитный (M), электрический ($Э$) и структурный (решеточный) (cm) резонансы рассеяния;

λ – длина рассеиваемой волны;

$\lambda_p^M, \lambda_p^Э, \lambda_p^{M,Э}, \lambda_p^{cm}$ – резонансные значения длин волн магнитного (M), электрического ($Э$), вырожденного ($Э, M$) внутренних резонансов сфер и структурных (решеточных) (cm) резонансов рассеяния;

x, y, z – координаты точки наблюдения рассеянного поля;

d, h, l – постоянные решетки;

a – радиус сфер;

$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \mu = \mu' - i\mu''$ – относительные комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала сфер;

$\text{tg } \delta_\varepsilon, \text{tg } \delta_\mu$ – тангенсы угла диэлектрических и магнитных потерь материала сфер при численных расчетах выбраны равными нулю;

$\varepsilon_0 = \varepsilon_0' - i\varepsilon_0'', \mu_0 = \mu_0' - i\mu_0''$ – относительные комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды вне сфер выбраны при численных расчетах равными единице. Для случаев, когда они отличны от единицы, это оговаривается в тексте специально.

ВВЕДЕНИЕ

Монография посвящена разработке аналитической теории электромагнитных явлений в резонансных дискретных сложных конечных размеров пространственных системах, которые состоят из малых резонансных магнитодиэлектрических сфер с топологической структурой, задаваемой структурами целых чисел, то есть в системах с пространственно-упорядоченным расположением сфер, и находящихся в свободном пространстве.

Сфера мала и резонансна, если $a/\lambda' \ll 1$, $a/\lambda_g \sim 1$; упорядоченная пространственная система резонансных сфер резонансна, когда $r_{cc'}/\lambda' \sim 1$, где a – радиус сфер, λ', λ_g – длины рассеиваемой электромагнитной волны вне и внутри сфер, $r_{cc'}$ – характерное расстояние между центрами сфер системы. Система сфер сложная, если она состоит из совмещенных простых систем сфер.

Актуальность изучаемой в монографии темы связана с неугасающим на протяжении всей истории развития электродинамики интересом к задачам о рассеянии электромагнитных волн на отдельных малых телах и их многочастичных пространственных системах [1–18], что вызвано потребностями их научного и технического применения. Они используются как структурные элементы антенн, линзы, поглотители, отражающие поверхности, компоненты оптических и микроволновых устройств, искусственные материалы. Особый интерес вызывают кристаллические структуры малых тел с резонансными свойствами – резонансные кристаллы, резонансные среды. Их можно создавать на основе пространственных систем резонансных малых рассеивателей. Такими могут быть пространственные системы магнитодиэлектрических малых рассеивателей. В этих системах возможно возникновение структурных резонансов электромагнитного взаимодействия между рассеивателями и внутренних резонансов рассеивателей, а также

совмещение и влияние этих резонансов друг на друга. В таких системах электромагнитное поле выделенного рассеивателя зависит от влияния полей других рассеивателей системы, а поле выделенного рассеивателя само влияет на поля остальных рассеивателей, поэтому общее поле системы рассеивателей надо рассматривать как взаимосогласованное. Эти пространственные системы рассеивателей относятся к анизотропным средам и их можно создать, например, путем композиции изотропного магнитодиэлектрика в качестве внешней среды и систем резонансных магнитодиэлектрических малых рассеивателей. Из всего многообразия возможных вариантов такого рода систем наиболее простыми и технологичными в изготовлении могут быть пространственные системы малых магнитодиэлектрических сфер. В этих системах можно создать резонансные условия, когда длина рассеиваемой волны значительно больше геометрических размеров сфер и может быть сравнима с характерными расстояниями между сферами, а внутри сфер – сравнимой с геометрическими размерами этих сфер, то есть когда выполняется условие – $a/\lambda' \ll 1$, $r_{cc}'/\lambda_g \sim 1$, $a/\lambda_g \sim 1$. Диапазон физических характеристик и возможностей применения таких систем сфер очень широк. Однако электромагнитные явления, возникающие в таких системах, сложны и недостаточно изучены, что мешает использовать эти системы в радиоэлектронике. Особенно это актуально при разработке методов электромагнитного моделирования резонансных явлений в рентгеновской радиотехнике, рентгеновской оптике кристаллов и при решении структурных резонансных проблем в нанотехнологиях. Применяемые в настоящее время расчетные методы не позволяют решить эту проблему, и это требует создания новой адекватной аналитической теории. В этой работе предложено решение данной проблемы, которая имеет как фундаментальное, так и прикладное значение для современной радиофизики.

Известно, что электродинамически пространственно-упорядоченную систему магнитодиэлектрических рассеивателей можно рассматривать как континуальную или дискретную. В первом случае среда характеризуется

эффективными диэлектрической и магнитной проницаемостями, а во втором эти понятия уже в малой степени соответствуют электродинамическому смыслу. В монографии изучаются резонансные системы малых рассеивателей, которые электродинамически носят принципиально дискретный характер, а существующие теории в основном рассматривают системы рассеивателей как континуальные. Например, такого рода теория по вычислению эффективных проницаемостей кубической решетки магнитодиэлектрических сфер предложена Л. Левиным [13], но она носит частный характер. Наиболее фундаментальной, последовательной является теория искусственных анизотропных диэлектриков, созданная Н.А. Хижняком, в которой использована модель непрерывной среды [14-16]. В этой теории исследуются эффективные проницаемости искусственного диэлектрика, образованного правильной решеткой малых рассеивающих центров произвольной геометрической формы.

Основные идеи этих теорий и метод интегральных уравнений макроскопической электродинамики [17, 18] можно положить в основу при создании теории резонансных пространственных систем малых магнитодиэлектрических рассеивателей, которые с точки зрения макроскопической электродинамики рассматриваются как дискретные. Эти положения использованы в монографии при построении новой аналитической теории для изучения электромагнитных явлений в резонансных сложных пространственных системах, состоящих из малых резонансных магнитодиэлектрических сфер и находящихся в пространстве, заполненном однородной изотропной магнитодиэлектрической средой. Принципиальная макроскопическая электродинамическая дискретность изучаемых в работе систем определяет характер законов, задающих внешнюю геометрическую форму и внутреннее распределение сфер в ограниченной пространственной системе. В качестве таких законов используются структуры целых чисел, которые также имеют дискретный характер. Создание этой теории дает возможность исследовать и анализировать электромагнитные явления в

диэлектрических, магнитных, магнитодиэлектрических резонансных пространственных системах резонансных рассеивателей, изучать влияние внешней геометрической формы и внешней магнитодиэлектрической среды на свойства этих ограниченных дискретных пространственных структур, и открывает путь к созданию новых видов кристаллических материалов и устройств с необычными электродинамическими свойствами, применение которых может помочь расширить функциональные возможности различного рода радиоэлектронных устройств.

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ДИФРАКЦИИ И УЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Исследования пространственных систем рассеивающих элементов, у которых электромагнитное взаимодействие между рассеивающими элементами и сами рассеивающие элементы обладают резонансными свойствами, имеют ряд важных приложений в современной радиофизике. Особый интерес вызывают дискретные ограниченные пространственные системы, построенные из малых резонансных магнитодиэлектрических сфер, ввиду возможности их разнообразного технического применения. Это определяет актуальность разработки аналитических способов описания взаимодействия электромагнитного поля с резонансными дискретными пространственными системами малых резонансных сфер, находящихся в однородной изотропной магнитодиэлектрической внешней среде.

Целью раздела 1.1 данной главы является построение уравнений дифракции электромагнитных волн для описания электромагнитных явлений в резонансных ограниченных пространственных системах малых резонансных сфер, рассматриваемых, с точки зрения макроскопической электродинамики, как дискретные [19-22, 58]. Эти уравнения будут использованы для получения аналитических решений задач о взаимодействии электромагнитных волн с пространственными системами малых сфер с различной топологической структурой. В основу построения уравнений дифракции для рассматриваемого случая положен метод интегральных уравнений макроскопической электродинамики [17, 18]. В разделе 1.2 предложен способ учета электромагнитного взаимодействия системы малых сфер [23]. В разделе 1.3 представлен численный анализ рассеяния электромагнитных волн малой резонансной сферой. Способ применения метода зеркальных отображений [30] и

способ задания топологической структуры систем сфер рассмотрен в разделах 1.4 и 1.5. В разделе 1.6 излагается способ построения структурных функций электромагнитного взаимодействия систем малых сфер [39- 42].

1.1. Формулировка задачи дифракции электромагнитных волн для резонансной системы малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Изложим постановку и решение задачи [19-22, 58].

Будем рассматривать поля гармонически зависящие от времени $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателя определим через электрический $\vec{\Pi}_c^\vartheta(\vec{r}, t)$ и магнитный $\vec{\Pi}_c^M(\vec{r}, t)$ потенциалы Герца

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}_c^\vartheta(\vec{r}, t) - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}_c^M(\vec{r}, t)], \\ \vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}_c^M(\vec{r}, t) + ik\varepsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}_c^\vartheta(\vec{r}, t)]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Потенциалы Герца рассеянного поля отдельными рассеивателями представим как

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_c^\vartheta(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_c} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_c^0(\vec{r}', t) f_c(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \\ \vec{\Pi}_c^M(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_c} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_c^0(\vec{r}', t) f_c(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\vec{E}_c^0(\vec{r}', t), \vec{H}_c^0(\vec{r}', t)$ – индуцированные внутренние поля рассеивателя; V_c – объем рассеивателя; ε_0, μ_0 и ε_c, μ_c – относительные комплексные диэлектрические и магнитные проницаемости заполнения пространства вне рассеивателя и материала рассеивателя; функция $f_c(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ является решением уравнения

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2\varepsilon_0\mu_0 f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности, и имеет вид

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{e^{-ki\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}(|\vec{r} - \vec{r}'|)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.3)$$

Полное поле в произвольной точке пространства, лежащей вне рассеивателя, учитывая (1.1), представим в виде

$$\vec{E}_{полн}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{расс}(\vec{r}, t), \quad \vec{H}_{полн}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \vec{H}_{расс}(\vec{r}, t), \quad (1.4)$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$, $\vec{H}_0(\vec{r}, t)$ – невозмущенное поле рассеиваемой волны.

Если точка наблюдения поля \vec{r} находится внутри объема $\vec{r} \in V_c$ рассеивателя, то выражения (1.4) превращаются в интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, которые имеют единственное решение [17]. Эти уравнения являются уравнениями электромагнитного поля с нелокальными граничными условиями. Решив эти интегральные уравнения, можно по известному внутреннему полю рассеивателя найти поле вне его (1.4).

Решение интегральных уравнений для общего случая довольно сложная задача, которая для случая рассеяния волн на системах малых однородных изотропных магнитоэлектрических сфер, когда внутренние поля сфер можно считать квазистационарными, упрощается, если учесть, что для внешних точек сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (1.3) имеет вид

$$W_c(\vec{r}) = \int_{V_c} \frac{e^{-ki\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}(|\vec{r} - \vec{r}'|)}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r}}{r}, \quad (1.5)$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k = 2\pi/\lambda$, а r – определяет расстояние от центра сферы до точек вне сферы, a_c – радиус сферы.

В результате, для резонансных сфер, когда вне сфер $a_c/\lambda' \ll 1$, а внутри сфер возможно $a_c/\lambda_g \sim 1$ и может быть $r_{cc'}/\lambda' \sim 1$, где $r_{cc'}$ – характерное расстояние между центрами сфер, внутреннее поле выделенной сферы c' , входящей в систему из N сфер ($c', c \in N$), будем находить из алгебраической системы взаимосвязанных уравнений квазистационарного приближения,

которую построим, опираясь на рассматриваемые интегральные уравнения (1.4) и используя выражение (1.5). Входящие в эту систему уравнения для произвольной сферы c' имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0c'}(\vec{r}', t) = & \left(\frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{c'}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^N \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_c^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_c^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_c^M(\vec{r}) \vec{H}_c^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{0c'}(\vec{r}', t) = & \left(\frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{c'}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^N \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_c^M(\vec{r}) \vec{H}_c^0(\vec{r}', t) + \right. \\ & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_c^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_c^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right), \end{aligned}$$

где $\vec{E}_{0c'}(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{0c'}(\vec{r}', t)$ и $\vec{E}_c^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_c^0(\vec{r}', t)$ – поле падающей волны и индуцированное поле внутри сферы c' , величины (1.5) $W_c^\varepsilon(\vec{r})$, $W_c^M(\vec{r})$, $\varepsilon_{c\varepsilon\phi}$, $\mu_{c\varepsilon\phi}$ представим как

$$\begin{aligned} W_c^\varepsilon(\vec{r}) = W_c^M(\vec{r}) = \\ = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c\varepsilon\phi} = \varepsilon_c F(k a_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = \varepsilon_c F(\theta_c), \\ \mu_{c\varepsilon\phi} = \mu_c F(k a_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = \mu_c F(\theta_c), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$F\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right) = \frac{2\left(\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} - ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} \cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right)}{\left(k^2 a_c^2 \varepsilon_c \mu_c - 1\right) \sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} + ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} \cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}}, \quad (1.9)$$

здесь $r_{cc'}$ – расстояние между центрами сфер c' , c ; $\theta_{1c'}^2 = k^2 a_c^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $\theta_c = ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}$ (рис.1.1).

Вторые слагаемые в уравнениях (1.6) учитывают электромагнитное влияние на выделенную сферу c' остальных сфер пространственной системы.

Используя уравнения (1.6), можно сформировать алгебраическую систему уравнений для определения внутреннего поля сфер, входящих в дискретную пространственную систему сфер, в которой учтено электромагнитное взаимодействие сфер.

На рис. 1.1 представлены особенности поведения $\operatorname{Re} F(\theta)$ (сплошная кривая) и $\operatorname{Im} F(\theta)$ (пунктирная кривая) функции (1.9), которая входит в уравнения (1.6), в зависимости от $\operatorname{Re} \theta$ при разных значениях тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon$ (1 кривая – $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0$; 2 кривая – $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0,05$; 3 кривая – $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0,1$) и $\mu = 1$, здесь $\theta = ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}$.

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^{\circ}(\vec{r}, t)$, $\vec{\Pi}^{\mathcal{M}}(\vec{r}, t)$ рассеянного системой сфер поля, по известному внутреннему полю отдельных рассеивателей, представим в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^{\circ}(\vec{r}, t) &= \sum_{c=1}^N \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_c^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}, \\ \vec{\Pi}^{\mathcal{M}}(\vec{r}, t) &= \sum_{c=1}^N \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_c^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Выражения (1.10) справедливы для произвольных расстояний r_c от центров сфер до точки наблюдения рассеянного поля, лежащей вне сфер.

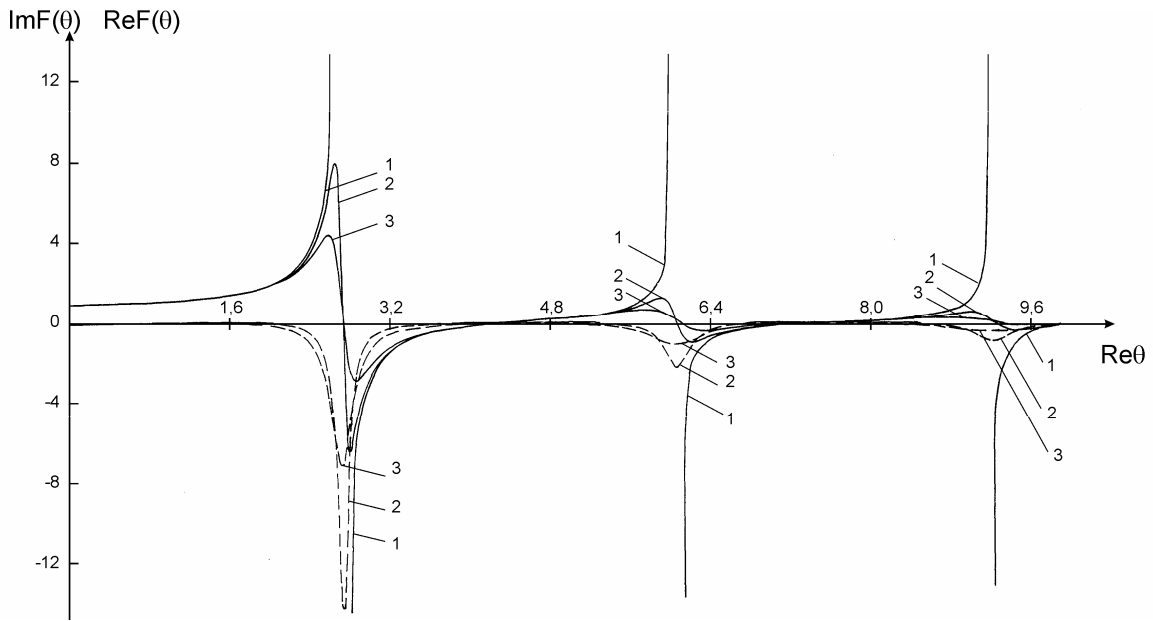


Рис. 1.1. Функция $F\left(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\right)$

Рассеянное и полное поля находим из (1.1) и (1.4).

В основной матрице алгебраической системы уравнений (1.6) содержатся сведения об особенностях электромагнитного взаимодействия между сферами рассматриваемой пространственной системы сфер.

Изложенный подход (1.1) – (1.10) позволяет решать задачи по изучению электромагнитных явлений в резонансных дискретных ограниченных пространственных системах малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер, в которых длина рассеиваемой волны вне сфер значительно больше геометрических размеров сфер $a/\lambda' \ll 1$, но может быть соизмеримой с характерными расстояниями между сферами пространственной системы $r_{cc}'/\lambda' \sim 1$, а внутри сфер соизмеримой с геометрическими размерами сфер $a_c/\lambda_g \sim 1$.

1.2. Учет электромагнитного взаимодействия и рассеяние электромагнитных волн на двух малых резонансных магнитодиэлектрических сферах

Учет электромагнитного взаимодействия между сферами системы сфер иллюстрируется на примере решения задачи о рассеянии электромагнитных

волн на двух малых резонансных однородных изотропных магнитодиэлектрических сферах, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга.

Изложим постановку и решение задачи [23]. Полагаем, что проницаемости заполнения свободного пространства ε_0, μ_0 , радиусы сфер a_1, a_2 , а их проницаемости $\varepsilon_1, \mu_1; \varepsilon_2, \mu_2$. Вне сфер $a/\lambda' \ll 1$, но внутри сфер возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ', λ_g – длины волн вне и внутри сфер.

Рассеянное поле (1.1) по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{\varepsilon}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{\mu}$ потенциалы Герца (1.10).

Построим уравнения квазистационарного приближения для определения внутренних полей двух сфер в виде системы из четырех неоднородных уравнений вида (1.6)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{01}(\vec{r}', t) &= \frac{(\varepsilon_{1\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{11}^2 \varepsilon_{1\varepsilon\phi} + i\theta_{11}(\varepsilon_{1\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{11}}} \vec{E}_1^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{2\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{21}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_2^0(\vec{r}', t) - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{2\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{21}^{\mu}(\vec{r}) \vec{H}_2^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \\ \vec{H}_{01}(\vec{r}', t) &= \frac{(\mu_{1\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{11}^2 \mu_{1\varepsilon\phi} + i\theta_{11}(\mu_{1\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{11}}} \vec{H}_1^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{2\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{21}^{\mu}(\vec{r}) \vec{H}_2^0(\vec{r}', t) + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{2\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{21}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_2^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{02}(\vec{r}', t) &= \frac{(\varepsilon_{2\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{12}^2 \varepsilon_{2\varepsilon\phi} + i\theta_{12}(\varepsilon_{2\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{12}}} \vec{E}_2^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{1\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{12}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_1^0(\vec{r}', t) - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{1\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{12}^{\mu}(\vec{r}) \vec{H}_1^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\vec{H}_{02}(\vec{r}', t) = \frac{(\mu_{2\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{12}^2 \mu_{2\varepsilon\phi} + i\theta_{12}(\mu_{2\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{12}}} \vec{H}_2^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{1\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{12}^M(\vec{r}) \vec{H}_1^0(\vec{r}', t) + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{1\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{12}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_1^0(\vec{r}', t) \right] \right\},$$

где $\vec{E}_{01}(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{01}(\vec{r}', t)$ и $\vec{E}_{02}(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{02}(\vec{r}', t)$ – поля падающей волны в центрах первой и второй сфер; а $\vec{E}_1^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_1^0(\vec{r}', t)$ и $\vec{E}_2^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_2^0(\vec{r}', t)$ – индуцированные внутренние поля сфер; $\theta_{11}^2 = k^2 a_1^2 \varepsilon_0 \mu_0$; $\theta_{12}^2 = k^2 a_2^2 \varepsilon_0 \mu_0$; $\varepsilon_{1\varepsilon\phi}$, $\varepsilon_{2\varepsilon\phi}$, $\mu_{1\varepsilon\phi}$, $\mu_{2\varepsilon\phi}$ – определяются соотношениями (1.8), (1.9).

Величины $W_{21}^\varepsilon(\vec{r})$, $W_{21}^M(\vec{r})$ и $W_{12}^\varepsilon(\vec{r})$, $W_{12}^M(\vec{r})$ имеют вид (1.5), (1.7)

$$W_{21}^\varepsilon(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \frac{e^{-ik_1 r_{21}}}{r_{21}}, \\ W_{21}^M(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \frac{e^{-ik_1 r_{21}}}{r_{21}}, \\ W_{12}^\varepsilon(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \frac{e^{-ik_1 r_{12}}}{r_{12}}, \\ W_{12}^M(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \frac{e^{-ik_1 r_{12}}}{r_{12}},$$
(1.12)

где

$$r_{21} = r_{12} = \sqrt{(x_{20} - x_{10})^2 + (y_{20} - y_{10})^2 + (z_{20} - z_{10})^2}.$$

Здесь (x_{10}, y_{10}, z_{10}) и (x_{20}, y_{20}, z_{20}) – координаты центров первой и второй сфер.

Первые слагаемые справа в уравнениях (1.11) связаны с внутренним полем соответствующей сферы, а вторые слагаемые определяют влияние на данную сферу противоположной сферы.

Для определения внутреннего поля сфер имеется система из четырех векторных неоднородных уравнений или же для x -, y -, z -составляющих – система двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными.

Для внутреннего поля выделенной сферы решение системы уравнений (1.11) по формулам Крамера имеет вид [23]

$$\begin{aligned}\vec{E}_{c'}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^2 (\hat{g}_c^{\text{эс}'} \vec{E}_{0c}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_c^{\text{эс}'} \vec{H}_{0c}(\vec{r}', t)), \\ \vec{H}_{c'}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^2 (\hat{\beta}_c^{\text{мс}'} \vec{H}_{0c}(\vec{r}', t) + \hat{g}_c^{\text{мс}'} \vec{E}_{0c}(\vec{r}', t)),\end{aligned}\quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{g}_c^{\text{эс}'} &= \begin{bmatrix} g_{xxc}^{\text{эс}'} & g_{xyc}^{\text{эс}'} & g_{xzc}^{\text{эс}'} \\ g_{yxc}^{\text{эс}'} & g_{yyc}^{\text{эс}'} & g_{yzc}^{\text{эс}'} \\ g_{zxc}^{\text{эс}'} & g_{zyc}^{\text{эс}'} & g_{zzc}^{\text{эс}'} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}_c^{\text{эс}'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxc}^{\text{эс}'} & \beta_{xyc}^{\text{эс}'} & \beta_{xzc}^{\text{эс}'} \\ \beta_{yxc}^{\text{эс}'} & \beta_{yyc}^{\text{эс}'} & \beta_{yzc}^{\text{эс}'} \\ \beta_{zxc}^{\text{эс}'} & \beta_{zyc}^{\text{эс}'} & \beta_{zzc}^{\text{эс}'} \end{bmatrix}; \\ \hat{\beta}_c^{\text{мс}'} &= \begin{bmatrix} \beta_{xxc}^{\text{мс}'} & \beta_{xyc}^{\text{мс}'} & \beta_{xzc}^{\text{мс}'} \\ \beta_{yxc}^{\text{мс}'} & \beta_{yyc}^{\text{мс}'} & \beta_{yzc}^{\text{мс}'} \\ \beta_{zxc}^{\text{мс}'} & \beta_{zyc}^{\text{мс}'} & \beta_{zzc}^{\text{мс}'} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}_c^{\text{мс}'} = \begin{bmatrix} g_{xxc}^{\text{мс}'} & g_{xyc}^{\text{мс}'} & g_{xzc}^{\text{мс}'} \\ g_{yxc}^{\text{мс}'} & g_{yyc}^{\text{мс}'} & g_{yzc}^{\text{мс}'} \\ g_{zxc}^{\text{мс}'} & g_{zyc}^{\text{мс}'} & g_{zzc}^{\text{мс}'} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

здесь $g_{xxc}^{\text{эс}'}, g_{xyc}^{\text{эс}'}, \dots; \beta_{xxc}^{\text{эс}'}, \beta_{xyc}^{\text{эс}'}, \dots$ – адъюнкты детерминанта $\Delta^{\text{эм}}$ основной матрицы системы уравнений (1.11), которые соответствуют элементам этого детерминанта. Индекс c' определяет выделенную сферу, а индекс c принимает значения $c = 1, 2$.

Если пренебречь взаимодействием между сферами, то выражения (1.13) примут вид

$$\vec{E}_c^0(\vec{r}', t) = \frac{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\varepsilon_{c\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c}^2 \varepsilon_{c\text{эф}} + i\theta_{1c}(\varepsilon_{c\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} \vec{E}_{0c}(\vec{r}', t), \quad (1.14)$$

$$\vec{H}_c^0(\vec{r}', t) = \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\mu_{c\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_{1c}^2 \mu_{c\text{эф}} + i\theta_{1c}(\mu_{c\text{эф}} + 2\mu_0)} \vec{H}_{0c}(\vec{r}', t),$$

где $\theta_{1c} = ka_c \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ (рис. 1.2 а, б), (рис. 1.3), (рис. 1.4). Выражения (1.14) представляют внутренние электрическое и магнитное поля сферы в квазистационарном приближении. Когда $\lambda \rightarrow \infty$, то из (1.14) следуют известные формулы статики для внутреннего поля сферы.

Для действительных ε_c, μ_c из (1.14) можно получить условия для внутренних резонансов сферы электрического и магнитного типов в виде

$$F(\theta_c) = -\frac{2\varepsilon_0(\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c})}{\varepsilon_c[(1 + \theta_{1c}^2)\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c}]}, \quad (1.15)$$

$$F(\theta_c) = -\frac{2\mu_0(\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c})}{\mu_c[(1 + \theta_{1c}^2)\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c}]},$$

здесь $\theta_c = ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}$ (1.9). Эти условия соответствуют TM_{10n} и TE_{10n} колебаниям малой сферы, здесь $n = 1, 2, 3, \dots$

Из соотношений (1.15) для первого низшего внутреннего электрического резонанса TM_{101} колебаний малой диэлектрической сферы ($\mu_c = 1$) при $\varepsilon_c = 100$ резонансное условие получим в виде ($\theta_{1c} \ll 1$)

$$4,449 = \frac{2\pi a_c \sqrt{\varepsilon_c}}{\lambda} + \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \left[\frac{1 + \theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} - 1 \right] \frac{1}{5,156},$$

а для n -го внутреннего магнитного резонанса TE_{10n} колебаний малой диэлектрической сферы резонансное условие представим как

$$n\pi = \frac{2\pi a_c \sqrt{\varepsilon_c}}{\lambda} + \left[\frac{2(1 + \theta_{1c}^2)}{1 + 2\theta_{1c}^2} - 2 \right] \frac{\mu_0}{2\pi n},$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$ порядок резонансов магнитного типа.

Сопоставление расчета этих резонансных условий для TM_{101} и TE_{101} , TE_{102} , колебаний малой диэлектрической сферы с приведенными в [25] графическими экспериментальными данными дает хорошее совпадение.

На рис. 1.2 *a* представлены кривые для модуля $|\eta^{\text{э}}|$ и аргумента $\varphi^{\text{э}}$, реальной Re и мнимой Im частей выражения для внутреннего электрического поля сферы (1.14) в зависимости от изменения длины падающей волны λ в области первого внутреннего резонанса электрического типа соответствующего TM_{101} колебаниям малой сферы для случая, когда $a_c = 0,1145$ см, $\varepsilon_c = 174$, тангенс угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta_{\varepsilon} = 0$, $\mu = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$.

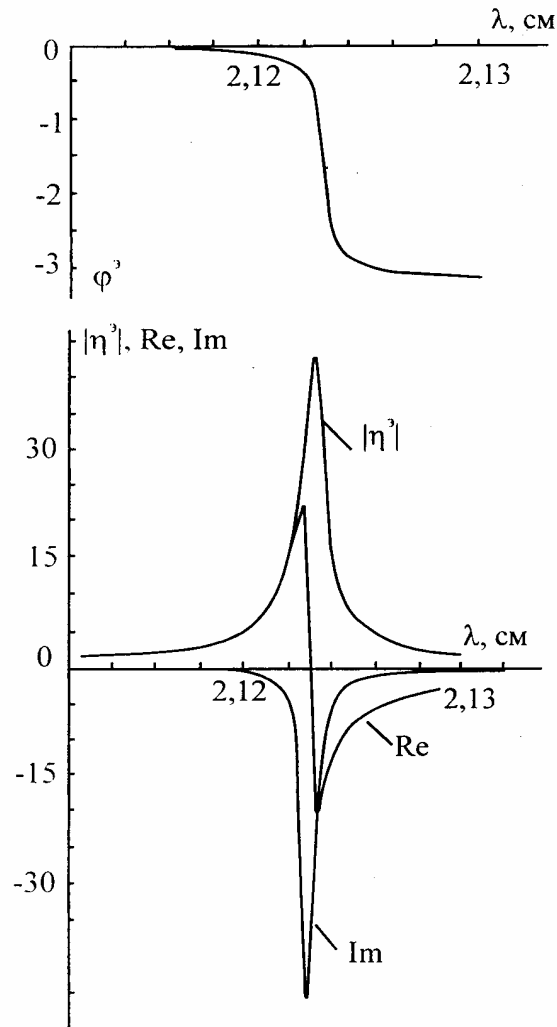


Рис. 1.2 а. Первый внутренний резонанс электрического типа малой диэлектрической сферы

На рис. 1.2 б представлены кривые для модуля $|\eta^m|$ и аргумента φ^m , реальной Re и мнимой Im частей выражения для внутреннего магнитного поля сферы (1.14) в зависимости от изменения длины падающей волны λ в области первого внутреннего резонанса магнитного типа, соответствующего TE_{101} колебаниям малой сферы для случая, когда $a_c = 0,15$ см, $\epsilon_c = 100$, тангенс угла диэлектрических потерь $tg\delta_\epsilon = 0$, $\mu_c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$, λ_p – резонансное значение длины волны.

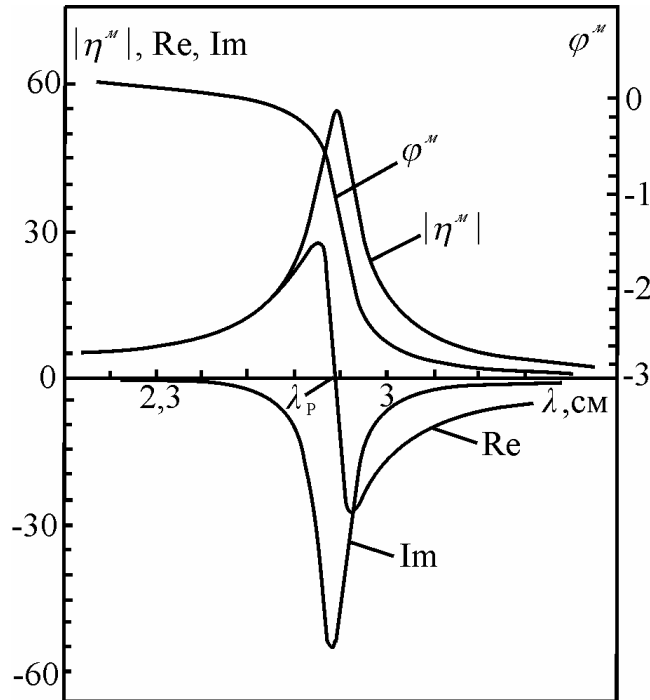


Рис. 1.2 б. Первый внутренний резонанс магнитного типа малой диэлектрической сферы

Из рис. 1.2 а, б следует, что реальные части выражений (1.14) для внутренних электрического и магнитного полей произвольной сферы структуры при резонансе могут принимать нулевые значения (точка λ_p на рис. 1.2 б)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \vec{E}_c^0(\vec{r}') &= 0, \\ \operatorname{Re} \vec{H}_c^0(\vec{r}') &= 0, \end{aligned}$$

что можно использовать как резонансное условие.

На рис. 1.3 представлены кривые для модуля $|\eta^e|$ и аргумента φ^e выражения для колебаний TM_{10n} внутреннего электрического поля (1.14) диэлектрической сферы ($\mu_c = 1$) в зависимости от изменения длины падающей волны λ в области первых трех ($n=1,2,3$) внутренних резонансов электрического типа для случая, когда $a_c = 0,15$ см; $\varepsilon_c = 100$; $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0$; $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$.

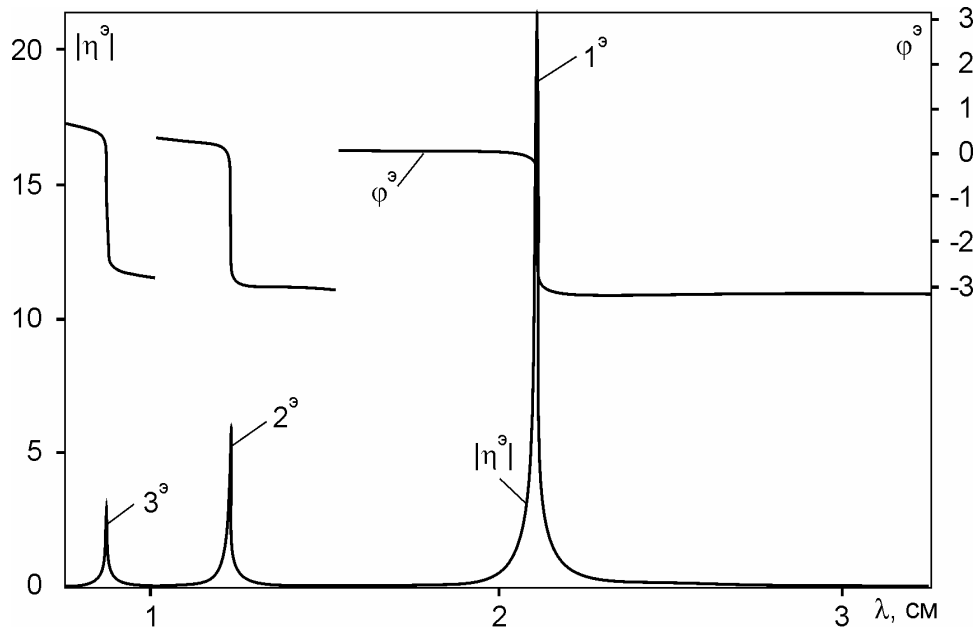


Рис. 1.3. Зависимость модуля $|\eta^3|$ и аргумента φ^3 выражения для внутреннего электрического поля малой диэлектрической сферы от изменения длины рассеиваемой волны λ

На рис. 1.4 представлены кривые для модуля $|\eta^m|$ и аргумента φ^m выражения для колебаний TE_{10n} внутреннего магнитного поля (1.14) диэлектрической сферы ($\mu_c = 1$) в зависимости от изменения длины падающей волны λ в области первых трех ($n = 1, 2, 3$) внутренних резонансов магнитного типа для случая, когда $a_c = 0,15$ см; $\epsilon_c = 100$; $\text{tg } \delta_\epsilon = 0$; $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^3$ и $\vec{\Pi}^m$ рассеянного системой из двух сфер поля, по известному внутреннему полю (1.13) отдельных рассеивателей, представим в виде суперпозиции потенциалов Герца первой и второй сфер

$$\vec{\Pi}^3(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^2 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\epsilon_{c3\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_c^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c},$$

$$\vec{\Pi}^m(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^2 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c3\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_c^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c},$$
(1.16)

где $r_c = \sqrt{(x - x_{c0})^2 + (y - y_{c0})^2 + (z - z_{c0})^2}$ – координаты (x, y, z) определяют точку наблюдения поля, рассеянного системой из двух сфер и лежащей вне сфер, а координаты (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) – точку нахождения центра соответствующей сферы.

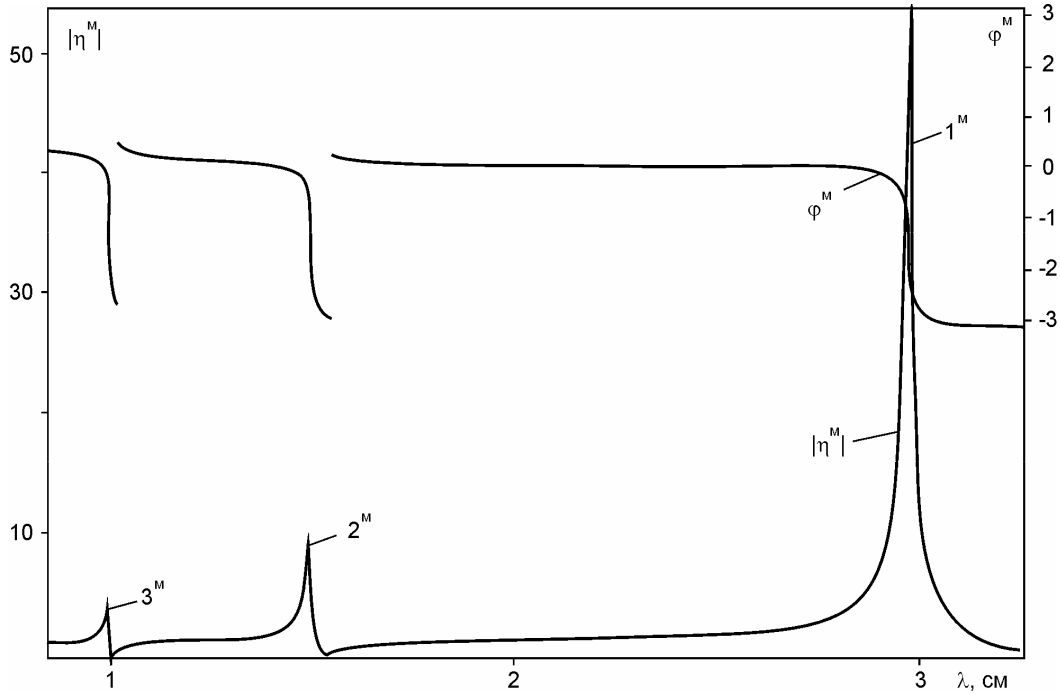


Рис. 1.4. Зависимость модуля $|\eta^M|$ и аргумента φ^M выражения для внутреннего магнитного поля малой диэлектрической сферы от изменения длины рассеиваемой волны λ

Учитывая (1.13), (1.16), найдем рассеянное на двух сферах поле (1.1)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^2 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{E}_c^0(\vec{r}') - \right. \\ \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{H}_c^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)}, \\ \vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^2 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{H}_c^0(\vec{r}') + \right. \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$+ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{E}_c^0(\vec{r}') \left. \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)},$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{xzc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{yzc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zcc} \end{bmatrix}; \hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (1.18), имеют вид

$$\Psi_{xxc} = \frac{1}{r_c} k_1^2 + \frac{3(x-x_{c0})^2 - r_c^2}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c0})^2}{r_c^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c0})^2 - r_c^2}{r_c^4},$$

$$\Psi_{yyc} = \frac{1}{r_c} k_1^2 + \frac{3(y-y_{c0})^2 - r_c^2}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(y-y_{c0})^2}{r_c^3} + ik_1 \frac{3(y-y_{c0})^2 - r_c^2}{r_c^4},$$

$$\Psi_{zcc} = \frac{1}{r_c} k_1^2 + \frac{3(z-z_{c0})^2 - r_c^2}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(z-z_{c0})^2}{r_c^3} + ik_1 \frac{3(z-z_{c0})^2 - r_c^2}{r_c^4},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} = \frac{3(x-x_{c0})(y-y_{c0})}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c0})(y-y_{c0})}{r_c^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c0})(y-y_{c0})}{r_c^4},$$

$$\Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} = \frac{3(x-x_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^4},$$

$$\Psi_{yzc} = \Psi_{zyc} = \frac{3(y-y_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(y-y_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^3} + ik_1 \frac{3(y-y_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^4},$$

$$\Psi_{xc} = \frac{(x-x_{c0})}{r_c^3} + ik_1 \frac{(x-x_{c0})}{r_c^2}, \quad \Psi_{yc}^0 = -\Psi_{yc}, \quad \Psi_{xc}^0 = -\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{zc} = \frac{(z-z_{c0})}{r_c^3} + ik_1 \frac{(z-z_{c0})}{r_c^2}, \quad \Psi_{yc} = \frac{(y-y_{c0})}{r_c^3} + ik_1 \frac{(y-y_{c0})}{r_c^2}, \quad \Psi_{zc}^0 = -\Psi_{zc}.$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, определим в виде (1.4).

При условии, что в выражениях (1.13), (1.17) индекс c принимает значение $c=1$, соотношения (1.17) будут определять рассеянное поле малой резонансной магнитодиэлектрической сферы в свободном пространстве и иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pacc}(\vec{r}, t) = & \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \left\{ \frac{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} - \varepsilon_0) e^{i\theta_{1c}}}{\left((\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) \right)} \times \right. \\ & \left. \times \hat{L} \vec{E}_0(\vec{r}') - ik\mu_0 \frac{(\mu_{\varepsilon\phi} - \mu_0) e^{i\theta_{1c}}}{\left((\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) \right)} \hat{P} \vec{H}_0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r)}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{pacc}(\vec{r}, t) = & \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \left\{ \frac{(\mu_{\varepsilon\phi} - \mu_0) e^{i\theta_{1c}}}{\left((\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) \right)} \times \right. \\ & \left. \times \hat{L} \vec{H}_0(\vec{r}') + ik\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} - \varepsilon_0) e^{i\theta_{1c}}}{\left((\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) \right)} \hat{P} \vec{E}_0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r)}, \end{aligned}$$

где \hat{L} и \hat{P} функциональные матрицы (1.18), величина

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

определяет точку наблюдения (x, y, z) рассеянного поля по отношению к центру рассеивающей сферы (x_0, y_0, z_0) , а $\vec{E}_0(\vec{r}')$, $\vec{H}_0(\vec{r}')$ – поле падающей волны в центре сферы.

Если учесть связь между ортами $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ декартовой ортогональной системы координат (рис. 1.5) и ортами $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ сферической системы координат [24]

$$\vec{i} = \vec{e}_r \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi,$$

$$\vec{j} = \vec{e}_r \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi,$$

$$\vec{k} = \vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta,$$

то рассеянное поле малой резонансной магнитодиэлектрической сферой в свободном пространстве (1.19) в дальней зоне в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pacc}(\vec{r}, t) = & k^2 \mu_0 \Pi_0^e \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c} \left[\vec{e}_\theta \cos \varphi \left(\varepsilon_0 \cos \theta + \frac{\Pi_0^M}{\Pi_0^e} \right) - \right. \\ & \left. - \vec{e}_\varphi \sin \varphi \left(\varepsilon_0 + \frac{\Pi_0^M}{\Pi_0^e} \cos \theta \right) \right] e^{i\omega t} + O\left(\frac{1}{r^2}\right); \end{aligned}$$

$$\vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = k^2 \varepsilon_0 \Pi_0^M \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c} \left[\vec{e}_\theta \sin \varphi \left(\mu_0 \cos \theta + \frac{\Pi_0^e}{\Pi_0^M} \right) + \vec{e}_\varphi \cos \varphi \left(\mu_0 + \frac{\Pi_0^e}{\Pi_0^M} \cos \theta \right) \right] e^{i\omega t} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Вектор Пойтинга \vec{P} для дальней зоны представим как

$$\vec{P} = \frac{c}{8\pi} \left[\vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t), \vec{H}_{\text{расс}}^*(\vec{r}, t) \right] = k^4 \varepsilon_0 \mu_0 \Pi_0^e \Pi_0^{M*} \left[(1 + \varepsilon_0 \mu_0) \cos \theta + \left(\varepsilon_0 \frac{\Pi_0^e}{\Pi_0^{M*}} \sin^2 \varphi + \mu_0 \frac{\Pi_0^{M*}}{\Pi_0^e} \cos^2 \varphi \right) + \left(\mu_0 \frac{\Pi_0^{M*}}{\Pi_0^e} \sin^2 \varphi + \varepsilon_0 \frac{\Pi_0^e}{\Pi_0^{M*}} \cos^2 \varphi \right) \cos^2 \theta \right] \frac{\vec{e}_r}{r^2},$$

где (*) – обозначает комплексно сопряженные величины.

Здесь величины Π_0^e и Π_0^M имеют вид

$$\Pi_0^e = \frac{1}{k_0^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left(\frac{\varepsilon_{\varepsilon\varphi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\varepsilon_{\varepsilon\varphi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c}^2 \varepsilon_{\varepsilon\varphi} + i\theta_{1c} (\varepsilon_{\varepsilon\varphi} + 2\varepsilon_0)} E_0,$$

$$\Pi_0^M = \frac{1}{k_0^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left(\frac{\mu_{\mu\varphi}}{\mu_0} - 1 \right) \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\mu_{\mu\varphi} + 2\mu_0) + \theta_{1c}^2 \mu_{\mu\varphi} + i\theta_{1c} (\mu_{\mu\varphi} + 2\mu_0)} H_0,$$

где E_0 , H_0 – амплитуды плоской рассеиваемой волны (1.21). Неравномерность переизлучения сферой в пространство энергии рассеиваемой волны определяется мощностью электромагнитного излучения в телесный угол как

$$dW = \vec{P} \cdot d\vec{s},$$

здесь $d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \cdot \vec{e}_r$.

Плотность энергии рассеянного (1.1) и полного (1.4) электромагнитного поля можно найти, используя соотношение

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2). \quad (1.20)$$

Рассмотрим случай рассеяния плоской электромагнитной волны, когда две сферы расположены вдоль оси z на расстоянии h друг от друга (рис.1.5). Координаты первой сферы ($x_{10} = 0, y_{10} = 0, z_{10} \neq 0$), а второй – ($x_{20} = 0, y_{20} = 0, z_{20} = z_{10} + h$), радиусы-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 определяют произвольную точку

наблюдения (x, y, z) относительно сфер, модули радиусов-векторов представим в виде

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{10})^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{20})^2}.$$

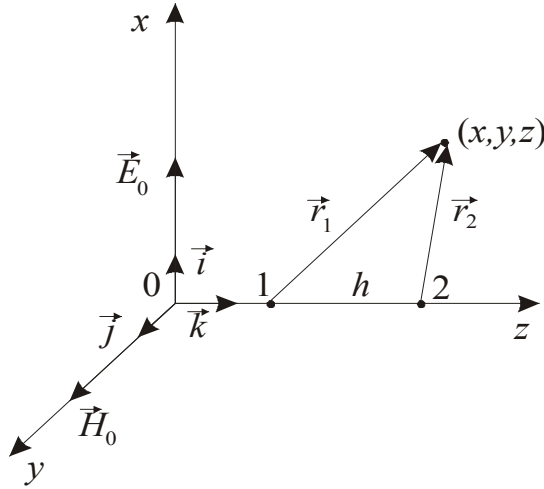


Рис. 1.5. Геометрия задачи

На сферах рассеивается плоская волна (рис.1.5)

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{i} = E_{0x}(z) e^{i\omega t} \vec{i} = E_{0x}(z, t) \vec{i},$$

$$\vec{H}_0(\vec{r}, t) = H_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{j} = H_{0y}(z) e^{i\omega t} \vec{j} = H_{0y}(z, t) \vec{j}.$$
(1.21)

Для этого случая внутреннее поле (1.13) для сферы c' запишем в виде

$$\vec{E}_{c'}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{g}_c^{эс'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t) \vec{i} + \hat{\beta}_c^{эс'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t) \vec{j}),$$

$$\vec{H}_{c'}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{\beta}_c^{мс'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t) \vec{j} + \hat{g}_c^{мс'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t) \vec{i}).$$
(1.22)

Компоненты внутреннего поля (1.22) для сферы c' имеют вид

$$\vec{E}_{x,c'}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{g}_{xxc'}^{эс'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t) + \hat{\beta}_{yyc'}^{эс'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t)) = \frac{\Delta_{xc'}^{(э)M}}{\Delta_{эм}} e^{i\omega t},$$

$$\vec{E}_{y,c'}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{g}_{yxc'}^{эс'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t) + \hat{\beta}_{yyc'}^{мс'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t)) = \frac{\Delta_{yc'}^{(э)M}}{\Delta_{эм}} e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{z,c'}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{g}_{zxc}^{\varepsilon c'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t) + \hat{\beta}_{zyc}^{\varepsilon c'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t)) = \frac{\Delta_{zc'}^{(\varepsilon, M)}}{\Delta_{эм}} e^{i\omega t}, \\
 \vec{H}_{x,c'}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{\beta}_{xyc}^{M c'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t) + \hat{g}_{zxc}^{M c'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t)) = \frac{\Delta_{xc'}^{\varepsilon(M)}}{\Delta_{эм}} e^{i\omega t}, \\
 \vec{H}_{y,c'}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{\beta}_{yyc}^{M c'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t) + \hat{g}_{zxc}^{M c'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t)) = \frac{\Delta_{yc'}^{\varepsilon(M)}}{\Delta_{эм}} e^{i\omega t}, \\
 \vec{H}_{z,c'}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}} \sum_{c=1}^2 (\hat{\beta}_{zyc}^{M c'} \vec{H}_{0yc}(\vec{z}', t) + \hat{g}_{zxc}^{M c'} \vec{E}_{0xc}(\vec{z}', t)) = \frac{\Delta_{zc'}^{\varepsilon(M)}}{\Delta_{эм}} e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Система уравнений (1.11) для рассматриваемого случая (рис.1.5) в матричной форме имеет вид (1.24).

Элементы основной матрицы системы уравнений (1.24) представим в виде

$$\begin{aligned}
 \Psi_{xx1}^{\varepsilon 0} = \Psi_{yy1}^{\varepsilon 0} = \Psi_{zz1}^{\varepsilon 0} &= \frac{(\varepsilon_{1\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{11}^2 \varepsilon_{1\varepsilon\phi} + i\theta_{11}(\varepsilon_{1\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{11}}}; \\
 \Psi_{xx1}^{M0} = \Psi_{yy1}^{M0} = \Psi_{zz1}^{M0} &= \frac{(\mu_{1\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{11}^2 \mu_{1\varepsilon\phi} + i\theta_{11}(\mu_{1\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{11}}}; \\
 \Psi_{xx2}^{\varepsilon 0} = \Psi_{yy2}^{\varepsilon 0} = \Psi_{zz2}^{\varepsilon 0} &= \frac{(\varepsilon_{2\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{12}^2 \varepsilon_{2\varepsilon\phi} + i\theta_{12}(\varepsilon_{2\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{12}}}; \\
 \Psi_{xx2}^{M0} = \Psi_{yy2}^{M0} = \Psi_{zz2}^{M0} &= \frac{(\mu_{2\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{12}^2 \mu_{2\varepsilon\phi} + i\theta_{12}(\mu_{2\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{12}}}; \\
 \Psi_{xx12}^{\varepsilon} = \Psi_{yy12}^{\varepsilon} &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\varepsilon_{1\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(k_1^2 \frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} - ik_1 \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{zz12}^{\varepsilon} &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\varepsilon_{1\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{2}{h^3} + ik_1 \frac{2}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{xx21}^{\varepsilon} = \Psi_{yy21}^{\varepsilon} &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\varepsilon_{2\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(k_1^2 \frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} - ik_1 \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{zz21}^{\varepsilon} &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\varepsilon_{2\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{2}{h^3} + ik_1 \frac{2}{h^2} \right) e^{-ik_1 h};
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_{0x1}(z') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{0y1}(z') \\ 0 \\ E_{0x2}(z') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{0y2}(z') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx1}^{\vartheta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{xx21}^{\vartheta} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{z21}^M & 0 \\ 0 & \Psi_{yy1}^{\vartheta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{yy21}^{\vartheta} & 0 & \Psi_{z21}^{M0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{\vartheta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz21}^{\vartheta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{xx1}^{M0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{z21}^{\vartheta 0} & 0 & \Psi_{xx21}^M & 0 & 0 \\ H_{0y1}(z') & 0 & 0 & 0 & \Psi_{yy1}^{M0} & 0 & \Psi_{z21}^{\vartheta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{yy21}^M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{M0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz21}^M \\ E_{0x2}(z') & \Psi_{xx12}^{\vartheta} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{z12}^M & 0 & \Psi_{xx2}^{\vartheta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{yy12}^{\vartheta} & 0 & \Psi_{z12}^{M0} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{yy2}^{\vartheta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz12}^{\vartheta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{\vartheta 0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{z12}^{\vartheta 0} & 0 & \Psi_{xx12}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{xx2}^{M0} & 0 & 0 \\ H_{0y2}(z') & \Psi_{z12}^{\vartheta} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{yy12}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{yy2}^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz12}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{M0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1}^0(\vec{r}') \\ E_{y1}^0(\vec{r}') \\ E_{z1}^0(\vec{r}') \\ H_{x1}^0(\vec{r}') \\ H_{y1}^0(\vec{r}') \\ H_{z1}^0(\vec{r}') \\ E_{x2}^0(\vec{r}') \\ E_{y2}^0(\vec{r}') \\ E_{z2}^0(\vec{r}') \\ H_{x2}^0(\vec{r}') \\ H_{y2}^0(\vec{r}') \\ H_{z2}^0(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{xx12}^m = \psi_{yy12}^m &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\mu_{1\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(k_1^2 \frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} - ik_1 \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \psi_{zz12}^m &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\mu_{1\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{2}{h^3} + ik_1 \frac{2}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \psi_{xx21}^m = \psi_{yy21}^m &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\mu_{2\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(k_1^2 \frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} - ik_1 \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \psi_{zz21}^m &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\mu_{2\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{2}{h^3} + ik_1 \frac{2}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \tag{1.25} \\
 \psi_{z12}^\varepsilon &= -k\varepsilon_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\varepsilon_{1\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(k_1 \frac{1}{h} - i \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \quad \psi_{z12}^{\varepsilon 0} = \psi_{z12}^\varepsilon; \\
 \psi_{z21}^\varepsilon &= -k\varepsilon_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\varepsilon_{2\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(k_1 \frac{1}{h} - i \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \quad \psi_{z21}^{\varepsilon 0} = -\psi_{z21}^\varepsilon; \\
 \psi_{z12}^m &= -k\mu_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\mu_{1\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(k_1 \frac{1}{h} - i \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \quad \psi_{z12}^{m0} = -\psi_{z12}^m; \\
 \psi_{z21}^m &= -k\mu_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\mu_{2\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(k_1 \frac{1}{h} - i \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \quad \psi_{z21}^{m0} = -\psi_{z21}^m.
 \end{aligned}$$

А если предположить, что длина волны $\lambda \rightarrow \infty$, то выражения (1.25) приобретут вид

$$\begin{aligned}
 \Psi_{xx1}^{\varepsilon 0} = \Psi_{yy1}^{\varepsilon 0} = \Psi_{zz1}^{\varepsilon 0} &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right); \quad \Psi_{xx2}^{\varepsilon 0} = \Psi_{yy2}^{\varepsilon 0} = \Psi_{zz2}^{\varepsilon 0} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right); \\
 \Psi_{xx1}^{m0} = \Psi_{yy1}^{m0} = \Psi_{zz1}^{m0} &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right); \quad \Psi_{xx2}^{m0} = \Psi_{yy2}^{m0} = \Psi_{zz2}^{m0} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right); \\
 \Psi_{xx12}^\varepsilon = \Psi_{yy12}^\varepsilon &= \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3; \quad \Psi_{xx21}^\varepsilon = \Psi_{yy21}^\varepsilon = \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3; \\
 \Psi_{zz12}^\varepsilon &= -\frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3; \quad \Psi_{zz21}^\varepsilon = -\frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3;
 \end{aligned}$$

$$\Psi_{xx12}^M = \Psi_{yy12}^M = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3; \quad \Psi_{xx21}^M = \Psi_{yy21}^M = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3;$$

$$\Psi_{zz12}^M = -\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3; \quad \Psi_{zz21}^M = -\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{a}{h} \right)^3.$$

Если в системе уравнений (1.11) пренебречь слагаемыми с оператором rot , то возникнут две независимые системы уравнений для электрического и магнитного полей, которые в матричном представлении для случая (1.24) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} E_{0x1}(z') \\ 0 \\ 0 \\ E_{0x2}(z') \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx1}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 & \Psi_{xx21}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{yy1}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 & \Psi_{yy21}^{\mathcal{E}0} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 & \Psi_{zz21}^{\mathcal{E}0} \\ \Psi_{xx12}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 & \Psi_{xx2}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{yy12}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 & \Psi_{yy2}^{\mathcal{E}0} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz12}^{\mathcal{E}0} & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{\mathcal{E}0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1}^0(\vec{r}') \\ E_{y1}^0(\vec{r}') \\ E_{z1}^0(\vec{r}') \\ E_{x2}^0(\vec{r}') \\ E_{y2}^0(\vec{r}') \\ E_{z2}^0(\vec{r}') \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H_{0y1}(z') \\ 0 \\ 0 \\ H_{0y2}(z') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx1}^{M0} & 0 & 0 & \Psi_{xx21}^M & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{yy1}^{M0} & 0 & 0 & \Psi_{yy21}^M & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{M0} & 0 & 0 & \Psi_{zz21}^M \\ \Psi_{xx12}^M & 0 & 0 & \Psi_{xx2}^{M0} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{yy12}^M & 0 & 0 & \Psi_{yy2}^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz12}^M & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{M0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{x1}^0(\vec{r}') \\ H_{y1}^0(\vec{r}') \\ H_{z1}^0(\vec{r}') \\ H_{x2}^0(\vec{r}') \\ H_{y2}^0(\vec{r}') \\ H_{z2}^0(\vec{r}') \end{bmatrix}.$$

Элементы основных матриц систем уравнений (1.26) совпадают с соответствующими элементами основной матрицы системы уравнений (1.24). Решения систем уравнений (1.26) по формулам Крамера имеют вид

$$E_{xc}^0(\vec{r}') = \frac{\Delta_{xc}^{\mathcal{E}}}{\Delta^{\mathcal{E}}}; \quad E_{yc}^0(\vec{r}') = 0; \quad E_{zc}^0(\vec{r}') = 0; \quad (1.27)$$

$$H_{yc}^0(\vec{r}') = \frac{\Delta_{yc}^M}{\Delta^M}; \quad H_{xc}^0(\vec{r}') = 0; \quad H_{zc}^0(\vec{r}') = 0.$$

где $\Delta^{\mathcal{E}}$ и Δ^M – детерминанты основных матриц систем уравнений (1.26).

Электрический $\vec{P}^{\mathcal{E}}$ и \vec{P}^M магнитный потенциалы Герца для случая (1.23) представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^{\vartheta}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{\Delta^{\vartheta M} k_1^3} \left[(\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\varepsilon_{1\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\Delta_{x1}^{(\vartheta)M} \vec{i} + \Delta_{y1}^{(\vartheta)M} \vec{j} + \Delta_{z1}^{(\vartheta)M} \vec{k} \right) \frac{e^{-ik_1 r_1}}{r_1} + \right. \\ & \left. + (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\varepsilon_{2\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\Delta_{x2}^{(\vartheta)M} \vec{i} + \Delta_{y2}^{(\vartheta)M} \vec{j} + \Delta_{z2}^{(\vartheta)M} \vec{k} \right) \frac{e^{-ik_1 r_2}}{r_2} \right] e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^M(\vec{r}, t) = & \frac{1}{\Delta^{\vartheta M} k_1^3} \left[(\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\mu_{1\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(\Delta_{x1}^{(\vartheta)M} \vec{i} + \Delta_{y1}^{(\vartheta)M} \vec{j} + \Delta_{z1}^{(\vartheta)M} \vec{k} \right) \frac{e^{-ik_1 r_1}}{r_1} + \right. \\ & \left. + (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\mu_{2\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(\Delta_{x2}^{(\vartheta)M} \vec{i} + \Delta_{y2}^{(\vartheta)M} \vec{j} + \Delta_{z2}^{(\vartheta)M} \vec{k} \right) \frac{e^{-ik_1 r_2}}{r_2} \right] e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Рассеянное поле на двух сферах для случая (1.27) запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{k_1^3} \sum_{c=1}^2 (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \frac{\Delta_{xc}^{\vartheta}}{\Delta^{\vartheta}} \vec{i} - \right. \\ & \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \hat{P}_c \frac{\Delta_{yc}^M}{\Delta^M} \vec{j} \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)}, \\ \vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{k_1^3} \sum_{c=1}^2 (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \hat{L}_c \frac{\Delta_{yc}^M}{\Delta^M} \vec{j} + \right. \\ & \left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \frac{\Delta_{xc}^{\vartheta}}{\Delta^{\vartheta}} \vec{i} \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c – функциональные матрицы (1.18).

Поле в произвольной точке пространства определяем как (1.4). Если длина рассеиваемой волны $\lambda \rightarrow \infty$, то компоненты рассеянного поля (1.29) по осям координат x, y, z (рис. 1.5), когда $a_1 = a_2 = a$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, имеют вид

$$E_{x\text{расс}}(\vec{r}) = a^3 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0) - (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\frac{a}{h} \right)^3} \sum_{c=1}^2 \frac{3x^2 - r_c^2}{r_c^5} E_0,$$

$$E_{y\text{расс}}(\vec{r}) = a^3 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0) - (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\frac{a}{h} \right)^3} \sum_{c=1}^2 \frac{3xy}{r_c^5} E_0,$$

$$E_{z_{расc}}(\vec{r}) = a^3 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0) - (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\frac{a}{h}\right)^3} \sum_{c=1}^2 \frac{3xz}{r_c^5} E_0,$$

если $c = 1$, а $h \rightarrow \infty$, то получаем компоненты рассеянного поля для одной сферы, которые соответствуют внешнему полю равномерно поляризованного шара электростатики.

1.3. Численный анализ рассеяния электромагнитных волн малой резонансной магнитодиэлектрической сферой

В разделе проводится анализ численных расчетов поля рассеяния плоской волны (1.21) одной и двумя малыми резонансными однородными изотропными сферами (рис. 1.5).

На рис. 1.6 представлены дисперсионные зависимости поля для относительных величин полей $|E_{расc}| = |E_{расc}(\vec{r})|/|E_0(\vec{r})|$ (1.19):

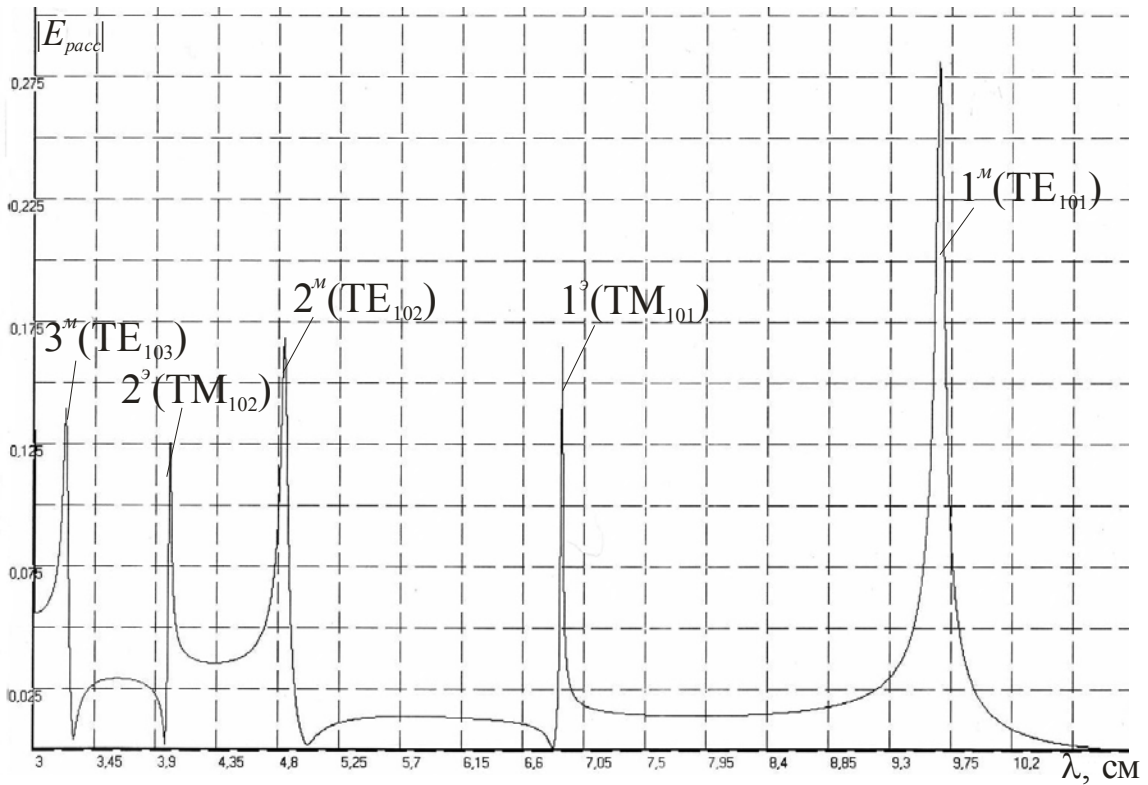
1) диэлектрической сферы с резонансами рассеяния магнитного – $1^m, 2^m, 3^m$ и электрического $-1^e, 2^e$ типов, которые связаны с индуцированными в сфере внутренними колебаниями ($TE_{101}, TM_{101}, \dots$) (рис. 1.6 а);

2) магнитодиэлектрической сферы с резонансами рассеяния магнитного – $1^m, 2^m, 3^m$ и электрического $-1^e, 2^e$ типов (рис. 1.6 б);

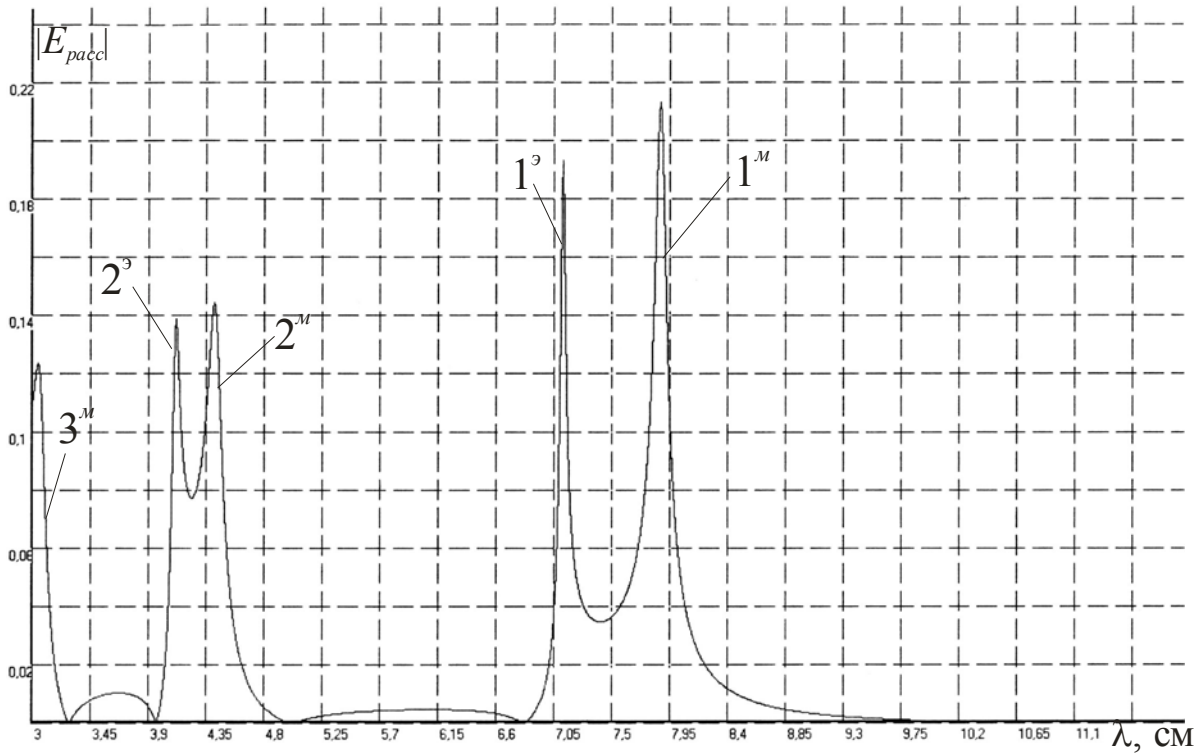
3) магнитодиэлектрической сферы с вырожденными резонансами – $1^{m,e}, 2^{m,e}$ (рис. 1.6 в).

Из анализа выражения (1.19) и рис. 1.6 а, б следует, что у малой резонансной сферы существуют резонансные зоны, в которые входят по два резонанса рассеяния одного порядка и разных типов – $1^m - 1^e$; $2^m - 2^e$, ограниченных с двух сторон резонансными минимумами. В этих зонах при изменении длины волны λ рассеиваемой волны происходит перестройка внутреннего поля сфер, в результате которой возникает резонансное рассеяние магнитного или электрического типов [26]. Графическая структура этих

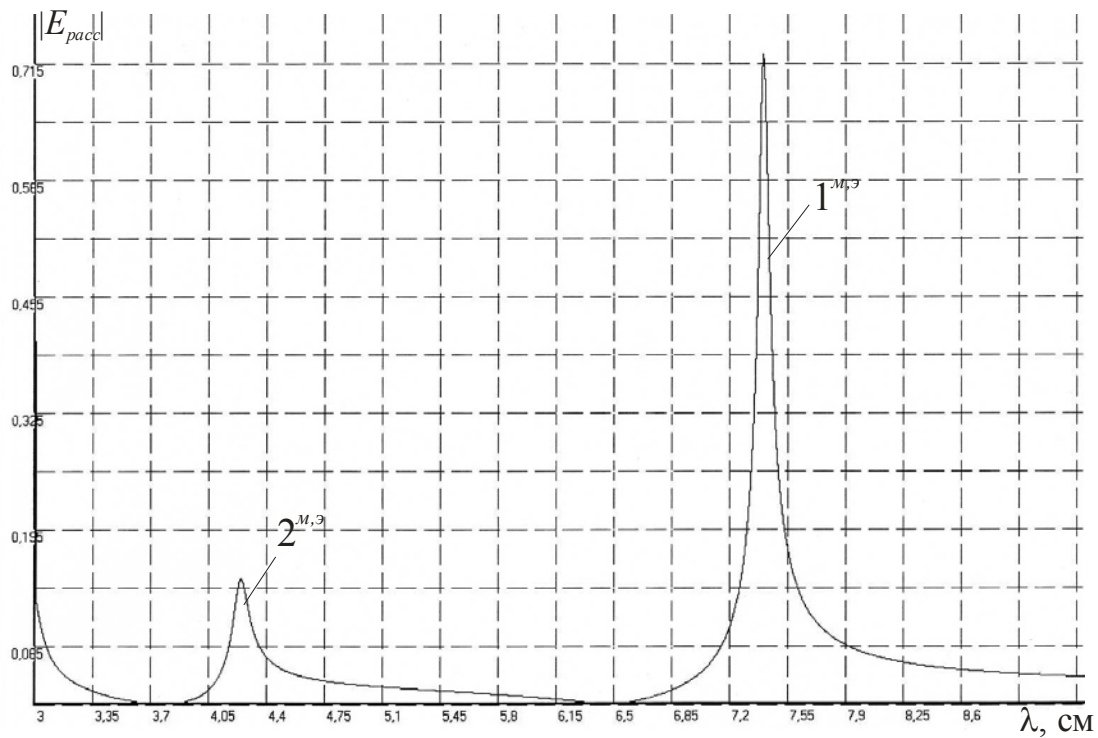
зависимостей характерна для свободного пространства и волноводов, она хорошо подтверждается экспериментальными зависимостями [27, 28, 29, 31].



a)



b)



c)

Рис. 1.6 Зависимости поля $|E_{расс}|$ малой сферы (1.19) от изменения длины волны λ ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$ см), когда:

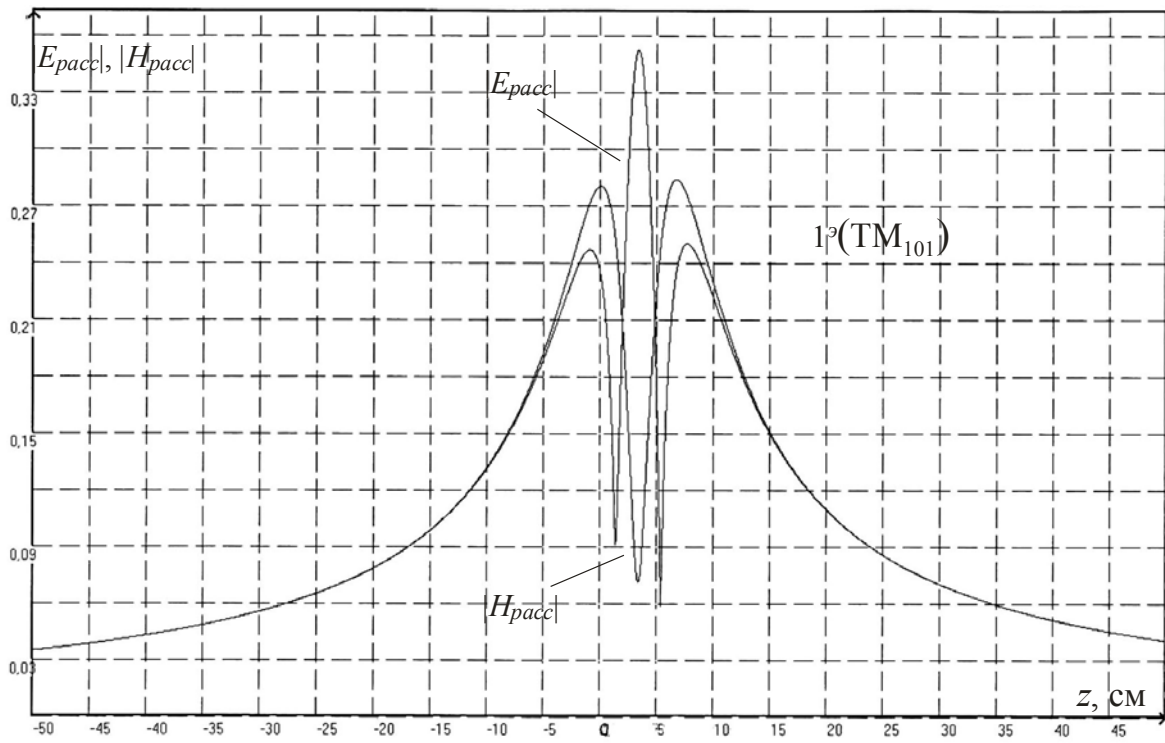
a) $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $x = y = 0$ см; $z = 10$ см,

b) $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 19$; $\mu' = 5$; $x = y = 0$ см; $z = 10$ см,

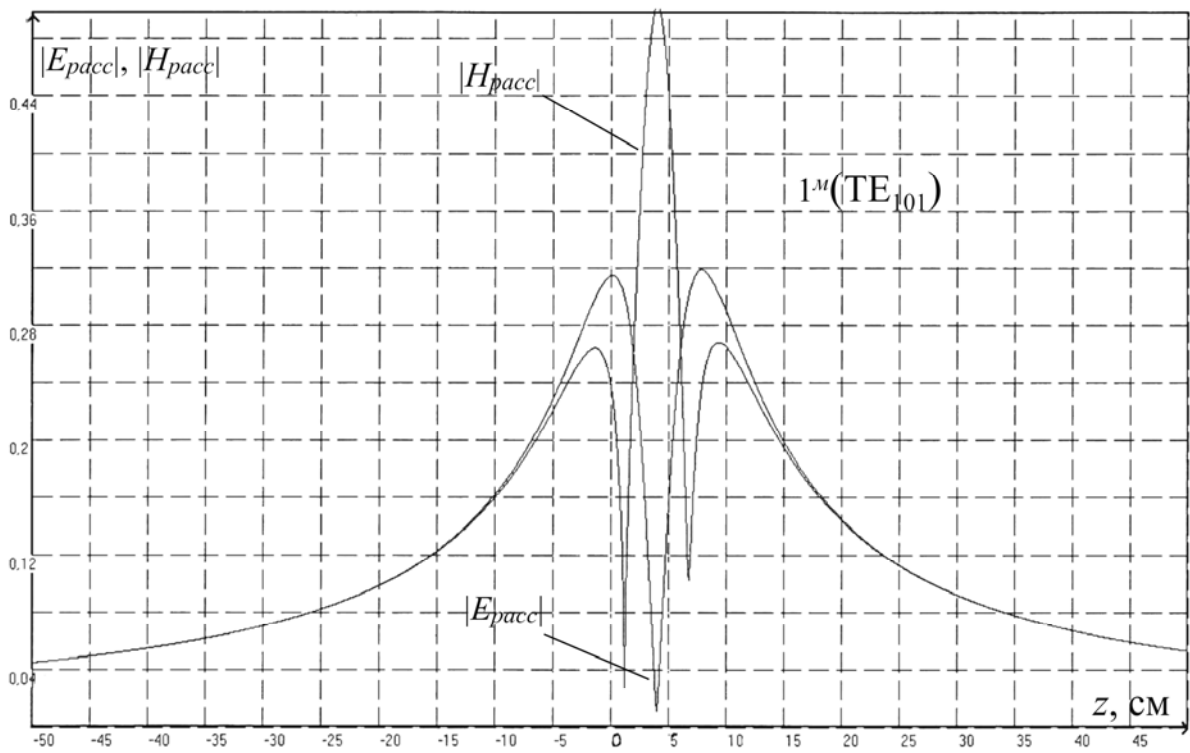
c) $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $\mu' = 1$; $x = 2$ см; $y = 4$ см; $z = 5$ см

Если у малой магнитодиэлектрической сферы совместить резонансы рассеяния одного порядка, но разных типов $1^M, 1^Э$; $2^M, 2^Э$, то возникнут вырожденные резонансы рассеяния (рис. 1.6 c), при которых сфера будет рассеивать падающую волну из области $z < 0$ преимущественно вперед.

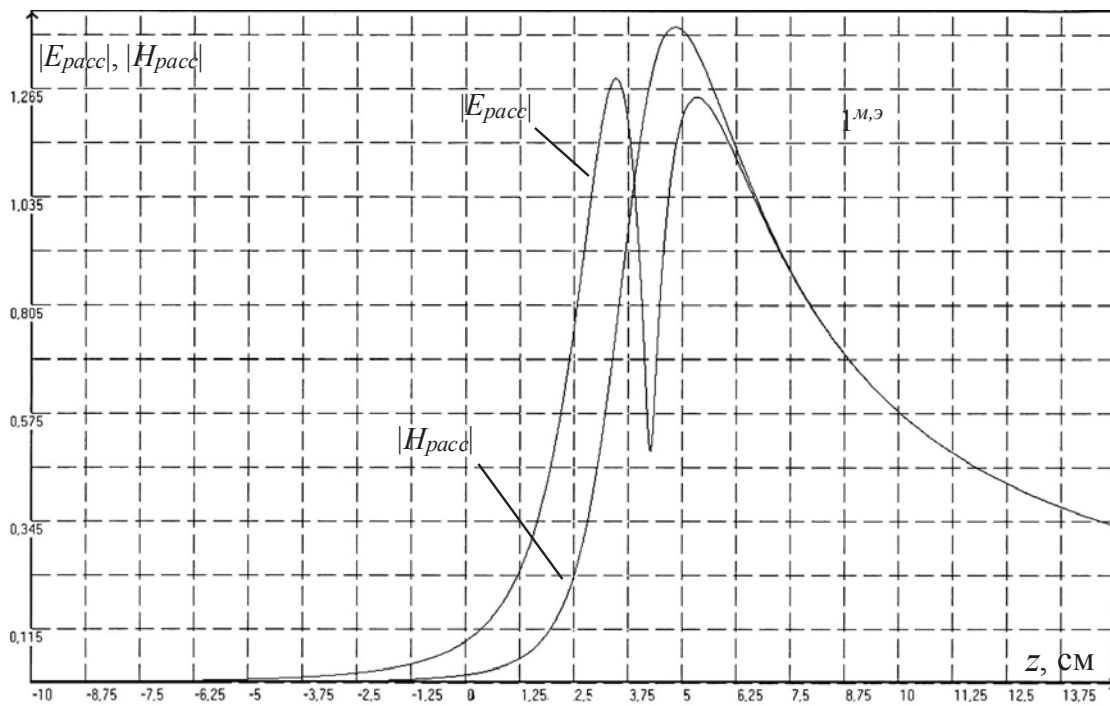
Выражение (1.19) учитывает распространяющуюся и затухающую (реактивную) составляющие рассеянного поля малой магнитодиэлектрической сферы. С особенностями поведения этой затухающей составляющей в зоне Френеля связана сложная модовая структура поля, которая представлена на рис. 1.7 a, б, c для электрического $1^Э$, магнитного 1^M и вырожденного $1^{M,Э}$ резонансов рассеяния.



a)



б)



с)

Рис. 1.7. Зависимости поля $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ сферы (1.19) от изменения координаты точки наблюдения поля z ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$ см), когда:

a) $\lambda_p^g = 6,875$ см; $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $x = 0$ см; $y = 3$ см,

b) $\lambda_p^m = 9,66$ см; $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $x = 4$ см; $y = 0$ см,

c) $\lambda_p^{m,g} = 7,41$ см; $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $x = 2$ см; $y = 4$ см

Здесь рассеиваемая волна движется из области $z > 0$ для рис. 1.7 а, б и из области $z < 0$ для рис. 1.7 с.

Неравномерность рассеяния излучения резонансной сферой в пространство для случая вырожденного резонанса (рис. 1.7 с), как это следует из выражения для вектора Пойтинга в дальней зоне рассеянного поля (1.19), определяется диаграммой направленности, которая имеет вид кардиоды

$$(1 + \cos\theta)^2,$$

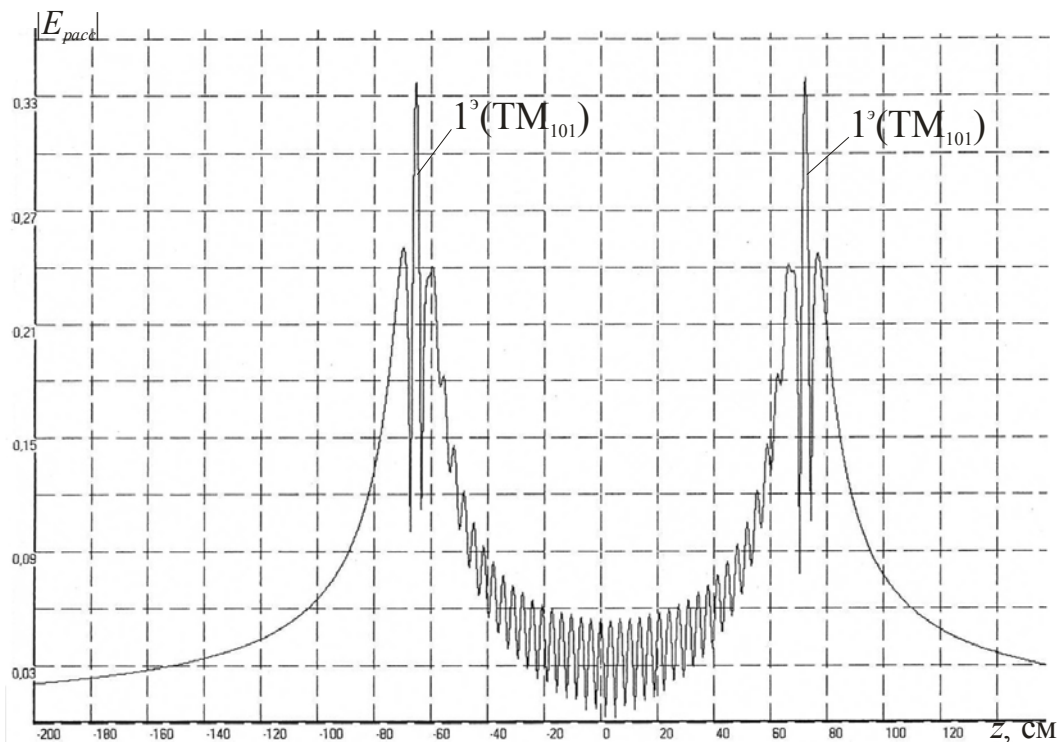
и происходит преимущественно вперед при $\Pi_0^g = \Pi_0^m$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

Для резонансов 1^g и 1^m (рис. 1.7 а, б) структура поля $|E_{pacc}|$ и $|H_{pacc}|$ меняется местами.

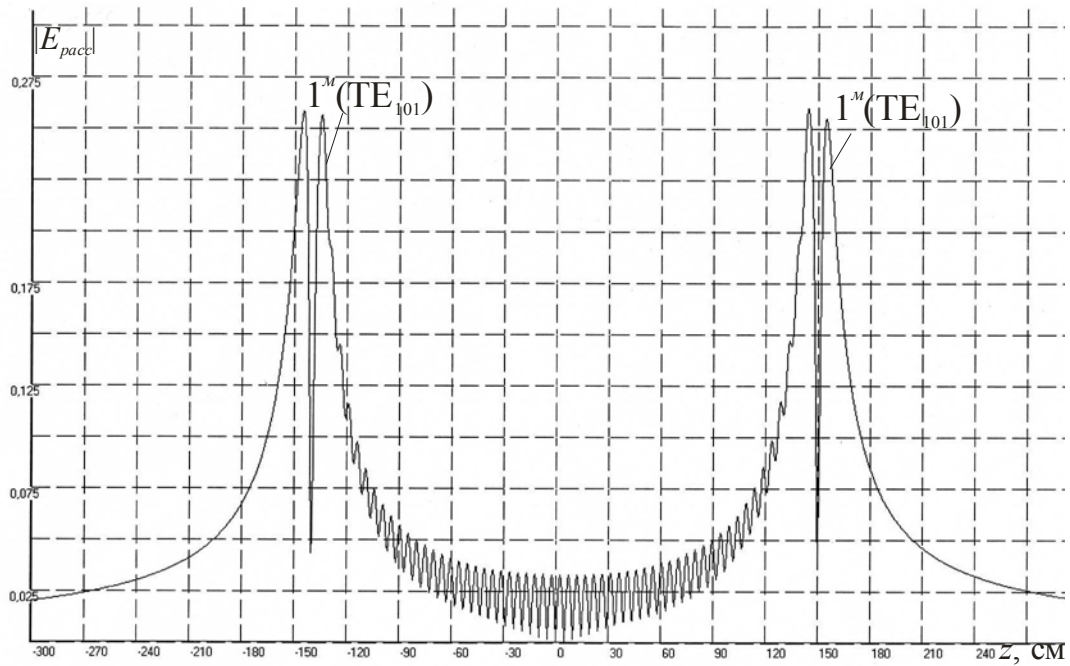
Проведен численный анализ рассеяния плоской волны на двух резонансных диэлектрических сферах (1.29), (рис.1.5), (рис. 1.8 а, б), расположенных вдоль направления распространения рассеиваемой волны. Изменение расстояния между сферами дает возможность влиять на модовую структуру рассеянного поля в зоне Френеля.

На рис. 1.9 представлена структура рассеянного поля для двух пар сфер. Каждая пара сфер состоит из сфер с резонансами рассеяния магнитного и электрического типов. Такие совмещенные пары вызывают рассеяние с преимущественным прохождением падающей волны. Изменение рассеяния между парами позволяют изменять модовую структуру рассеянного поля.

Отметим, что структуры рассеянного поля парой сфер (рис. 1.9) и сферой с вырожденным резонансом (рис. 1.7 с) похожи. Это можно объяснить тем, что механизм образования рассеянного поля в первом и втором случаях подобен, так как он обусловлен суперпозицией полей связанных с резонансами рассеяния магнитного (m) и электрического (ε) типов двух сфер и совмещенного (вырожденного) резонанса (m, ε) одной сферы.



а)



б)

Рис. 1.8. Зависимости поля $|E_{racc}|$ для двух одинаковых сфер (1.29), (рис. 1.5) от изменения координаты z ($x_0 = y_0 = 0$ см), когда:

a) $\lambda_p^o = 6,875$ см; $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_{1,2} = 95$; $\mu'_{1,2} = 1$; $h = 137$ см; $x = 0$ см; $y = 4$ см,

b) $\lambda_p^M = 9,66$ см; $a = 0,5$ см; $\epsilon'_{1,2} = 95$; $\mu'_{1,2} = 1$; $h = 290$ см; $x = 4,5$ см; $y = 0$ см

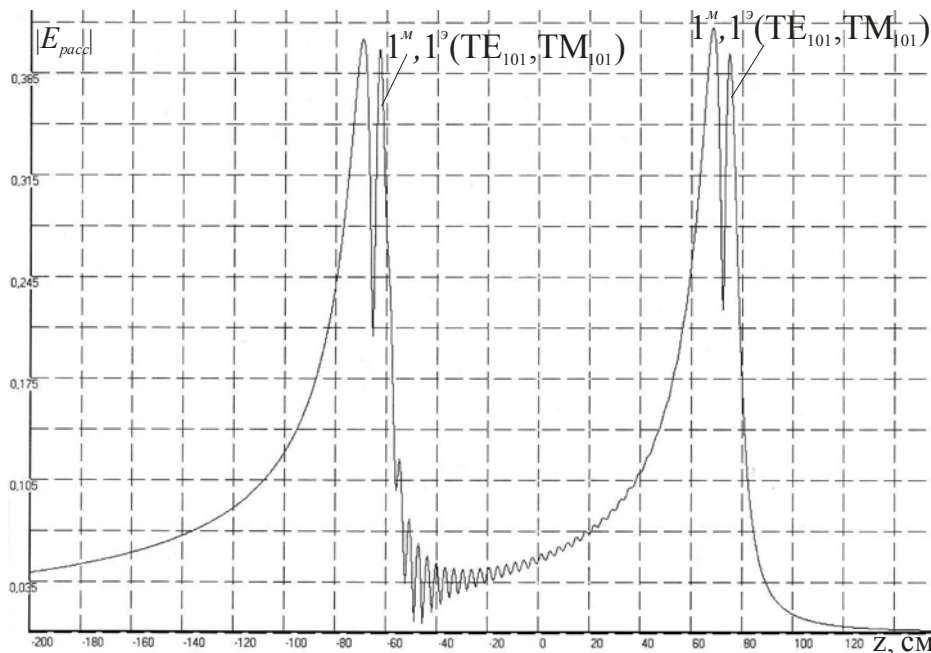
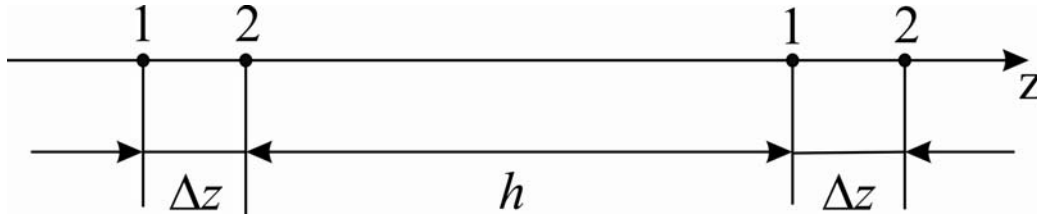


Рис. 1.9. Зависимость поля $|E_{racc}|$ для двух совмещенных и смещенных по оси z ($\Delta z = 3,44$ см) пар сфер (1.29), (рис. 1.5) от изменения координаты точки

наблюдения поля z ($x_0 = y_0 = 0$ см), когда $\lambda_p^m = \lambda_p^s = 6,875$ см; $a_{1,2} = 0,5$ см; $\varepsilon'_1 = 95$; $\varepsilon'_2 = 48,9$; $\mu'_{1,2} = 1$; $h = 137$ см; $x = y = 0$ см; $z = 1,72$ см; схема расположения пар сфер по оси z –



На рис. 1.9 рассеиваемая волна движется из области $z > 0$.

1.4. Метод зеркальных изображений и рассеяние электромагнитных волн на малой резонансной магнитоэлектрической сфере с плоским металлическим экраном

В разделе способ применения метода зеркальных изображений иллюстрируется на примере решения задачи о рассеянии электромагнитных волн на малой однородной изотропной резонансной магнитоэлектрической сфере, расположенной возле плоского бесконечного идеального металлического экрана.

Изложим постановку и решение задачи [30]. Полагаем, что радиус сферы a , а ее проницаемости ε, μ .

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^e$ и магнитный $\vec{\Pi}^m$ потенциалы Герца (1.10).

Воспользуемся методом зеркальных изображений и представим рассеивающую сферу вместе с металлическим экраном в виде системы, которая состоит из сферы и ее зеркального изображения.

Тогда для системы из сферы и ее зеркального изображения, построим уравнения квазистационарного приближения для определения внутренних полей в виде системы неоднородных для сферы и однородных для ее зеркального изображения уравнений. Эта система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{01}(\vec{r}', t) &= \frac{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}} \vec{E}_1^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{21}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_2^0(\vec{r}', t) - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{21}^M(\vec{r}) \vec{H}_2^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \\
 \vec{H}_{01}(\vec{r}', t) &= \frac{(\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_1}} \vec{H}_1^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{21}^M(\vec{r}) \vec{H}_2^0(\vec{r}', t) + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{21}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_2^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \\
 & \\
 0 &= \frac{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}} \vec{E}_2^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{12}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_1^0(\vec{r}', t) - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{12}^M(\vec{r}) \vec{H}_1^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \\
 0 &= \frac{(\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_1}} \vec{H}_2^0(\vec{r}', t) - \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{12}^M(\vec{r}) \vec{H}_1^0(\vec{r}', t) + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{12}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_1^0(\vec{r}', t) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}', t), \vec{H}_0(\vec{r}', t)$ – поля падающей волны в центре сферы, а $\vec{E}_1(\vec{r}', t), \vec{H}_1(\vec{r}', t)$ и $\vec{E}_2(\vec{r}', t), \vec{H}_2(\vec{r}', t)$ – внутренние поля сферы и ее зеркального изображения, $\theta_1 = ka\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Величины $W_{21}^{\varepsilon}(\vec{r}), W_{21}^M(\vec{r})$ и $W_{12}^{\varepsilon}(\vec{r}), W_{12}^M(\vec{r})$ имеют вид соотношений (1.12), если в величинах r_{21}, r_{12} под координатами (x_{10}, y_{10}, z_{10}) и (x_{20}, y_{20}, z_{20}) понимать координаты центров сферы и ее зеркального изображения.

Первые слагаемые справа в уравнениях (1.30) связаны с внутренним полем сферы или ее зеркального изображения, а вторые слагаемые определяют влияние на сферу или зеркальное изображение противоположного зеркального изображения или сферы.

Рассматриваемая система уравнений (1.30) для определения внутреннего поля сферы и ее зеркального изображения состоит из двух неоднородных векторных и двух однородных векторных уравнений или же для $x-, y-, z-$ составляющих – из двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными.

Для внутреннего поля конкретной сферы или зеркального изображения с решения системы уравнений (1.30) имеют вид аналогичный выражениям (1.13), где индекс c принимает значения $c = 1$ для сферы и $c = 2$ для изображения.

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^p$ и $\vec{\Pi}^m$ рассеянного системой из сферы и ее зеркального изображения поля по их известному внутреннему полю представим в виде суперпозиции потенциалов Герца сферы и ее зеркального изображения, которые имеют вид аналогичный соотношениям (1.16) при условии, что в величине $r_c = \sqrt{(x - x_{c0})^2 + (y - y_{c0})^2 + (z - z_{c0})^2}$ координаты (x, y, z) определяют точку наблюдения рассеянного сферой поля, а координаты (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) – точку нахождения центра сферы или зеркального изображения. Точка наблюдения находится в полупространстве перед металлическим экраном и вне сферы.

Рассеянное на сфере с экраном поле имеет вид (1.17) при условии, что индекс c принимает значение $c = 1$ для сферы и $c = 2$ для изображения.

Рассмотрим случай рассеяния плоской электромагнитной волны, когда сфера расположена на оси z на расстоянии l от плоского металлического экрана, перпендикулярного оси z (рис. 1.10).

Координаты сферы – $(x_{10} = 0, y_{10} = 0, z_{10} \neq 0)$, а зеркального изображения сферы – $(x_{20} = 0, y_{20} = 0, z_{20} = z_{10} + h)$, где $h=2l$. На рис. 1.10 сфера обозначена цифрой 1, а её зеркальное изображение цифрой 2. Радиус-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 определяют произвольную точку наблюдения рассеянного поля (x, y, z) относительно сферы и зеркального изображения ($z < z_{10} + l$), модули радиус-векторов представим в виде

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{10})^2}, \\
 r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{20})^2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.31}$$

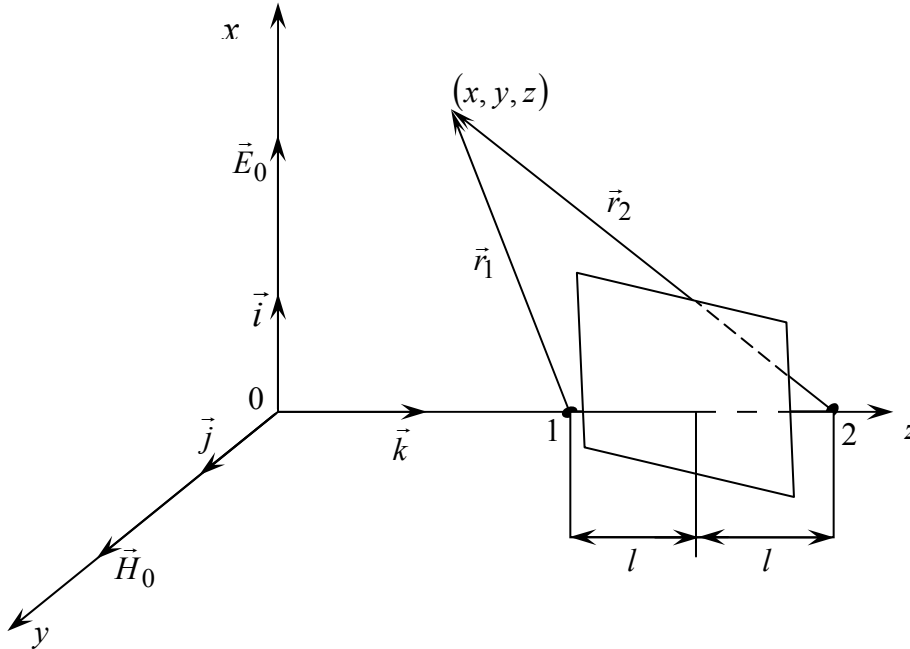


Рис. 1.10. Геометрия задачи

На сфере и металлическом экране рассеивается плоская волна (1.21).

Для данного случая внутреннее поле для сферы и зеркального изображения находят из решения системы уравнений (1.32), решение которой имеет вид аналогичный выражениям (1.22), (1.23).

Система уравнений (1.30) для рассматриваемого случая в матричной форме имеет вид (1.32).

Элементы основной матрицы системы уравнений (1.32) представим в виде

$$\begin{aligned}
 \Psi_{xx1}^{zo} &= \Psi_{yy1}^{zo} = \Psi_{zz1}^{zo} = \Psi_{xx2}^{zo} = \Psi_{yy2}^{zo} = \Psi_{zz2}^{zo} = \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}}; \\
 \Psi_{xx1}^{mo} &= \Psi_{yy1}^{mo} = \Psi_{zz1}^{mo} = \Psi_{xx2}^{mo} = \Psi_{yy2}^{mo} = \Psi_{zz2}^{mo} = \frac{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_1}}; \\
 \Psi_{xx12}^{\text{э}} &= \Psi_{yy12}^{\text{э}} = \Psi_{xx21}^{\text{э}} = \Psi_{yy21}^{\text{э}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \left(\frac{\varepsilon_{\varphi\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(k_1^2 \frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} - ik_1 \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{zz12}^{\vartheta} &= \Psi_{zz21}^{\vartheta} = -\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \left(\frac{\varepsilon_{\varphi\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{2}{h^3} + ik_1 \frac{2}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{xx12}^M &= \Psi_{yy12}^M = \Psi_{xx21}^M = \Psi_{yy21}^M = \\
 &= -\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \left(\frac{\mu_{\varphi\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(k_1^2 \frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} - ik_1 \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \quad (1.33) \\
 \Psi_{zz12}^M &= \Psi_{zz21}^M = -\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \left(\frac{\mu_{\varphi\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{2}{h^3} + ik_1 \frac{2}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{z12}^{\vartheta} &= \Psi_{z21}^{\vartheta} = -k\varepsilon_0 \frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \left(\frac{\varepsilon_{\varphi\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(k_1 \frac{1}{h} - i \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{z12}^M &= \Psi_{z21}^M = -k\mu_0 \frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \left(\frac{\mu_{\varphi\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left(k_1 \frac{1}{h} - i \frac{1}{h^2} \right) e^{-ik_1 h}; \\
 \Psi_{z12}^{\vartheta o} &= -\Psi_{z12}^{\vartheta}; \Psi_{z21}^{\vartheta o} = -\Psi_{z21}^{\vartheta}; \Psi_{z12}^{Mo} = -\Psi_{z12}^M; \Psi_{z21}^{Mo} = -\Psi_{z21}^M.
 \end{aligned}$$

Выражения для потенциалов Герца и рассеянных полей имеют вид аналогичный выражениям (1.28), (1.29), если в них положить $a_1 = a_2 = a$, $\varepsilon_{1\varphi\phi} = \varepsilon_{2\varphi\phi} = \varepsilon_{\varphi\phi}$, $\mu_{1\varphi\phi} = \mu_{2\varphi\phi} = \mu_{\varphi\phi}$.

На поверхности идеального металлического экрана тангенциальная составляющая полного электрического поля равна нулю. И это условие, учитывающее влияние зеркального изображения для точки экрана ($x = 0; y = 0; z = z_{10} + l$) (рис.1.10), если пренебречь слагаемыми с оператором *rot* в (1.32), представим, учитывая (1.23), (1.18), в виде

$$\begin{aligned}
 &E_0 e^{-ik_1(z_{10} + l)} + \frac{1}{\Delta_{\vartheta M} k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 \alpha) \times \\
 &\times \left[\left(\frac{\varepsilon_{\varphi\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left\{ \Delta_{x1}^{(\vartheta)M} \Psi_{xx1} + \Delta_{x2}^{(\vartheta)M} \Psi_{xx2} \right\} - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{\varphi\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left\{ \Delta_{y1}^{(\vartheta)M} \Psi_{z1} + \Delta_{y2}^{(\vartheta)M} \Psi_{z2} \right\} \right] = 0, \quad (1.34) \\
 &\left[\left(\frac{\varepsilon_{\varphi\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left\{ \Delta_{y1}^{(\vartheta)M} \Psi_{yy1} + \Delta_{y2}^{(\vartheta)M} \Psi_{yy2} \right\} - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{\varphi\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left\{ \Delta_{x1}^{(\vartheta)M} \Psi_{z1}^0 + \Delta_{x2}^{(\vartheta)M} \Psi_{z2}^0 \right\} \right] = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_{0x}(z') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{0y}(z') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{xx1}^{\partial 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{xx21}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \psi_{z21}^M & 0 \\ 0 & \psi_{yy1}^{\partial 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{yy21}^{\partial} & 0 & \psi_{z21}^{M0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{zz1}^{\partial 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz21}^{\partial} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{xx1}^{M0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{z21}^{\partial 0} & 0 & \psi_{xx21}^M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{yy1}^{M0} & 0 & \psi_{z21}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{yy21}^M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz1}^{M0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz21}^M \\ \psi_{xx12}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \psi_{z12}^M & 0 & \psi_{xx2}^{\partial 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{yy12}^{\partial} & \psi_{z21}^{\partial} & \psi_{z12}^{M0} & 0 & 0 & 0 & \psi_{yy2}^{\partial 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{zz12}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz2}^{\partial 0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{z12}^{\partial 0} & 0 & \psi_{xx12}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{xx2}^{M0} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{z12}^{\partial} & 0 & 0 & \psi_{yy12}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{yy2}^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz12}^M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz2}^{M0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} E_{x1}^0(\bar{r}') \\ E_{y1}^0(\bar{r}') \\ E_{z1}^0(\bar{r}') \\ H_{x1}^0(\bar{r}') \\ H_{y1}^0(\bar{r}') \\ H_{z1}^0(\bar{r}') \\ E_{x2}^0(\bar{r}') \\ E_{y2}^0(\bar{r}') \\ E_{z2}^0(\bar{r}') \\ H_{x2}^0(\bar{r}') \\ H_{y2}^0(\bar{r}') \\ H_{z2}^0(\bar{r}') \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{x1}^{(\vartheta)M} &= g_{xx1}^{\vartheta} E_{ox}(z_{10}) + \beta_{xy1}^{\vartheta} H_{oy}(z_{10}), & \Delta_{y1}^{(\vartheta)M} &= g_{yx1}^{\vartheta} E_{ox}(z_{10}) + \beta_{yy1}^{\vartheta} H_{oy}(z_{10}), \\ \Delta_{y1}^{(\mathcal{M})} &= \beta_{yy1}^{\mathcal{M}} H_{oy}(z_{10}) + g_{yx1}^{\mathcal{M}} E_{ox}(z_{10}), & \Delta_{x1}^{(\mathcal{M})} &= \beta_{xy1}^{\mathcal{M}} H_{oy}(z_{10}) + g_{xx1}^{\mathcal{M}} E_{ox}(z_{10}), \\ \Delta_{x2}^{(\vartheta)M} &= g_{xx2}^{\vartheta} E_{ox}(z_{10}) + \beta_{xy2}^{\vartheta} H_{oy}(z_{10}), & \Delta_{y2}^{(\vartheta)M} &= g_{yx2}^{\vartheta} E_{ox}(z_{10}) + \beta_{yy2}^{\vartheta} H_{oy}(z_{10}), \\ \Delta_{y2}^{(\mathcal{M})} &= \beta_{yy2}^{\mathcal{M}} H_{oy}(z_{10}) + g_{yx2}^{\mathcal{M}} E_{ox}(z_{10}), & \Delta_{x2}^{(\mathcal{M})} &= \beta_{xy2}^{\mathcal{M}} H_{oy}(z_{10}) + g_{xx2}^{\mathcal{M}} E_{ox}(z_{10}), \\ \Psi_{xx1} &= \Psi_{xx2} = \Psi_{yy1} = \Psi_{yy2} = k_1^2 \frac{1}{l} - \frac{1}{l^3} - ik_1 \frac{1}{l^2},\end{aligned}$$

$$\Psi_{z1} = \Psi_{z2} = -\Psi_{z1}^0 = -\Psi_{z2}^0 = \frac{1}{l^2} + ik_1 \frac{1}{l},$$

$$E_{0x}(z_{10}) = E_0 e^{-ik_1 z_{10}}, \quad H_{0y}(z_{10}) = H_0 e^{-ik_1 z_{10}}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0.$$

Граничное условие (1.34), связанное с зеркальным изображением, можно записать в другом виде

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{\Delta^{\vartheta\mathcal{M}} k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \\ \times \left[\left(\frac{\varepsilon_{\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left\{ \left(g_{xx1}^{\vartheta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{xy1}^{\vartheta} \right) \Psi_{xx1} + \left(g_{xx2}^{\vartheta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{xy2}^{\vartheta} \right) \Psi_{xx2} \right\} - \right. \\ \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left\{ - \left(g_{yx1}^{\mathcal{M}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{yy1}^{\mathcal{M}} \right) \Psi_{z1} - \left(g_{yx2}^{\mathcal{M}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{yy2}^{\mathcal{M}} \right) \Psi_{z2} \right\} \right] = 0, \\ \left[\left(\frac{\varepsilon_{\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left\{ \left(g_{yx1}^{\vartheta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{yy1}^{\vartheta} \right) \Psi_{yy1} + \left(g_{yx2}^{\vartheta} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{yy2}^{\vartheta} \right) \Psi_{yy2} \right\} - \right. \\ \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \left\{ - \left(g_{xx1}^{\mathcal{M}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{xy1}^{\mathcal{M}} \right) \Psi_{z1}^0 - \left(g_{xx2}^{\mathcal{M}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \beta_{xy2}^{\mathcal{M}} \right) \Psi_{z2}^0 \right\} \right] = 0.\end{aligned}$$

Изложенный способ применения метода зеркальных изображений используется в волноводных задачах, которые рассматриваются в работах [31-37].

1.5. Способ задания топологической структуры для систем сфер

В современной радиоэлектронике используются устройства, частью которых являются системы рассеивающих тел. С помощью таких систем можно формировать рассеянное электромагнитное поле нужной конфигурации в заданном направлении, используя их дифракционные свойства. Эти свойства определяются пространственной структурой системы и свойствами рассеивающих элементов. Здесь рассеивающие элементы решеток предполагаются изотропными. Задавая топологическую структуру системы, можно получать системы сфер с различными рассеивающими характеристиками. С каждым конкретным типом пространственной структуры системы магнитодиэлектрических сфер будет связана своя разновидность дифракционных свойств системы.

Одним из способов задания топологической структуры системы сфер может быть подчинение ее различным структурам целых чисел [24, 38, 64]:

- натуральный ряд чисел – [20, 21];
- геометрическая прогрессия – [19, 61];
- арифметическая прогрессия – [62, 79];
- числа Ферма (Тартальи) – [80];
- пирамидальные (тетраэдрические) числа – [81];
- полигональные числа – [82];
- треугольник чисел Паскаля – [83];
- биномиальные коэффициенты – [63];
- числа Фибоначчи – [65, 66].

Топологическую структуру периодических систем сфер, для изучаемых случаев, можно рассматривать как задаваемую натуральным рядом чисел. У систем сфер конечных размеров полезно различать внутреннюю и внешнюю топологическую структуру. У них внутренняя топологическая структура задается натуральным рядом чисел, а внешняя – другими структурами целых

чисел. Отметим, что тип топологической структуры систем сфер, задаваемый структурами целых чисел, будет определять особенности электромагнитного взаимодействия между сферами системы и влиять на характер структурных резонансов электромагнитного взаимодействия сфер.

В данной работе с каждой рассматриваемой пространственной структурой сфер связано свое координатное представление, порождающее пространственное распределение узлов соответствующей простой или сложной решетки, в которое встроены определенные структуры целых чисел, задающие конкретную топологическую структуру системы сфер. Для всех изучаемых случаев конкретные координатные представления будут строиться на основе исходного единого базового координатного представления, в которое встроена структура чисел, соответствующая натуральному ряду чисел и которое описывает периодические системы сфер.

1.6. Построение структурных функций электромагнитного взаимодействия для резонансных систем малых резонансных магнитоэлектрических сфер в свободном пространстве

Раздел посвящен разработке способа построения структурных функций электромагнитного взаимодействия для описания структурного электромагнитного взаимодействия в дискретных ограниченных резонансных системах малых резонансных магнитоэлектрических сфер, находящихся в свободном пространстве [39-41].

Значительный интерес вызывают исследования резонансных свойств электромагнитного взаимодействия в системах многих тел. В данном разделе изучение этого взаимодействия ограничим случаем пространственных систем малых однородных резонансных магнитоэлектрических сфер. В таких пространственных структурах сфер электромагнитное взаимодействие между сферами и сами сферы могут обладать резонансными свойствами. В них структурные резонансы электромагнитного взаимодействия между сферами могут

оказывать влияние на внутренние резонансы сфер и их тонкую структуру, что дает возможность разработать теоретические и экспериментальные способы изучения электромагнитного взаимодействия в этих системах. Особенности электромагнитного взаимодействия в системах сфер удобно описать, введя представление о структурных функциях электромагнитного взаимодействия системы сфер. Эти функции для случая кристаллических решеток связаны с так называемыми решеточными суммами Эвальда, играющими важную роль в динамической теории кристаллических решеток.

Структурные функции могут быть полезны при теоретическом и экспериментальном изучении резонансного электромагнитного взаимодействия в системах сфер, анализе влияния внешней геометрической формы на резонансное взаимодействие сфер, для изучения физического эффекта влияния решеточных структурных резонансов на внутренние резонансы сфер решетки и их тонкую структуру, при разработке способов экспериментальной оценки значений сумм Эвальда.

В этом разделе излагается способ построения структурных функций электромагнитного взаимодействия системы малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер и анализ их свойств для некоторых пространственных структур сфер.

Изложим постановку и решение задачи, опираясь на работы [39-42]. Рассмотрим сложную пространственную систему сфер, состоящую из C подрешеток c ($c \in C$) (3.1). Воспользуемся выражениями для внутреннего поля сфер пространственных систем, которые найдем, решая алгебраическую систему уравнений (1.6). Если электромагнитным взаимодействием между сферами системы пренебречь то, как это следует из рис. 1.2 *a*, реальная часть найденного выражения для внутреннего электрического поля произвольной сферы системы при электрическом резонансе может принимать нулевое значение

$$\operatorname{Re} \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) = 0, \quad (1.35)$$

что справедливо и для внутреннего магнитного поля сферы (рис. 1.2 б). Условие (1.35) выполняется и для случая, когда между сферами системы имеется электромагнитное взаимодействие. Для случая, когда проницаемости сфер ε_c, μ_c действительны, из условия (1.35) следует, что справедливо выражение

$$\det \operatorname{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\text{эм}} \right\| = 0 \quad (1.36)$$

где $\left\| \alpha_{ij}^{\text{эм}} \right\|$ – основная матрица конкретной системы уравнений (1.6). Разрешая уравнение (1.36) относительно функции $F(\theta_c)$ (1.9), находят резонансные условия для компонент внутренних полей сфер системы, которые являются корнями уравнения (1.36).

Матрица $\operatorname{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\text{эм}} \right\|$ (1.36) содержит сведения об электромагнитном взаимодействии между сферами пространственной системы.

Для случая, когда все сферы структуры одинаковы, порядок уравнения (1.36) определяется порядком матрицы $\operatorname{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\text{эм}} \right\|$, который равен $6N$, где

$N = \sum_{c=1}^c N_c$ – общее число сфер пространственной структуры, N_c – число сфер

подрешетки c .

Когда все сферы каждой подрешетки пространственной структуры одинаковы и сферы одной из подрешеток c находятся в резонансном состоянии, а сферы остальных подрешеток в нерезонансном состоянии, порядок уравнения (1.36) будет равен $6N_c$.

Если проницаемости ε_c, μ_c одинаковых сфер резонирующей подрешетки c действительны, то резонансные условия для N_c сфер подрешетки c находят из уравнения (1.36), разрешив его относительно функции $F\left(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}\right)$ (1.9), полагая, что сферы остальных подрешеток не резонируют. Резонансные условия для сфер, входящих в пространственные структуры одинаковых сфер, получают аналогично.

Порядок уравнения (1.36) можно понизить, если в матрице $\text{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\text{эм}} \right\|$ (1.36)

элементы, связанные с оператором rot (1.6), положить равными нулю в силу их малости при резонансе. Тогда уравнение (1.36) распадается на два независимых уравнения

$$\det \text{Re} \left\| \alpha_{ij}^m \right\| = 0, \quad \det \text{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\text{э}} \right\| = 0, \quad (1.37)$$

где матрицы $\left\| \alpha_{ij}^m \right\|$ и $\left\| \alpha_{ij}^{\text{э}} \right\|$ связаны соответственно с магнитным и электрическим внутренними полями сфер, из которых можно найти искомые резонансные условия. При огрублении уравнения (1.36) могут теряться некоторые сведения о тонкой резонансной структуре внутреннего поля сфер. Можно понизить порядок уравнений (1.36), (1.37), выбрав соответствующую пространственную конфигурацию структуры сфер и ориентацию рассеиваемого поля относительно этой структуры.

Если электромагнитным взаимодействием между сферами структуры пренебречь, то условия для резонансов внутреннего электрического – э и внутреннего магнитного – м полей произвольной сферы структуры из (1.36) имеют вид

$$F_0^{\text{э}} \left(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} \right) = - \frac{2\varepsilon_0 (\cos \theta_{1c} + \theta_{1c} \sin \theta_{1c})}{\varepsilon_c \left[(1 + \theta_{1c}^2) \cos \theta_{1c} + \theta_{1c} \sin \theta_{1c} \right]}, \quad (1.38)$$

$$F_0^m \left(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} \right) = - \frac{2\mu_0 (\cos \theta_{1c} + \theta_{1c} \sin \theta_{1c})}{\mu_c \left[(1 + \theta_{1c}^2) \cos \theta_{1c} + \theta_{1c} \sin \theta_{1c} \right]}.$$

Построим структурные функции электромагнитного взаимодействия для пространственных систем, у которых сферы каждой подрешетки одинаковы, но сферы одной из подрешеток c находятся в резонансном состоянии, а сферы остальных подрешеток в нерезонансном состоянии, проницаемости резонансных сфер ε_c, μ_c – действительны.

Для построения структурных функций используем резонансные условия для внутренних полей сфер структуры. Резонансные условия для внутренних

магнитного – $\varepsilon(M)$ и электрического – $(\varepsilon)M$ полей сфер резонансной подрешетки с представим, найдя корни уравнения (1.36), в виде $(i, k = x, y, z)$

$$F_{cik}^{\varepsilon(M)}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = f_{cik}^{\varepsilon(M)}(\vec{r}_{cc'}), \quad (1.39)$$

$$F_{cik}^{(\varepsilon)M}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = f_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}),$$

здесь $F_{cik}^{\varepsilon(M)}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c})$ и $F_{cik}^{(\varepsilon)M}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c})$ – функция (1.9), (рис. 1.1), принимающая значения при резонансе компонент внутреннего магнитного и электрического полей сфер, а $f_{cik}^{\varepsilon(M)}(\vec{r}_{cc'})$, $f_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'})$ – функции, зависящие от топологической структуры системы сфер, радиусов и проницаемостей материала сфер, длины рассеиваемой волны.

Для свободной сферы резонансные условия для внутренних полей (1.14) представим в виде $(\theta_{1c} \ll 1)$ (1.38)

$$F_0^M(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = -\frac{2\mu_0}{\mu_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)}, \quad (1.40)$$

$$F_0^\varepsilon(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)}.$$

Вычтем из левой и правой частей выражений (1.39) соответственно левую и правую части выражений (1.40), тогда для внутренних резонансов сфер магнитного типа получим

$$F_{cik}^{\varepsilon(M)}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) - F_0^M(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = \frac{2\mu_0}{\mu_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)} + f_{cik}^{\varepsilon(M)}(\vec{r}_{cc'}), \quad (1.41)$$

а для внутренних резонансов сфер электрического типа найдем

$$F_{cik}^{(\varepsilon)M}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) - F_0^\varepsilon(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)} + f_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}). \quad (1.42)$$

Проведенная операция вычитания позволяет выделить составляющие, которые вызывают смещение резонансных условий (1.39) по отношению к условиям (1.40).

Функции

$$\begin{aligned}\Phi_{cik}^{(M)}(\vec{r}_{cc'}) &= \frac{2\mu_0}{\mu_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)} + f_{cik}^{(M)}(\vec{r}_{cc'}), \\ \Phi_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}) &= \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)} + f_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'})\end{aligned}\quad (1.43)$$

назовем компонентами структурных функций электромагнитного взаимодействия магнитного и электрического типов (1.41), (1.42).

Введем структурные функции электромагнитного взаимодействия магнитного и электрического типов для выделенной сферы системы сфер в виде тензорных функций вида

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_c^{(M)}(\vec{r}_{cc'}) &= \frac{2\mu_0}{\mu_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)} \hat{I} + \hat{f}_c^{(M)}(\vec{r}_{cc'}) = \begin{pmatrix} \Phi_{cxx}^{(M)}(\vec{r}_{cc'}) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{cyy}^{(M)}(\vec{r}_{cc'}) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{czz}^{(M)}(\vec{r}_{cc'}) \end{pmatrix}, \\ \hat{\Phi}_c^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}) &= \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{(1 + 2\theta_{1c}^2)} \hat{I} + \hat{f}_c^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}) = \begin{pmatrix} \Phi_{cxx}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{cyy}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{czz}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.44)$$

Структурные функции (1.44) справедливы и для пространственных систем одинаковых сфер, если все подрешетки системы сфер резонансные.

Построенные структурные функции (1.44) зависят от проницаемостей всех сфер структуры, но можно ввести приближенные по отношению к (1.44) структурные функции, которые не зависят от проницаемостей резонансных сфер структуры. Такие функции получим, если в уравнении (1.36) пренебрежем слагаемыми, связанными с оператором *rot* (1.6), вклад которых при резонансе

мал, и воспользуемся уравнениями (1.37). Для этого случая условия (1.41), (1.42) представим в виде

$$F_{cik}^M(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}) - F_0^M(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}) = \frac{\mu_0}{\mu_c} \left[\frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{cik}^M(\vec{r}_{cc'}) \right], \quad (1.45)$$

$$F_{cik}^\varepsilon(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}) - F_0^\varepsilon(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \left[\frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{cik}^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) \right],$$

а функции (1.43) приобретают вид

$$\Phi_{cik}^M(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{cik}^M(\vec{r}_{cc'}), \quad (1.46)$$

$$\Phi_{cik}^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{cik}^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}).$$

В (1.45), (1.46) изменены обозначения верхнего индекса (1.41), (1.42) в соответствии с обозначениями уравнений (1.37).

В результате функции (1.44) преобразуются к виду

$$\hat{\Phi}_c^M(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} \hat{I} + \hat{f}_c^M(\vec{r}_{cc'}) = \begin{pmatrix} \Phi_{cxx}^M(\vec{r}_{cc'}) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{cyy}^M(\vec{r}_{cc'}) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{czz}^M(\vec{r}_{cc'}) \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

$$\hat{\Phi}_c^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} \hat{I} + \hat{f}_c^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) = \begin{pmatrix} \Phi_{cxx}^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{cyy}^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{czz}^\varepsilon(\vec{r}_{cc'}) \end{pmatrix}.$$

Для структур одинаковых резонансных сфер функции (1.47) не зависят от проницаемостей материала сфер, что важно, например, при изучении резонансных свойств кристаллических решеток.

Для случая бесконечных кристаллических решеток в функции (1.44), (1.47) входят тройные решеточные суммы Эвальда с бесконечными пределами

суммирования. Численный анализ показывает, что эти суммы условно сходящиеся.

Резонансные условия для внутренних полей выделенной сферы связаны с компонентами структурных функций (1.43) в виде (1.41), (1.42)

$$F_{cik}^{\varepsilon(M)}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = -\frac{2\mu_0}{\mu_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{1 + 2\theta_{1c}^2} + \Phi_{cik}^{\varepsilon(M)}(\vec{r}_{cc'}),$$

$$F_{cik}^{(\varepsilon)M}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \frac{(1 + \theta_{1c}^2)}{1 + 2\theta_{1c}^2} + \Phi_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'}).$$
(1.48)

1.7. Обоснование возможности экспериментальной оценки значений структурных функций электромагнитного взаимодействия резонансных систем малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Обсудим возможность экспериментальной оценки значений структурных функций для дискретных ограниченных систем сфер в свободном пространстве. В выражения для структурных функций (1.44), (1.47) могут входить тройные знакопеременные суммы с бесконечными пределами суммирования, вычисление или оценка значений которых представляет определенную сложность. Остро эта проблема стоит для динамической теории кристаллических решеток при вычислении или оценке значений решеточных сумм Эвальда. В работе [13] эти тройные суммы заменяются интегралами, но при такой замене возникает ошибка, величина которой неизвестна. Сопоставляя результаты, полученные в работах [21, 26, 39-42], можно прийти к выводу, что если экспериментально найти резонансные значения функций (1.39)

$$F_{cik}^{\varepsilon(M)}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}), F_{cik}^{(\varepsilon)M}(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}),$$

используя тонкую структуру внутреннего поля сфер, то можно из (1.48) определить значения компонент $\Phi_{cik}^{\varepsilon(M)}(\vec{r}_{cc'})$, $\Phi_{cik}^{(\varepsilon)M}(\vec{r}_{cc'})$, в которые входят суммы Эвальда, и произвести экспериментальную оценку значений этих сумм.

ГЛАВА 2

РЕЗОНАНСНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Системы одномерных и двумерных пространственных структур рассеивающих элементов имеют широкое практическое применение [43-54]. В этой связи исследование различных резонансных систем одномерных и двумерных решеток резонансных магнитодиэлектрических рассеивающих элементов, которые недостаточно изучены, представляется особо необходимым.

Данная глава посвящена изучению взаимодействия электромагнитных волн с резонансными дискретными ограниченными системами одномерных и двумерных ограниченных решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.

В разделах 2.1-2.6 изучаются одномерные и двумерные решетки с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел.

В разделах 2.7 и 2.8 представлено исследование системы, состоящей из двух плоских решеток и системы из линейной и плоской решеток с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел.

2.1. Рассеяние электромагнитных волн резонансными системами сложных двумерных решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел

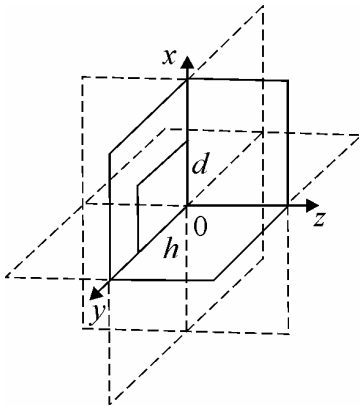
В разделе рассматривается решение задачи о рассеянии электромагнитных волн резонансными дискретными ограниченными системами сложных двумерных решеток, построенных из малых резонансных однородных изотропных магнитодиэлектрических сфер, находящихся в свободном пространстве.

Изложим постановку и решение задачи [21, 22, 55-60].

Сформулируем описание структуры системы плоских решеток. Введем в декартовой системе координат порождающее систему двумерных простых плоских решеток координатное представление вида

$$\begin{aligned} x_{p,s} &= [s - \{(-1)^s - 1\}0.5]d - (-1)^{s-1}x_{p,s=0} & (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{p,t} &= [t - \{(-1)^t - 1\}0.5]h - (-1)^{t-1}y_{p,t=0} & (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_p &= z_0 + l_p = z_0 + pl & (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где величины d, h определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h$ (рис. 2.1), а $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_0 + pl$ – координаты узлов, порождающих решетку и находящихся внутри области (2.2)



$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{p,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{p,t=0} \leq h, \\ -z &< z_0 + pl < z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рис. 2.1. Геометрия задачи

Координаты $x_{p,s}, y_{p,t}, z_p$ определяют положение узлов вне пределов области (2.2) и являются функциями значений координат $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_0 + pl$. Каждому узлу решеток (2.1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $c = (p, s, t)$, выделенный узел решеток будем обозначать $c' = (p', s', t')$. Здесь топологическая структура плоских решеток связана с натуральным рядом чисел через значения параметров (p, s, t) в координатном представлении (2.1). В (2.1) параметры (p, s, t) не зависят друг от друга. Эта пространственная решетка (2.1) – ограниченная.

Значение индекса p определяет номер простой плоской решетки (2.1), а

значения индексов s, t задают положение узла p -ой простой плоской решетки. Нужный тип элементарной ячейки сложной плоской однослойной решетки формируют из порождающих простые плоские решетки узлов внутри области (2.2), которую повторит за пределами области (2.2) координатное представление (2.1) в виде определенной решетки.

Задавая максимальные значения чисел (p, s, t) в (2.1), можно формировать конфигурацию решеток.

Когда координаты узлов решеток для области (2.2) удовлетворяют условиям $x_{p,s=0} = \frac{d}{2}$, $y_{p,t=0} = \frac{h}{2}$, $z_p = z_0 + pl$, то возникает правильная ортогональная решетка, для которой d, h, l – постоянные решетки.

На рис. 2.2 представлена система простых плоских однослойных решеток, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2.2), для случая – $p = 0, 1, 2, 3, 4$.

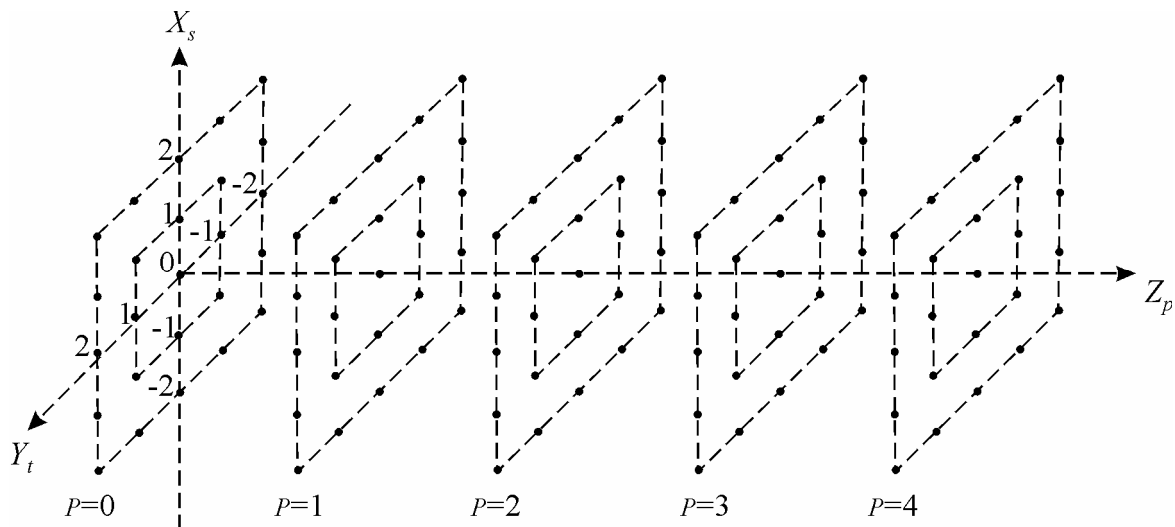


Рис.2.2. Система плоских решеток

Если изменять координаты узлов, находящихся в пределах области (2.2), то в соответствии с координатным представлением (2.1) положения узлов решеток вне области (2.2) будут также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную структуру решеток.

Расстояние между узлами решетки (2.1) c и c' представим как

$$r_{cc'} = \sqrt{(x_{p,s} - x_{p',s'})^2 + (y_{p,t} - y_{p',t'})^2 + (z_p - z_{p'})^2}. \quad (2.3)$$

Полагаем, что в узлы системы решеток (2.1) помещаются центры $N = \sum_p N_p$ малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер с проницаемостями ε_c, μ_c и радиусами a_c , где N_p – число сфер p -й плоской решетки.

Рассеянное поле (1.1) по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{\mathcal{E}}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{\mathcal{M}}$ потенциалы Герца пространственных решеток (1.10).

Внутреннее поле магнитодиэлектрических сфер находят из системы взаимосвязанных уравнений квазистационарного приближения (1.6). Для данного случая, входящие в эту систему уравнения для произвольной выделенной сферы $c' = (p', s', t')$, запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0(p',s',t')}(\vec{r}', t) &= \frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'} (\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) - \\ &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{cc'}^{\mathcal{E}}(\vec{r}) \vec{E}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & \left. (p,s,t) \neq (p',s',t') \right. \\ & \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{cc'}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) \vec{H}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{0(p',s',t')}(\vec{r}', t) &= \frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'} (\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) - \\ &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{cc'}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) \vec{H}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \\ & \left. (p,s,t) \neq (p',s',t') \right\} \end{aligned}$$

$$+ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{cc'}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \Bigg\},$$

где $\vec{E}_{0(p',s',t')}(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{0(p',s',t')}(\vec{r}', t)$ и $\vec{E}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$ – поле падающей волны в выделенной сфере и индуцированное внутреннее поле остальных сфер системы плоских решеток соответственно, $\theta_{1c'}^2 = k^2 a_c^2 \varepsilon_0 \mu_0$.

Здесь величины $W_{cc'}^{\varepsilon}(\vec{r})$, $W_{cc'}^M(\vec{r})$ имеют вид (1.7)

$$\begin{aligned} W_{cc'}^{\varepsilon}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}}, \\ W_{cc'}^M(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $r_{cc'}$ – расстояние (2.3) между центрами сфер $c = (p, s, t)$, $c' = (p', s', t')$ конкретной системы плоских решеток, а величины $\varepsilon_{c\varepsilon\phi}$, $\mu_{c\varepsilon\phi}$ представим как (1.8), (1.9).

Первые слагаемые справа в уравнениях (2.4) связаны с внутренним полем выделенной сферы, а вторые слагаемые учитывают влияние на выделенную сферу всех остальных сфер, входящих в рассматриваемую систему плоских решеток.

Из уравнений (2.4) строится алгебраическая система уравнений для конкретного типа системы плоских решеток, из которой находят искомые внутренние поля сфер решеток.

Эта алгебраическая система состоит из $2N$ взаимосвязанных векторных неоднородных уравнений (2.4) или же для x -, y -, z -составляющих в нее входят $6N$ уравнений с $6N$ неизвестными.

В основной матрице алгебраической системы уравнений (2.4) содержатся сведения об особенностях электромагнитного взаимодействия между сферами решеток рассматриваемого типа.

Решение системы уравнений (2.4) по формулам Крамера для выделенной сферы c' , изучаемой системы плоских решеток, имеет вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}^c} \sum_c (\hat{g}_c^{эс'} \vec{E}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}_c^{эс'} \vec{H}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t)), \\ \vec{H}_{(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}^c} \sum_c (\hat{\beta}_c^{мс'} \vec{H}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{g}_c^{мс'} \vec{E}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t)),\end{aligned}\quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{g}_c^{эс'} &= \begin{bmatrix} g_{xxc}^{эс'} & g_{xyc}^{эс'} & g_{xzc}^{эс'} \\ g_{yxc}^{эс'} & g_{yyc}^{эс'} & g_{yzc}^{эс'} \\ g_{zxc}^{эс'} & g_{zyc}^{эс'} & g_{zzc}^{эс'} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}_c^{эс'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxc}^{эс'} & \beta_{xyc}^{эс'} & \beta_{xzc}^{эс'} \\ \beta_{yxc}^{эс'} & \beta_{yyc}^{эс'} & \beta_{yzc}^{эс'} \\ \beta_{zxc}^{эс'} & \beta_{zyc}^{эс'} & \beta_{zzc}^{эс'} \end{bmatrix}; \\ \hat{\beta}_c^{мс'} &= \begin{bmatrix} \beta_{xxc}^{мс'} & \beta_{xyc}^{мс'} & \beta_{xzc}^{мс'} \\ \beta_{yxc}^{мс'} & \beta_{yyc}^{мс'} & \beta_{yzc}^{мс'} \\ \beta_{zxc}^{мс'} & \beta_{zyc}^{мс'} & \beta_{zzc}^{мс'} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}_c^{мс'} = \begin{bmatrix} g_{xxc}^{мс'} & g_{xyc}^{мс'} & g_{xzc}^{мс'} \\ g_{yxc}^{мс'} & g_{yyc}^{мс'} & g_{yzc}^{мс'} \\ g_{zxc}^{мс'} & g_{zyc}^{мс'} & g_{zzc}^{мс'} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

здесь $g_{xxc}^{эс'}, g_{xyc}^{эс'}, \dots; \beta_{xxc}^{эс'}, \beta_{xyc}^{эс'}, \dots$ – адъюнкты детерминанта $\Delta_{эм}^c$ основной матрицы системы уравнений (2.4), соответствующие элементам этого детерминанта. Компоненту внутреннего поля сферы (2.6) представим в виде

$$\begin{aligned}\vec{E}_{xc'}^0(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta_{эм}^c} \sum_c \left[g_{xxc}^{эс'} E_{oxc}(\vec{r}',t) + g_{xyc}^{эс'} E_{oyc}(\vec{r}',t) + g_{xzc}^{эс'} E_{ozc}(\vec{r}',t) + \right. \\ &\left. + \beta_{xxc}^{эс'} H_{oxc}(\vec{r}',t) + \beta_{xyc}^{эс'} H_{oyc}(\vec{r}',t) + \beta_{xzc}^{эс'} H_{ozc}(\vec{r}',t) \right].\end{aligned}\quad (2.7)$$

Если предположить, что у всех сфер с одинаковым индексом p внутреннее поле отличается от поля выделенной сферы ($p',s',=0,t'=0$) на фазовый множитель с модулем равным единице, то систему уравнений (2.4) можно свести к системе $(2|p_m|+1)$ уравнений, где p_m – максимальное значение индекса p . Входящие в эту систему уравнения для выделенной, например, сферы ($p',s',=0,t'=0$) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) &= \frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{(p',s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) - \\
 &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{cc'}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{(p,s=0,t=0)}^0(\vec{r}',t) - \right. \\
 & (p,s,t) \neq (p',s'=0,t'=0) \\
 & \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{cc'}^M(\vec{r}) \vec{H}_{(p,s=0,t=0)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\}, \\
 \vec{H}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) &= \frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{(p',s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) - \\
 & (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{cc'}^M(\vec{r}) \vec{H}_{(p,s=0,t=0)}^0(\vec{r}',t) + \right. \\
 & (p,s,t) \neq (p',s'=0,t'=0) \\
 & \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{cc'}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{(p,s=0,t=0)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для случая, когда все сферы решетки одинаковы и можно предположить, что и внутренние поля сфер отличаются от внутреннего поля выделенной, например, сферы $(p' = 0, s' = 0, t' = 0)$ на фазовый множитель с модулем равным единице, то система из $2N$ взаимосвязанных уравнений (2.4) распадается на N независимых пар уравнений вида

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{0(p'=0,s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) &= \frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{(p'=0,s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) - \\
 &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ (\nabla\nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{cc'}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{(p'=0,s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) - \right. \\
 & (p,s,t) \neq (p'=0,s'=0,t'=0) \\
 & \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{cc'}^M(\vec{r}) \vec{H}_{(p'=0,s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{0(p'=0,s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t) &= \frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{(p'=0,s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) - \quad (2.9) \\
 &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{cc'}^M(\vec{r}) \vec{H}_{(p'=0,s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) + \right. \\
 &_{(p,s,t) \neq (p'=0,s'=0,t'=0)} \\
 &\left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{cc'}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{(p'=0,s'=0,t'=0)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

из решения которых находят выражения для внутренних полей каждой сферы, входящей в состав пространственной системы ограниченных плоских решеток.

Систему уравнений (2.9) можно также упростить, если пренебречь связанными с оператором *rot* слагаемыми, вклад которых при резонансе мал. В результате система (2.9) распадается на $2N$ независимых уравнения. Решение этой задачи можно свести к одночастичному приближению предположив, что внутренние поля всех сфер системы решеток равны полю выделенной сферы ($p' = 0, s' = 0, t' = 0$) и решив систему уравнений (2.9).

Систему уравнений (2.4) для ортогональной решетки (2.1) для случая, когда падающая волна распространяется вдоль оси z , можно представить через пространственные гармоники [21, 22, 56]. Для этого разложим по собственным функциям постоянных d, h ортогональной решетки (2.1), (2.2) выражение [17]

$$\frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}} = \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{m\pi}{d}(x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{n\pi}{h}(y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn} |z_{p'} - z_p| \right]}, \quad (2.10)$$

где $\chi_{mn} = \begin{cases} 2, & \text{если } m = 0 \text{ или } n = 0, \\ 1, & \text{если } m, n > 0, \end{cases}$

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда величины $W_{cc'}^\varepsilon(\vec{r})$ и $W_{cc'}^M(\vec{r})$ (2.5) можно записать в виде

$$W_{cc'}^{\mathcal{O}}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{m\pi}{d} (x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{n\pi}{h} (y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn} |z_{p'} - z_p| \right]}, \quad (2.11)$$

$$W_{cc'}^M(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{m\pi}{d} (x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{n\pi}{h} (y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn} |z_{p'} - z_p| \right]}.$$

Поле падающей волны относительно произвольной рассеивающей сферы системы решеток (2.1) представим в виде бесконечной суммы пространственных гармоник

$$\vec{E}_{0(s,t,p)}(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{E}_{0(s,t,p)}^{mn}(\vec{r}', t),$$

$$\vec{H}_{0(s,t,p)}(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{H}_{0(s,t,p)}^{mn}(\vec{r}', t).$$

Индукированное внутреннее поле сферы также запишем в виде разложения

$$\vec{E}_{(s,t,p)}^0(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{E}_{(s,t,p)}^{0mn}(\vec{r}', t),$$

$$\vec{H}_{(s,t,p)}^0(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{H}_{(s,t,p)}^{0mn}(\vec{r}', t),$$

которое нельзя рассматривать как разложение Фурье.

В результате уравнения для пространственных гармоник индуцированных внутренних полей $\vec{E}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$ произвольной сферы системы плоских решеток (2.1) представим в виде

$$\vec{E}_{0(p',s',t')}^{mn}(\vec{r}', t) = \frac{(\varepsilon_{c'} \varepsilon_{\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'} \varepsilon_{\phi} + i\theta_{1c'} (\varepsilon_{c'} \varepsilon_{\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{(p',s',t')}^{0mn}(\vec{r}', t) -$$

$$-\sum_{p \neq p'} \sum_{s \neq s'} \sum_{t \neq t'} \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) - \right.$$

$$(p,s,t) \neq (p',s',t')$$

$$\begin{aligned}
 & -ik\mu_0 \left[\nabla, \left(\frac{\mu_{c\varphi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) \right] \left\} e^{-i \left[\frac{\pi m}{d}(x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{\pi n}{h}(y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn} |z_{p'} - z_p| \right]}, \quad (2.12) \\
 & \vec{H}_{0(p',s',t')}^{mn}(\vec{r}', t) = \frac{(\mu_{c'\varphi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varphi} + i\theta_{1c'} (\mu_{c'\varphi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{(p',s',t')}^{0mn}(\vec{r}', t) - \\
 & - \sum_{p,s,t} \sum_{p',s',t'} \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\mu_{c\varphi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) + \right. \\
 & \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \left(\frac{\varepsilon_{c\varphi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) \right] \right\} e^{-i \left[\frac{\pi m}{d}(x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{\pi n}{h}(y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn} |z_{p'} - z_p| \right]}.
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (2.12) по формулам Крамера для внутренних полей произвольной сферы системы плоских решеток (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta^{mn}} \sum_c \left(\hat{g}_c^{ec'mn} \vec{E}_{0(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_c^{ec'mn} \vec{H}_{0(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) \right) \right], \quad (2.13) \\
 \vec{H}_{(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta^{mn}} \sum_c \left(\hat{g}_c^{mc'mn} \vec{E}_{0(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_c^{mc'mn} \vec{H}_{0(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) \right) \right],
 \end{aligned}$$

где Δ^{mn} – детерминант системы уравнений (2.12).

Числа m, n , связанные с распространяющимися волнами, определяются условием

$$k^2 \varepsilon_0 \mu_0 > \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2, \quad (2.14)$$

а с затухающими волнами –

$$k^2 \varepsilon_0 \mu_0 < \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2. \quad (2.15)$$

Решение системы уравнений (2.12) можно упростить, если использовать приближения аналогичные случаю (2.9).

Когда взаимодействием между сферами решетки можно пренебречь, выражения для внутреннего поля выделенной сферы c' (2.6) имеют вид аналогичный выражениям (1.14).

Потенциалы Герца \vec{P}^{ρ} и \vec{P}^M рассеянного поля конкретной системой плоских решеток по известному внутреннему полю (2.6), (2.13) отдельных рассеивателей представим в виде суперпозиции потенциалов Герца (1.10) отдельных сфер решеток как

$$\vec{P}^{\rho}(\vec{r}, t) = \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_c^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{(p,s,t)}}}{r_{(p,s,t)}}, \quad (2.16)$$

$$\vec{P}^M(\vec{r}, t) = \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_c^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{(p,s,t)}}}{r_{(p,s,t)}}.$$

В выражениях (2.16) расстояние $r_{(p,s,t)}$ представим в виде

$$r_{(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{p,s})^2 + (y - y_{p,t})^2 + (z - z_p)^2}, \quad (2.17)$$

где координаты (x, y, z) определяют вне сфер точку наблюдения поля, рассеянного системой плоских решеток, а координаты $(x_{p,s}, y_{p,t}, z_p)$ – точку нахождения центра рассеивающей сферы решетки.

В соотношениях для потенциалов Герца (2.16) выражение с экспонентой можно представить в виде разложения по собственным функциям постоянных d, h ортогональной решетки (2.10)

$$\frac{e^{-ik_1 r_{(p,s,t)}}}{r_{(p,s,t)}} = \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{p,s}) + \frac{n\pi}{h}(y-y_{p,t}) + \beta_{mn}|z-z_p| \right]}. \quad (2.18)$$

Тогда для случая (2.6), учитывая (2.16), из (1.1) найдем рассеянное конкретной системой плоских решеток поле

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pacc}(\vec{r}, t) = \sum_c \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{E}_c^0(\vec{r}') - \right. \\ \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{H}_c^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{расc}}(\vec{r}, t) = \sum_c \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{H}_c^0(\vec{r}') + \right. \\ \left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{E}_c^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)}, \end{aligned}$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c – функциональные матрицы, которые имеют вид

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{xzc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{yzc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zcc} \end{bmatrix}; \quad \hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (2.20), учитывая конкретный вид решетки (2.1), запишем в виде

$$\Psi_{xxc} = \frac{1}{r_{(p,s,t)}} k_1^2 + \frac{3(x - x_{p,s})^2 - r_{(p,s,t)}^2}{r_{(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{p,s})^2}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{p,s})^2 - r_{(p,s,t)}^2}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{yyc} = \frac{1}{r_{(p,s,t)}} k_1^2 + \frac{3(y - y_{p,t})^2 - r_{(p,s,t)}^2}{r_{(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(y - y_{p,t})^2}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{p,t})^2 - r_{(p,s,t)}^2}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{zcc} = \frac{1}{r_{(p,s,t)}} k_1^2 + \frac{3(z - z_p)^2 - r_{(p,s,t)}^2}{r_{(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(z - z_p)^2}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(z - z_p)^2 - r_{(p,s,t)}^2}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} = \frac{3(x - x_{p,s})(y - y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{p,s})(y - y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{p,s})(y - y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} = \frac{3(x - x_{p,s})(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{p,s})(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{p,s})(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{zyc} = \Psi_{zyc} = \frac{3(y - y_{p,t})(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(y - y_{p,t})(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{p,t})(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xc} = \frac{(x - x_{p,s})}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(x - x_{p,s})}{r_{(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{xc}^0 = -\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc} = \frac{(y - y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(y - y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{yc}^0 = -\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc} = \frac{(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(z - z_p)}{r_{(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{zc}^0 = -\Psi_{zc}.$$

Для случая (2.14), (2.15), (2.18) рассеянное решеткой поле представим в виде

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{pacc}(\vec{r}, t) &= \sum_c \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c3}\phi}{\varepsilon_0} - 1 \right) \widehat{L}_c^{mn} \vec{E}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}') - \right. \\ &\left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c3}\phi}{\mu_0} - 1 \right) \widehat{P}_c^{mn} \vec{H}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i\left(\omega t - \left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{p,s}) + \frac{n\pi}{h}(y-y_{p,t}) + \beta_{m,n}|z-z_p| \right] \right)}, \\ \widehat{H}_{pacc}(\vec{r}, t) &= \sum_c \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \sum_{m,n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\mu_{c3}\phi}{\mu_0} - 1 \right) \widehat{L}_c^{mn} \vec{H}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}') + \right. \\ &\left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c3}\phi}{\varepsilon_0} - 1 \right) \widehat{P}_c^{mn} \vec{E}_{(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i\left(\omega t - \left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{p,s}) + \frac{n\pi}{h}(y-y_{p,t}) + \beta_{m,n}|z-z_p| \right] \right)}, \end{aligned}$$

где \widehat{L}_c^{mn} , \widehat{P}_c^{mn} – функциональные матрицы вида

$$\widehat{L}_c^{mn} = \begin{bmatrix} \left(k^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{m^2 \pi^2}{d^2} \right) & -\frac{m\pi}{d} \frac{n\pi}{h} & -\beta_{mn} \frac{m\pi}{d} \\ -\frac{m\pi}{d} \frac{n\pi}{h} & \left(k^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \right) & -\beta_{mn} \frac{n\pi}{h} \\ -\beta_{mn} \frac{m\pi}{d} & -\beta_{mn} \frac{n\pi}{h} & \left(k^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta_{mn}^2 \right) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{P}_c^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & i\beta_{mn} & -i \frac{n\pi}{h} \\ -i\beta_{mn} & 0 & i \frac{m\pi}{d} \\ i \frac{n\pi}{h} & -i \frac{m\pi}{d} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Полное поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер для определенного типа решеток, представим в виде (1.4).

Из детерминантов уравнений (2.4), (2.8), (2.9), (2.12), для рассматриваемых типов систем плоских решеток, находятся резонансные условия для случая, когда $a_c / \lambda_g \sim 1$ внутри сфер. Если ε_c, μ_c сфер решеток действительны, то резонансные условия находим из выражения

$$\det \operatorname{Re} \left\| \alpha_{ij}^{э,м} \right\| = 0, \quad (2.22)$$

разрешая его относительно функции $F(\theta_c)$ (1.9), (рис. 1.1), где $\left\| \alpha_{ij}^{э,м} \right\|$ – основная матрица конкретной системы уравнений для определения внутреннего поля сфер решетки [39].

Разрешая выражение (2.22) относительно функции $F(\theta_c)$ (1.9) для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами можно пренебречь, получим условия для электрического и магнитного резонансов s -ой сферы решетки в виде (1.15).

2.2. Рассеяние электромагнитных волн резонансной линейной решеткой малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

В данном разделе рассматривается решение задачи о рассеянии электромагнитных волн резонансной линейной решеткой одинаковых малых однородных изотропных резонансных магнитодиэлектрических сфер.

Изложим постановку и решение задачи [55]. Рассмотрим линейную решетку узлов, порождаемую в декартовой системе координат координатным представлением вида $(x_{p,s} = x_s; y_{p,t} = y_t)$ (2.1)

$$x_s = [s - \{(-1)^s - 1\}0,5]d - (-1)^{s-1} x_{s=0} \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad y_t = y_{t=0} = 0, \quad z_p = z_{p=0} = 0, \quad (2.23)$$

где величина d определяется условием $x=0, x=d$, а $x_{s=0}, y_{t=0}, z_{p=0}$ – координаты узла, порождающего решетку и находящегося внутри области (2.2), (рис. 2.1)

$$0 \leq x_{s=0} \leq d, \quad y_{s=0} = 0, \quad z_{s=0} = 0. \quad (2.24)$$

Координаты $x_s, y_t = z_p = 0$ задают положения узлов вне области (2.24). Каждому узлу решетки сопоставляется число s , выделенному узлу решетки – число s' . Задавая максимальное значение числа s , можно изменять размеры решетки.

Если координаты узла для области (2.24) удовлетворяют

условию $x_{s=0} = d/2$, $y_{t=0} = 0$, $z_{p=0} = 0$, то возникает эквидистантная линейная решетка, где d – постоянная решетки. Можно перестраивать пространственную конфигурацию решетки, изменяя положения узла, находящегося в пределах области (2.24).

В узлы решетки (2.23) помещаем центры малых однородных резонансных магнитоэлектрических сфер с проницаемостями ε , μ и радиусом сфер a . Расстояние между центрами сфер s и s' представим (рис.2.3), (2.23)

$$r = |x_s - x_{s'}|. \quad (2.25)$$

Полагаем, что на линейную решетку сфер падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении оси z (рис.2.3).

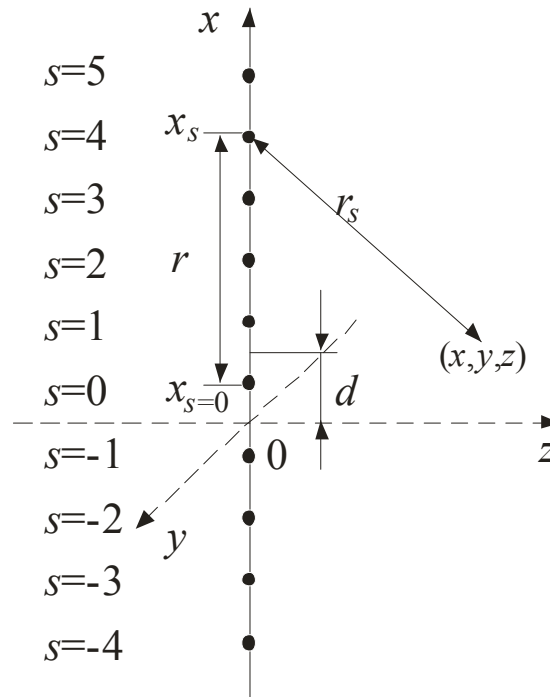


Рис. 2.3. Линейная решетка и геометрия задачи

Потенциалы Герца рассеянного поля в предположении, что поле падающей волны $\vec{E}_{ox}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}$; $\vec{H}_{oy}(z,t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}$ (2.26) внутри сфер решетки и индуцированное внутреннее поле сфер решетки $\vec{E}^0(\vec{r}',t)$; $\vec{H}^0(\vec{r}',t)$ имеют соответственно одинаковые значения для всех сфер решетки, представим в виде (2.16) [55].

Для линейной решетки одинаковых сфер, расположенных вдоль оси x (рис.2.3), внутреннее поле сфер найдем из алгебраической системы уравнений (2.9), которую для данного случая представим в матричной форме (2.27).

Элементы основной матрицы системы уравнений (2.27), входящие в строку, связанную с $E_{x(s=0)}^0(\vec{r}')$, имеют вид

$$(\Psi_{xx}^{\varepsilon 0} + \Psi_{xx}^{\varepsilon}) = A_{\varepsilon}^0 - A_{\varepsilon} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_{xx} \cos k_1 r_{ss'} + a_{xx} \sin k_1 r_{ss'}) + i(a_{xx} \cos k_1 r_{ss'} - c_{xx} \sin k_1 r_{ss'})],$$

связанные с $E_{y(s=0)}^0(\vec{r}')$, представим как

$$(\Psi_{yy}^{\varepsilon 0} + \Psi_{yy}^{\varepsilon}) = A_{\varepsilon}^0 - A_{\varepsilon} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_{yy} \cos k_1 r_{ss'} + a_{yy} \sin k_1 r_{ss'}) + i(a_{yy} \cos k_1 r_{ss'} - c_{yy} \sin k_1 r_{ss'})],$$

$$\Psi_x^M = -k\mu_0 A_{\mu} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_x \cos k_1 r_{ss'} - a_x \sin k_1 r_{ss'}) - i(a_x \cos k_1 r_{ss'} + c_x \sin k_1 r_{ss'})],$$

связанные с $E_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$, запишем в виде

$$(\Psi_{zz}^{\varepsilon 0} + \Psi_{zz}^{\varepsilon}) = A_{\varepsilon}^0 - A_{\varepsilon} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_{zz} \cos k_1 r_{ss'} + a_{zz} \sin k_1 r_{ss'}) + i(a_{zz} \cos k_1 r_{ss'} - c_{zz} \sin k_1 r_{ss'})],$$

$$\Psi_x^{M0} = k\mu_0 A_{\mu} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_x \cos k_1 r_{ss'} - a_x \sin k_1 r_{ss'}) - i(a_x \cos k_1 r_{ss'} + c_x \sin k_1 r_{ss'})].$$

Элементы основной матрицы системы уравнений (2.27), входящие в строку, связанную с $H_{x(s=0)}^0(\vec{r}')$, запишем в виде

$$(\Psi_{xx}^{M0} + \Psi_{xx}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_{xx} \cos k_1 r_{ss'} + a_{xx} \sin k_1 r_{ss'}) + i(a_{xx} \cos k_1 r_{ss'} - c_{xx} \sin k_1 r_{ss'})],$$

связанные с $H_{y(s=0)}^0(\vec{r}')$, представим как

$$\Psi_x^{\varepsilon 0} = k\varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_x \cos k_1 r_{ss'} - a_x \sin k_1 r_{ss'}) - i(a_x \cos k_1 r_{ss'} + c_x \sin k_1 r_{ss'})],$$

$$(\Psi_{yy}^{M0} + \Psi_{yy}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_{yy} \cos k_1 r_{ss'} + a_{yy} \sin k_1 r_{ss'}) + i(a_{yy} \cos k_1 r_{ss'} - c_{yy} \sin k_1 r_{ss'})],$$

$$\begin{bmatrix} E_{ox(s=0)}(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{oy(s=0)}(\vec{r}') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx}^{\mathfrak{e}0} + \Psi_{xx}^{\mathfrak{e}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{yy}^{\mathfrak{e}0} + \Psi_{yy}^{\mathfrak{e}} & 0 & 0 & 0 & \Psi_x^M \\ 0 & 0 & \Psi_{zz}^{\mathfrak{e}0} + \Psi_{zz}^{\mathfrak{e}} & 0 & \Psi_x^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{xx}^{M0} + \Psi_{xx}^M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_x^{\mathfrak{e}0} & 0 & \Psi_{yy}^{M0} + \Psi_{yy}^M & 0 \\ 0 & \Psi_x^{\mathfrak{e}} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz}^{M0} + \Psi_{zz}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x(s=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(s=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(s=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{x(s=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(s=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(s=0)}^0(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

связанные с $H_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$, запишем в виде

$$\Psi_x^{\mathfrak{z}} = -k\varepsilon_0 A_\varepsilon B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_x \cos k_1 r_{ss'} - a_x \sin k_1 r_{ss'}) - i(a_x \cos k_1 r_{ss'} + c_x \sin k_1 r_{ss'})],$$

$$(\Psi_{zz}^{M0} + \Psi_{zz}^M) = A_\mu^0 - A_\mu B \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s [(c_{zz} \cos k_1 r_{ss'} + a_{zz} \sin k_1 r_{ss'}) + i(a_{zz} \cos k_1 r_{ss'} - c_{zz} \sin k_1 r_{ss'})].$$

Здесь

$$k = 2\pi/\lambda, \quad k_1^2 = k^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad A_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} - 1}{\varepsilon_0} \right), \quad A_\mu = \left(\frac{\mu_{\mathfrak{z}\phi} - 1}{\mu_0} \right),$$

$$B = \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a),$$

$$\theta_1^2 = k^2 a^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad A_\varepsilon^0 = \frac{(\varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}},$$

$$A_\mu^0 = \frac{(\mu_{\mathfrak{z}\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\mathfrak{z}\phi} + i\theta_1 (\mu_{\mathfrak{z}\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_1}}, \quad r_{ss'} = |x_s - x_{s'=0}|, \quad a_{xx} = k_1 \frac{2}{r_{ss'}^2},$$

$$a_{yy} = a_{zz} = -k_1 \frac{1}{r_{ss'}^2}, \quad c_{xx} = \frac{2}{r_{ss'}^3}, \quad c_{yy} = c_{zz} = k_1^2 \frac{1}{r_{ss'}} - \frac{1}{r_{ss'}^3}, \quad a_x = \frac{1}{r_{ss'}^2}, \quad c_x = k_1 \frac{1}{r_{ss'}}.$$

Для сферы s' линейной решетки решение системы уравнений (2.27) имеет вид (2.6).

Для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами решетки можно пренебречь, выражения для внутреннего поля произвольной сферы решетки (2.6) приобретают вид (1.14), а потенциалы Герца рассеянного поля (2.16), (2.17) запишем в виде

$$\vec{\Pi}^{\mathfrak{z}}(\vec{r}, t) = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{(\varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\mathfrak{z}\phi} + 2\varepsilon_0)} \cdot \vec{E}_{ox}(z', t) \sum_{-s}^s \frac{e^{-ik_1 r_s}}{r_s},$$

$$\vec{\Pi}^M(\vec{r}, t) = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{(\mu_{\mathfrak{z}\phi} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\mathfrak{z}\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\mathfrak{z}\phi} + i\theta_1 (\mu_{\mathfrak{z}\phi} + 2\mu_0)} \cdot \vec{H}_{oy}(z', t) \sum_{-s}^s \frac{e^{-ik_1 r_s}}{r_s},$$

где $r_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + y^2 + z^2}$ (рис. 2.3). (2.28)

На рис. 2.4 представлены зависимости Re , Im , модуля $|\eta^M|$ и аргумента φ^M выражения

$$\eta^M = \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0)e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)},$$

входящего выше в состав для $\vec{\Pi}^M(\vec{r}, t)$, от длины падающей волны λ в области первого внутреннего резонанса сфер магнитного типа, когда $a = 0,1145$ см, $\varepsilon = 174$, $\mu = 1$, $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$.

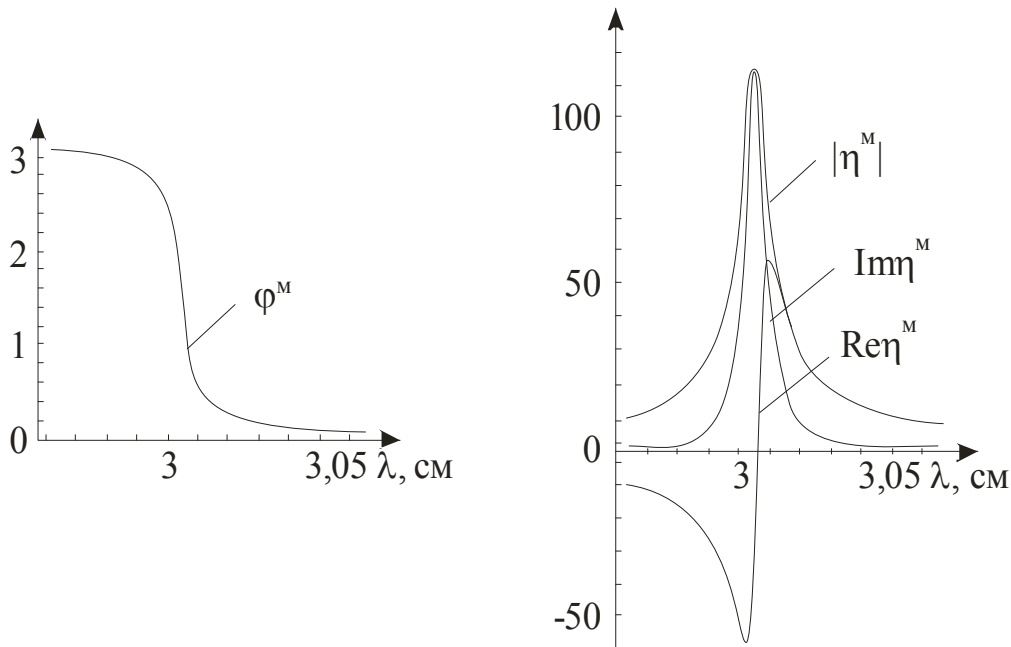


Рис. 2.4. Зависимость величины η^M от длины волны λ

Рассеянное решеткой сфер поле получим из (1.1) в виде (2.19).

В величинах, входящих в функциональные матрицы (2.20), необходимо учесть выражения (2.23), (2.28). Полное поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер решетки, представим в виде (1.4).

Для случая, когда можно пренебречь электромагнитным взаимодействием сфер, компонента рассеянного поля $H_{y \text{ расc}}(\vec{r}, t)$ (2.19) конечной решетки для ближней зоны имеет вид

$$\begin{aligned}
 H_{y\text{расс}}(\vec{r}, t) = & \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left[\frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} \times \right. \\
 & \left. \times H_0 \sum_{-s}^s (3y^2 - r_s^2) \left(\frac{1}{r_s^5} + ik_1 \frac{1}{r_s^4} \right) - ik\epsilon_0 \frac{(\epsilon_{\text{эф}} - \epsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0) + \theta_1^2 \epsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0)} E_0 \sum_{-s}^s \frac{z}{r_s^3} \right] e^{i\omega t}, \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

а для дальнейшей –

$$\begin{aligned}
 H_{y\text{расс}}(\vec{r}, t) = & \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left[k_1^2 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} \times \right. \\
 & \left. \times H_0 \sum_{-s}^s \left(\frac{1}{r_s} - \frac{y^2}{r_s^3} \right) e^{-ik_1 r_s} + k_1 k \mu_0 \frac{(\epsilon_{\text{эф}} - \epsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0) + \theta_1^2 \epsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\epsilon_{\text{эф}} + 2\epsilon_0)} E_0 \sum_{-s}^s z \frac{e^{-ik_1 r_s}}{r_s^2} \right] e^{i\omega t}. \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Анализ решения (2.6) системы уравнений (2.27) показывает, что компоненты внутреннего поля $\vec{E}^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}^0(\vec{r}', t)$ сфер решетки по осям системы координат x, y, z (рис. 2.3) имеют разные резонансные условия, что приводит к возникновению тонкой резонансной структуры внутреннего поля сфер и расщеплению резонансных кривых.

Если электромагнитным взаимодействием между сферами решетки пренебречь, то условия для резонансов внутреннего электрического и внутреннего магнитного полей произвольной сферы решетки из (2.22) имеют вид (1.15).

Порядок уравнения (2.22) можно понизить, если в нем слагаемыми, связанными с оператором rot , пренебречь в силу их малости. Тогда уравнение (2.22) распадается на шесть независимых уравнений первого порядка, из которых можно найти искомые резонансные условия для компонент внутреннего поля сфер (2.6). Но при таком упрощении в выражениях для компонент внутреннего поля сфер (2.6) теряется некоторая информация о тонкой резонансной структуре внутреннего поля сфер.

В этом приближении условия для резонансов компонент внутренних

полей $E_{x(s=0)}^0(\vec{r}')$ и $H_{y(s=0)}^0(\vec{r}')$ сфер решетки имеют вид

$$F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{\varepsilon_0 \left[2(1 + \theta_1^2) + \tau_{xx}^\varepsilon \right]}{\varepsilon(1 + 2\theta_1^2 - \tau_{xx}^\varepsilon)}, \quad F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{\mu_0 \left[2(1 + \theta_1^2) + \tau_{yy}^M \right]}{\mu(1 + 2\theta_1^2 - \tau_{yy}^M)}, \quad (2.31)$$

$$\tau_{xx}^\varepsilon = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s \left(\frac{2}{r_{ss'}^3} \cos k_1 r_{ss'} + k_1 \frac{2}{r_{ss'}^2} \sin k_1 r_{ss'} \right), \quad (2.32)$$

$$\tau_{yy}^M = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \sum_{\substack{-s \\ (s \neq s'=0)}}^s \left[\left(k_1^2 \frac{1}{r_{ss'}} - \frac{1}{r_{ss'}^3} \right) \cos k_1 r_{ss'} - k_1 \frac{1}{r_{ss'}^2} \sin k_1 r_{ss'} \right].$$

Для диэлектрической сферы ($\mu=1$) для первого низшего резонанса компоненты $E_{x(s=0)}^0(\vec{r}')$ (2.31), когда $\varepsilon=40$, и n -го резонанса компоненты $H_{y(s=0)}^0(\vec{r}')$ (2.32) резонансные условия представим как

$$4,384 = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \left(\frac{2(1 + \theta_1^2) + \tau_{xx}^\varepsilon}{1 + 2\theta_1^2 - \tau_{xx}^\varepsilon} - 2 \right) \frac{1}{0,472};$$

$$n\pi = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \left(\frac{2(1 + \theta_1^2) + \tau_{yy}^M}{1 + 2\theta_1^2 - \tau_{yy}^M} - 2 \right) \frac{\mu_0}{2\pi n},$$

где $n=1,2,3\dots$ порядок резонансов магнитного типа.

Для анализа особенностей рассеяния волн линейной решеткой необходимо использовать дисперсионные зависимости $|E_{\text{расс}}|$ от длины рассеиваемой волны λ , когда в решетке могут возбуждаться только структурные (решеточные) (*ст*) резонансы (рис. 2.5 а) и могут возбуждаться структурные и внутренние резонансы сфер (рис. 2.5 б; 1.6 а).

Рассмотрим рассеяние плоской волны (2.26) на линейной решетке, расположенной по оси z (рис. 2.1).

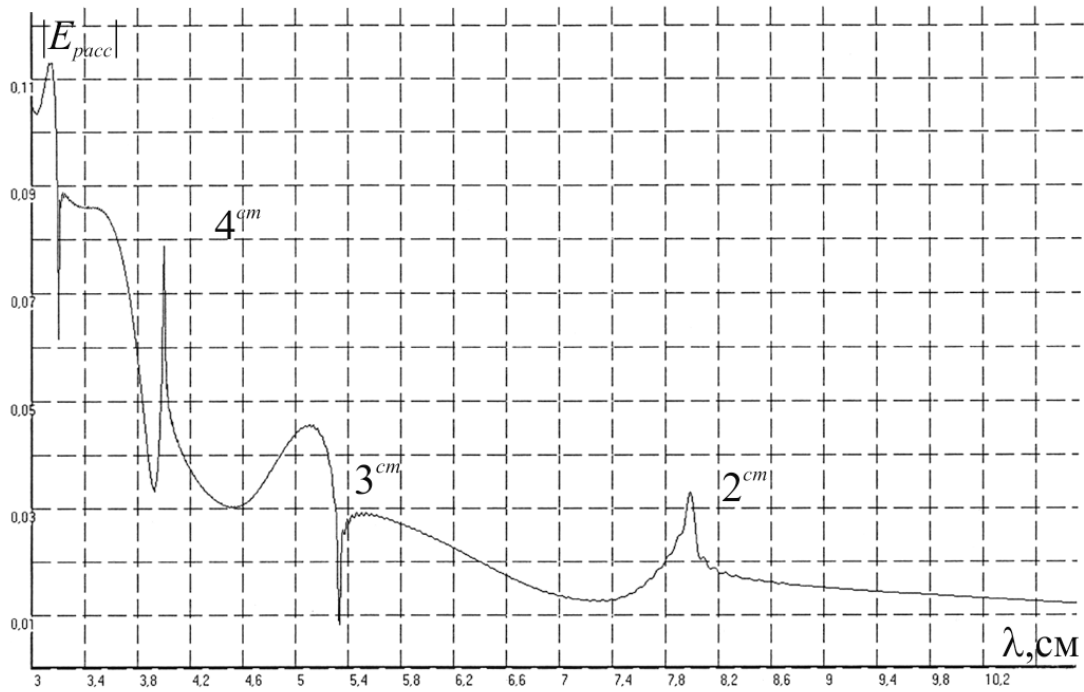


Рис. 2.5 а

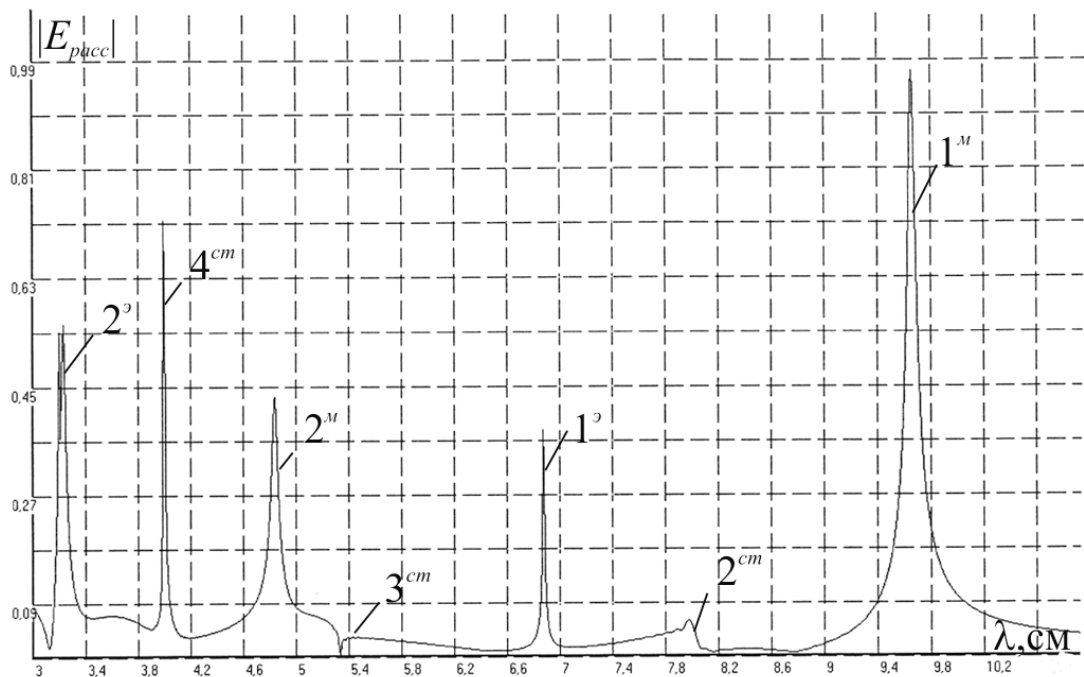
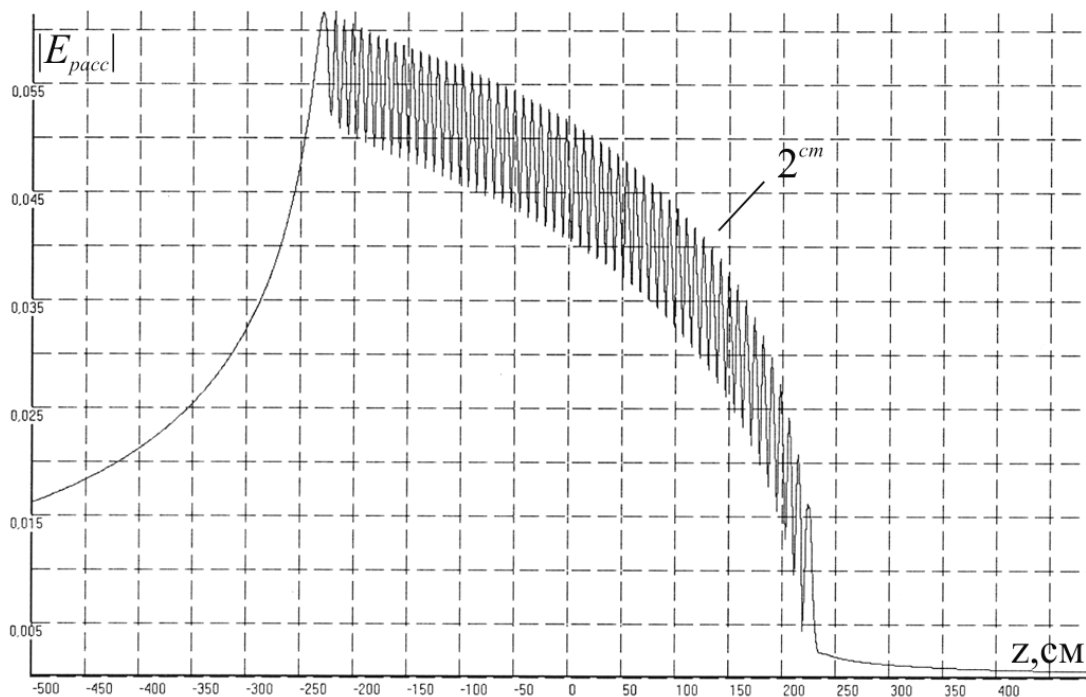


Рис. 2.5 б

Рис. 2.5 а, б. Зависимости модуля $|E_{pacc}|$ линейной решетки от изменения длины рассеиваемой волны λ , когда радиус сфер $a=0,15$ см; координаты точки наблюдения поля $x=y=z=0$ см; постоянная решетки $d=8$ см; число сфер решетки $N=100$; а) $\epsilon'=5$, $\mu'=1$; б) $\epsilon'=95$, $\mu'=1$

Численно изучались особенности рассеянного поля линейной решетки при возбуждении в ней резонансов рассеяния (cm) различных типов и влияния на них дефектов линейной решетки. На рис. 2.5 c, d для линейной решетки, расположенной по оси z (рис. 2.1), представлена зависимость рассеянного поля (2.19) от изменения координаты точки наблюдения поля z для случая структурного (решеточного) резонанса (cm), когда длина рассеиваемой волны λ равна постоянной решетки d . Здесь значение длины волны λ^{cm} структурного резонанса 2^{cm} (рис. 2.5 b) выбиралось лежащим внутри резонансной зоны малых сфер $1^m - 1^p$ и вдали от резонансных значений длин волн λ_p^m и λ_p^p внутренних резонансов сфер решетки и $1^p (TM_{101})$ (рис. 1.6 a) [26]. При таком выборе параметров линейной решетки наблюдается преимущественное отражение рассеиваемой волны. На рис. 2.5 d представлен график для решетки с дефектом.

На рис. 2.5 e изображена структура поля $|E_{pacc}|$, когда в линейной решетке в окрестности структурного резонанса (cm) возбуждена стоячая волна.

Рис. 2.5 c

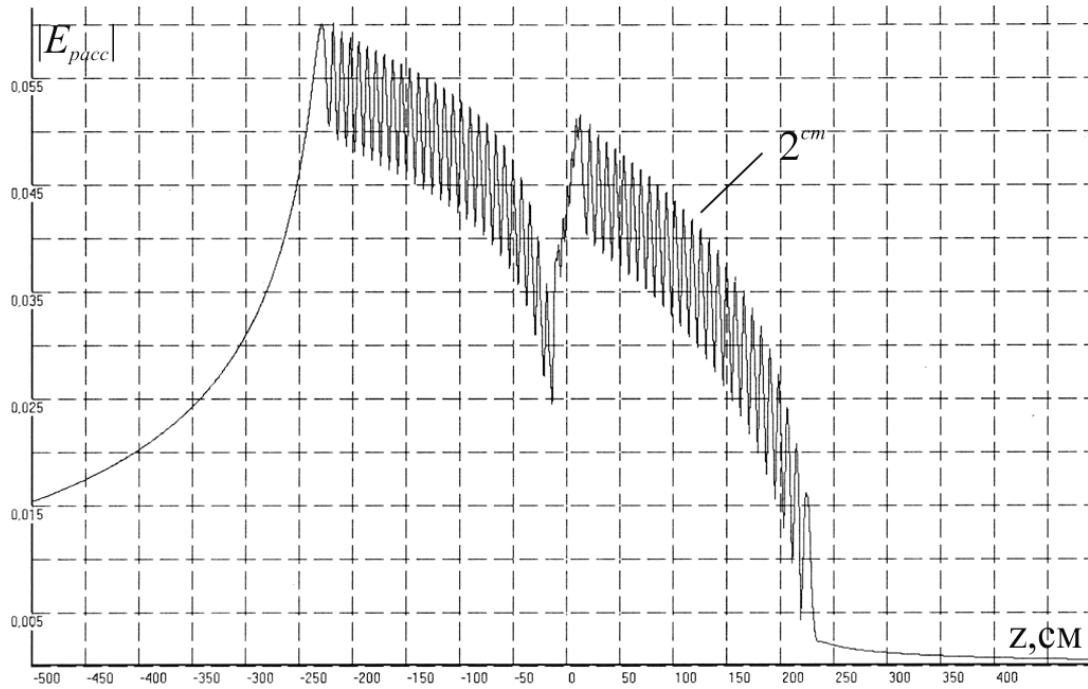


Рис. 2.5 d

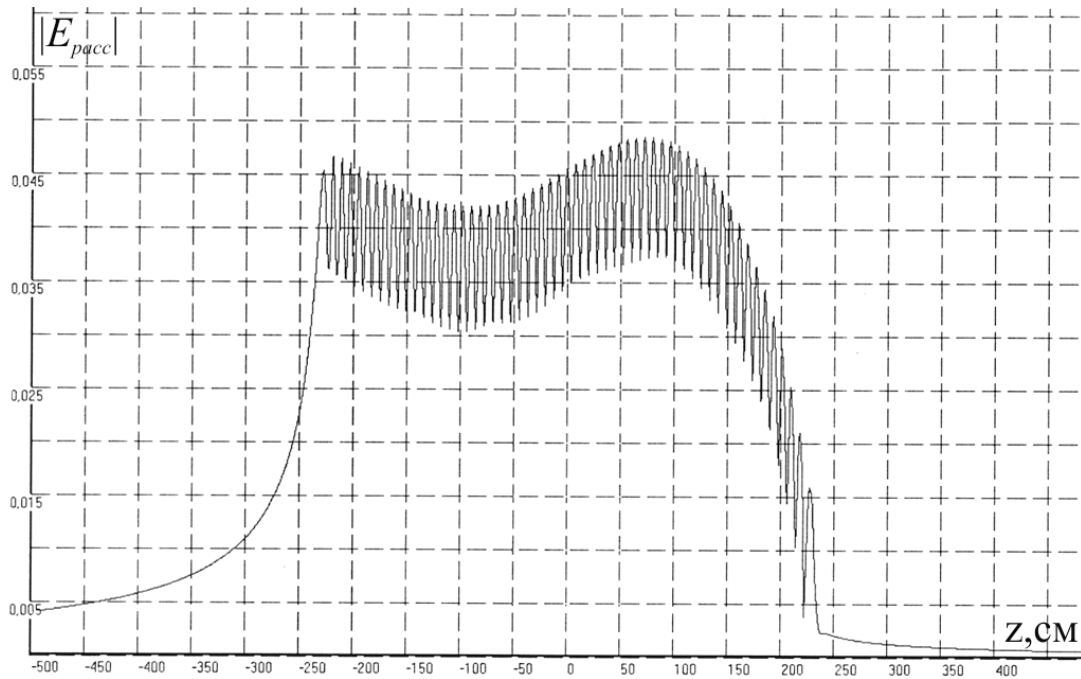


Рис. 2.5 e

Рис. 2.5 c, d, e. Зависимости модуля $|E_{расс}|$ линейной решетки от изменения координаты z ($x = y = 0$ см) точки наблюдения рассеянного поля, когда радиус сфер $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda = 8$ см – длина рассеиваемой волны:

c) $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 28$; d) $d = 8$ см – постоянная решетки,

d) $p = \pm 2, \dots, \pm 28$; $d = 8$ см,

e) $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 28$; $d = 8,1$ см

Здесь параметр p определяет число сфер по оси z .

На рис. 2.5 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

Изучались особенности рассеянного поля линейной решетки при возбуждении в ней совмещенных резонансов рассеяния различных типов и влияния на них дефектов линейной решетки. На рис. 2.6 *a, b, c, d, e, f, g* для линейной решетки, расположенной по оси z , представлены зависимости поля (2.19) и (1.4) от изменения длины рассеиваемой волны λ (рис. 2.6 *a, b*) и координат точки наблюдения поля x, y, z для случаев, когда структурный (решеточный) (cm) резонанс линейной решетки 2^{cm} (рис. 2.6 *a*) совмещался с внутренним электрическим (ε) – 1^ε (рис. 2.6 *b, c*), (рис. 2.6 *d, e* – с дефектом) и вырожденным (m, ε) – $1^{m,\varepsilon}$ (рис. 2.6 *f*), (рис. 2.6 *g* – с дефектом) резонансами сфер решетки.

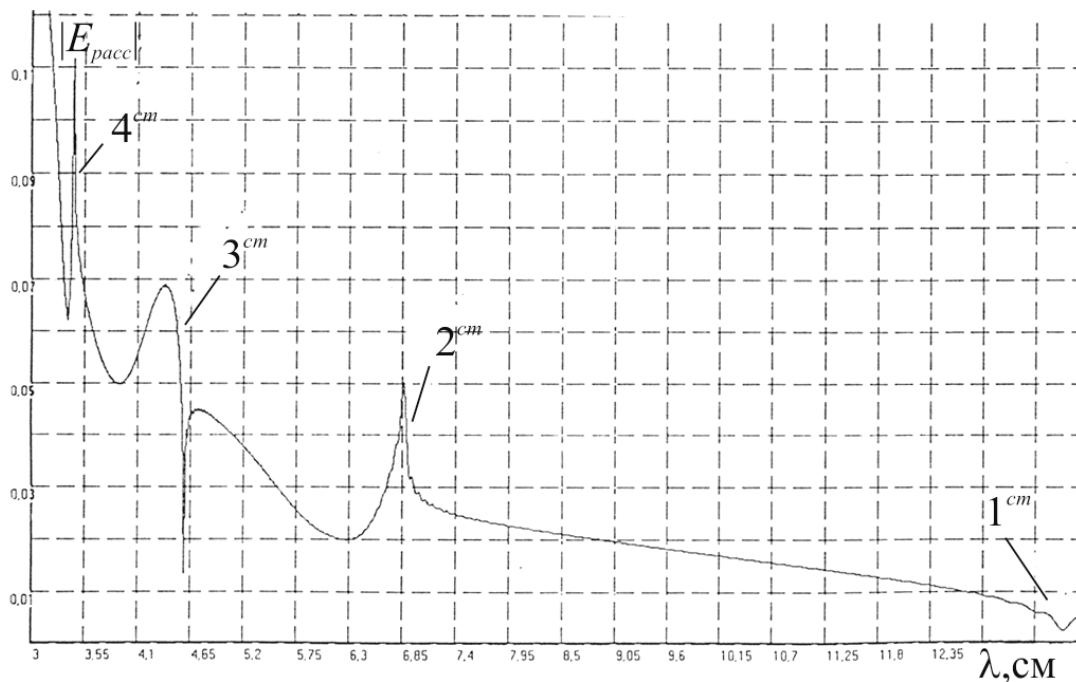


Рис. 2.6 *a*

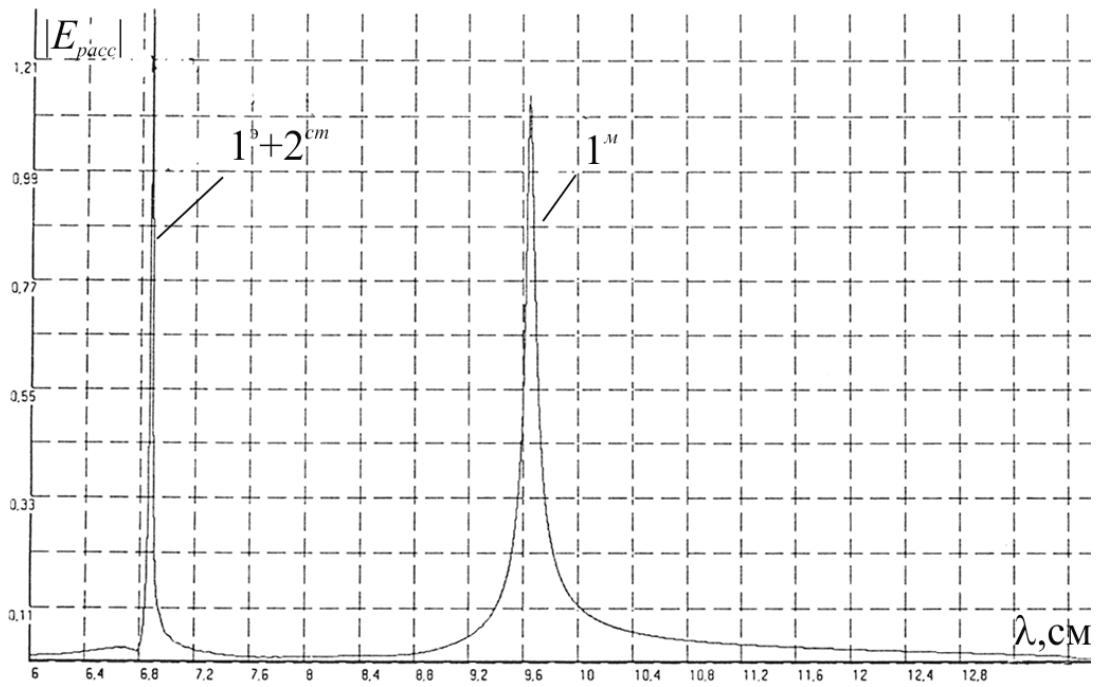


Рис. 2.6 б

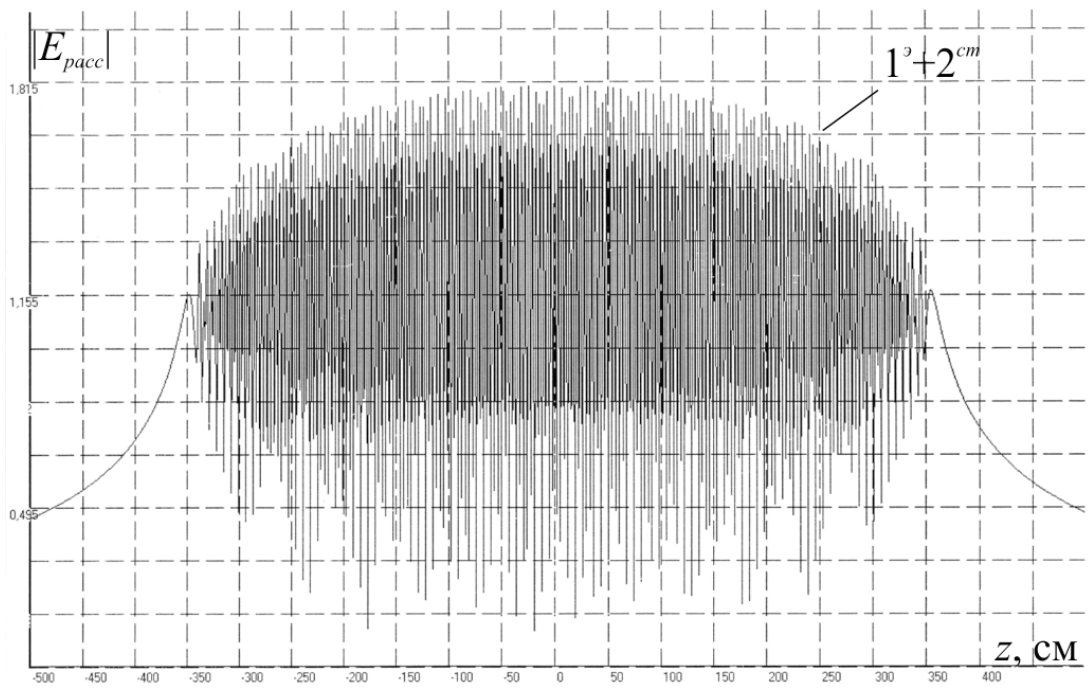


Рис. 2.6 с

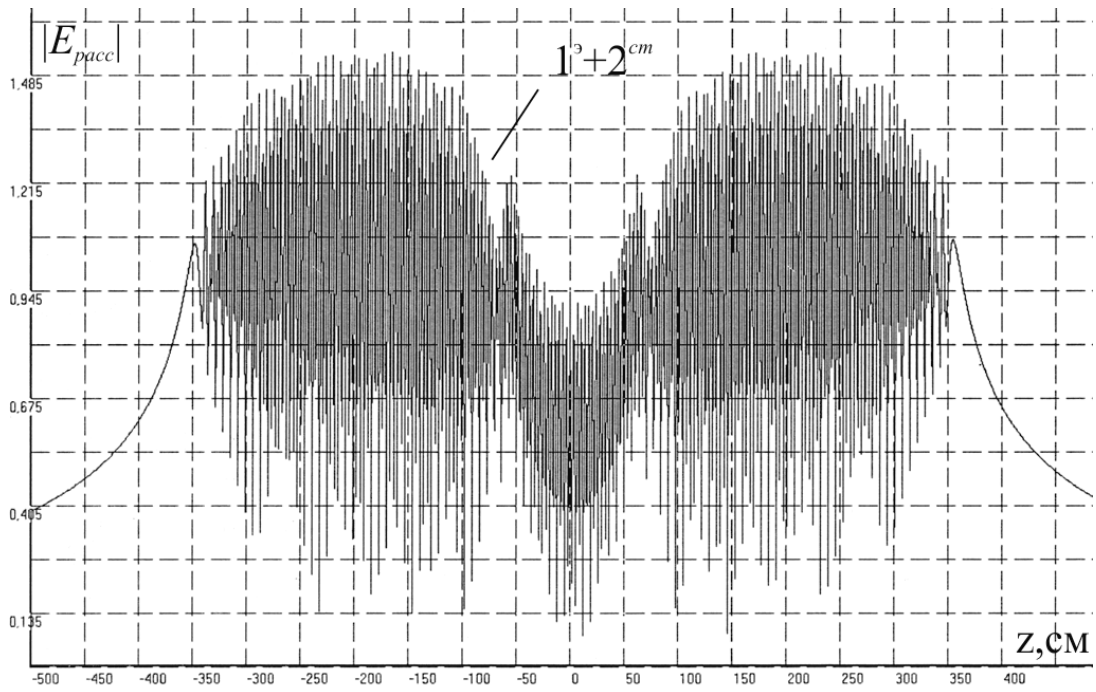


Рис. 2.6 d

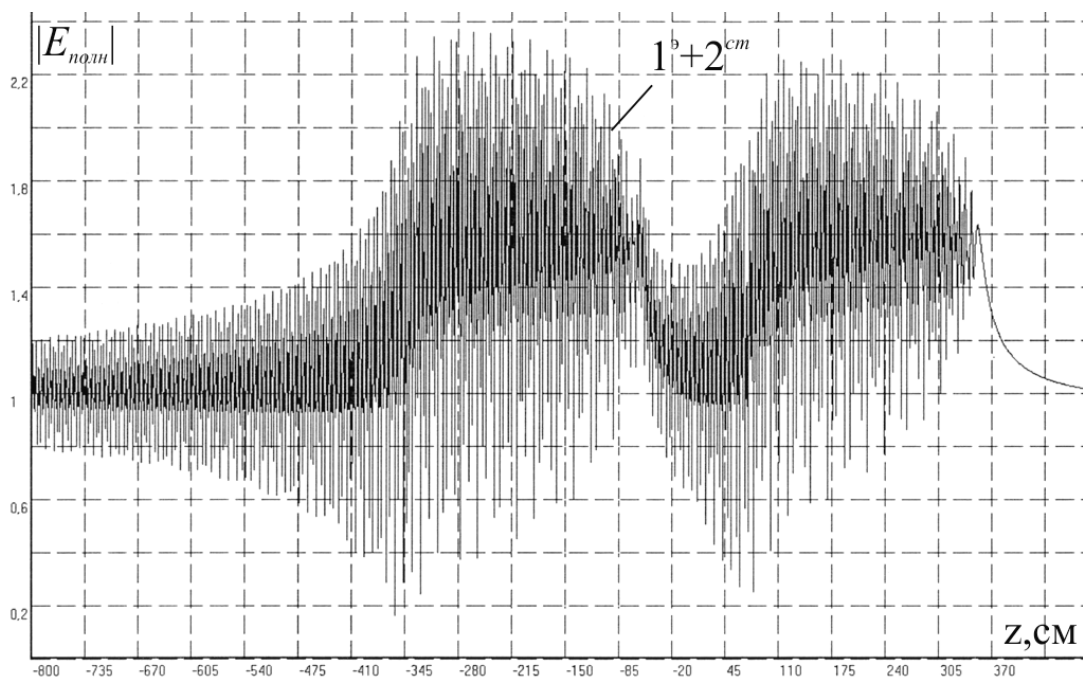


Рис. 2.6 e

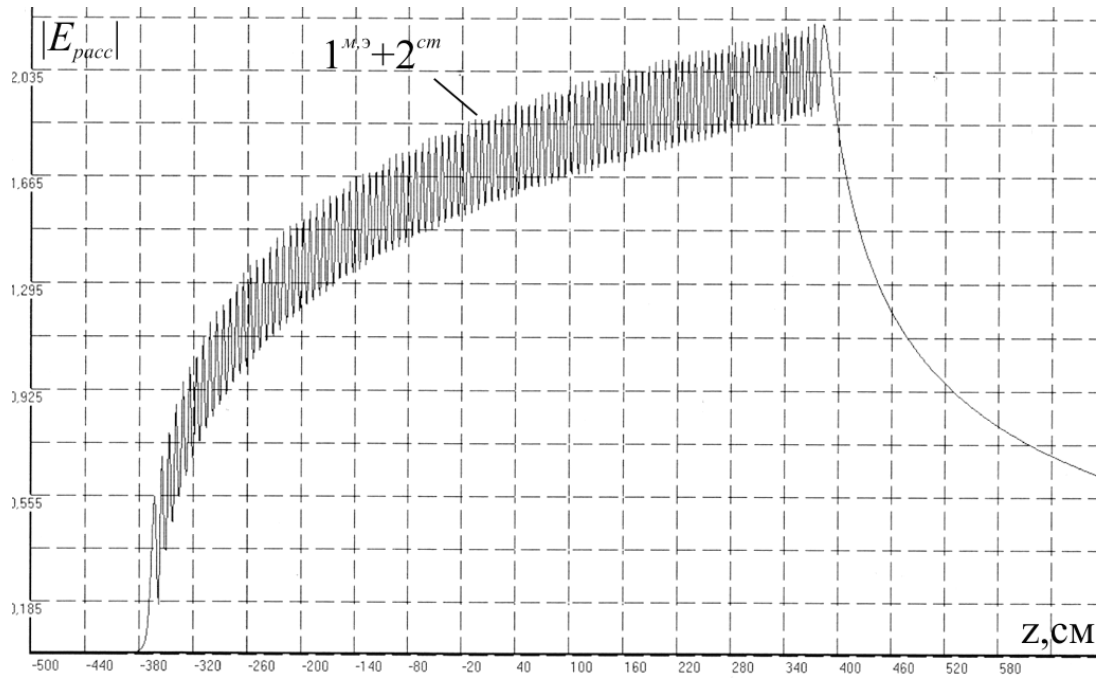


Рис. 2.6 f

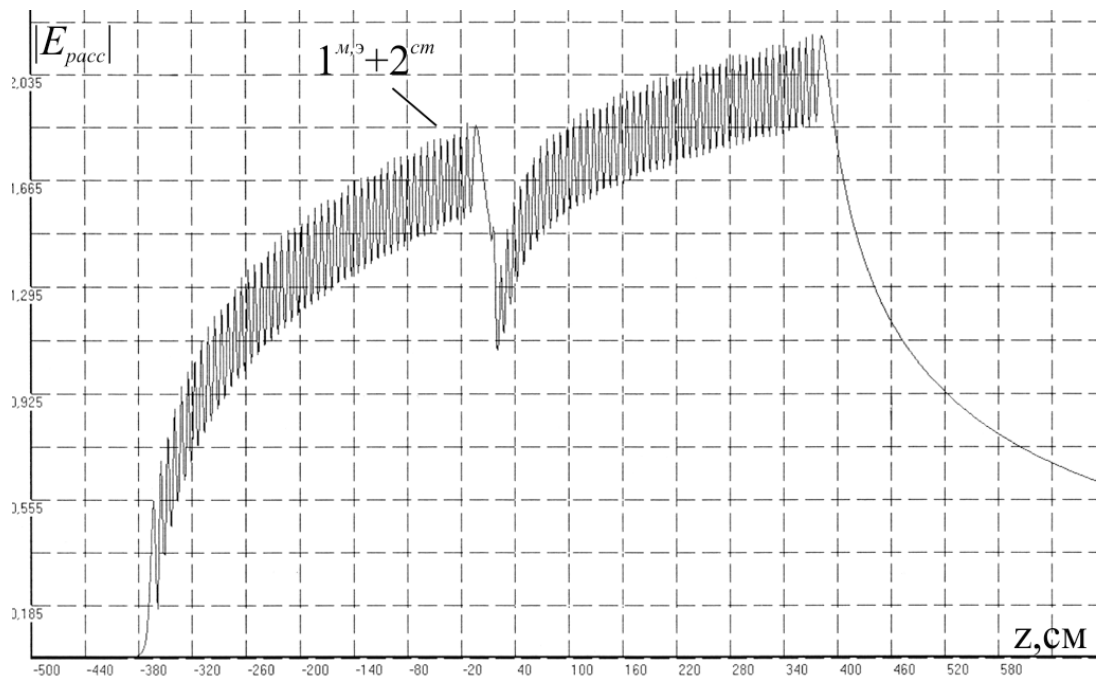


Рис. 2.6 g

Рис. 2.6. Зависимости поля $|E_{расс}|$ (2.19) и $|E_{полн}|$ (1.4) линейной решетки сфер (расположена по оси z (рис. 2.3)) от изменения длины рассеиваемой волны λ и координат точки наблюдения поля x, y, z , когда:

1. $l = 6,875$ см; $a = 0,5$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0$:

- a) $\varepsilon' = 5; \mu' = 1, p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50,$
 - b) $\varepsilon' = 95; \mu' = 1; p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50,$
 - c) $\varepsilon' = 95; \mu' = 1; p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50; \lambda_p^3 = l = 6,875 \text{ см},$
 - d,e) $\varepsilon' = 95; \mu' = 1; p = \pm 10, \dots, \pm 50; \lambda_p^3 = l = 6,875 \text{ см} - \text{с дефектом},$
 - 2. $\lambda_p^{m,\vartheta} = l = 7,41 \text{ см}; a = 0,5 \text{ см}; \varepsilon' = \mu' = 9,75; x = y = 0 \text{ см}; (s, t) = 0:$
 - f) $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50;$
 - g) $p = \pm 2, \dots, \pm 50 - \text{с дефектом}.$
- Рассеиваемая волна движется из области $z < 0$ на рис. 2.6.

На рис. 2.7 представлена зависимость поля $|H_{\text{расс}}|$ для двух совмещенных по оси z (рис. 2.3) параллельных линейных решеток, в которых возбуждены резонансы 1^{cm+m} и $1^{cm+\vartheta}$. Здесь механизм прохождения падающей волны аналогичен случаям, представленным на рис. 2.6 f, g и обусловлен суперпозицией полей двух решеток.

Из анализа этих зависимостей следует, что резонансные цепочки сфер могут играть роль волноведущих структур, и вести себя как одномерные резонаторы.

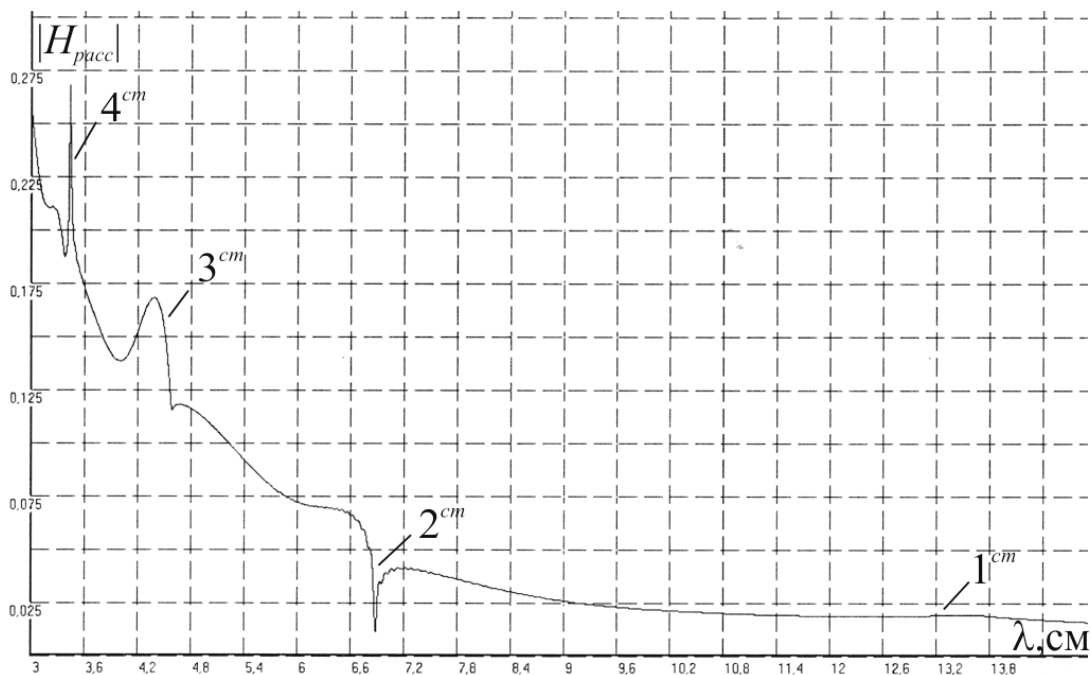


Рис. 2.7 а

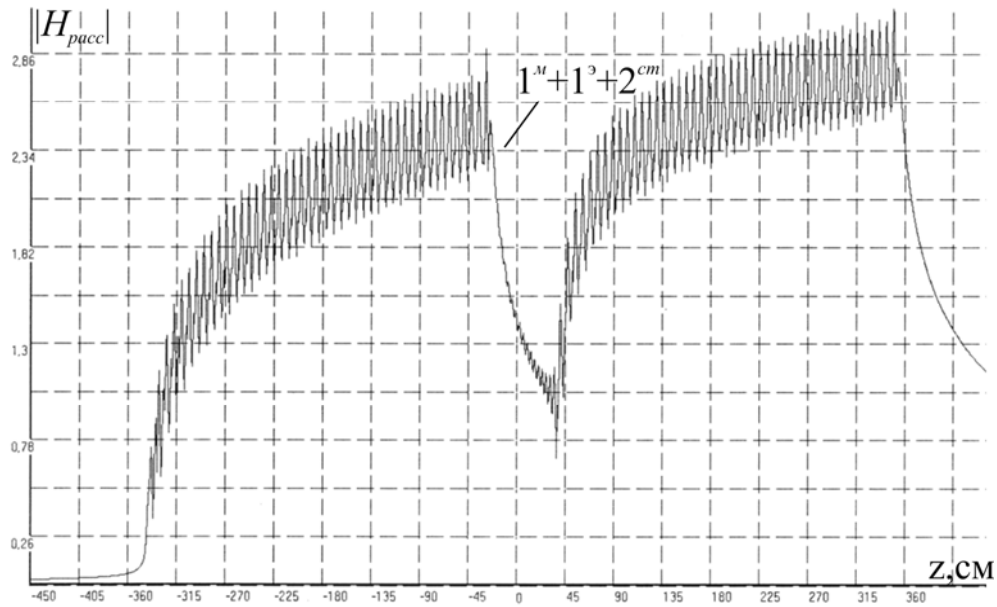


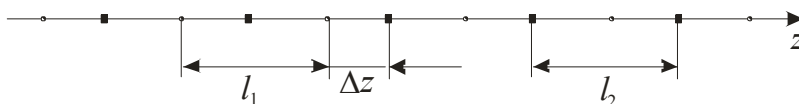
Рис. 2.7 b

Рис. 2.7. Зависимость поля $|H_{расс}|$ для двух параллельных и совмещенных по оси z линейных решеток (2.19) от изменения длины рассеиваемой волны λ (рис. 2.7 a) и от изменения координаты точки наблюдения поля z (рис. 2.7 b), когда:

a) $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon_{1,2} = 5$; $\mu'_{1,2} = 1$; $p_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$; $l_{1,2} = 6,875$ см,

b) $\lambda_p^M = \lambda_p^Э = l_{1,2} = 6,875$ см; $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_1 = 48,9$; $\epsilon'_2 = 95$; $\mu'_{1,2} = 1$; $p_{1,2} = \pm 5, \dots, \pm 50$ – с дефектом.

Схема совмещения двух линейных решеток по оси z имеет вид –



Удобно, для краткости, назвать совмещенный резонанс 1^{M+CM} магнитным резонансом линейной решетки, $1^{Э+CM}$ – электрическим резонансом решетки, $1^{M,Э+CM}$ – вырожденным резонансом решетки. Далее будем использовать аналогичную терминологию при изучении двумерных и трехмерных структур.

2.3. Структурные функции электромагнитного взаимодействия линейной резонансной решетки малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Для линейной решетки одинаковых сфер с действительными проницаемостями ϵ, μ материала сфер, пространственная конфигурация которой

представлена на рис. 2.3, построим структурные функции вида (1.47) [39].

Рассмотрим случай, когда на дискретную ограниченную линейную решетку падает плоская волна (2.26) в направлении оси z (рис. 2.3). Предположим, что для этого случая внутренние поля всех сфер линейной решетки одинаковы.

Резонансные условия для внутренних полей сфер решетки найдем из уравнений (1.37). Для данного случая матрица $\text{Re} \|\alpha_{ij}^{\vartheta}\|$ (1.37) имеет вид

$$\text{Re} \|\alpha_{ij}^{\vartheta}\| = \begin{bmatrix} \Psi_{xx}^{\vartheta 0'} + \Psi_{xx}^{\vartheta'} & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{yy}^{\vartheta 0'} + \Psi_{yy}^{\vartheta'} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz}^{\vartheta 0'} + \Psi_{zz}^{\vartheta'} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Элементы, входящие в матрицу (2.33), учитывая $x_{c,s} = x_s, x_{c,s=0} = x_{s=0}$ (2.1), (1.8), (рис. 2.3), представим в виде

$$\left(\Psi_{xx}^{\vartheta 0'} + \Psi_{xx}^{\vartheta'}\right) = A_{\varepsilon}^{0'} - A_{\varepsilon} \tau_{xx}^{\vartheta'}, \quad \left(\Psi_{yy}^{\vartheta 0'} + \Psi_{yy}^{\vartheta'}\right) = \left(\Psi_{zz}^{\vartheta 0'} + \Psi_{zz}^{\vartheta'}\right) = A_{\varepsilon}^{0'} - A_{\varepsilon} \tau_{yy}^{\vartheta'},$$

$$\tau_{xx}^{\vartheta'} = B \sum_{\substack{-s \\ s \neq s'=0}}^s (c_{xx} \cos k_1 r_{ss'} + a_{xx} \sin k_1 r_{ss'}), \quad k = 2\pi/\lambda, \quad k_1^2 = k^2 \varepsilon_0 \mu_0,$$

$$\tau_{yy}^{\vartheta'} = \tau_{zz}^{\vartheta'} = B \sum_{\substack{-s \\ s \neq s'=0}}^s (c_{yy} \cos k_1 r_{ss'} + a_{yy} \sin k_1 r_{ss'}), \quad \theta_1^2 = k^2 a^2 \varepsilon_0 \mu_0,$$

$$A_{\varepsilon}^{0'} = \frac{(\varepsilon_{\vartheta\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\vartheta\phi} + \theta_1^2 (\varepsilon_{\vartheta\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0}, \quad A_{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon_{\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right),$$

$$B = \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a), \quad a_{xx} = k_1 \frac{2}{r_{ss'}^2}, \quad a_{yy} = -k_1 \frac{1}{r_{ss'}^2}, \quad c_{xx} = \frac{2}{r_{ss'}^3},$$

$$c_{yy} = k_1^2 \frac{1}{r_{ss'}} - \frac{1}{r_{ss'}^3}, \quad r_{ss'} = |x_s - x_{s'=0}|.$$

Воспользовавшись соотношениями (1.45) и используя выражения (1.46), для линейной решетки получим компоненты тензорной функции $\hat{\Phi}_c^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ (1.47) в виде ($\theta_1 \ll 1$)

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}) &= \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2} - \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2 - 3\tau_{xx}^{\vartheta'}} \approx 3 - \frac{3}{1 - 3\tau_{xx}^{\vartheta'}} \approx -9\tau_{xx}^{\vartheta'}, \\ \Phi_{yy}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}) &= \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2} - \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2 - 3\tau_{yy}^{\vartheta'}} \approx 3 - \frac{3}{1 - 3\tau_{yy}^{\vartheta'}} \approx -9\tau_{yy}^{\vartheta'}, \\ \Phi_{zz}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}) &= \Phi_{yy}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}),\end{aligned}\quad (2.34)$$

если длина рассеиваемой волны $\lambda \rightarrow \infty$, то

$$\tau_{xx}^{\vartheta'} = \frac{2}{3}a^3 \sum_{\substack{s \\ s \neq s'=0}} \frac{1}{r_{ss'}^3}, \quad \tau_{yy}^{\vartheta'} = \tau_{zz}^{\vartheta'} = -\frac{1}{3}a^3 \sum_{\substack{s \\ s \neq s'=0}} \frac{1}{r_{ss'}^3}.$$

Компоненты тензорной функции $\hat{\Phi}_c^M(\vec{r}_{cc'})$ (1.45) можно найти аналогичным способом.

На рис. 2.8 представлены зависимости компоненты $\Phi_{yy}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ тензорной функции $\hat{\Phi}_c^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ (1.47) и модуля поля $|E_{\text{расс}}|$ от длины рассеиваемой волны λ для линейной решетки (рис. 2.3), когда $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 100$, для случаев:

- a) $a = 0,15$ см; $x_{s'=0} = 1,15$ см; $d = 2,3$ см,
- b) $a = 0,25$ см; $x_{s'=0} = 1,15$ см; $d = 2,3$ см,
- c) $a = 0,15$ см; $x_{s'=0} = 3$ см; $d = 6$ см,
- d) $a = 0,25$ см; $x_{s'=0} = 3$ см; $d = 6$ см,
- e) $a = 0,25$ см; $x_{s'=0} = 1,5$ см; $d = 6$ см,
- f) $a = 0,25$ см; $x_{s'=0} = 3$ см; $d = 6$ см.

Из анализа выражений для $\hat{\Phi}_c^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ (2.34) и рис. 2.8 вытекает, что когда длина рассеиваемой волны соизмерима с постоянной эквидистантной линейной решетки $\lambda \sim d$, то в решетке возникают структурные резонансы электромагнитного взаимодействия сфер магнитного и электрического типов с резонансной длиной волны $\lambda_p = d/n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

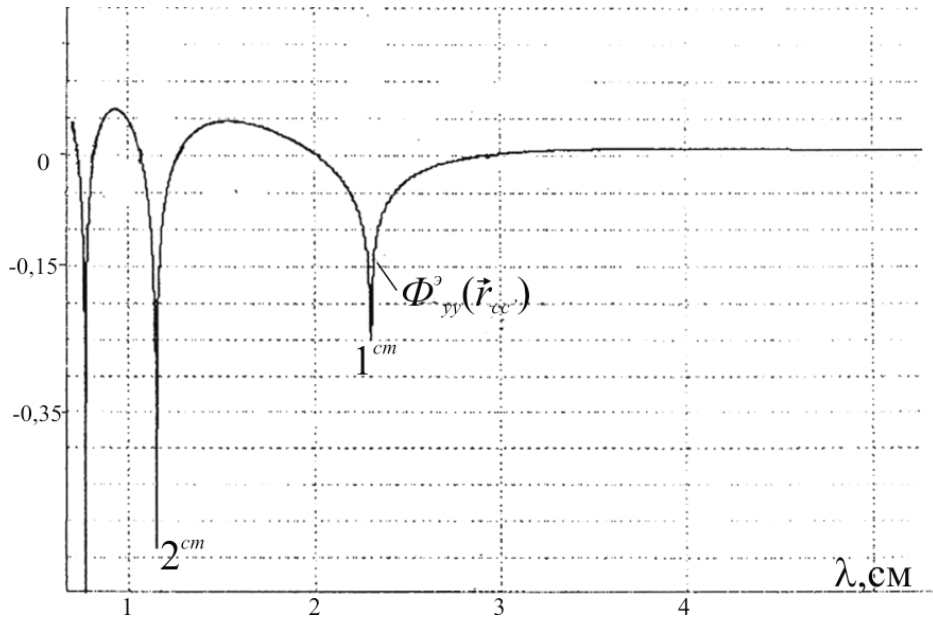


Рис. 2.8 а

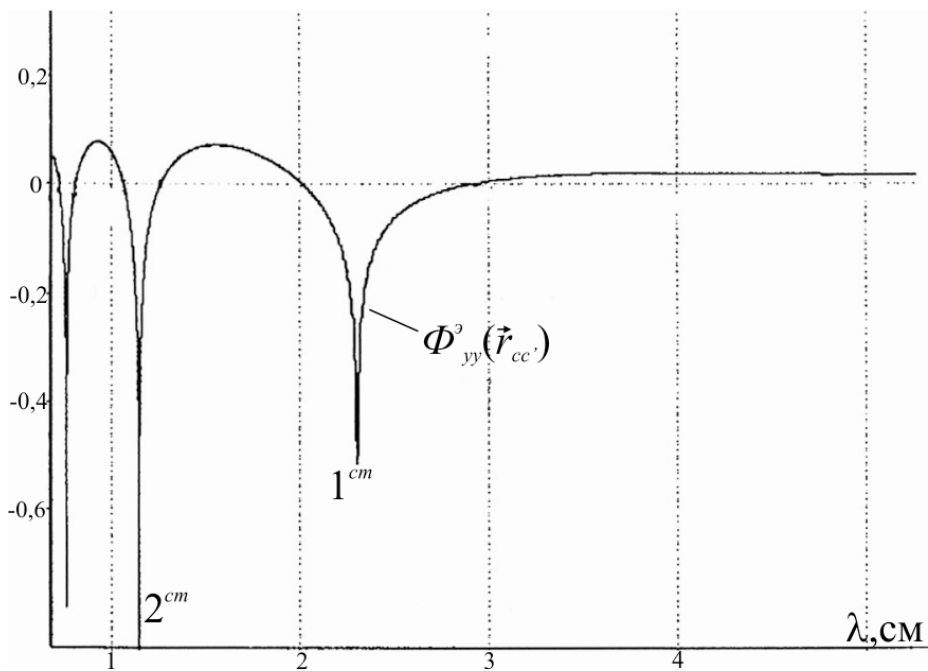


Рис. 2.8 б

Рис. 2.8 а, б. Зависимость компоненты $\Phi_{yy}^3(\vec{r}_{cc'})$ от длины волны λ для эквидистантной линейной решетки с радиусами сфер – а) $a = 0,15$ см, б) $a = 0,25$ см и постоянной решетки $d = 2,3$ см

Для неэквидистантных решеток эта зависимость более сложная. Структурные резонансы магнитного и электрического типов одновременно сосуществуют в решетке и имеют практически одинаковые резонансные значения длин волн для компонент функций $\hat{\Phi}^m(\vec{r}_{cc'})$, $\hat{\Phi}^e(\vec{r}_{cc'})$, зависящие от организации пространственной структуры решетки. Каждый тип структурных резонансов оказывает влияние только на аналогичный по типу внутренний резонанс магнитодиэлектрической сферы линейной решетки. Возможен физический эффект резонансного взаимодействия сфер решетки при совмещении решеточных структурных резонансов с внутренними резонансами сфер, при котором возникает существенное усиление влияния на тонкую структуру внутреннего поля сфер и структуру рассеянного поля линейной решетки. Результаты такого совмещения представлены на рис. 2.9 для случая, когда резонансные значения длин волн свободной сферы и структурного резонанса (рис. 2.8 *a*) совпадают при $\lambda=2,3$ см; $d=2,3$ см; $a=0,15$ см; $\epsilon_0 = \mu_0 = \mu = 1$; $\text{tg } \delta_\epsilon = 0$; $x_{s'=0} = 1,15$ см; $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 100$.

На рис. 2.9 модуль внутреннего электрического $|E^0|$ поля сфер решетки представлен в относительных единицах.

Анализ рис. 2.8 *a, b* показывает, что изменение радиуса сфер эквидистантной линейной решетки приводит к изменению численных значений компонент функций $\hat{\Phi}^m(\vec{r}_{cc'})$, $\hat{\Phi}^e(\vec{r}_{cc'})$ при сохранении резонансных значений длины волны λ .

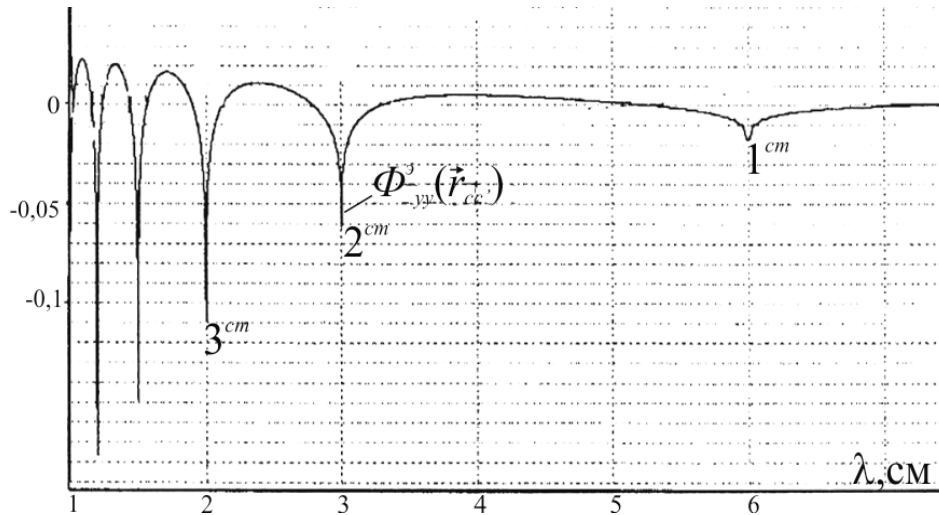


Рис. 2.8 c

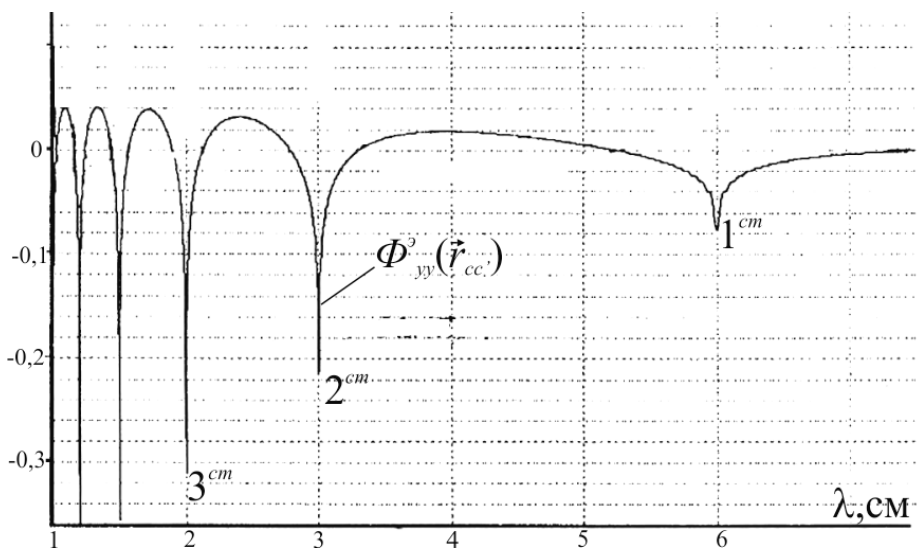


Рис. 2.8 d

Рис. 2.8 c, d. Зависимость компоненты $\Phi_{yy}^3(\vec{r}_{cc'})$ от длины волны λ для эквидистантной линейной решетки: $s = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$; постоянная решетки $d = 6$ см; радиусы сфер – c) $a = 0,15$ см, d) $a = 0,25$ см

Из сопоставления рис. 2.8 a, b и рис. 2.8 c, d следует, что изменять резонансные значения длин волн эквидистантной линейной решетки можно путем изменения постоянной решетки d .

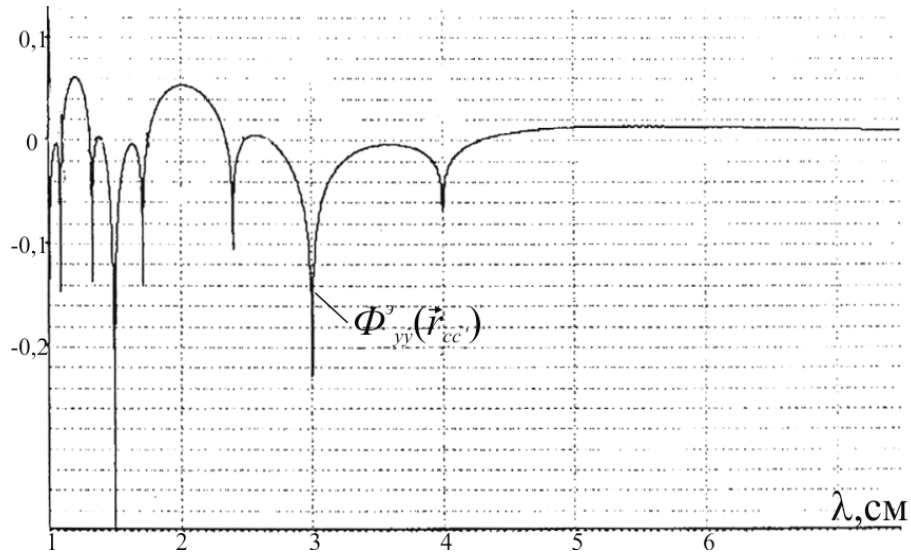


Рис. 2.8 e

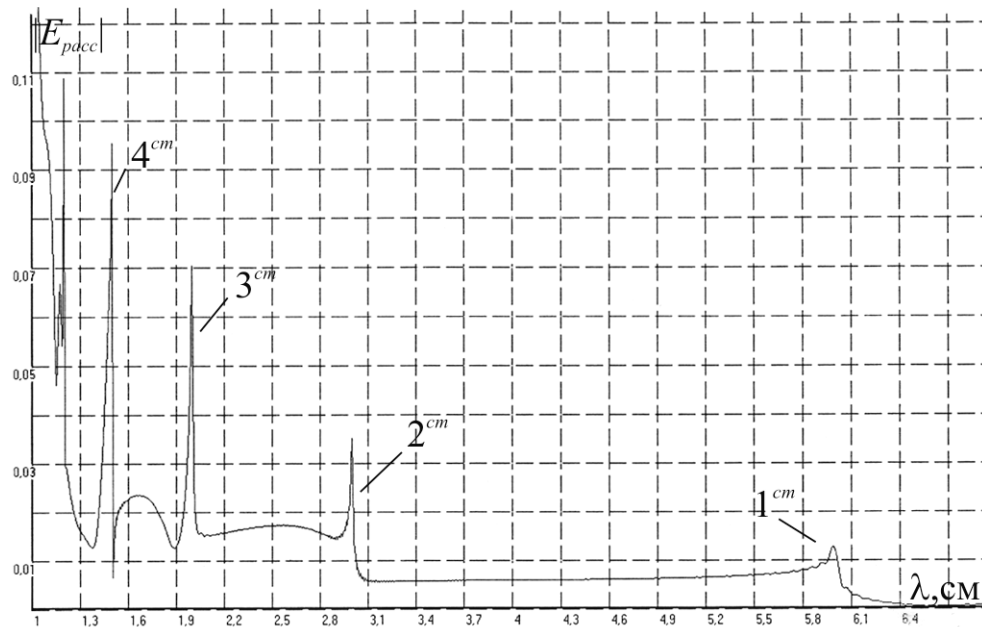


Рис. 2.8 f

Рис. 2.8 e, f. Зависимости от длины волны λ :

e) компоненты $\Phi_{yy}^z(\vec{r}_{cc})$ неэквидистантной линейной решетки с радиусом сфер $a = 0,15$ см, постоянной решетки $d = 6$ см; $x_{s'=0} = 1,5$; $s = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$,

f) модуля поля $|E_{pacc}|$ линейной решетки с $a = 0,25$ см; $d = 6$ см; $x_{s'=0} = 3$ см; $s = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$

Изменять резонансные значения длин волн у неэквидистантных решеток можно, если изменять параметр $x_{s'=0}$, что приводит к изменению

пространственной конфигурации линейной решетки, которую можно рассматривать как сложную, и появлению новых резонансов электромагнитного взаимодействия сфер.

Резонансы на рис. 2.8 *d* и рис. 2.8 *f* совпадают, что подтверждает правильность использованного условия (2.22) при построении структурных функций.

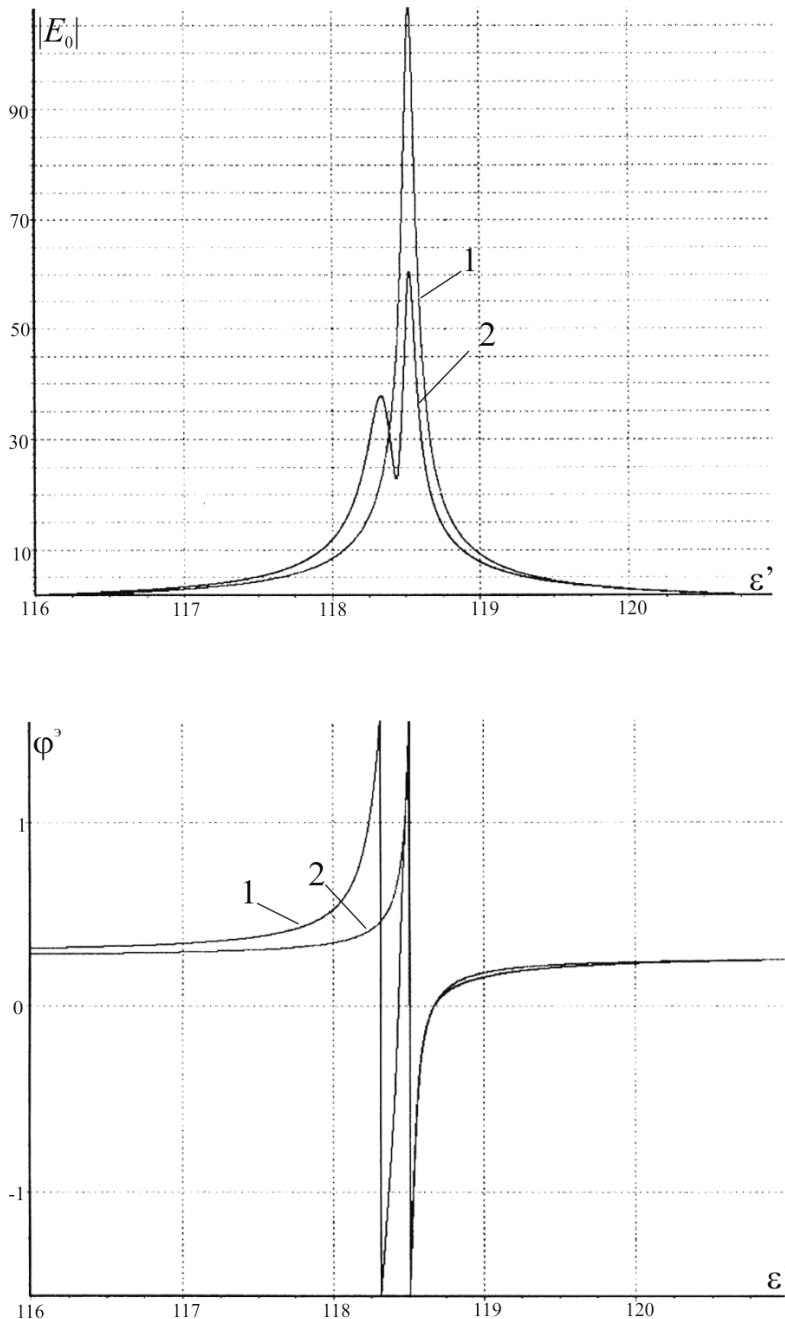


Рис. 2.9. Зависимости модуля $|E^0|$ и аргумента φ^3 внутреннего электрического поля диэлектрической сферы от изменения диэлектрической проницаемости материала сферы ϵ' в свободном пространстве (1-я кривая) и в составе линейной эквидистантной решетки (2-я кривая)

2.4. Рассеяние электромагнитных волн резонансной плоской решеткой малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Рассмотрим решение задачи о рассеянии электромагнитных волн резонансной дискретной ограниченной плоской решеткой одинаковых малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер с топологической структурой, определяемой натуральным рядом чисел.

Изложим постановку и решение задачи [21, 22, 56]. Рассмотрим плоскую решетку узлов, порождаемую в декартовой системе координат координатным представлением вида $(x_{p,s} = x_s, y_{p,t} = y_t)$ (2.1)

$$\begin{aligned} x_s &= \left[s - 0,5 \left\{ (-1)^s - 1 \right\} \right] d - (-1)^{s-1} x_{s=0} \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_t &= \left[t - 0,5 \left\{ (-1)^t - 1 \right\} \right] h - (-1)^{t-1} y_{t=0} \quad (t=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_p &= z_{p=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где величины d, h определяются условиями $x=0, x=d; y=0, y=h$, а $x_{s=0}, y_{t=0}, z_{p=0}$ – координаты узла, порождающего решетку и находящегося внутри области (2.2), (рис.2.1)

$$0 \leq x_{s=0} \leq d, \quad 0 \leq y_{t=0} \leq h, \quad z_{p=0} = 0. \quad (2.36)$$

Координаты x_s, y_t, z_p – определяют положения узлов вне области (2.36).

Каждому узлу решетки сопоставляются числа $c=(s,t)$, выделенный узел решетки будем обозначать $c'=(s',t')$, а узел внутри области (2.36) – $c=(s=0, t=0)$.

В узлы решетки (2.35) помещаются центры малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер с проницаемостями ϵ, μ и радиусом a .

На плоской решетке рассеивается плоская электромагнитная волна (2.26), распространяющаяся по оси z (рис. 2.10.).

Будем считать, что поле падающей волны (2.26) внутри сфер плоской решетки и внутреннее поле сфер решетки $\vec{E}^0(\vec{r}', t), \vec{H}^0(\vec{r}', t)$ имеют, соответственно, одинаковые значения для всех сфер решетки.

Для плоской решетки одинаковых сфер, расположенных в плоскости XU (рис. 2.10), индуцированное внутреннее поле сфер $\vec{E}^0(\vec{r}', t), \vec{H}^0(\vec{r}', t)$ найдем из алгебраической системы уравнений (2.8), которую представим в матричной форме (2.37).

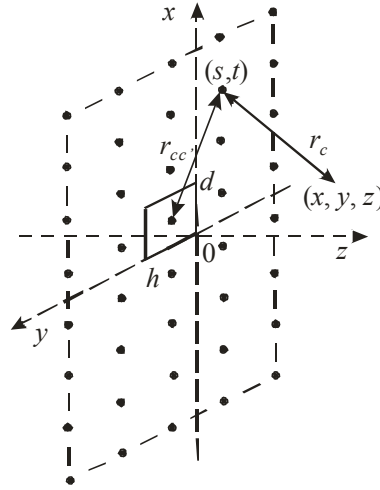


Рис. 2.10. Плоская решетка и геометрия задачи

Основная матрица системы уравнений (2.37) содержит сведения об особенностях электромагнитного взаимодействия сфер плоской решетки.

Элементы основной матрицы системы уравнений (2.37), входящие в строку, связанную с $E_{x(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$, имеют вид

$$(\psi_{xx}^0 + \psi_{xx}^0) = A_\varepsilon^0 - A_\varepsilon B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_{xx} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xx} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) \right] \\ (s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\psi_{xy}^0 = -A_\varepsilon B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_{xy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\psi_y^0 = k\mu_0 A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\begin{bmatrix} E_{ox(s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{oy(s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{xx}^{\text{e}0} + \psi_{xx}^{\text{e}} & \psi_{xy}^{\text{e}} & 0 & 0 & 0 & \psi_y^{M0} \\ \psi_{yx}^{\text{e}} & \psi_{yy}^{\text{e}0} + \psi_{yy}^{\text{e}} & 0 & 0 & 0 & \psi_x^M \\ 0 & 0 & \psi_{zz}^{\text{e}0} + \psi_{zz}^{\text{e}} & \psi_y^M & \psi_x^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_y^{\text{e}} & \psi_{xx}^{M0} + \psi_{xx}^M & \psi_{xy}^M & 0 \\ 0 & 0 & \psi_x^{\text{e}0} & \psi_{yx}^M & \psi_{yy}^{M0} + \psi_{yy}^M & 0 \\ \psi_y^{\text{e}0} & \psi_x^{\text{e}} & 0 & 0 & 0 & \psi_{zz}^{M0} + \psi_{zz}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{x(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

связанные с $E_{y(s=0,t=0)}^0(\vec{r}')$, представим в виде

$$\Psi_{yx}^{\vartheta} = \Psi_{xy}^{\vartheta},$$

$$(\Psi_{yy}^{\vartheta 0} + \Psi_{yy}^{\vartheta}) = A_{\varepsilon}^0 - A_{\varepsilon} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_{yy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{yy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\Psi_x^M = -k\mu_0 A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

связанные с $E_{z(s=0,t=0)}^0(\vec{r}')$, запишем как

$$(\Psi_{zz}^{\vartheta 0} + \Psi_{zz}^{\vartheta}) = A_{\varepsilon}^0 - A_{\varepsilon} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_{zz} \cos k_1 r_{cc'} + a_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{zz} \cos k_1 r_{cc'} - c_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\Psi_y^M = -k\mu_0 A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\Psi_x^{M0} = k\mu_0 A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right].$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

Аналогично элементы основной матрицы системы уравнений (2.37),

входящие в строку, связанную с $H_{x(s=0,t=0)}^0(\vec{r}')$, представим в виде

$$\Psi_y^{\vartheta} = -k\varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$(\Psi_{xx}^{M0} + \Psi_{xx}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_{xx} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xx} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\Psi_{xy}^M = -A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_{xy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

связанные с $H_{y(s=0,t=0)}^0(\vec{r}')$, запишем как

$$\Psi_x^{\vartheta 0} = k\varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\Psi_{yx}^M = \Psi_{xy}^M,$$

$$(\Psi_{yy1}^{M0} + \Psi_{yy1}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_{yy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{yy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$

связанные с $H_{z(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$ –

$$\Psi_y^{\partial} = k \varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$

$$\Psi_x^{\partial} = -k \varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$

$$(\Psi_{zz}^{M0} + \Psi_{zz}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{-s-t}^s \sum_{-s-t}^t \left[(c_{zz} \cos k_1 r_{cc'} + a_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{zz} \cos k_1 r_{cc'} - c_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) \right].$$

$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$

Здесь

$$k = 2\pi/\lambda, \quad k_1^2 = k^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad A_{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon_{\partial\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right), \quad A_{\mu} = \left(\frac{\mu_{\partial\phi}}{\mu_0} - 1 \right), \quad \theta_1^2 = k^2 a^2 \varepsilon_0 \mu_0,$$

$$B = \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a), \quad A_{\varepsilon}^0 = \frac{(\varepsilon_{\partial\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\partial\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\partial\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}},$$

$$A_{\mu}^0 = \frac{(\mu_{\partial\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\partial\phi} + i\theta_1 (\mu_{\partial\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_1}}, \quad a_{xx} = k_1 \frac{3(x_{s'=0} - x_s)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^4},$$

$$c_{xx} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \frac{3(x_{s'=0} - x_s)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(x_{s'=0} - x_s)^2}{r_{cc'}^3}, \quad a_{yy} = k_1 \frac{3(y_{t'=0} - y_t)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^4},$$

$$c_{yy} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \frac{3(y_{t'=0} - y_t)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(y_{t'=0} - y_t)^2}{r_{cc'}^3}, \quad a_{zz} = -k_1 \frac{1}{r_{cc'}^2}, \quad c_{zz} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 - \frac{1}{r_{cc'}^3},$$

$$a_{xy} = k_1 \frac{3(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^4},$$

$$c_{xy} = \frac{3(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^3},$$

$$a_x = \frac{(x_{s'=0} - x_s)}{r_{cc'}^3}, \quad c_x = k_1 \frac{(x_{s'=0} - x_s)}{r_{cc'}^2}, \quad a_y = \frac{(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^3}, \quad c_y = k_1 \frac{(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^2},$$

$$r_{cc'} = \sqrt{(x_{s'=0} - x_s)^2 + (y_{t'=0} - y_t)^2}.$$

Для сферы (s', t') плоской решетки решение системы уравнений (2.37) имеет вид (2.6).

Для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами решетки можно пренебречь, выражения для внутреннего поля произвольной сферы решетки (2.6) приобретают вид (1.14), а потенциалы Герца рассеянного поля (2.16), представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^{\text{э}}(\vec{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} \cdot \vec{E}_{\text{ox}}(z', t) \sum_{-s-t}^s \sum_t \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}, \\ \vec{\Pi}^{\text{м}}(\vec{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} \cdot \vec{H}_{\text{oy}}(z', t) \sum_{-s-t}^s \sum_t \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}, \end{aligned}$$

где $r_c = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_t)^2 + z^2}$ (рис. 2.10). (2.38)

На рис. 2.11 изображены зависимости $\text{Re} \eta^{\text{э}}$, $\text{Im} \eta^{\text{э}}$, модуля $|\eta^{\text{э}}|$ и аргумента $\varphi^{\text{э}}$ выражения

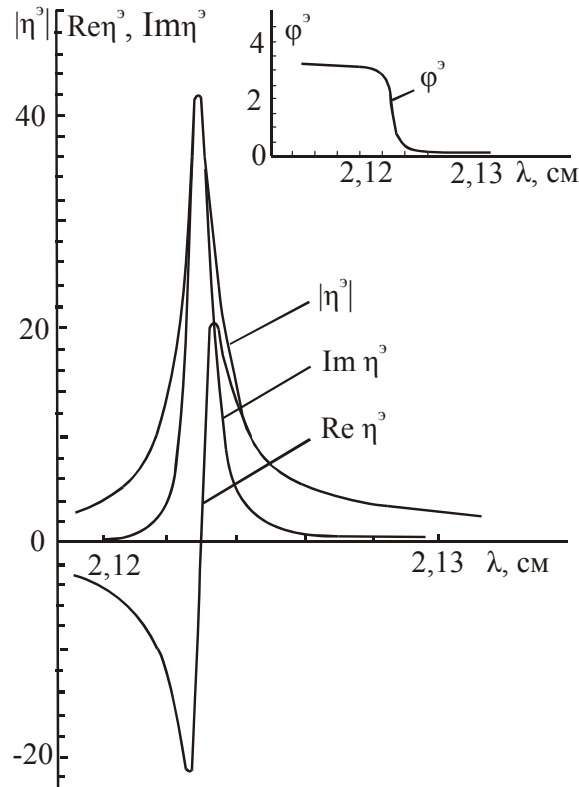
$$\eta^{\text{э}} = \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)},$$

которое входит в состав формулы для $\vec{\Pi}^{\text{э}}(\vec{r}, t)$ (2.38), от длины падающей волны λ в области первого внутреннего резонанса сферы электрического типа, когда $a = 0,1145$ см, $\varepsilon = 174$, $\mu = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$.

Рассеянное решеткой сфер поле получим из (1.1) в виде (2.19).

В величинах, входящих в функциональные матрицы (2.20), нужно учесть выражения (2.35), (2.38).

Полное поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер решетки, представим в виде (1.4).


 Рис. 2.11. Зависимость величины η^3 от длины волны λ

Для случая, когда можно пренебречь электромагнитным взаимодействием между сферами решетки, компонента рассеянного поля $E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t)$ (2.19) конечной решетки для ближней зоны имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t) = & \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \\
 & \times \left[\frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} E_0 \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (3(x - x_s)^2 - r_c^2) \times \left(\frac{1}{r_c^5} + ik_1 \frac{1}{r_c^4} \right) - \right. \\
 & \left. - ik\mu_0 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{z}{r_c^3} \right] e^{i\omega t}, \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

а для дальней зоны представим как

$$E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t) = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[k_1^2 \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} E_0 \sum_{-s-t}^s \sum^t \left(\frac{1}{r_c} - \frac{(x-x_s)^2}{r_c^3} \right) \times e^{-ik_1 r_c} + \right. \\
 & \left. + k_1 k \mu_0 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s-t}^s \sum^t z \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c^2} \right] e^{i\omega t}. \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Резонансные условия находим из выражения (2.22).

Порядок уравнения (2.22) можно понизить, если в нем слагаемыми, связанными с оператором rot (2.37), пренебречь в силу их малости при резонансе. Тогда уравнение (2.22) распадается на четыре независимых алгебраических уравнения первого и второго порядков, из которых можно найти искомые резонансные условия для компонент внутреннего поля сфер (2.6).

В этом приближении условия для резонансов компонент внутренних полей $E_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$ и $H_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$ сфер решетки имеют вид

$$F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{\varepsilon_0 [2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\text{э}}]}{\varepsilon(1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\text{э}})}, \quad F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{\mu_0 [2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\text{м}}]}{\mu(1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\text{м}})}, \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned}
 \tau_{zz}^{\text{э}} &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \times \\
 & \times \sum_{-s-t}^s \sum^t \left(\left[k_1^2 \frac{1}{r_{cc'}} - \frac{1}{r_{cc'}^3} \right] \cos k_1 r_{cc'} - k_1 \frac{1}{r_{cc'}^2} \sin k_1 r_{cc'} \right), \quad \tau_{zz}^{\text{м}} = \tau_{zz}^{\text{э}}. \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

($s, t \neq (s'=0, t'=0)$)

Для диэлектрической сферы ($\mu=1$) для первого низшего внутреннего резонанса компоненты $E_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$, когда $\varepsilon=40$, и n -го резонанса компоненты $H_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$ резонансные условия представим так

$$4,384 = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \left(\frac{2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\text{э}}}{1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\text{э}}} - 2 \right) \frac{1}{0,472}; \quad n\pi = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \left(\frac{2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\text{м}}}{1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\text{м}}} - 2 \right) \frac{\mu_0}{2\pi n},$$

где $n=1,2,3\dots$ порядок резонансов магнитного типа. Величины $\tau_{zz}^{\vartheta}, \tau_{zz}^m$ (3.47) учитывают структурное электромагнитное влияние сфер решетки на выделенную сферу ($s'=0, t'=0$).

2.5. Структурные функции электромагнитного взаимодействия плоской резонансной решетки малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Ограничимся построением приближенных выражений компонент тензорной функции $\hat{\Phi}_c^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ (1.47) для дискретной ограниченной плоской решетки (2.35) (рис. 2.10) в предположении, что внутренние поля сфер решетки одинаковы [39-42].

Построим структурные функции, используя уравнения (1.37). Для данного случая уравнение (1.37) имеет вид

$$\det \operatorname{Re} \|\alpha_{ij}\| = \det \begin{bmatrix} \Psi_{xx}^{\vartheta 0'} + \Psi_{xx}^{\vartheta'} & \Psi_{xy}^{\vartheta'} & 0 \\ \Psi_{yx}^{\vartheta'} & \Psi_{yy}^{\vartheta 0'} + \Psi_{yy}^{\vartheta'} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{zz}^{\vartheta 0'} + \Psi_{zz}^{\vartheta'} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.43)$$

Элементы, входящие в матрицу $\operatorname{Re} \|\alpha_{ij}^{\vartheta}\|$ (2.43), ($x_{p,s} = x_s; y_{p,t} = y_t; x_{p,s=0} = x_{s=0}; y_{p,t=0} = y_{t=0}$) (2.35), представим как

$$\left(\Psi_{xx}^{\vartheta 0'} + \Psi_{xx}^{\vartheta'}\right) = A_{\varepsilon}^{0'} - A_{\varepsilon} \tau_{xx}^{\vartheta'}, \quad \left(\Psi_{yy}^{\vartheta 0'} + \Psi_{yy}^{\vartheta'}\right) = A_{\varepsilon}^{0'} - A_{\varepsilon} \tau_{yy}^{\vartheta'},$$

$$\left(\Psi_{zz}^{\vartheta 0'} + \Psi_{zz}^{\vartheta'}\right) = A_{\varepsilon}^{0'} - A_{\varepsilon} \tau_{zz}^{\vartheta'}, \quad \Psi_{xy}^{\vartheta'} = \Psi_{yx}^{\vartheta'} = -A_{\varepsilon} \tau_{xy}^{\vartheta'},$$

здесь (рис. 2.10)

$$\tau_{xx}^{\vartheta'} = B \sum_{\substack{s \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}} \sum_{\substack{t \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}} (c_{xx} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xx} \sin k_1 r_{cc'}), \quad \tau_{yy}^{\vartheta'} = B \sum_{\substack{s \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}} \sum_{\substack{t \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}} (c_{yy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{yy} \sin k_1 r_{cc'}),$$

$$\tau_{zz}^{\vartheta'} = B \sum_{\substack{s, t \\ (s, t) \neq (s'=0, t'=0)}} (c_{zz} \cos k_1 r_{cc'} + a_{zz} \sin k_1 r_{cc'}), \quad \tau_{xy}^{\vartheta'} = B \sum_{\substack{s, t \\ (s, t) \neq (s'=0, t'=0)}} (c_{xy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xy} \sin k_1 r_{cc'}),$$

$$k = 2\pi/\lambda, \quad k_1^2 = k^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad A_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon_{\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right), \quad B = \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a),$$

$$\theta_1^2 = k^2 a^2 \varepsilon_0 \mu_0,$$

$$A_\varepsilon^{0'} = \frac{(\varepsilon_{\vartheta\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\vartheta\phi} + \theta_1^2 (\varepsilon_{\vartheta\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0}, \quad a_{xx} = k_1 \frac{3(x_{s'=0} - x_s)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^4},$$

$$c_{xx} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \frac{3(x_{s'=0} - x_s)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(x_{s'=0} - x_s)^2}{r_{cc'}^3},$$

$$a_{yy} = k_1 \frac{3(y_{t'=0} - y_t)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^4},$$

$$c_{yy} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \frac{3(y_{t'=0} - y_t)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(y_{t'=0} - y_t)^2}{r_{cc'}^3},$$

$$a_{zz} = -k_1 \frac{1}{r_{cc'}^2}, \quad c_{zz} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 - \frac{1}{r_{cc'}^3},$$

$$a_{xy} = k_1 \frac{3(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^4},$$

$$c_{xy} = \frac{3(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^3},$$

$$r_{cc'} = \sqrt{(x_{s'=0} - x_s)^2 + (y_{t'=0} - y_t)^2}.$$

Используя выражения (1.44) и корни уравнения (2.43), получим компоненты структурной тензорной функции $\hat{\Phi}_p^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ (1.47) для плоской решетки, когда $\theta_1 \ll 1$ (1.40), в виде

$$\Phi_{p\alpha\alpha}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2} - \frac{\alpha_0(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}) - \alpha_0 \sqrt{(\alpha_{xx} - \alpha_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^{\vartheta'2}}}{2(\alpha_{xx}\alpha_{yy} - \tau_{xy}^{\vartheta'2})},$$

$$\Phi_{pyy}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2} - \frac{\alpha_0(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}) + \alpha_0 \sqrt{(\alpha_{xx} - \alpha_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^{\vartheta'2}}}{2(\alpha_{xx}\alpha_{yy} - \tau_{xy}^{\vartheta'2})}, \quad (2.44)$$

$$\Phi_{pzz}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'}) = \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2} - \frac{3 + 4\theta_1^2}{1 + 2\theta_1^2 - 3\tau_{zz}^{\vartheta'}} \approx 3 - \frac{3}{1 - 3\tau_{zz}^{\vartheta'}} \approx -9\tau_{zz}^{\vartheta'},$$

где

$$\alpha_{xx} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\theta_1^2 - \tau_{xx}^{\vartheta'}, \quad \alpha_{yy} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\theta_1^2 - \tau_{yy}^{\vartheta'}, \quad \alpha_0 = 1 + \frac{4}{3}\theta_1^2.$$

Рассматривая в (2.44) величины $\tau_{xx}^{\vartheta'}$, $\tau_{yy}^{\vartheta'}$, $\tau_{zz}^{\vartheta'}$, $\tau_{xy}^{\vartheta'}$ как малые параметры, выражения (2.44) можно представить, разложив в ряд и взяв два первых слагаемых, в виде

$$\Phi_{pxx}^{\vartheta}(\vec{r}_{c'c}) \approx -9\tau_{xx}^{\vartheta'}, \quad \Phi_{pyy}^{\vartheta}(\vec{r}_{c'c}) \approx -9\tau_{yy}^{\vartheta'}, \quad \Phi_{pzz}^{\vartheta}(\vec{r}_{c'c}) \approx -9\tau_{zz}^{\vartheta'}.$$

Если в выражениях для $\tau_{xx}^{\vartheta'}$, $\tau_{yy}^{\vartheta'}$, $\tau_{zz}^{\vartheta'}$, $\tau_{xy}^{\vartheta'}$ устремить длину волны $\lambda \rightarrow \infty$, то получим

$$\tau_{xx}^{\vartheta'} = \frac{a^3}{3} \sum_s \sum_t \frac{3(x_{s'} - x_s)^2 - r_{c'c}^2}{r_{c'c}^5}, \quad \tau_{yy}^{\vartheta'} = \frac{a^3}{3} \sum_s \sum_t \frac{3(y_{t'} - y_t)^2 - r_{c'c}^2}{r_{c'c}^5},$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0) \quad (s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

$$\tau_{zz}^{\vartheta'} = -\frac{a^3}{3} \sum_s \sum_t \frac{1}{r_{c'c}^3}, \quad \tau_{xy}^{\vartheta'} = \frac{a^3}{3} \sum_s \sum_t \frac{3(x_{s'} - x_s)(y_{t'} - y_t)}{r_{c'c}^5}.$$

$$(s, t) \neq (s' = 0, t' = 0) \quad (s, t) \neq (s' = 0, t' = 0)$$

Компоненты тензорной функции $\mathfrak{F}_p^m(\vec{r}_{cc'})$ (1.47) можно найти аналогичным способом.

На рис. 2.12 представлены зависимости компонент тензорной функции (2.44) и поля $|E_{pacc}|$ плоской квадратной решетки сфер (рис. 2.10), когда в решетке возбуждены структурные (cm) резонансы, от изменения длины λ рассеиваемой волны. Из анализа приближенных выражений (2.44) и рис. 2.12

следует, что когда длина рассеиваемой волны соизмерима с постоянными плоской решетки $\lambda \sim d, h$, то в решетке возникают структурные резонансы электромагнитного взаимодействия магнитного и электрического типов. Структурные резонансы магнитного и электрического типов одновременно сосуществуют в плоской решетке и имеют практически одинаковые резонансные значения длин волн, зависящие от геометрии решетки. Каждый тип структурных резонансов оказывает влияние только на аналогичный по типу внутренний резонанс магнитоэлектрической сферы в плоской решетке. Возможен физический эффект резонансного взаимодействия сфер плоской решетки при совмещении структурных резонансов с внутренними резонансами сфер, при котором возникает усиление влияния на тонкую структуру внутреннего поля сфер и структуру рассеянного поля плоской решетки. Из сопоставления рис. 2.12 *a, b, c* и рис. 2.12 *d* следует, что резонансы функции $\Phi^{\text{э}}(\vec{r}_{c'c'})$ и модуля поля $|E_{\text{расс}}|$ имеют одинаковые длины волн λ_p^{cm} , что позволяет упростить анализ рассматриваемых резонансных явлений.

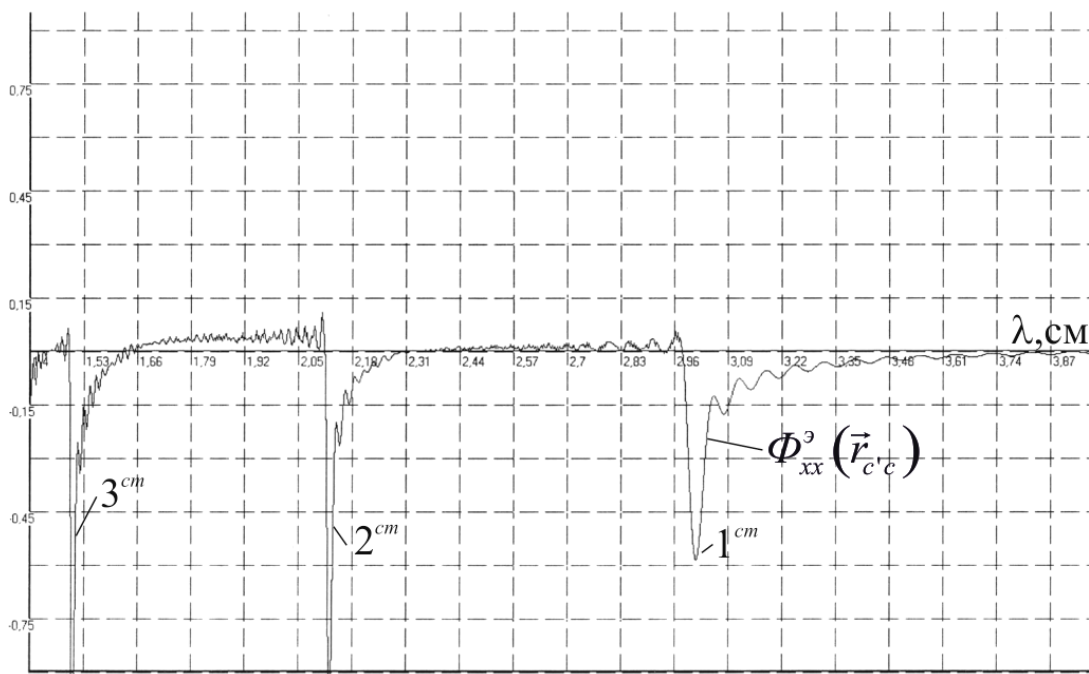


Рис. 2.12 *a*

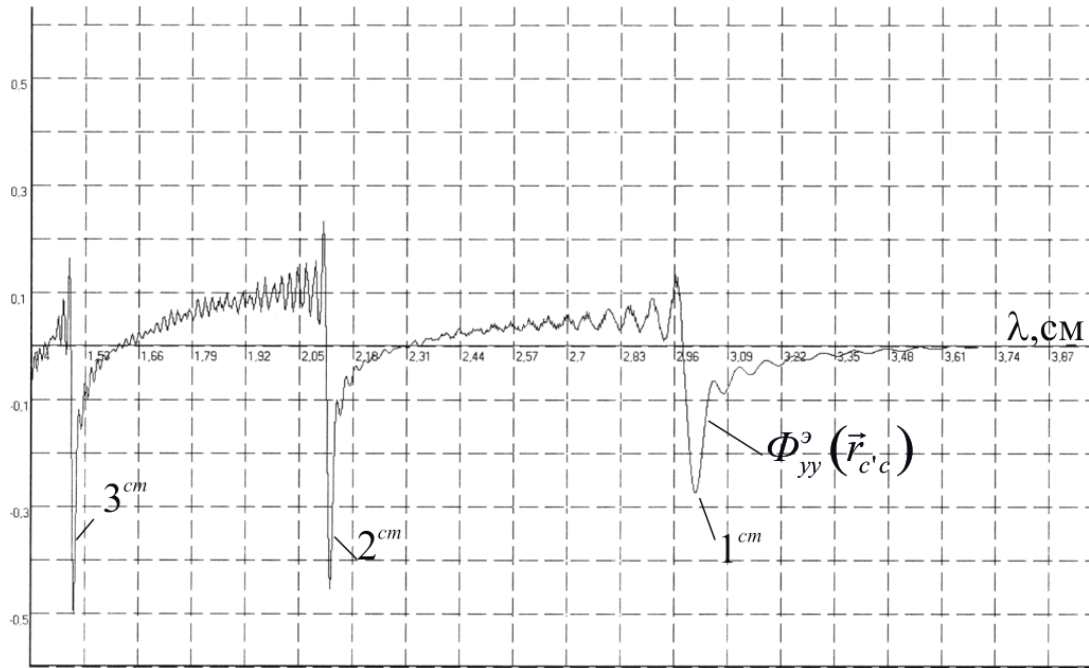


Рис. 2.12 b

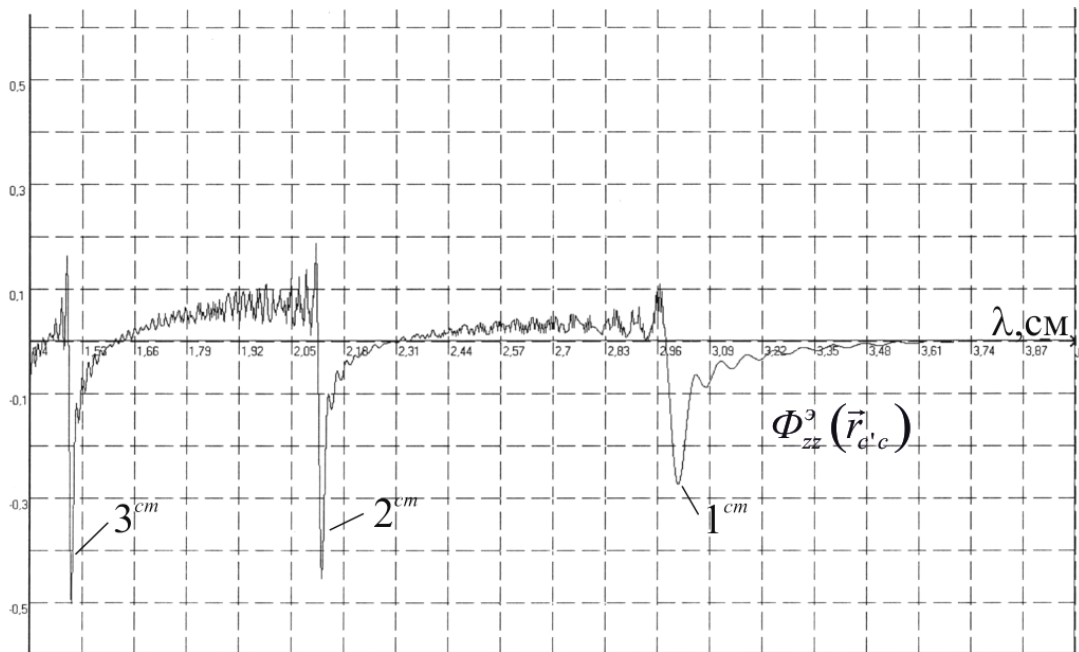


Рис. 2.12 c

Рис. 2.12 a, b, c. Зависимости компонент тензорной структурной функции электромагнитного взаимодействия $\hat{\Phi}^{\vartheta}(\vec{r}_{cc'})$ (1.47) плоской квадратной решетки сфер от изменения длины волны λ при $a = 0,15$ см; $d = h = 3$ см; $l = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$

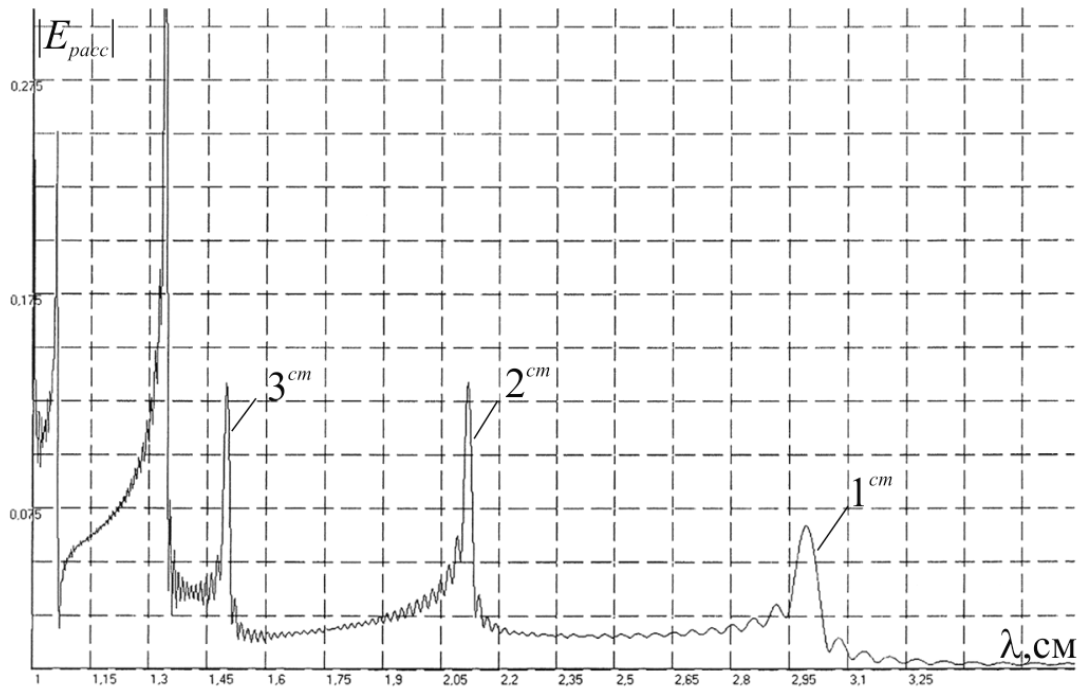


Рис. 2.12 d. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ плоской квадратной решетки сфер (2.19), (2.1) от изменения длины волны λ при $a = 0,15 \text{ см}$; $\epsilon' = 5$; $\mu = 1$; $d = h = 3 \text{ см}$; $l = 0 \text{ см}$; $x = y = z = 0 \text{ см}$; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$; $p = 0$, когда в решетке возбуждены структурные (cm) резонансы

2.6. Рассеяние электромагнитных волн резонансной плоской решеткой малых резонансных магнитодиэлектрических сфер при разных видах резонансов

В разделе представлен анализ численных расчетов электромагнитных полей резонансных дискретных ограниченных плоских решеток малых резонансных сфер с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел [22, 56].

На рис. 2.13 представлены графические зависимости для тонкой структуры внутреннего поля $|E^0|$ сфер периодической решетки (рис. 2.10). Расщепление резонансных кривых обусловлено электромагнитным взаимодействием сфер решетки. Динамика расщепления зависит от параметров сфер, геометрии решетки и соотношения структурных резонансов решетки с внутренними резонансами сфер решетки. Совмещая внутренние резонансы сфер решетки со

структурными резонансами решетки, изменяя параметры сфер и решетки в окрестности резонансов решетки можно влиять на характер расщепления резонансных кривых. С увеличением тангенса угла диэлектрических потерь амплитуда резонансов убывает и расщепление резонансных кривых при $\text{tg} \delta_\epsilon \approx 5 \cdot 10^{-3}$ практически исчезает.

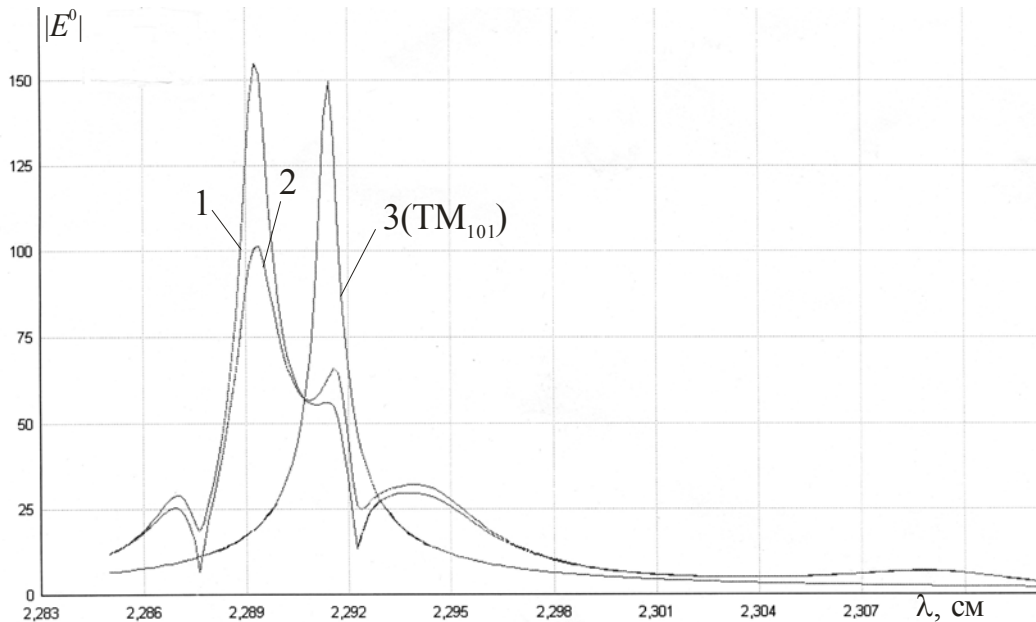


Рис. 2.13. Зависимости модуля $|E^0|$ при резонансе внутреннего электрического поля $\vec{E}_c^0(\vec{r}')$ малых магнитодиэлектрических сфер плоской решетки (кривые 1, 2) и малой свободной сферы (кривая 3) от изменения длины рассеиваемой волны λ , когда $d=2,3$ см; $h=1$ см – постоянные решетки; $x_{s=0}=1,15$ см; $y_{t=0}=0,5$ см; $a=0,15$ см; $\epsilon'=117,62$ см; $\text{tg} \delta_\epsilon=0$ – кривые 1, 3; $\text{tg} \delta_\epsilon=10^{-4}$ – кривая 2; $\mu'=1$

На рис. 2.14 рассматривается структура поля $|H_{\text{расс}}|$ (2.19), (2.35) в зоне Френеля для случая многомодового рассеяния ($\lambda < d, h$) плоской волны (2.26) квадратной решеткой диэлектрических сфер (рис. 2.10) для случаев:

- 1) возбуждения в решетке внутреннего резонанса сфер электрического типа (рис. 2.14 a);
- 2) возбуждения решетки в окрестности внутреннего резонанса сфер (рис. 2.14 b, c).

Из анализа этих рисунков следует, что изменяя длину рассеиваемой волны λ в окрестности резонанса сфер решетки можно влиять на структуру

поля и распределение энергии поля по обе стороны решетки.

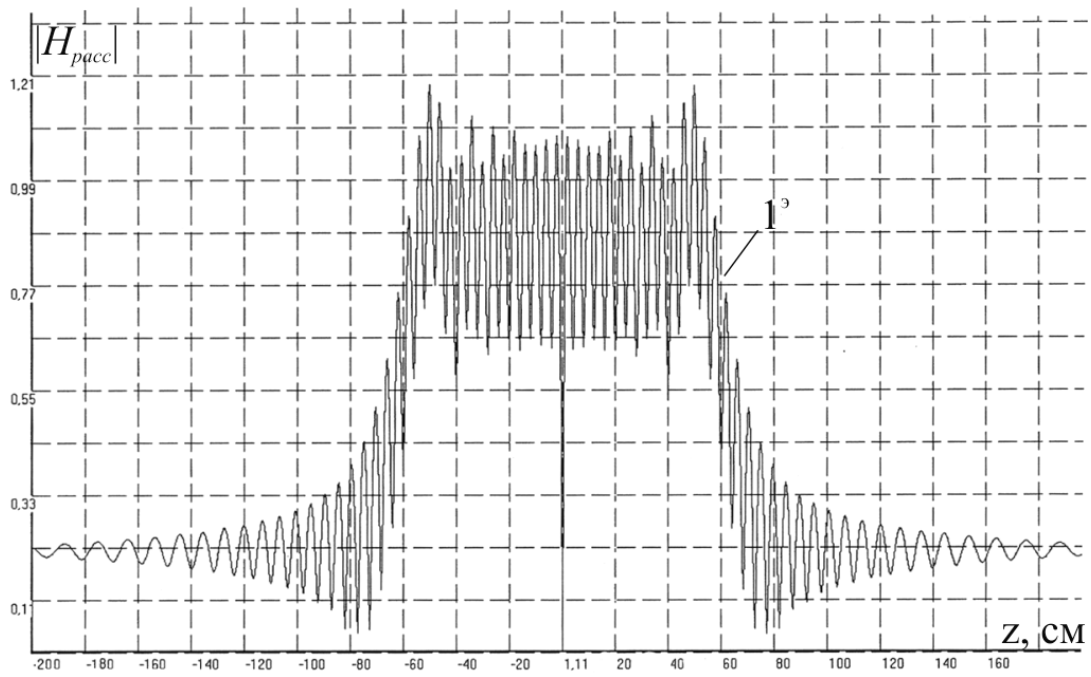


Рис. 2.14 а

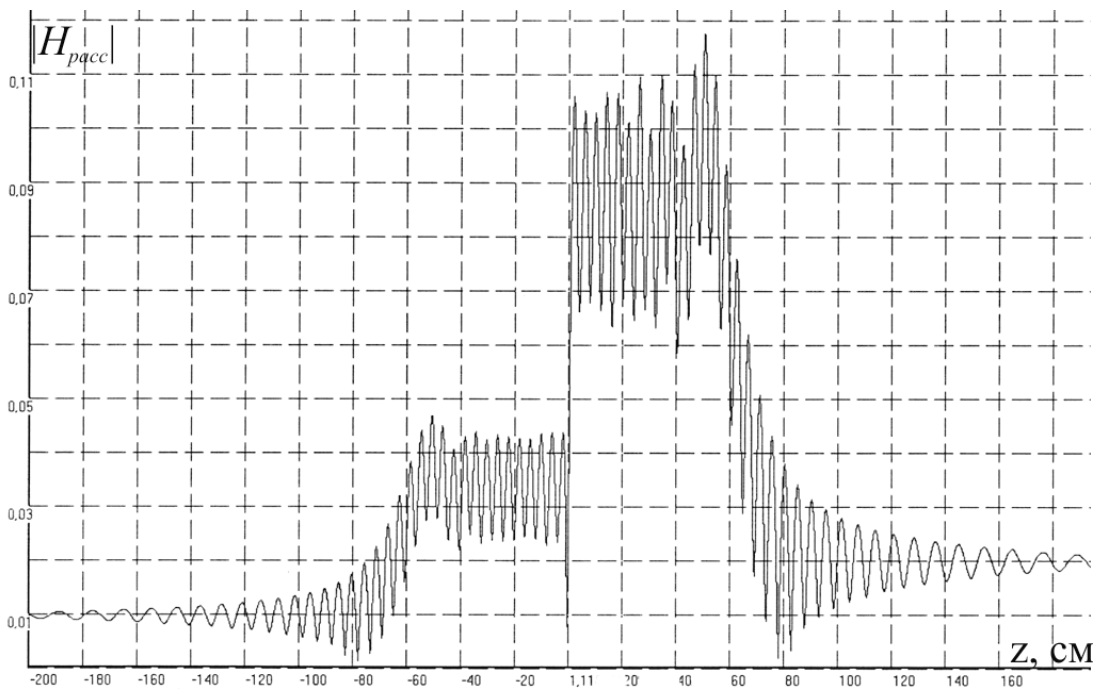


Рис. 2.14 б

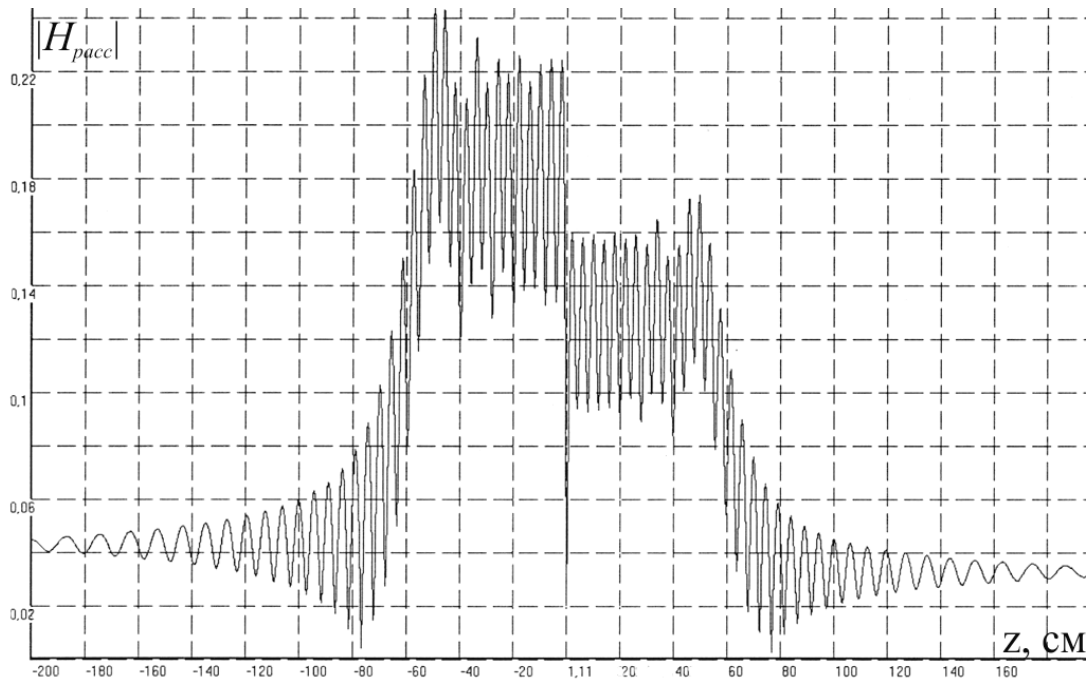


Рис. 2.14 с

Рис. 2.14. Зависимости поля $|H_{pacc}|$ (2.19), (2.35) плоской квадратной решетки сфер (рис. 2.10) от изменения координаты точки наблюдения поля z при $x = y = 0$ см; $a = 0,15$ см; $\epsilon' = 100$; $\mu' = 1$; $d = h = 2,4$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = 1,2$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$ для

a) $\lambda_p^3 = 2,1155$ см,

b) $\lambda = 2,105$ см,

c) $\lambda = 2,1235$ см

На рис. 2.14 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

2.6.1. Структурный резонанс плоской решетки

На рис. 2.15 изображены дисперсионная зависимость поля $|E_{pacc}|$ от длины λ падающей волны (2.26) (рис. 2.15 a) и зависимости поля $|E_{pacc}|$ от координат x, y внутри (рис. 2.15 b, c), и координат z, x вне (рис. 2.15 d, e, f, g, h) плоской квадратной решетки диэлектрических сфер (рис. 2.10), в которой возбужден структурный резонанс 1^{cm} (рис. 2.15 a), который лежит внутри зоны $1^m - 1^3$.

При этом структурном резонансе рассматриваемая диэлектрическая решетка переизлучает падающую волну в направлении противоположном ее

распространения (рис. 2.15 *d*). Конфигурация поля $|E_{расc}|$, $|E_{полн}|$ и распределение энергии этого поля по обе стороны решетки сильно зависят от расстояния по оси z (рис. 2.15 *d, e, f, g, h*) для зон Френеля и Фраунгофера.

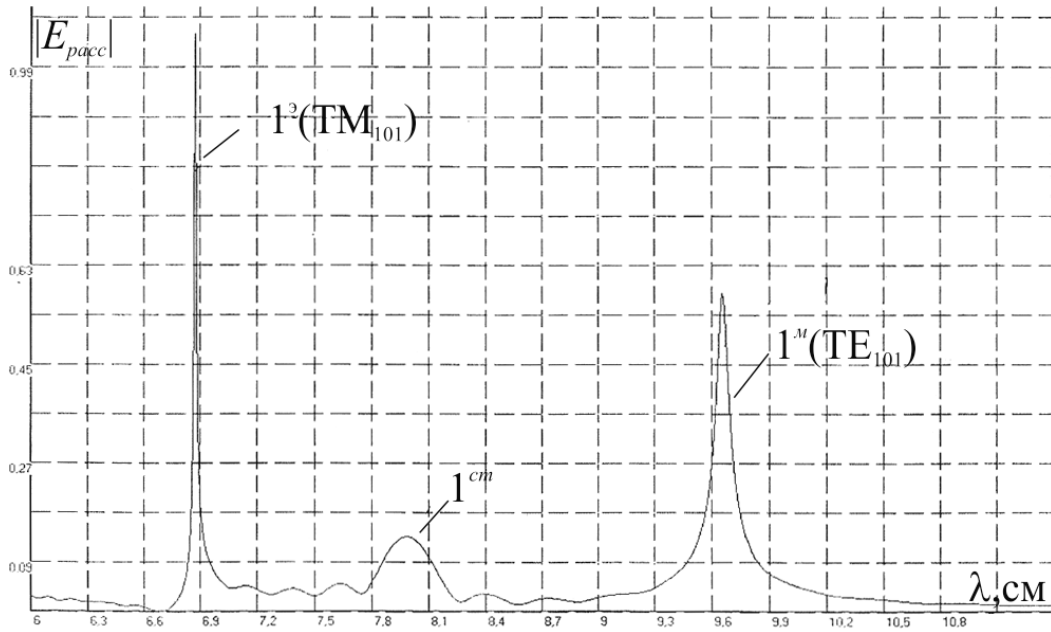


Рис. 2.15 *a*

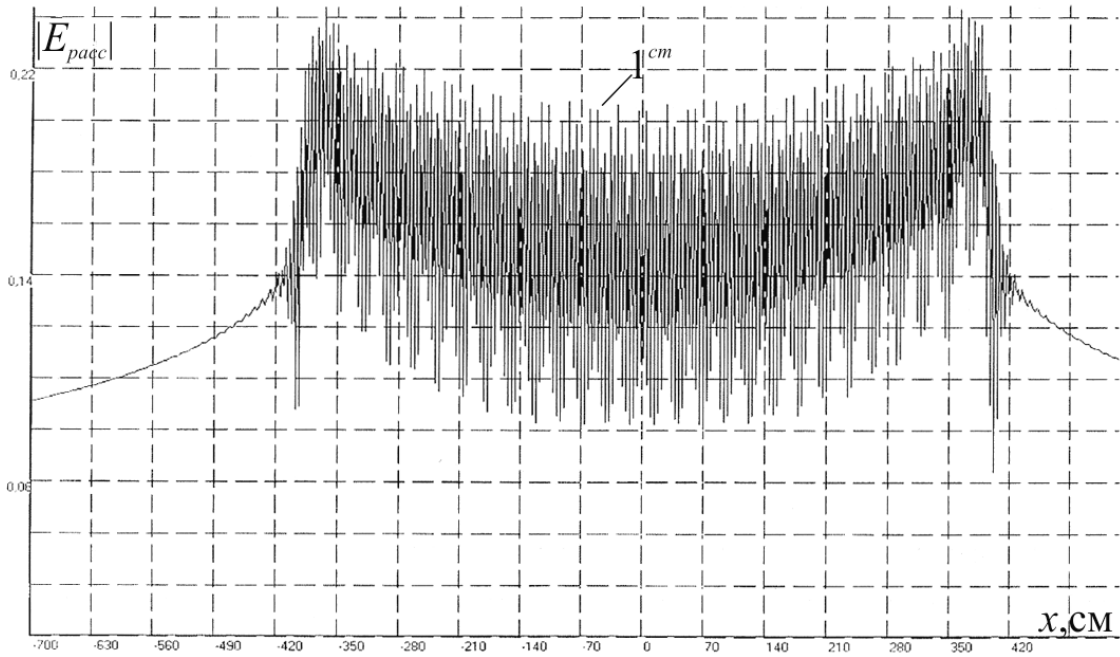


Рис. 2.15 *b*

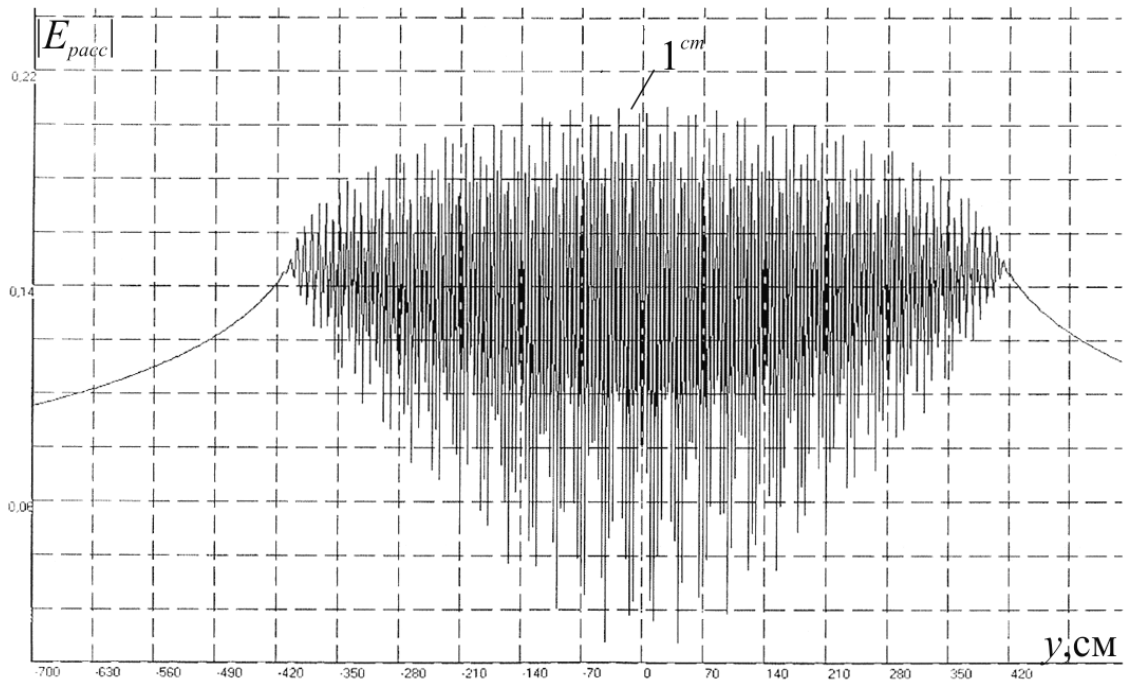


Рис. 2.15 c

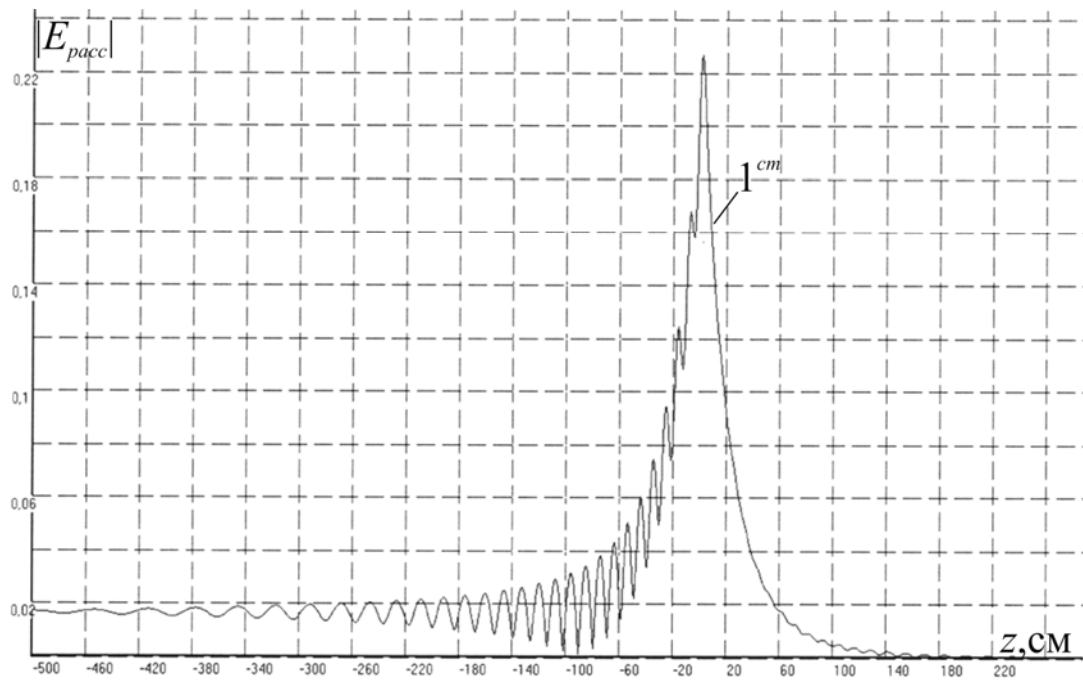


Рис. 2.15 d

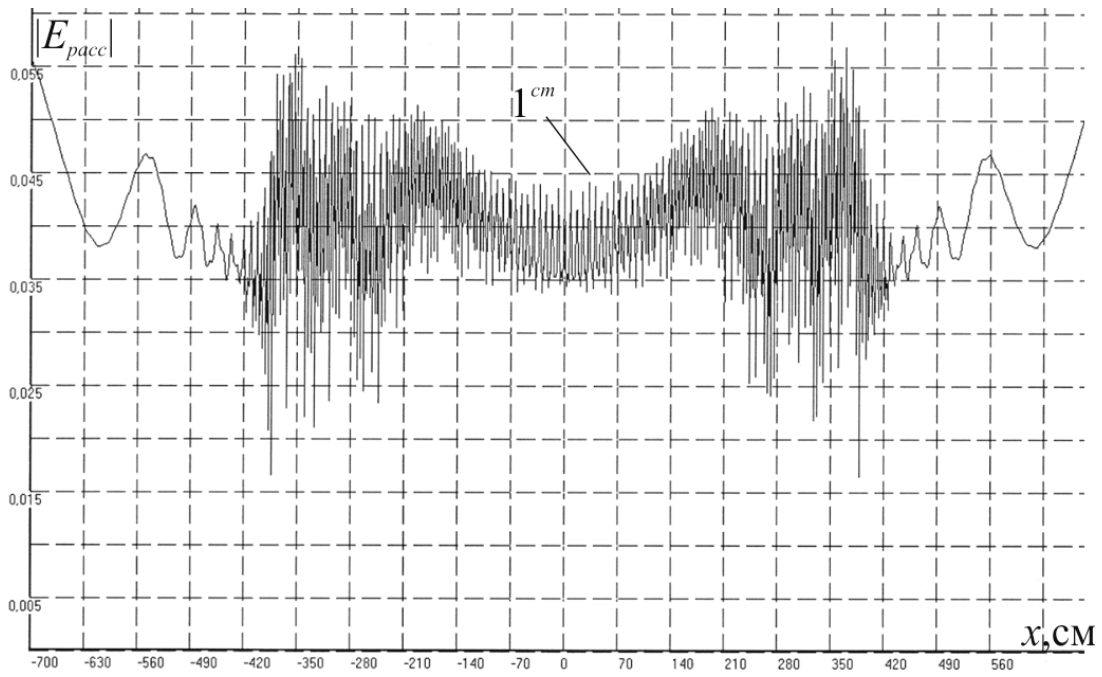


Рис. 2.15 e

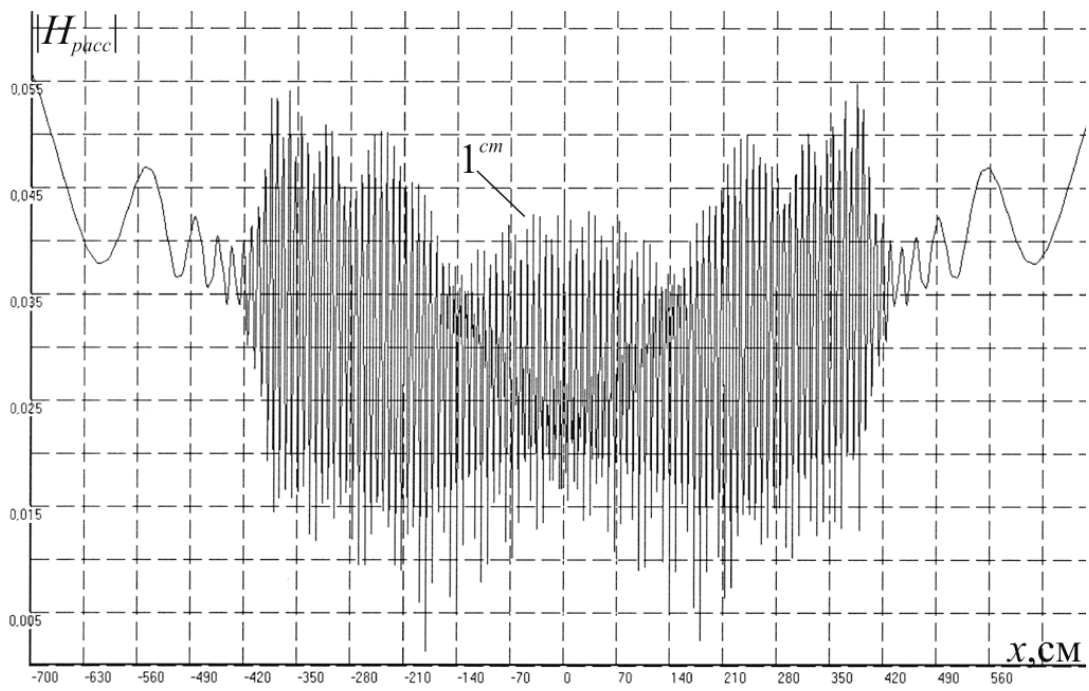


Рис. 2.15 f

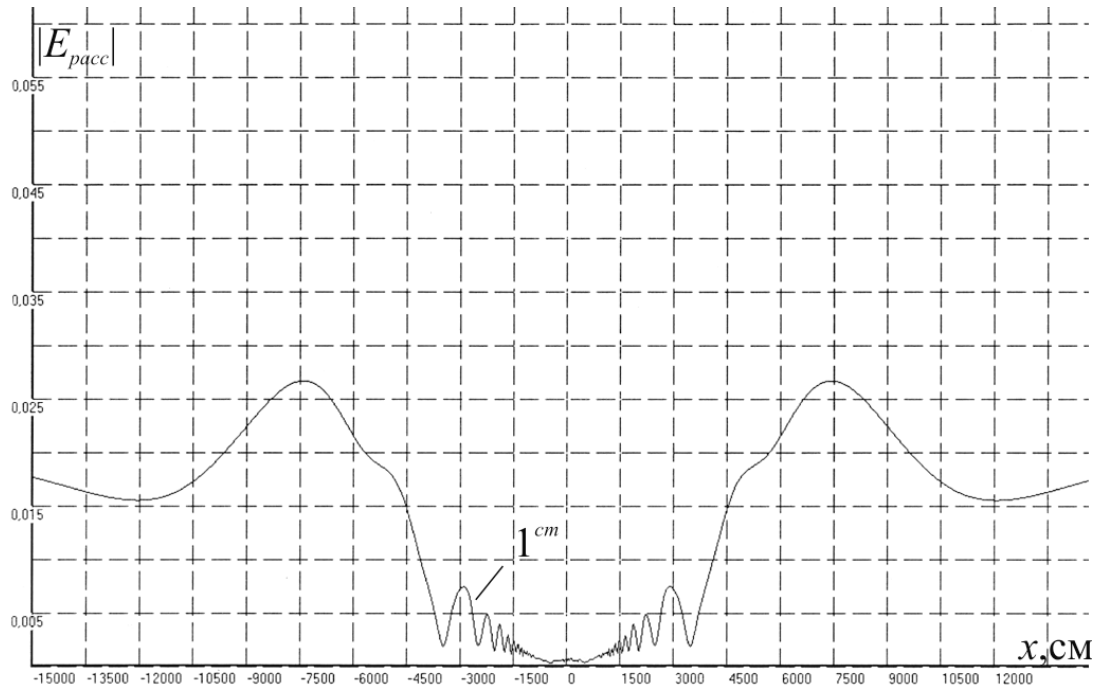


Рис. 2.15 г

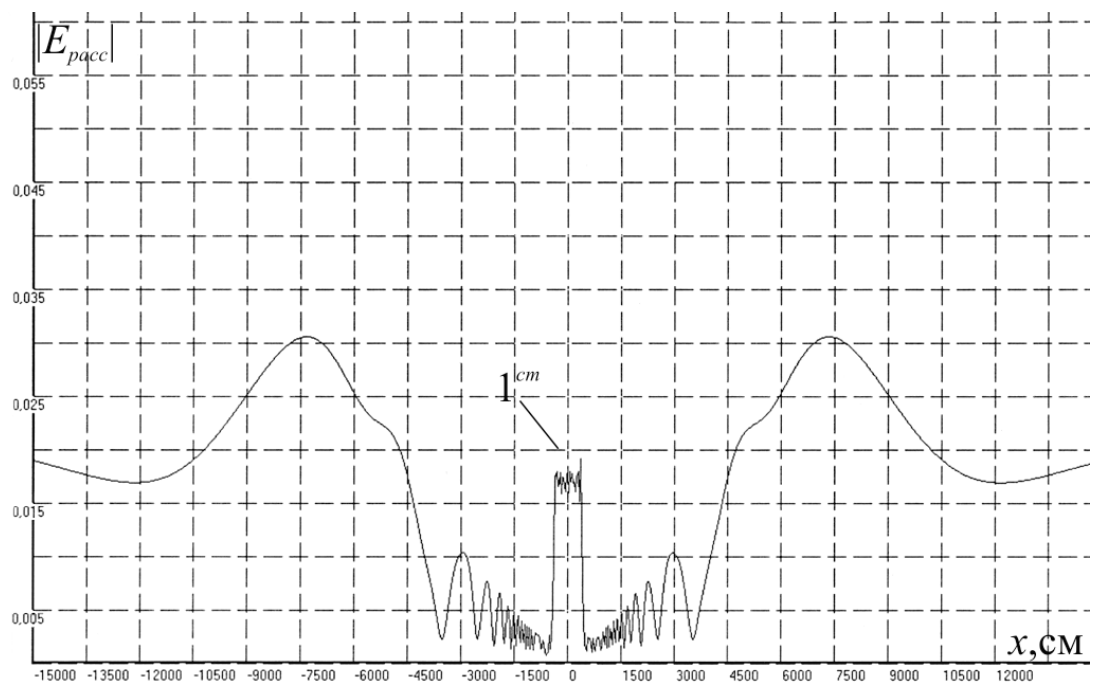


Рис. 2.15 h

Рис. 2.15 a, b, c, d, e, f, g, h. Зависимости поля $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (2.19), (2.35) плоской квадратной решетки сфер (рис. 2.10), когда $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $d=h=8$ см; $x_{s=0}=y_{t=0}=4$ см; $(s,t)=0,\pm 1,\dots,\pm 50$, от изменения:
 а) длины волны λ при $x=y=z=0$ см,

- b) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $y = z = 0$ см,
- c) координаты точки наблюдения поля y при $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $x = z = 0$ см,
- d) координаты точки наблюдения поля z при $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $x = y = 0$ см,
- e, f) координаты точки наблюдения поля x вне плоскости решетки при $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $y = 0$ см; $z = -60$ – зона Френеля,
- g, h) координаты точки наблюдения поля x вне плоскости решетки при $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $y = 0$ см; $z = +500$ см и $z = -500$ см – зона Френеля,

В плоской решетке в окрестности структурного резонанса возможно возбуждение стоячей волны (рис. 2.15 *i*) и двумерная решетка может вести себя как двумерный резонатор.

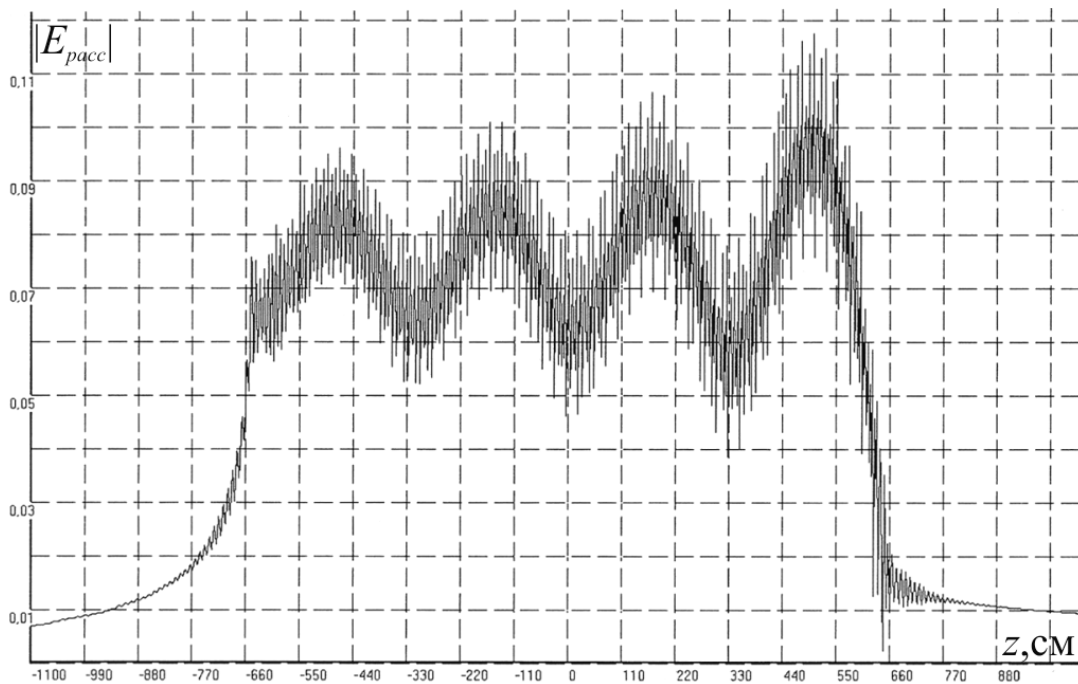


Рис. 2.15 *i*. Зависимости поля $|E_{pacc}|$, (2.19) плоской квадратной решетки сфер со стоячей волной (расположена в плоскости XZ , рис. 2.10), когда $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $d=l=8,1$ см; $x_{s=0} = z_{p=0} = 4,05$ см; $s = 0, \pm 1, \dots, \pm 120$; $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 80$ от изменения координаты точки наблюдения поля z при $\lambda = 8$ см; $x = y = 0$ см

На рис. 2.15 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

2.6.2. Магнитный резонанс плоской решетки

На рис. 2.16 для плоской квадратной решетки диэлектрических сфер (рис. 2.10) представлены:

1) дисперсионные зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$ (2.19), (2.35) от длины λ рассеиваемой волны (2.26) для случаев, когда в решетке совмещены возбужденные структурный (cm) и внутренний магнитный (m) резонансы (рис. 2.16 *a*), и возбужден только структурный (cm) резонанс (рис. 2.16 *b*);

2) зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$, $|E_{\text{полн}}|$ (2.19), (1.4), (2.35) от координат x , y внутри (рис. 2.16 *c*, *d*), и координат x , z вне решетки (рис. 2.16 *e*, *f*, *g*, *h*, *i*).

Структура поля $|E_{\text{расс}}|$, $|E_{\text{полн}}|$ (2.19), (1.4) определяется характером интерференции волн по осям z (рис. 2.16 *g*) и x (рис. 2.16 *h*, *i*) в зонах Френеля и Фраунгофера.

Число дифракционных максимумов в зоне Фраунгофера определяется соотношением между постоянными плоской решетки d , h и длиной волны λ_p^M (рис. 2.16 *i*).

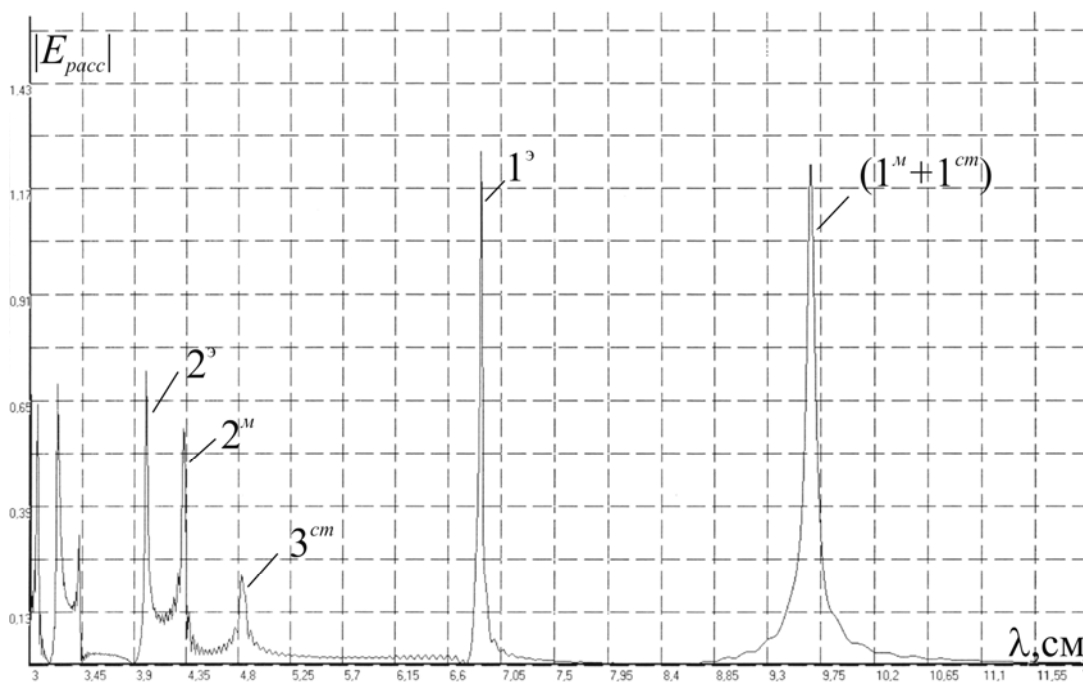


Рис. 2.16 *a*

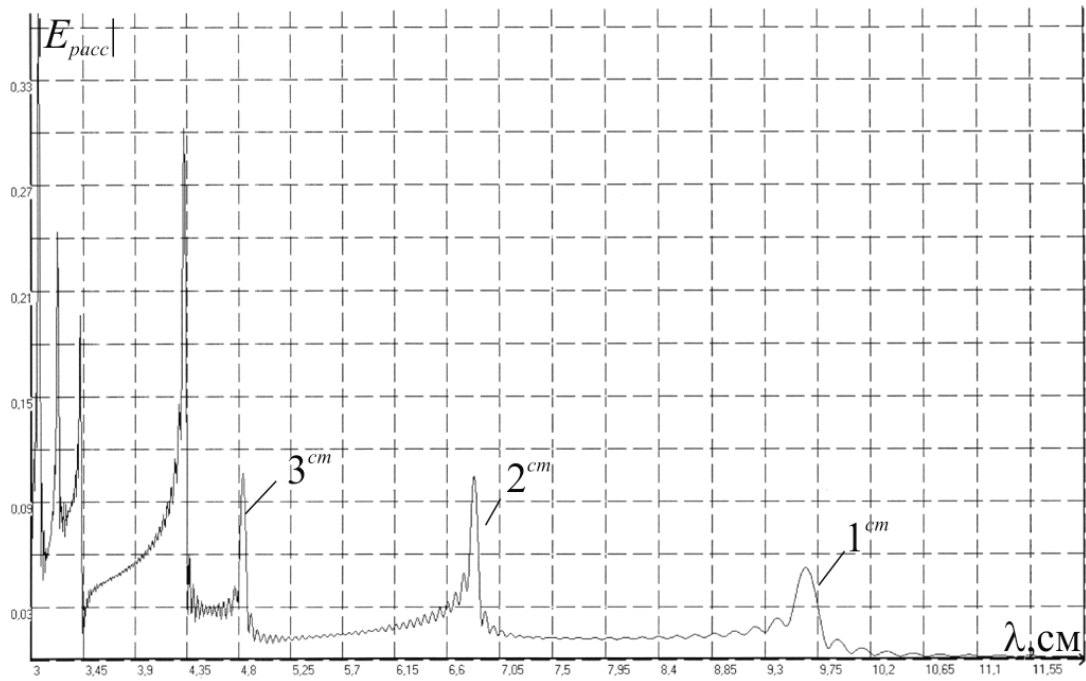


Рис. 2.16 б

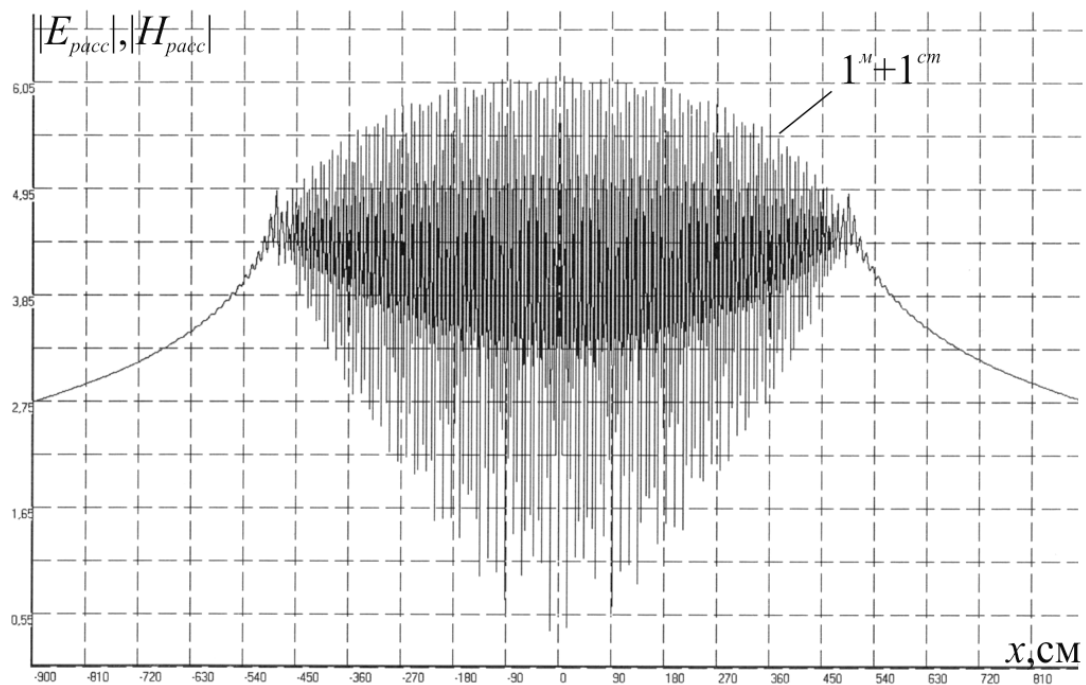


Рис. 2.16 с

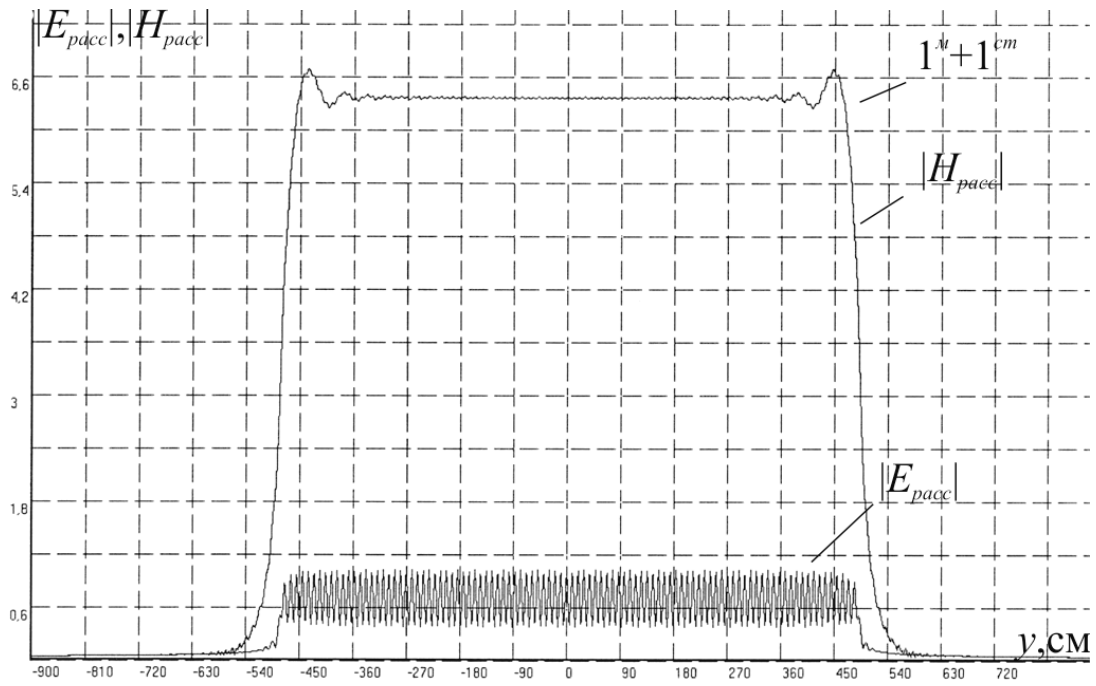


Рис. 2.16 d

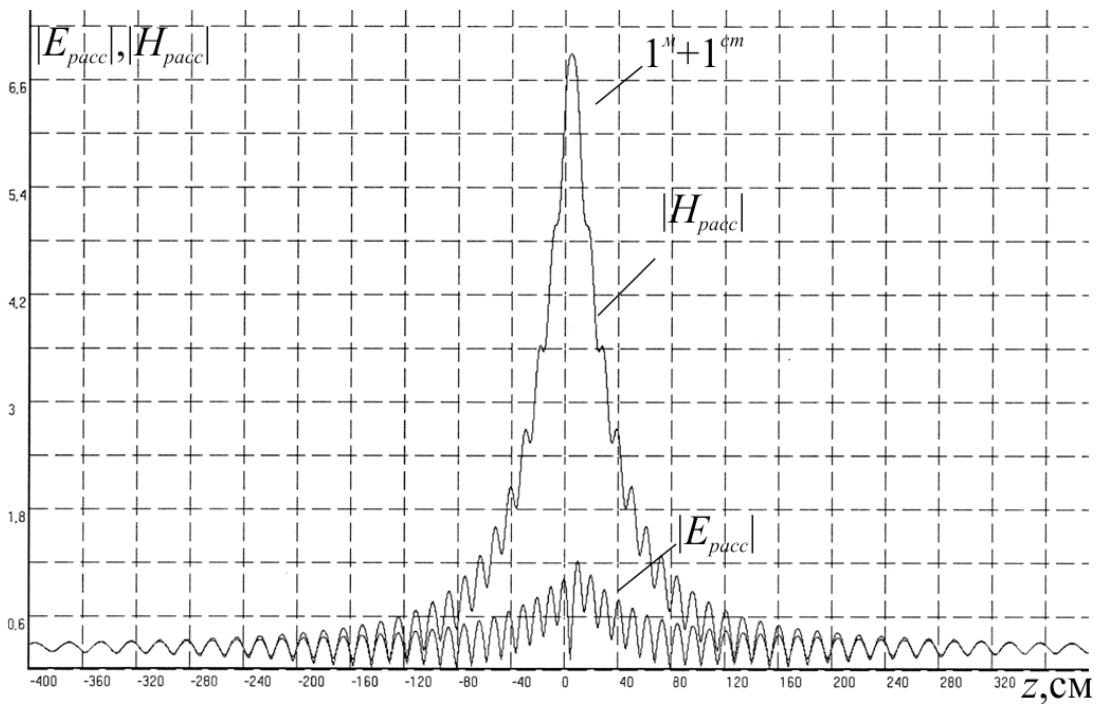


Рис. 2.16 e

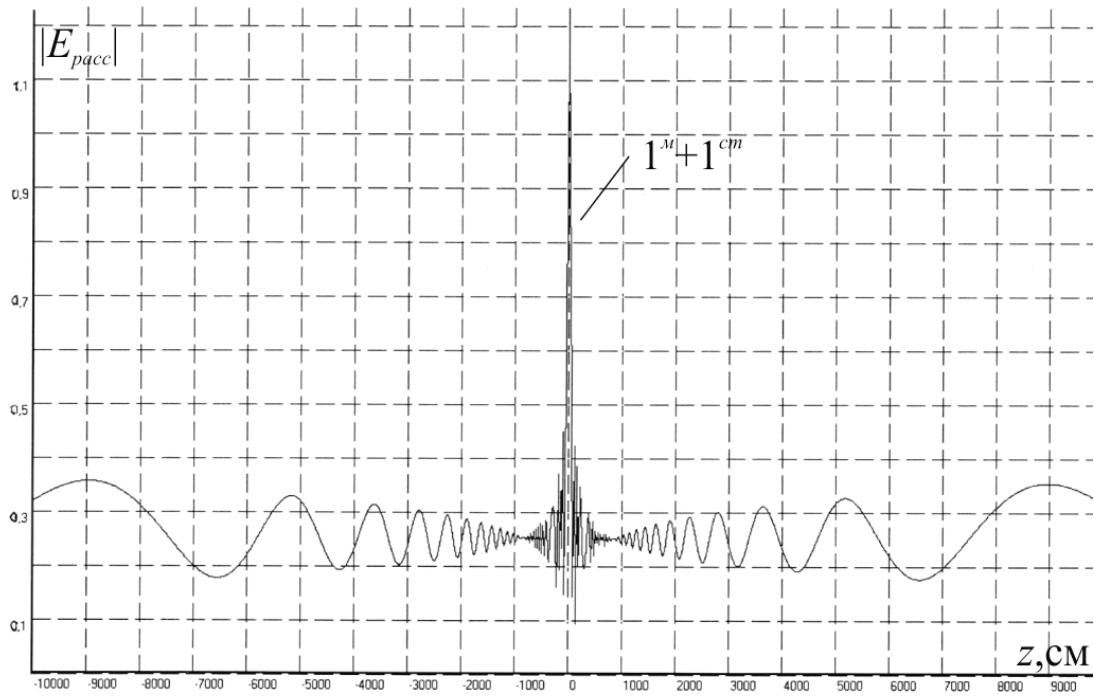


Рис. 2.16 f

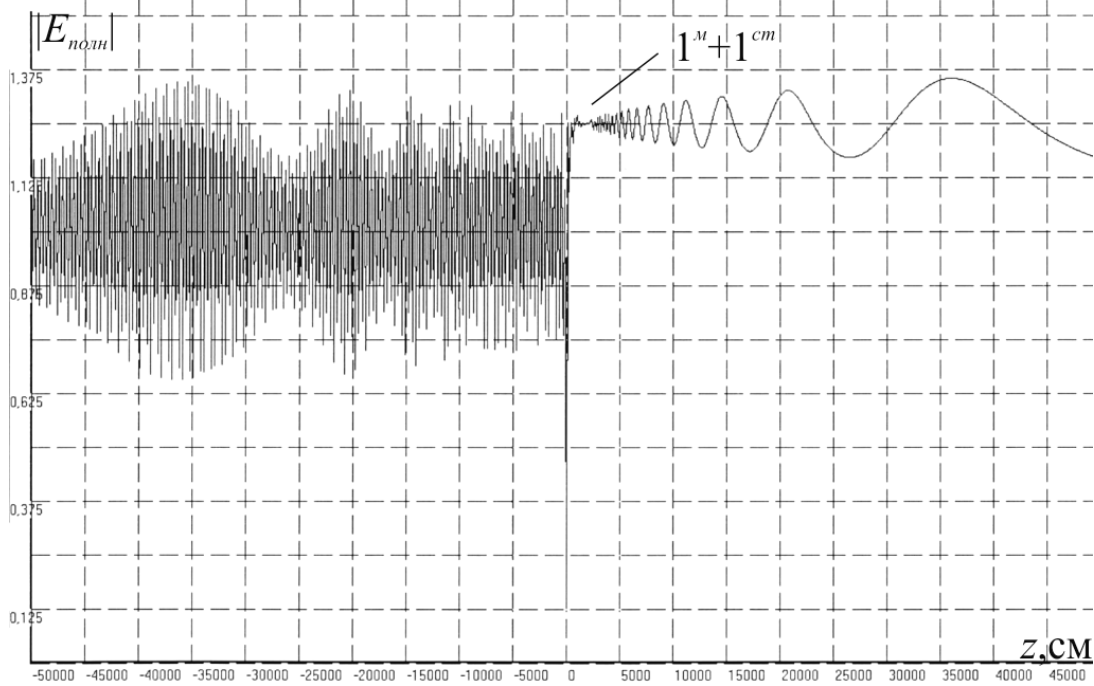


Рис. 2.16 g

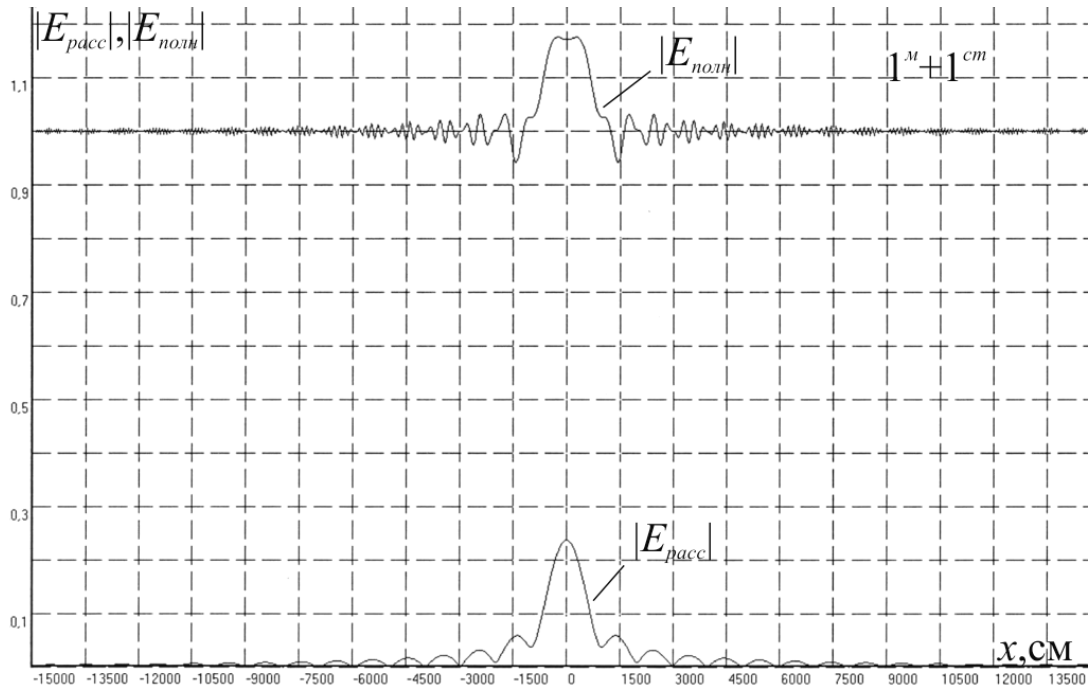


Рис. 2.16 h

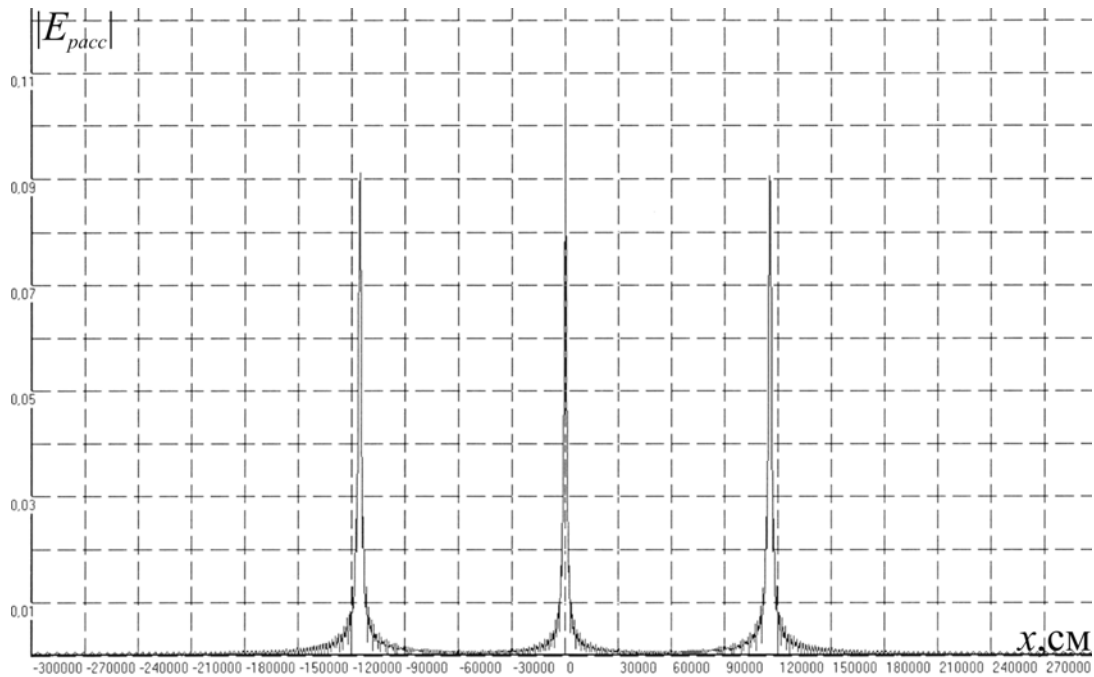


Рис. 2.16 i)

Рис. 2.16. Зависимости поля $|E_{расс}|$, $|E_{полн}|$ (2.19), (1.4) плоской квадратной решетки сфер (рис. 2.10), когда $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $d=h=9,661$ см; $x_{s=0}=y_{t=0}=4,83$ см; $(s,t)=0,\pm 1,\dots,\pm 50$, от изменения:

а) длины волны λ при $x=y=z=0$ см, $\epsilon'=95$; $\mu'=1$,

b) длины волны λ при $x = y = z = 0$ см, $\varepsilon' = 5$; $\mu' = 1$,

c) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^M = 9,661$ см; $y = z = 0$ см,

d) координаты точки наблюдения поля y при $\lambda_p^M = 9,661$ см; $x = z = 0$ см,

e, f, g) координаты точки наблюдения поля z при $\lambda_p^M = 9,661$ см;

$x = y = 0$ см – зона Френеля,

h) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^M = 9,661$ см; $y = 0$ см;

$z = 100000$ см – зона Фраунгофера,

i) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^M = 9,661$ см; $y = 0$ см;

$z = 200000$ см, когда $d = h = 2\lambda_p^M = 19,322$ см – зона Фраунгофера.

2.6.3. Электрический резонанс плоской решетки

На рис. 2.17 для плоской квадратной решетки диэлектрических сфер (рис. 2.10) рассматриваются:

1) дисперсионная зависимость поля $|E_{\text{расс}}|$ (2.19), (2.35) от длины λ рассеиваемой волны (2.26) для случая, когда в решетке совмещены возбужденные структурный (cm) и внутренний электрический (ε) резонансы (рис. 2.17 a) и возбужден только структурный резонанс (cm) (рис. 2.17 b),

2) зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$ от координат x, y, z внутри (рис. 2.17 c, d, e), и координаты z вне (рис. 2.17 f) решетки,

3) зависимости поля $|E_{\text{расс}}|, |E_{\text{полн}}|$ (2.19), (1.4), (2.35) от координаты x вне решетки в зоне Фраунгофера (рис. 2.17 g, h).

Сопоставление рис. 2.16 и рис. 2.17 показывает, что решетки с резонансом рассеяния $1^M + 1^{cm}$ (рис. 2.16) и резонансом рассеяния $1^\varepsilon + 1^{cm}$ (рис. 2.17) переизлучают волну, в основном, во взаимноперпендикулярных плоскостях – в первом случае, в плоскости XZ , а во втором, в плоскости YZ . Причем, это переизлучение по обе стороны решетки вдоль оси z (рис. 2.10) симметрично.

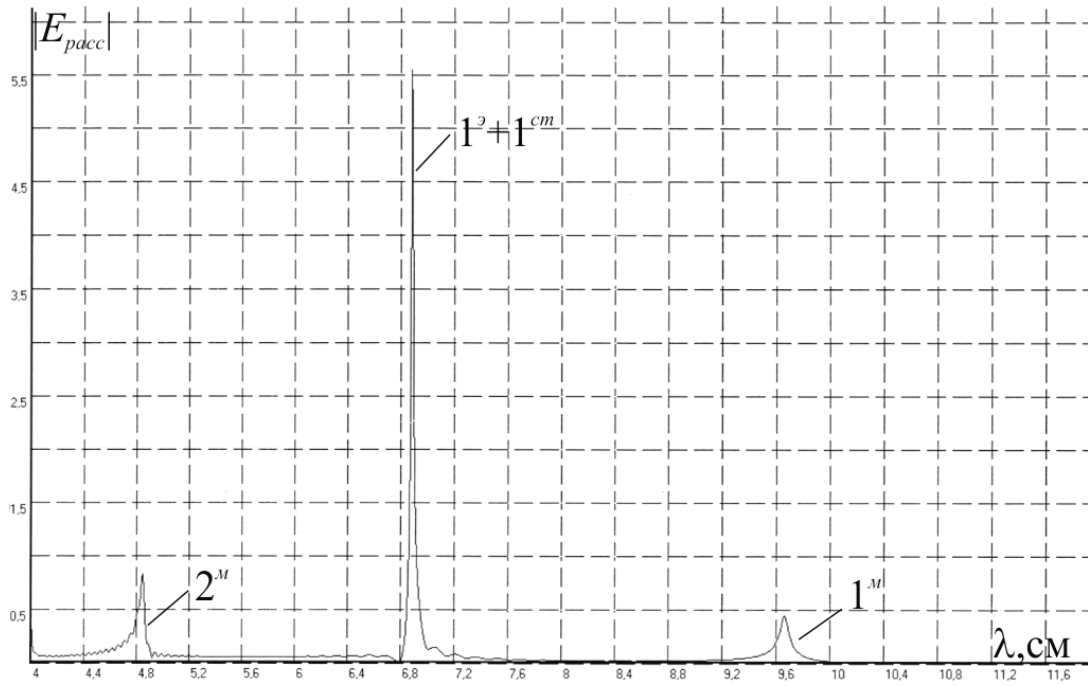


Рис. 2.17 а

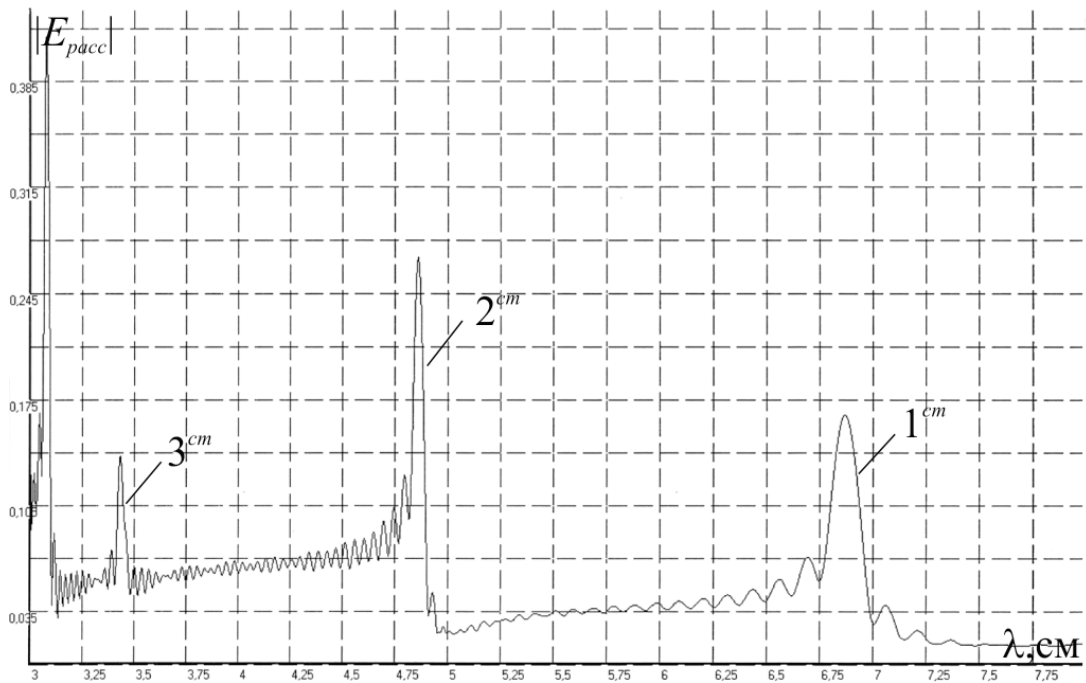


Рис. 2.17 б

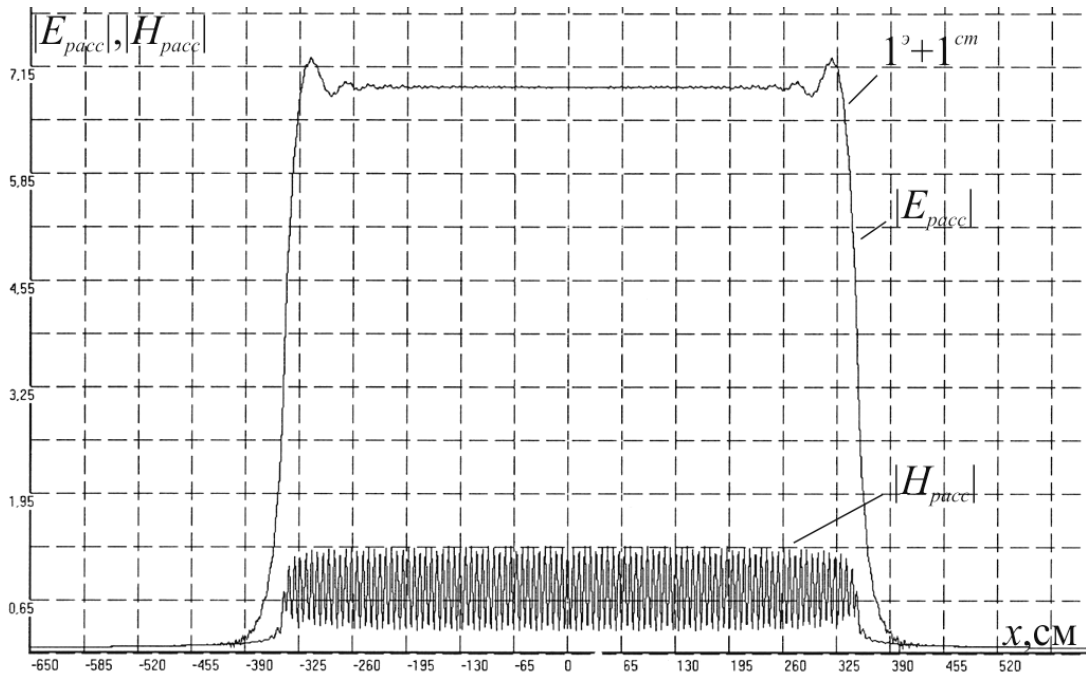


Рис. 2.17 с

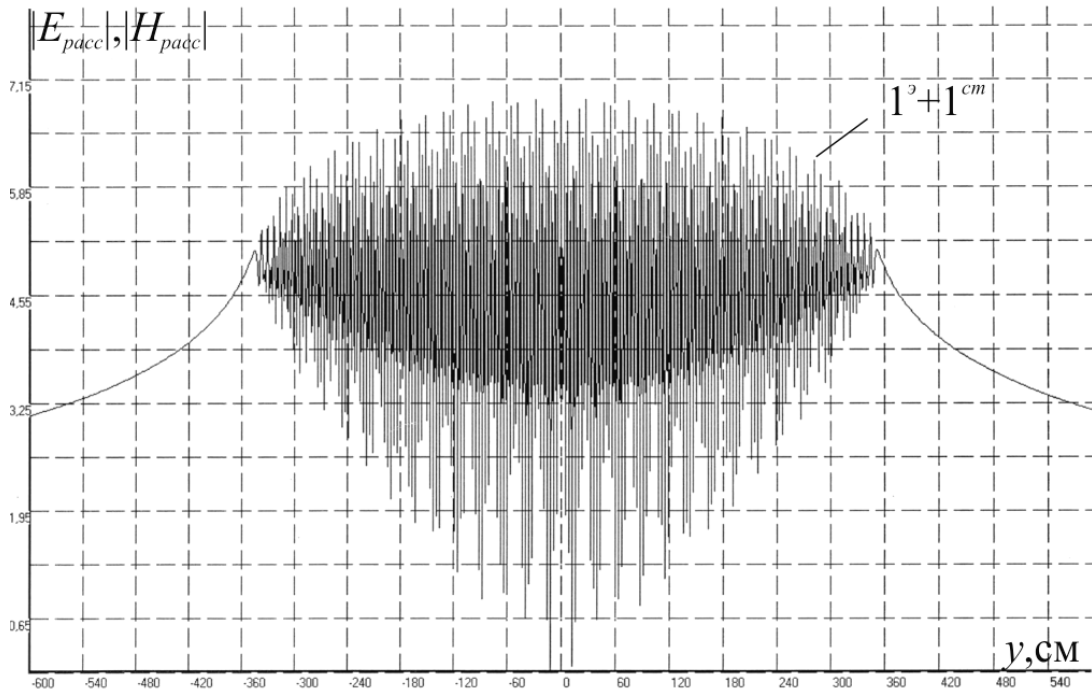


Рис. 2.17 d

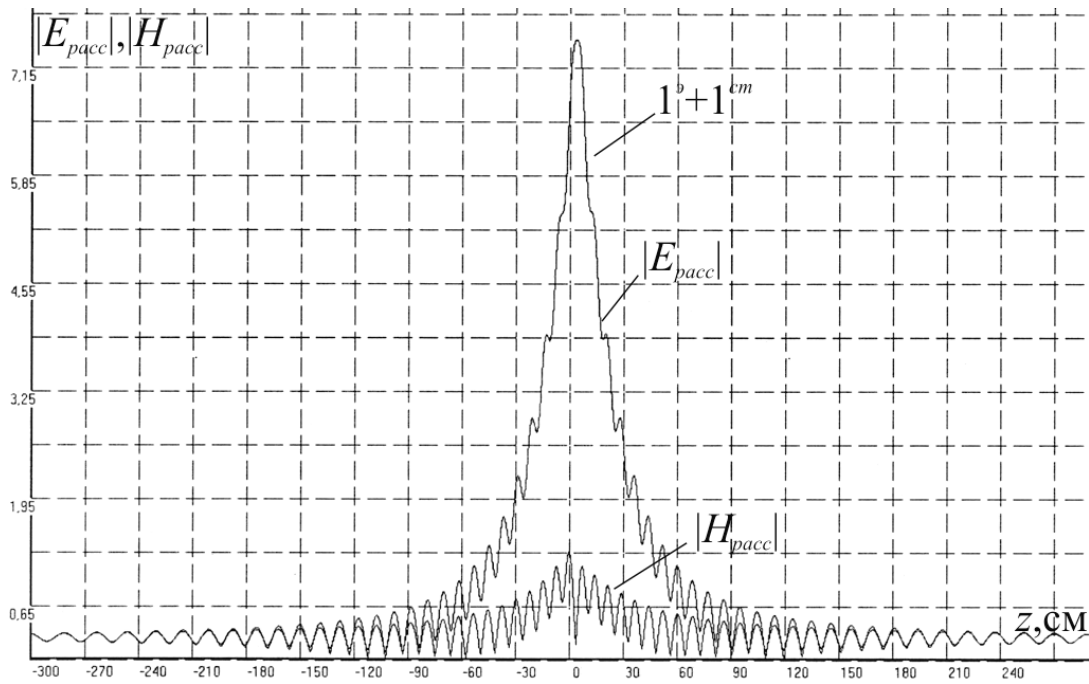


Рис. 2.17 e

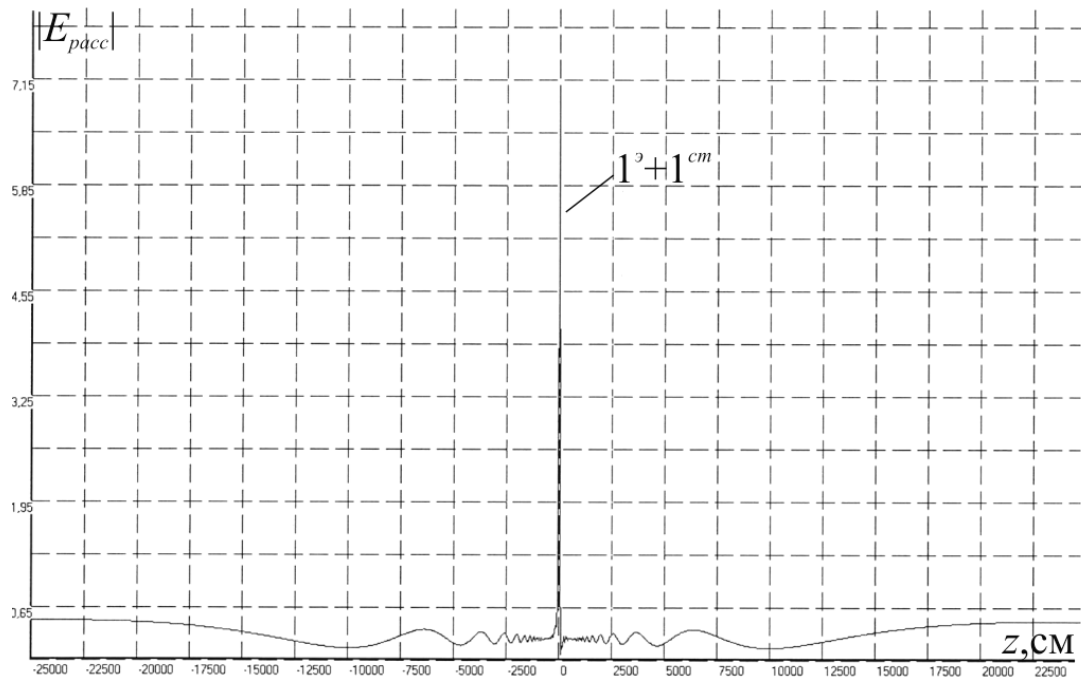


Рис. 2.17 f

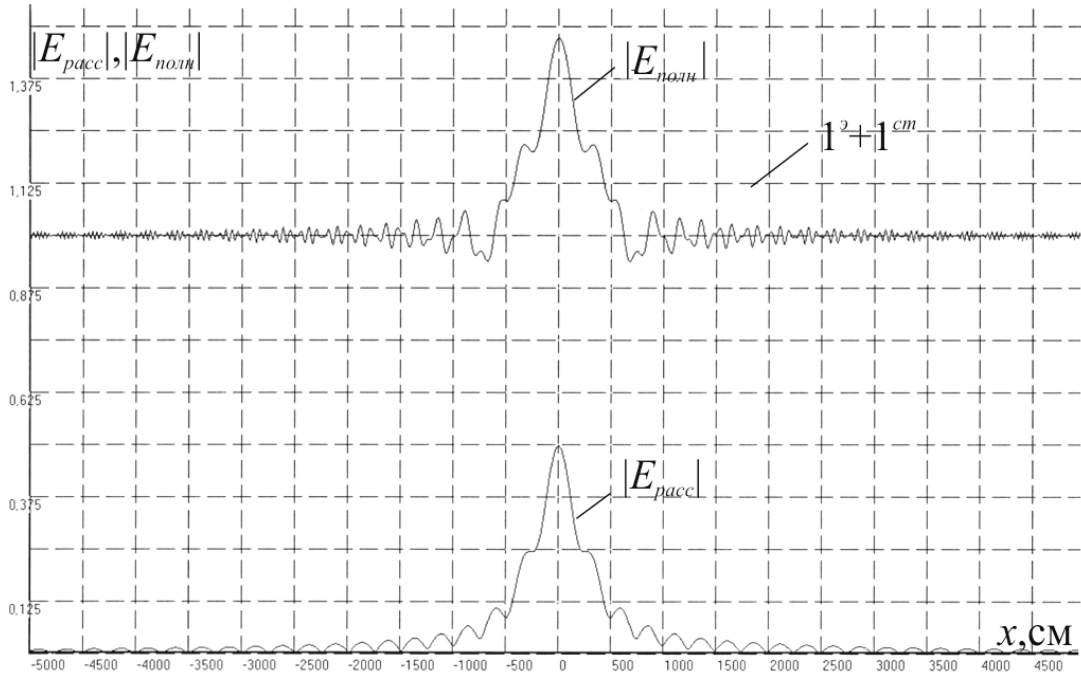


Рис. 2.17 g

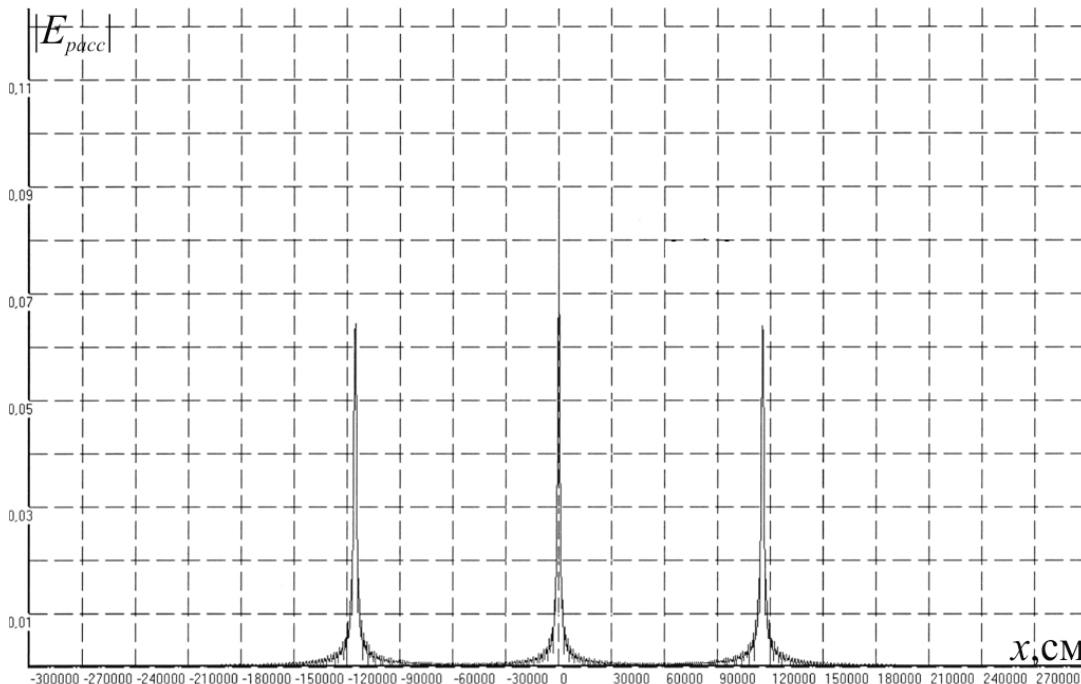


Рис. 2.17 h

Рис. 2.17. Зависимости поля $|E_{расс}|$, $|E_{полн}|$ (2.19), (1.4), (2.35) плоской квадратной решетки сфер (рис. 2.10), когда $a=0,5$ см; $\varepsilon'=95$; $\mu'=1$; $d=h=6,875$ см; $x_{s=0}=y_{t=0}=3,44$ см; $(s,t)=0,\pm 1,\dots,\pm 50$, от изменения:

a) длины волны λ при $x = y = z = 0$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$,

b) длины волны λ при $x = y = z = 0$ см, $\varepsilon' = 5$; $\mu' = 1$,

c) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{\circ} = 6,875$ см; $y = z = 0$ см,

d) координаты точки наблюдения поля y при $\lambda_p^{\circ} = 6,875$ см; $x = z = 0$ см,

e, f) координаты точки наблюдения поля z при $\lambda_p^{\circ} = 6,875$ см; $x = y = 0$ см –

зоны Френеля и Фраунгофера,

g) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{\circ} = 6,875$ см; $y = 0$ см; $z = 25000$ см – зона Фраунгофера,

h) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{\circ} = 6,875$ см; $y = 0$ см; $z = 200000$ см; $d = h = 2\lambda_p^{\circ} = 13,75$ см – зона Фраунгофера

2.6.4. Вырожденный резонанс плоской решетки

На рис. 2. 18 для плоской квадратной решетки магнитодиэлектрических сфер (рис. 2.10) изображены:

1) дисперсионные зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$ (2.19), (2.35) от длины λ рассеиваемой волны для случаев, когда в решетке совмещены возбужденные структурный (*ст*) резонанс и внутренний вырожденный (*м*, *э*) резонанс сфер (рис. 2.18 a), и возбужден только структурный (*ст*) резонанс (рис. 2.18 b);

2) зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$ от координат x , y внутри (рис. 2.18 c, d), и координаты z вне решетки (рис. 2.18 e). На рис. 2.18 c и рис. 2.18 e (кривая 0) представлены зависимости для плоской решетки с отверстием.

3) зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$, $|E_{\text{полн}}|$ (2.19), (1.4), (2.35) от координаты x вне решетки в зоне Фраунгофера при разных соотношениях постоянных d , h решетки и длины волны $\lambda_p^{m,\varepsilon}$. На рис. 2.18 f-i число дифракционных максимумов в зоне Фраунгофера, как и в предыдущих случаях, – рис. 2.16 h, i; рис. 2.17 g, h определяется соотношением постоянных d , h решетки и длины

волны $\lambda_p^{m,\vartheta}$. Эти дифракционные максимумы в сечении плоскостью XY в зоне Фраунгофера приобретают вид серии упорядоченных дифракционных пятен, подобных пятнам на дифракционных картинах лауэграмм [53].

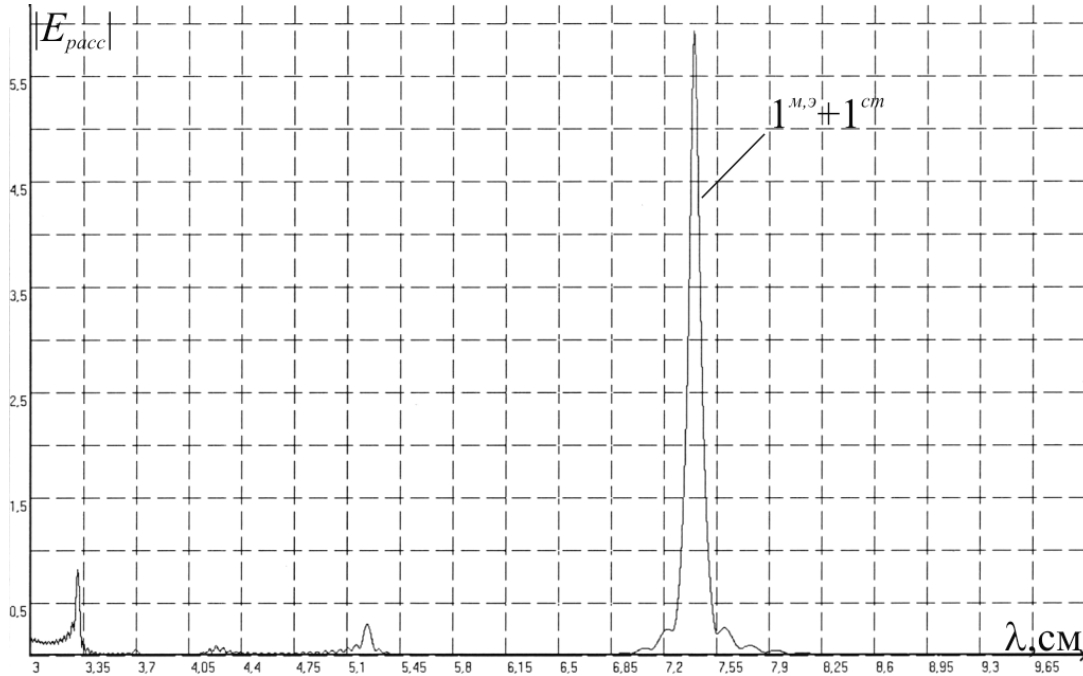


Рис. 2.18 а

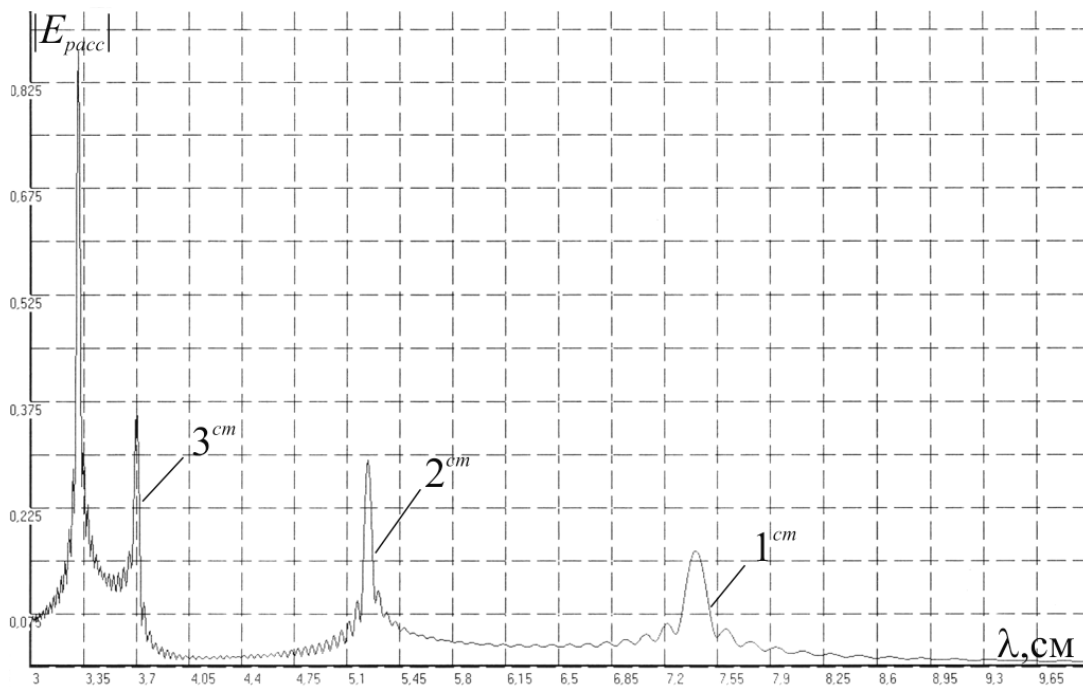


Рис. 2.18 б

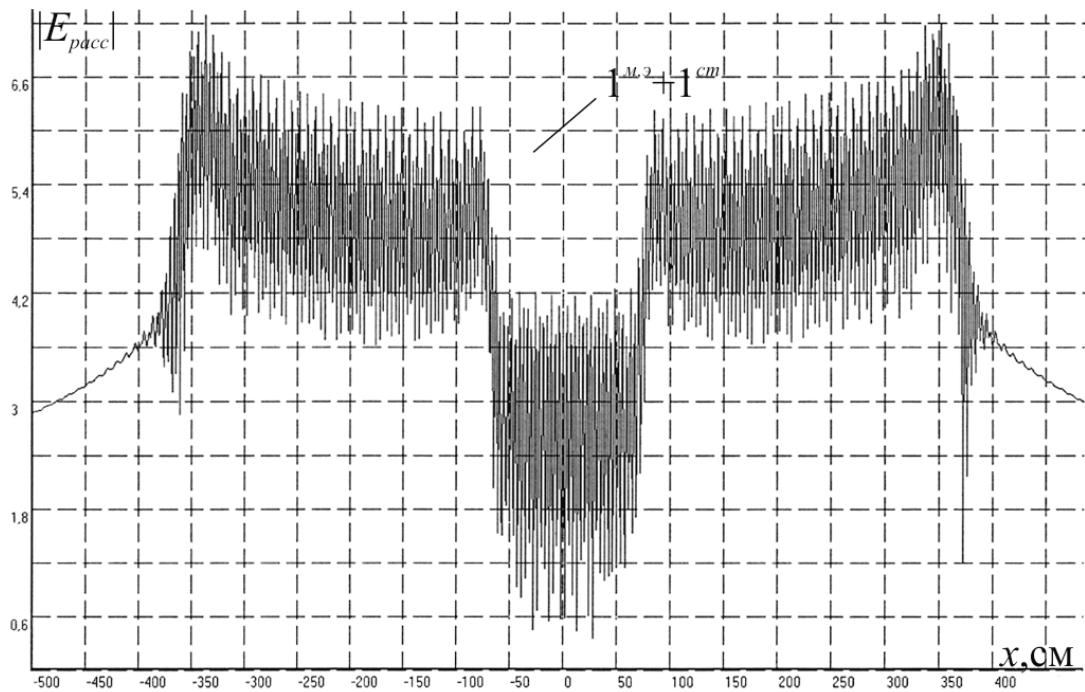


Рис. 2.18 с

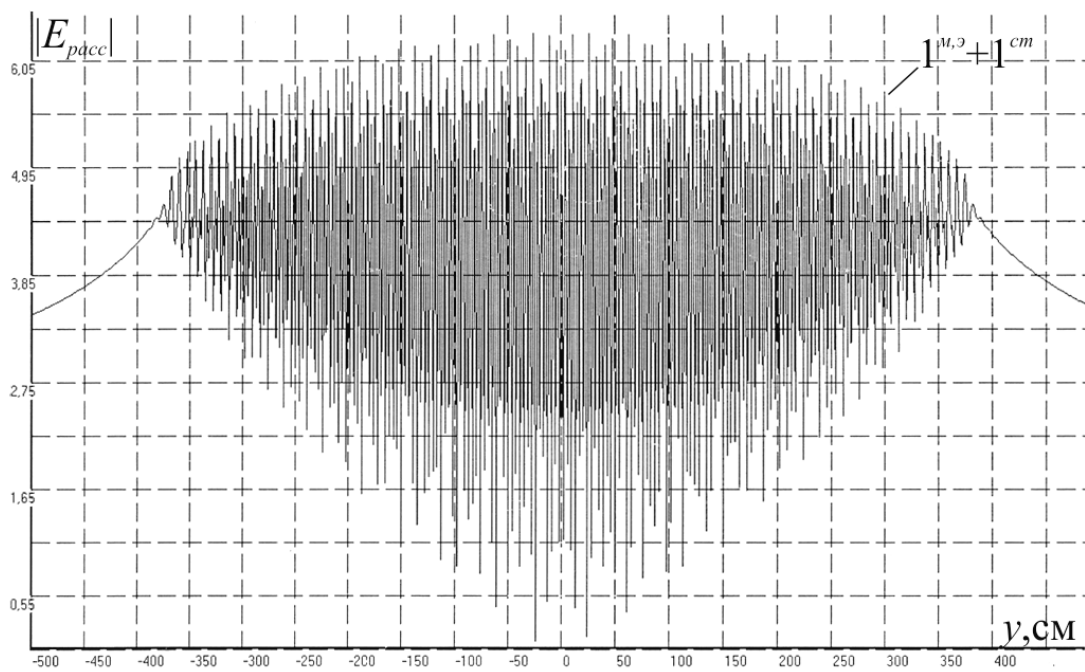


Рис. 2.18 d

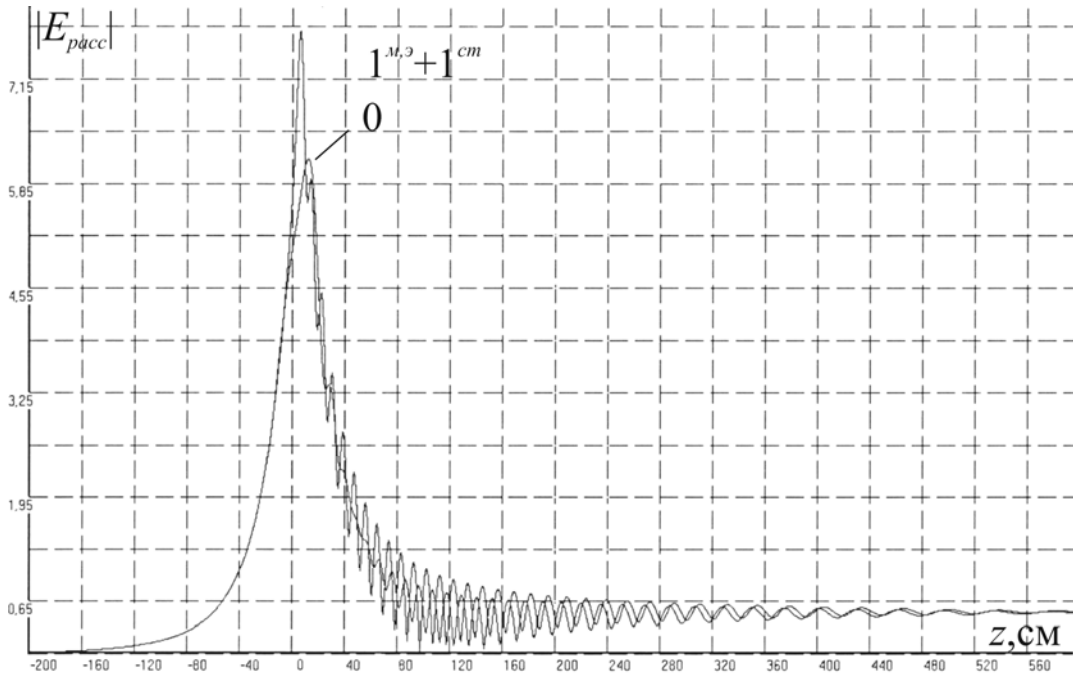


Рис. 2.18 e

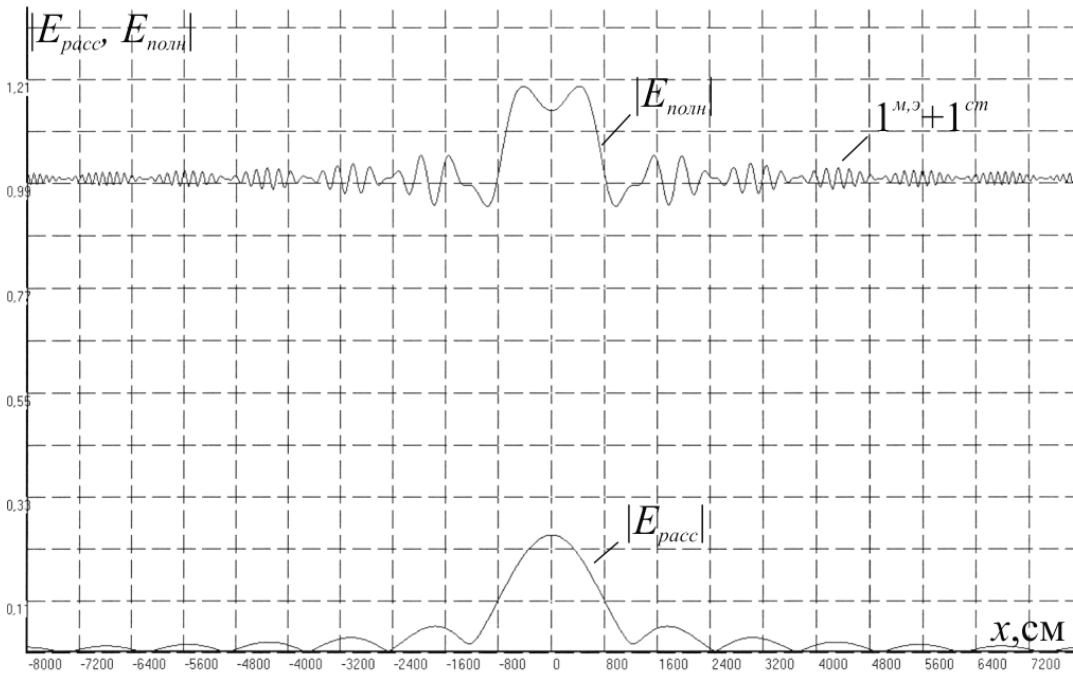


Рис. 2.18 f

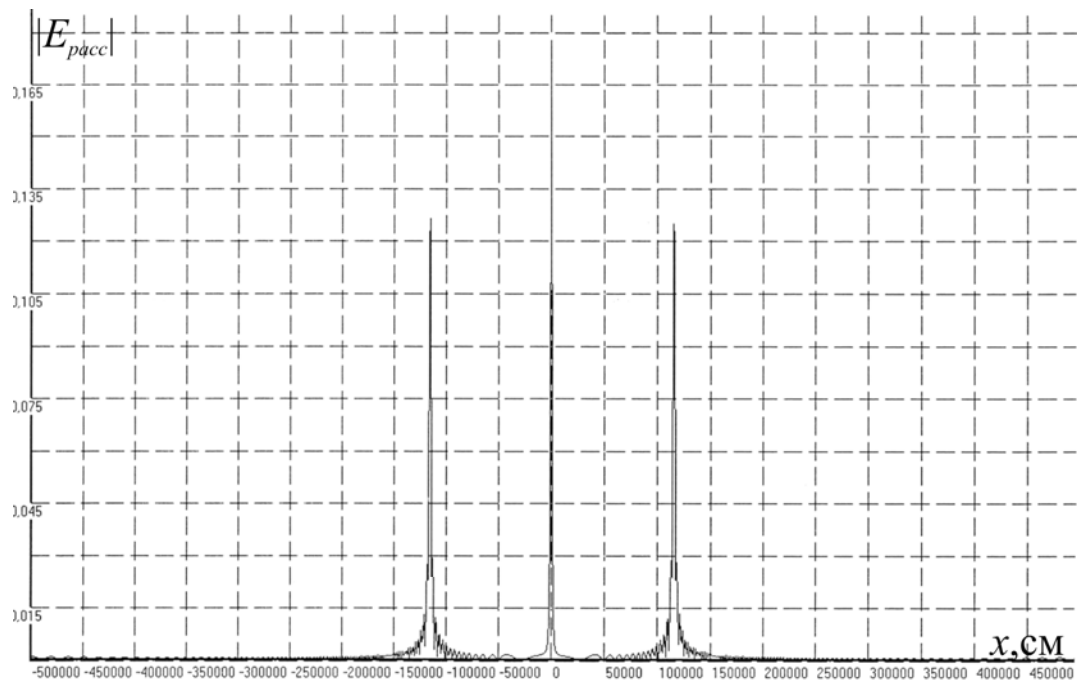


Рис. 2.18 g

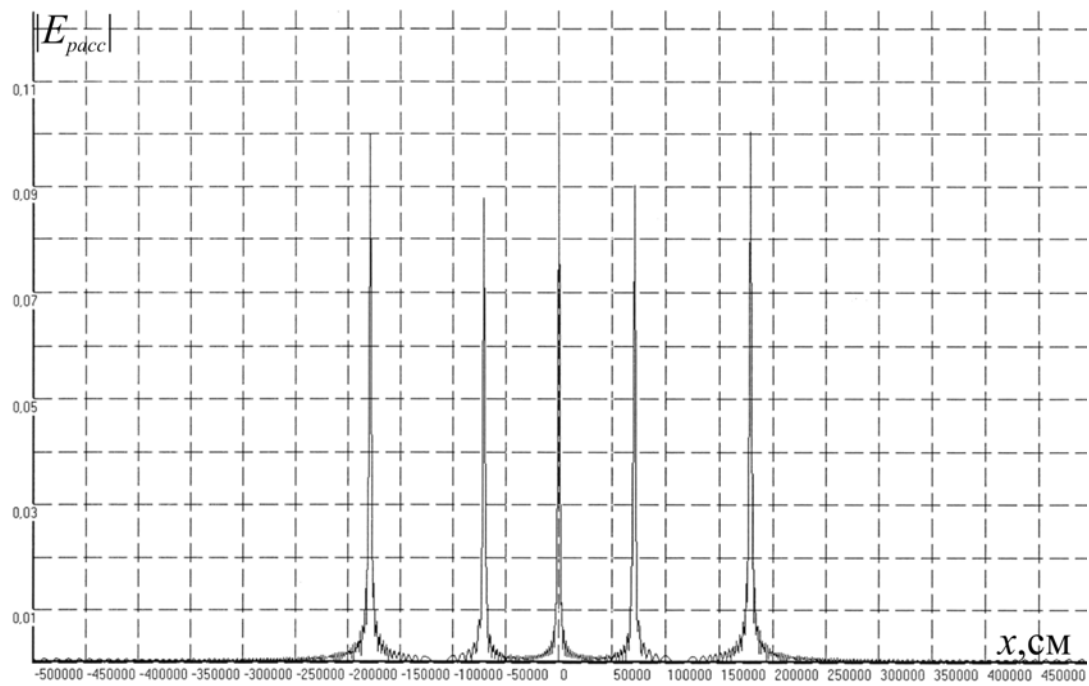


Рис. 2.18 h

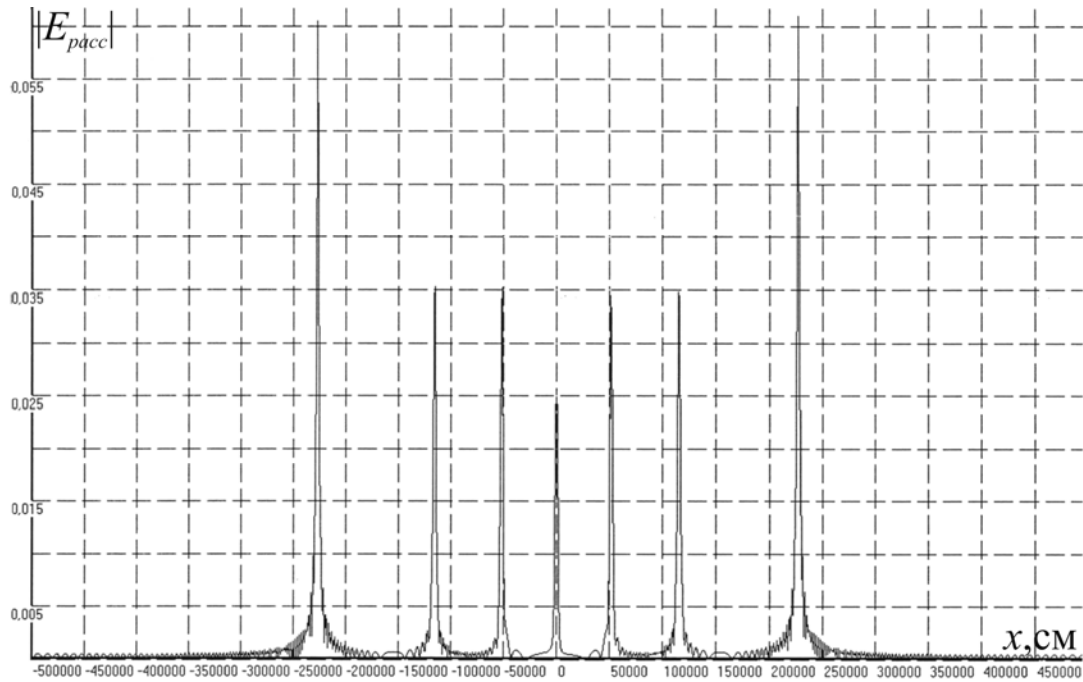


Рис. 2.18 i

Рис. 2.18. Зависимости поля $|E_{pacc}|$, $|E_{полн}|$ (2.19), (1.4), (2.35) плоской квадратной решетки сфер (рис. 2.10), когда $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,746$; $d = h = 7,4075$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = 3,70375$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$, от изменения:

- a) длины волны λ при $x = y = 0$ см,
- b) длины волны λ при $x = y = 0$ см, $\epsilon' = 5$; $\mu' = 1$,
- c) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{M, \vartheta} = 7,4075$ см; $y = z = 0$ см; $(s, t) = \pm 10, \dots, \pm 50$ (отверстие),
- d) координаты точки наблюдения поля y при $\lambda_p^{M, \vartheta} = 7,4075$ см; $x = z = 0$ см,
- e) координаты точки наблюдения поля z при $\lambda_p^{M, \vartheta} = 7,4075$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = \pm 4, \dots, \pm 50$ (отверстие, кривая 0) – зона Френеля,
- f) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{M, \vartheta} = 7,4075$ см; $y = 0$; $z = 100000$ см; $d = h = \lambda_p^{M, \vartheta} = 7,4075$ см – зона Фраунгофера,
- g) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{M, \vartheta} = 7,4075$ см; $y = 0$; $z = 200000$ см; $d = h = 2\lambda_p^{M, \vartheta} = 14,815$ см – зона Фраунгофера,

h) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{M,\vartheta} = 7,4075$ см; $y = 0$; $z = 200000$ см; $d = h = 3\lambda_p^{M,\vartheta} = 22,2225$ см – зона Фраунгофера,

i) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda_p^{M,\vartheta} = 7,4075$ см; $y = 0$; $z = 200000$ см; $d = h = 4\lambda_p^{M,\vartheta} = 29,63$ см – зона Фраунгофера.

На рис. 2.18 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

На рис. 2.19 для плоской квадратной решетки магнитодиэлектрических сфер, расположенной в плоскости YZ (рис. 2.10), представлены зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$ от длины рассеиваемой волны λ (рис.2.19 a), от координаты x вне (рис. 2.19 b) и координат y, z внутри (рис. 2.19 c, d) решетки.

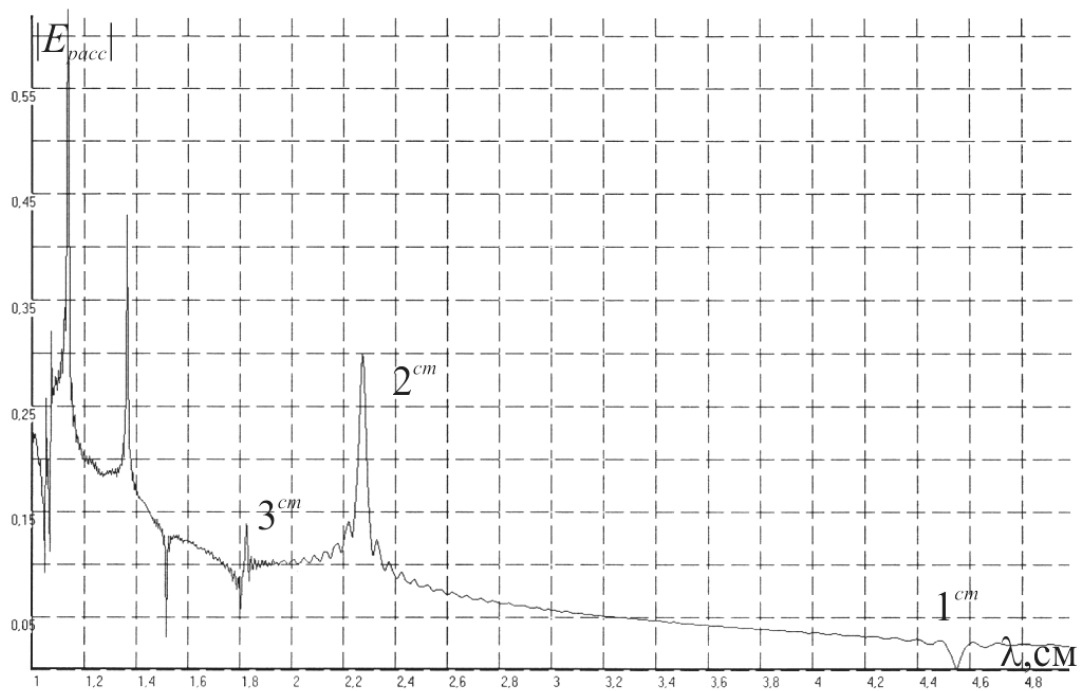


Рис. 2.19 a

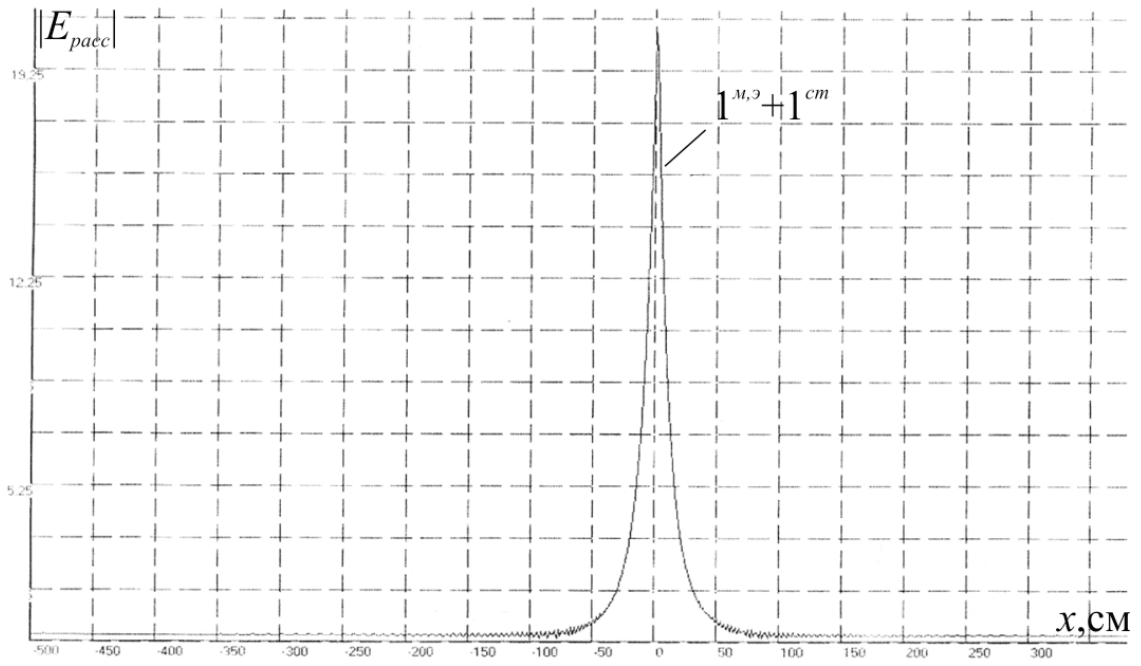


Рис. 2.19 б

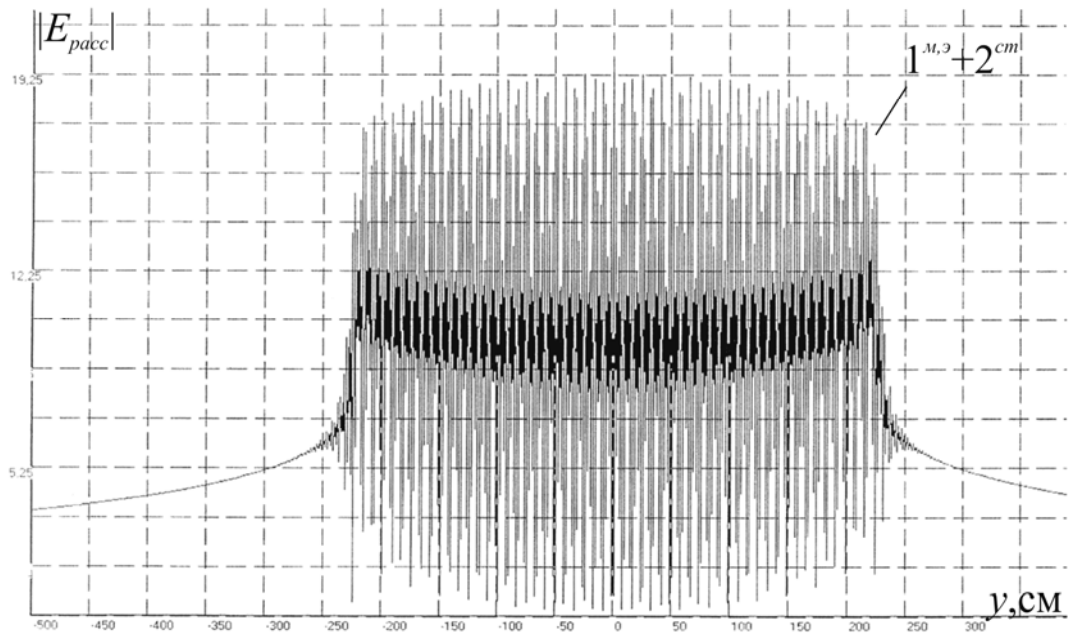


Рис. 2.19 с

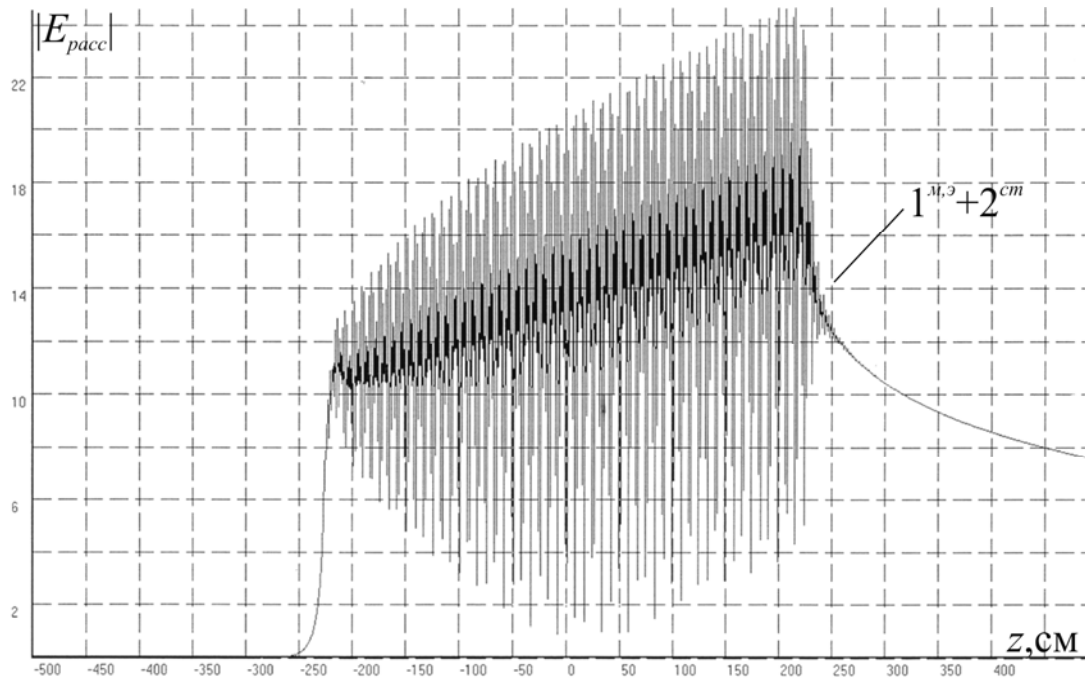


Рис. 2.19 d

Рис. 2.19. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19), (2.35) плоской квадратной решетки сфер (расположена в плоскости YZ , рис.2. 10), когда $a = 0,15$ см; $\varepsilon' = \mu' = 10$; $h = l = 2,2745$ см; $d = 0$; $y_{t=0} = z_{p=0} = 1,13725$ см; $(t, p) = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$, от изменения:

- a) длины рассеиваемой волны λ при $x = y = z = 0$ см, $\varepsilon' = 5$; $\mu' = 1$,
- b) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda = 2,2745$ см; $y = z = 0$ см,
- c) координаты точки наблюдения поля y при $\lambda = 2,2745$ см; $x = z = 0$ см,
- d) координаты точки наблюдения поля z при $\lambda = 2,2745$ см; $x = y = 0$ см.

Рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

На рис. 2.20 для плоской квадратной решетки магнитоэлектрических сфер, расположенной в плоскости XZ (рис. 2.10), представлены зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) от длины волны λ (2.20 a) и координат x, z внутри (рис. 2.20 b, d) и координаты y вне (рис. 2.20 c) решетки.

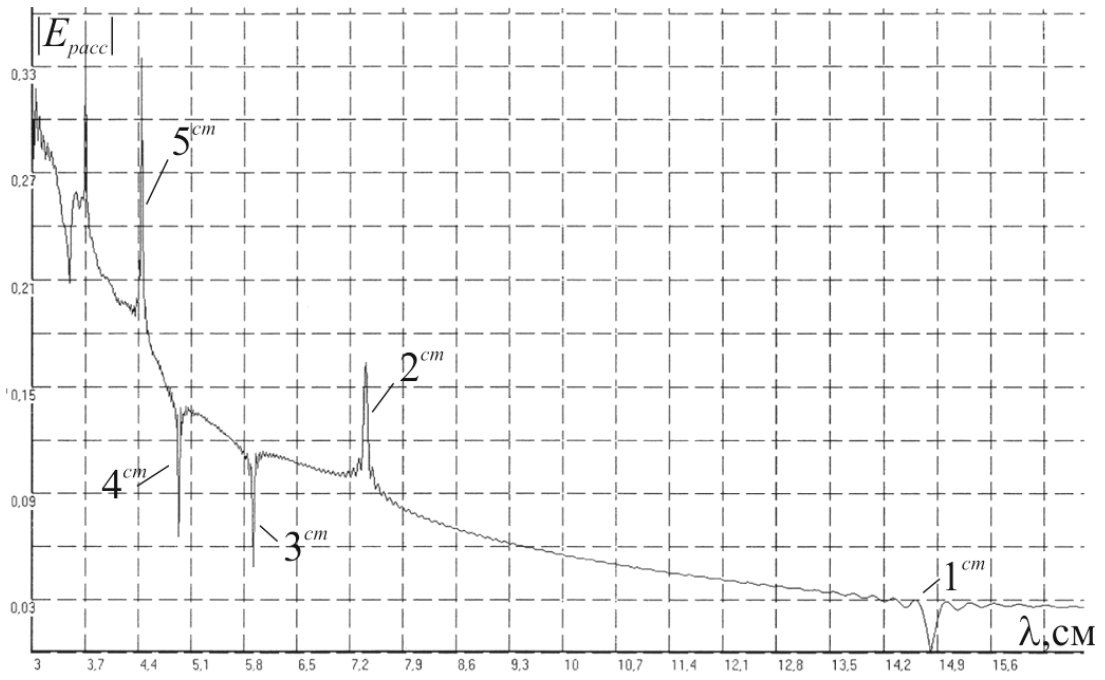


Рис. 2.20 а

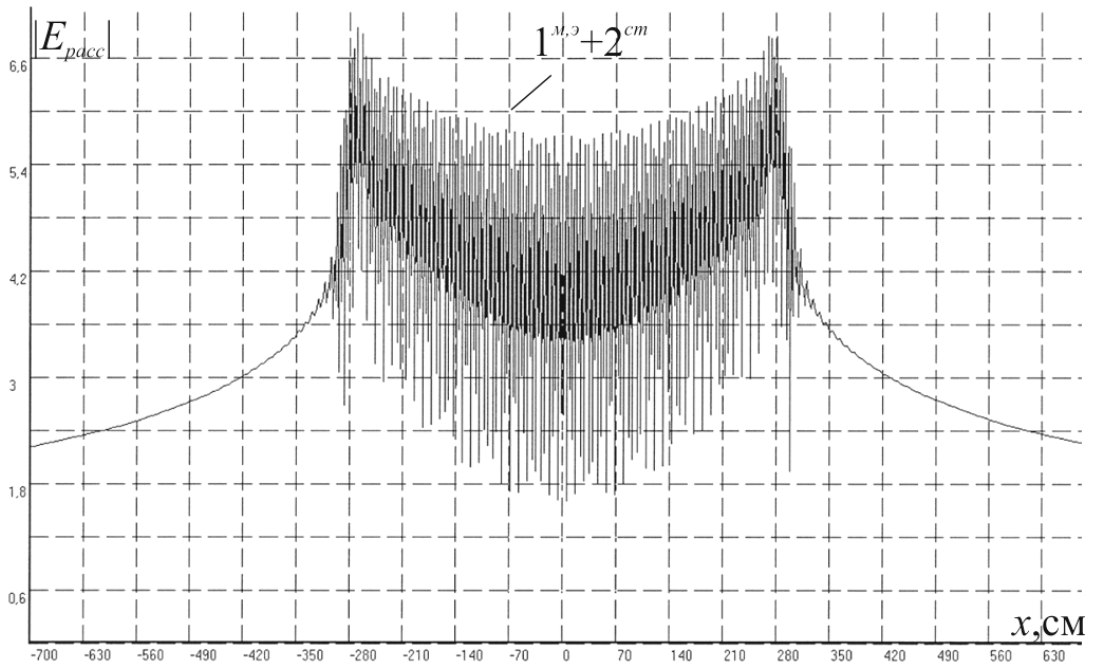


Рис. 2.20 б

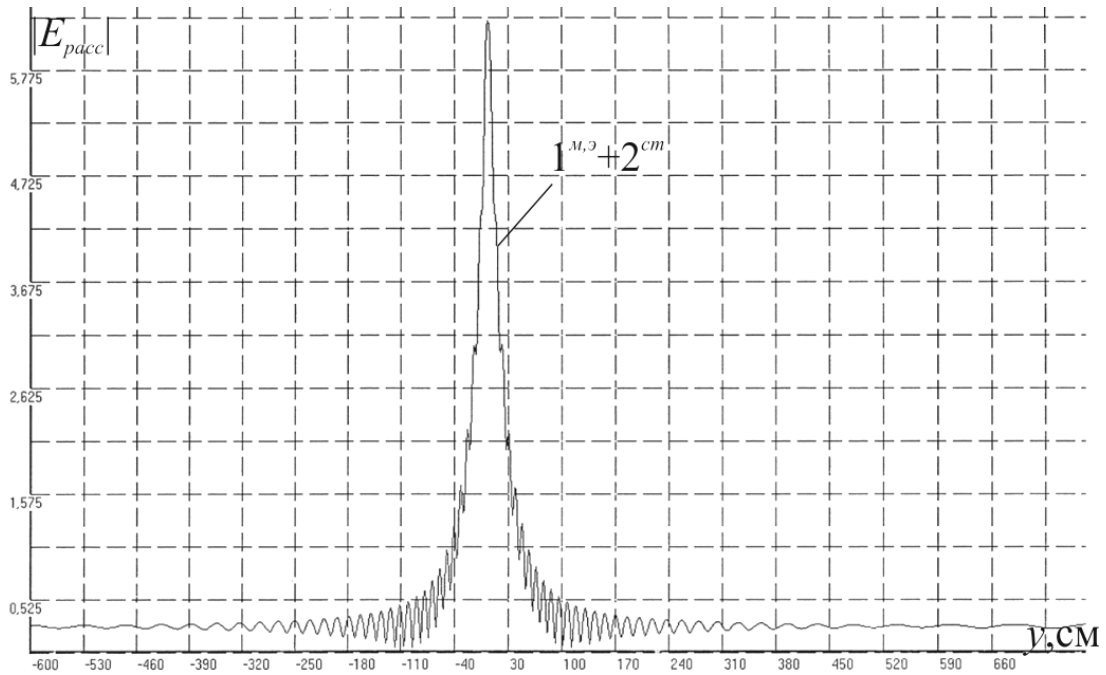


Рис. 2.20 c

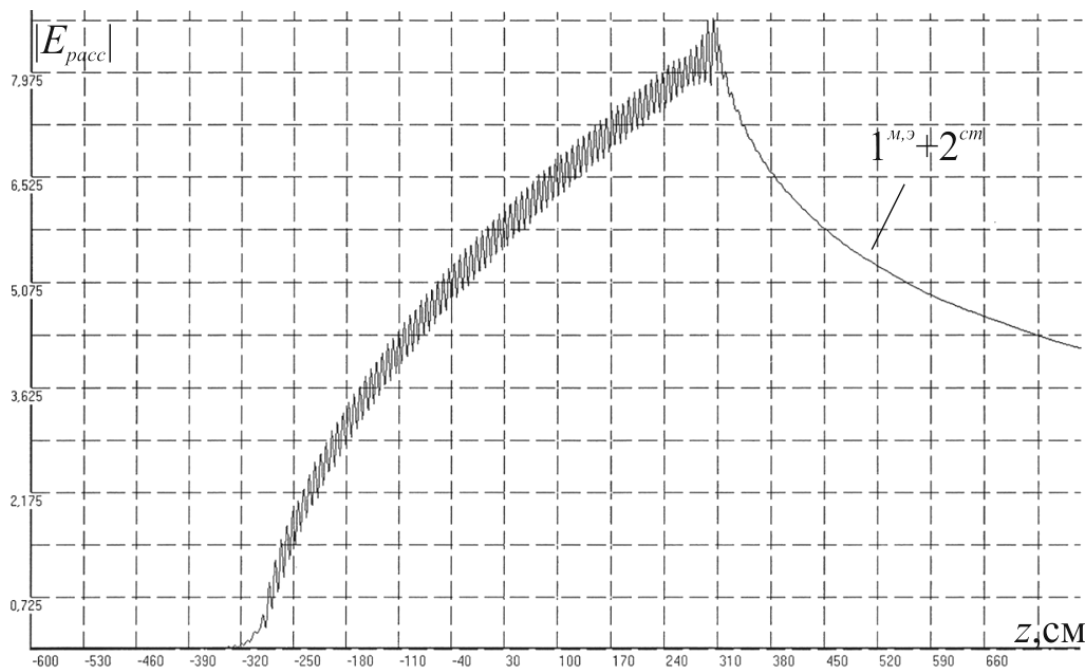


Рис. 2.20 d

Рис. 2.20 a, b, c, d. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) плоской квадратной решетки сфер (расположена в плоскости XZ , рис.2.10), когда $a=0,15$ см; $\varepsilon'=\mu'=10$; $d=l=2,2745$ см; $h=0$; $x_{s=0}=z_{p=0}=1,13725$ см; $(s,p)=0,\pm 1,\dots,\pm 50$, от изменения:

a) длины рассеиваемой волны λ при $\varepsilon'=5$; $\mu'=1$; $x=y=z=0$ см,

b) координаты точки наблюдения поля x при $\lambda = 2,2745$ см; $y = z = 0$ см,

c) координаты точки наблюдения поля y при $\lambda = 2,2745$ см; $x = z = 0$ см,

d) координаты точки наблюдения поля z при $\lambda = 2,2745$ см; $x = y = 0$ см.

На рис. 2.20 *a, b, c, d* рассеиваемая волна (2.26) движется из области $z < 0$.

Из анализа графических зависимостей, изображенных на рис.2.18 – 2.20 следует, что при совмещении структурного (cm) резонанса решетки с вырожденным внутренним резонансом (m, ε) сфер решетки возникает вырожденный резонанс рассеяния решетки ($cm+m, \varepsilon$), при котором рассеянная волна переизлучается преимущественно в направлении распространения падающей волны (рис. 2.18 *e*; 2.19 *d*; 2.20 *d*). Такое резонансное прохождение связано с одновременным индуцированием в сферах двух разных резонансных внутренних полей – магнитного и электрического типов (2.37).

Из рис. 2.18 *b* (плоскость XY) и рис. 2.19 *a*, 2.20 *a* (плоскости YZ, XZ) следует, что число возбужденных структурных (решеточных) резонансов в плоской решетке зависит от ориентации ее плоскости в пространстве (рис. 2.10), поляризации рассеиваемой плоской волны и ее длины волны.

2.7. Рассеяние электромагнитных волн резонансной системой из двух плоских решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны (2.26) при ее нормальном падении на дискретную ограниченную двухслойную пространственную решетку (2.1), (рис. 2.2), когда параметр $p = 1, 2$ [21].

Если воспользоваться системой уравнений (2.8), в которой предполагается, что у всех сфер решетки с одинаковым индексом p внутренние поля одинаковы, то для двухслойной плоской решетки эту систему уравнений в матричной форме можно представить в виде (2.45), а если в (2.45) пренебречь слагаемыми с оператором rot , то в виде (2.46).

Элементы основной матрицы системы уравнений (2.45), связанные с $E_{x(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}')$, где $\theta_{11}^2 = k^2 a_1^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $\varepsilon_{1\varphi} = \varepsilon_1 F(k a_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})$, $\varepsilon_{2\varphi} = \varepsilon_2 F(k a_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})$, $\mu_{1\varphi} = \mu_1 F(k a_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})$, $\mu_{2\varphi} = \mu_2 F(k a_2 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2})$ (1.8),

представим в виде (2.1)

$$\Psi_{xx1}^{\varphi 0} = \Psi_{xx(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\varphi 0} = \frac{(\varepsilon_{1\varphi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{11}^2 \varepsilon_{1\varphi} + i\theta_{11}(\varepsilon_{1\varphi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{11}}},$$

$$\Psi_{xx1}^{\varphi} = \Psi_{xx(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\varphi} = -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\varepsilon_{1\varphi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=1}^1 \sum_{s=t} \sum_{(p=1,s,t) \neq (p'=1,s'=0,t'=0)} \left[k_1^2 \frac{1}{r_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})^2 - r_1^2}{r_1^5} - k_1^2 \frac{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})^2}{r_1^3} + \right.$$

$$\left. + ik_1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})^2 - r_1^2}{r_1^4} \right] e^{-ik_1 r_1},$$

$$\Psi_{xy1}^{\varphi} = \Psi_{xy(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\varphi} = -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\varepsilon_{1\varphi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=1}^1 \sum_{s=t} \sum_{(p=1,s,t) \neq (p'=1,s'=0,t'=0)} \times$$

$$\times \left[\frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})}{r_1^5} - k_1^2 \frac{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})}{r_1^3} + \right.$$

$$\left. + ik_1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})}{r_1^4} \right] e^{-ik_1 r_1},$$

$$\Psi_{y1}^{MO} = \Psi_{y(p'=1,s'=0,t'=0)}^{MO} = ik_1 \mu_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1) \left(\frac{\mu_{1\varphi}}{\mu_0} - 1 \right) \times$$

$$\times \sum_{p=1}^1 \sum_{s=t} \sum_{(p=1,s,t) \neq (p'=1,s'=0,t'=0)} \left[-\frac{(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})}{r_1^3} - ik_1 \frac{(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})}{r_1^2} \right] e^{-ik_1 r_1},$$

$$(p=1,s,t) \neq (p'=1,s'=0,t'=0)$$

$$\left. + ik_1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})^2 - r_{12}^2}{r_{12}^4} \right] e^{-ik_1 r_{12}},$$

$$\begin{bmatrix} E_{ox}(p=1,s=0,t=0)(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{oy}(p=1,s=0,t=0)(\vec{r}') \\ 0 \\ E_{ox}(p=2,s=0,t=0)(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{oy}(p=2,s=0,t=0)(\vec{r}') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx1}^{\partial 0} + \Psi_{xx1}^{\partial} & \Psi_{xy1}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{y1}^{M0} & \Psi_{xx12}^{\partial} & \Psi_{xy12}^{\partial} & \Psi_{xz12}^{\partial} & 0 & \Psi_{z12}^M & \Psi_{y12}^{M0} \\ \Psi_{yx1}^{\partial} & \Psi_{yy1}^{\partial 0} + \Psi_{yy1}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{x1}^M & \Psi_{yx12}^{\partial} & \Psi_{yy12}^{\partial} & \Psi_{yz12}^{\partial} & \Psi_{z12}^{M0} & 0 & \Psi_{x12}^M \\ 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{\partial 0} + \Psi_{zz1}^{\partial} & \Psi_{y1}^M & \Psi_{x1}^{M0} & 0 & \Psi_{zx12}^{\partial} & \Psi_{zy12}^{\partial} & \Psi_{zz12}^{\partial} & \Psi_{y12}^M & \Psi_{x12}^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{y1}^{\partial} & \Psi_{xx1}^{M0} + \Psi_{xx1}^M & \Psi_{xy1}^M & 0 & 0 & \Psi_{z12}^{\partial 0} & \Psi_{y12}^{\partial} & \Psi_{xx12}^M & \Psi_{xy12}^M & \Psi_{xz12}^M \\ 0 & 0 & \Psi_{x1}^{\partial 0} & \Psi_{yx1}^M & \Psi_{yy1}^{M0} + \Psi_{yy1}^M & 0 & \Psi_{z12}^{\partial} & 0 & \Psi_{x12}^{\partial 0} & \Psi_{yx12}^M & \Psi_{yy12}^M & \Psi_{yz12}^M \\ \Psi_{y1}^{\partial 0} & \Psi_{x1}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{M0} + \Psi_{zz1}^M & \Psi_{y12}^{\partial 0} & \Psi_{x12}^{\partial} & 0 & \Psi_{zx12}^M & \Psi_{zy12}^M & \Psi_{zz12}^M \\ \Psi_{xx21}^{\partial} & \Psi_{xy21}^{\partial} & \Psi_{xz21}^{\partial} & 0 & \Psi_{z21}^M & \Psi_{y21}^{M0} & \Psi_{xx2}^{\partial 0} + \Psi_{xx2}^{\partial} & \Psi_{xy2}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{y2}^{M0} \\ \Psi_{yx21}^{\partial} & \Psi_{yy21}^{\partial} & \Psi_{yz21}^{\partial} & \Psi_{z21}^{M0} & 0 & \Psi_{x21}^M & \Psi_{yx2}^{\partial} & \Psi_{yy2}^{\partial 0} + \Psi_{yy2}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{x2}^M \\ \Psi_{zx21}^{\partial} & \Psi_{zy21}^{\partial} & \Psi_{zz21}^{\partial} & \Psi_{y21}^M & \Psi_{x21}^{M0} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{\partial 0} + \Psi_{zz2}^{\partial} & \Psi_{y2}^M & \Psi_{x2}^{M0} & 0 \\ 0 & \Psi_{z21}^{\partial 0} & \Psi_{y21}^{\partial} & \Psi_{xx21}^M & \Psi_{xy21}^M & \Psi_{xz21}^M & 0 & 0 & \Psi_{y2}^{\partial} & \Psi_{xx2}^{M0} + \Psi_{xx2}^M & \Psi_{xy2}^M & 0 \\ \Psi_{z21}^{\partial} & 0 & \Psi_{x21}^{\partial 0} & \Psi_{yx21}^M & \Psi_{yy21}^M & \Psi_{yz21}^M & 0 & 0 & \Psi_{x2}^{\partial 0} & \Psi_{yx2}^M & \Psi_{yy2}^{M0} + \Psi_{yy2}^M & 0 \\ \Psi_{y21}^{\partial 0} & \Psi_{x21}^{\partial} & 0 & \Psi_{zx21}^M & \Psi_{zy21}^M & \Psi_{zz21}^M & \Psi_{y2}^{\partial 0} & \Psi_{x2}^{\partial} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{M0} + \Psi_{zz2}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{x(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{x(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{x(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} E_{ox(p=1,s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ E_{ox(p=2,s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx1}^{\ominus 0} + \Psi_{xx1}^{\ominus} & \Psi_{xy1}^{\ominus} & 0 & \Psi_{xx12}^{\ominus} & \Psi_{xy12}^{\ominus} & \Psi_{xz12}^{\ominus} \\ \Psi_{yx1}^{\ominus} & \Psi_{yy1}^{\ominus 0} + \Psi_{yy1}^{\ominus} & 0 & \Psi_{yx12}^{\ominus} & \Psi_{yy12}^{\ominus} & \Psi_{yz12}^{\ominus} \\ 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{\ominus 0} + \Psi_{zz1}^{\ominus} & \Psi_{zx12}^{\ominus} & \Psi_{zy12}^{\ominus} & \Psi_{zz12}^{\ominus} \\ \Psi_{xx21}^{\ominus} & \Psi_{xy21}^{\ominus} & \Psi_{xz21}^{\ominus} & \Psi_{xx2}^{\ominus 0} + \Psi_{xx2}^{\ominus} & \Psi_{xy2}^{\ominus} & 0 \\ \Psi_{yx21}^{\ominus} & \Psi_{yy21}^{\ominus} & \Psi_{yz21}^{\ominus} & \Psi_{yx2}^{\ominus} & \Psi_{yy2}^{\ominus 0} + \Psi_{yy2}^{\ominus} & 0 \\ \Psi_{zx21}^{\ominus} & \Psi_{zy21}^{\ominus} & \Psi_{zz21}^{\ominus} & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{\ominus 0} + \Psi_{zz2}^{\ominus} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{x(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H_{oy(p=1,s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ H_{oy(p=2,s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx1}^{M0} + \Psi_{xx1}^M & \Psi_{xy1}^M & 0 & \Psi_{xx12}^M & \Psi_{xy12}^M & \Psi_{xz12}^M \\ \Psi_{yx1}^M & \Psi_{yy1}^{M0} + \Psi_{yy1}^M & 0 & \Psi_{yx12}^M & \Psi_{yy12}^M & \Psi_{yz12}^M \\ 0 & 0 & \Psi_{zz1}^{M0} + \Psi_{zz1}^M & \Psi_{zx12}^M & \Psi_{zy12}^M & \Psi_{zz12}^M \\ \Psi_{xx21}^M & \Psi_{xy21}^M & \Psi_{xz21}^M & \Psi_{xx2}^{M0} + \Psi_{xx2}^M & \Psi_{xy2}^M & 0 \\ \Psi_{yx21}^M & \Psi_{yy21}^M & \Psi_{yz21}^M & \Psi_{yx2}^M & \Psi_{yy2}^{M0} + \Psi_{yy2}^M & 0 \\ \Psi_{zx21}^M & \Psi_{zy21}^M & \Psi_{zz21}^M & 0 & 0 & \Psi_{zz2}^{M0} + \Psi_{zz2}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{x(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(p=1,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{x(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(p=2,s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{xy12}^{\vartheta} = \Psi_{xy(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\varepsilon_{2\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=t}^2 \sum_{(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)}$$

$$\cdot \left[\frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})}{r_{12}^5} - k_1^2 \frac{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})}{r_{12}^3} + \right.$$

$$\left. + ik_1 \frac{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})}{r_{12}^4} \right] e^{-ik_1 r_{12}},$$

$$\Psi_{xz12}^{\vartheta} = \Psi_{xz(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\varepsilon_{2\vartheta\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=t}^2 \sum_{(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)}$$

$$\cdot \left[\frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(z_{p'=1} - z_{p=2})}{r_{12}^5} - k_1^2 \frac{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(z_{p'=1} - z_{p=2})}{r_{12}^3} + \right.$$

$$\left. + ik_1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(z_{p'=1} - z_{p=2})}{r_{12}^4} \right] e^{-ik_1 r_{12}},$$

$$\Psi_{z12}^M = \Psi_{z(p'=1,s'=0,t'=0)}^M = -ik_1 \mu_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\mu_{2\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=t}^2 \sum_{(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)}$$

$$\cdot \left[-\frac{(z_{p'=1} - z_{p=2})}{r_{12}^3} - ik_1 \frac{(z_{p'=1} - z_{p=2})}{r_{12}^2} \right] e^{-ik_1 r_{12}},$$

$$\Psi_{y12}^{MO} = \Psi_{y(p'=1,s'=0,t'=0)}^{MO} = ik_1 \mu_0 \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2) \left(\frac{\mu_{2\vartheta\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=t}^2 \sum_{(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)}$$

$$\times \left[-\frac{(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})}{r_{12}^3} - ik_1 \frac{(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})}{r_{12}^2} \right] e^{-ik_1 r_{12}},$$

а если предположить, что длина волны $\lambda \rightarrow \infty$, то эти выражения приобретут вид

$$\Psi_{xx1}^{\vartheta 0} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right),$$

$$\Psi_{xx1}^{\vartheta} = \Psi_{xx(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{a_1^3}{3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=1}^1 \sum_{s=1}^1 \sum_{t=1}^1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})^2 - r_1^2}{r_1^5},$$

$$(p=1,s,t) \neq (p'=1,s'=0,t'=0)$$

$$\Psi_{xy1}^{\vartheta} = \Psi_{xy(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{a_1^3}{3} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=1}^1 \sum_{s=1}^1 \sum_{t=1}^1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})}{r_1^5}$$

$$(p=1,s,t) \neq (p'=1,s'=0,t'=0)$$

$$\Psi_{xx12}^{\vartheta} = \Psi_{xx(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{a_2^3}{3} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=1}^1 \sum_{t=1}^1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})^2 - r_{12}^2}{r_{12}^5},$$

$$(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)$$

$$\Psi_{xy12}^{\vartheta} = \Psi_{xy(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{a_2^3}{3} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=1}^1 \sum_{t=1}^1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})}{r_{12}^5},$$

$$(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)$$

$$\Psi_{xz12}^{\vartheta} = \Psi_{xz(p'=1,s'=0,t'=0)}^{\vartheta} = -\frac{a_2^3}{3} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sum_{p=2}^2 \sum_{s=1}^1 \sum_{t=1}^1 \frac{3(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})(z_{p'=1} - z_{p=2})}{r_{12}^5}.$$

$$(p=2,s,t) \neq (p'=2,s'=0,t'=0)$$

Здесь (2.3), (2.1)

$$r_1 = \sqrt{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=1,s})^2 + (y_{p'=1,t'=0} - y_{p=1,t})^2},$$

$$r_{12} = \sqrt{(x_{p'=1,s'=0} - x_{p=2,s})^2 + (y_{p'=1,t'=0} - y_{p=2,t})^2 + (z_{p'=1} - z_{p=2})^2}.$$

Решение системы уравнений (2.45) имеет вид аналогичный (2.6).

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^{\vartheta}$ и $\vec{\Pi}^{\mathcal{M}}$ рассеянного двухслойной решеткой поля по известному внутреннему полю (2.6) отдельных рассеивателей представим в виде (2.16), а рассеянное поле в виде (2.19).

На рис. 2.21 *a*, *b*, *c* представлены распределения плотности энергии рассеянного электромагнитного поля $|\omega_{\text{расс}}|$ (1.20) по осям *x*, *y*, *z* системы двух

одинаковых плоских квадратных параллельных решеток (рис. 2.2., $p=1,2$), в сферах которых возбуждены внутренние резонансы магнитного типа – 1^m , совмещенные со структурным резонансом решетки – 2^{cm} .

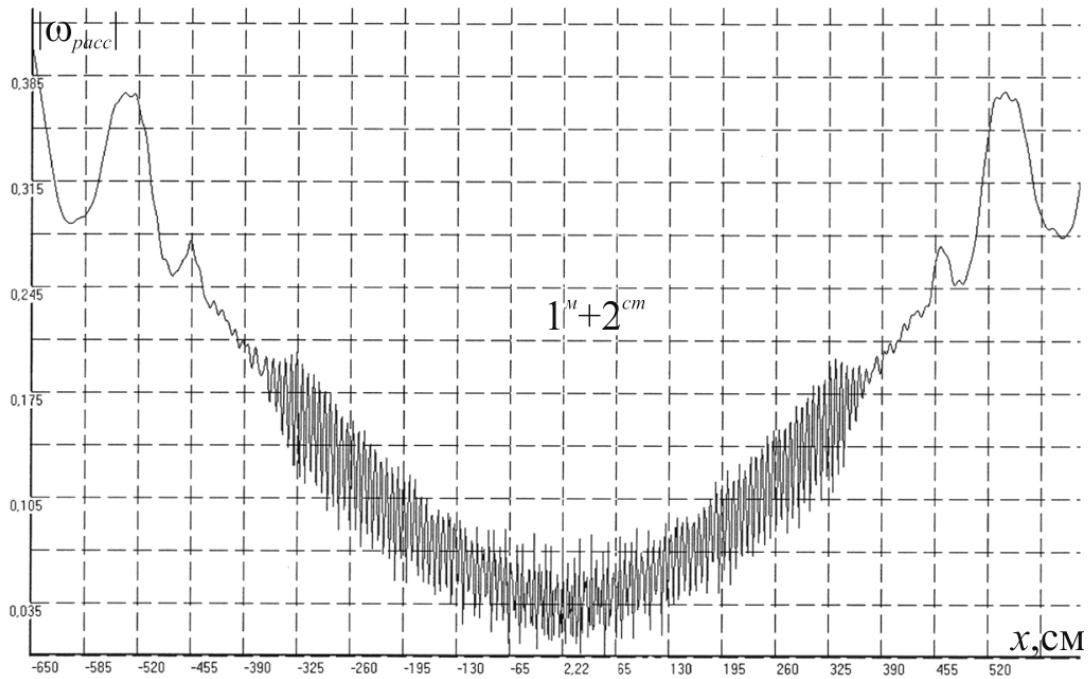


Рис. 2.21 а

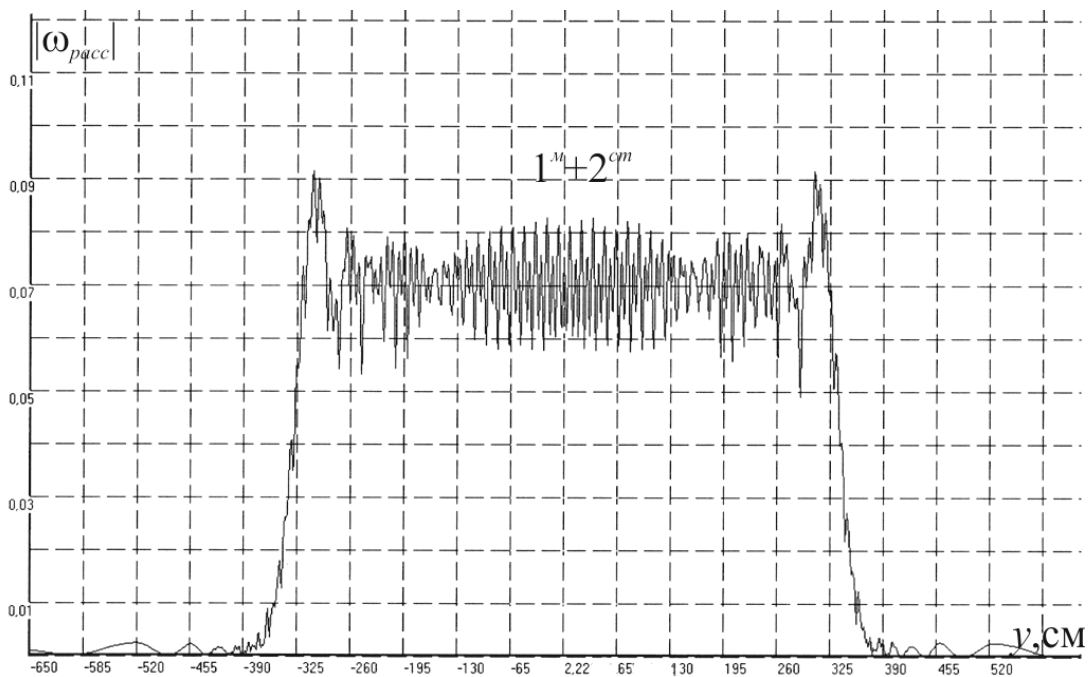


Рис. 2.21 б

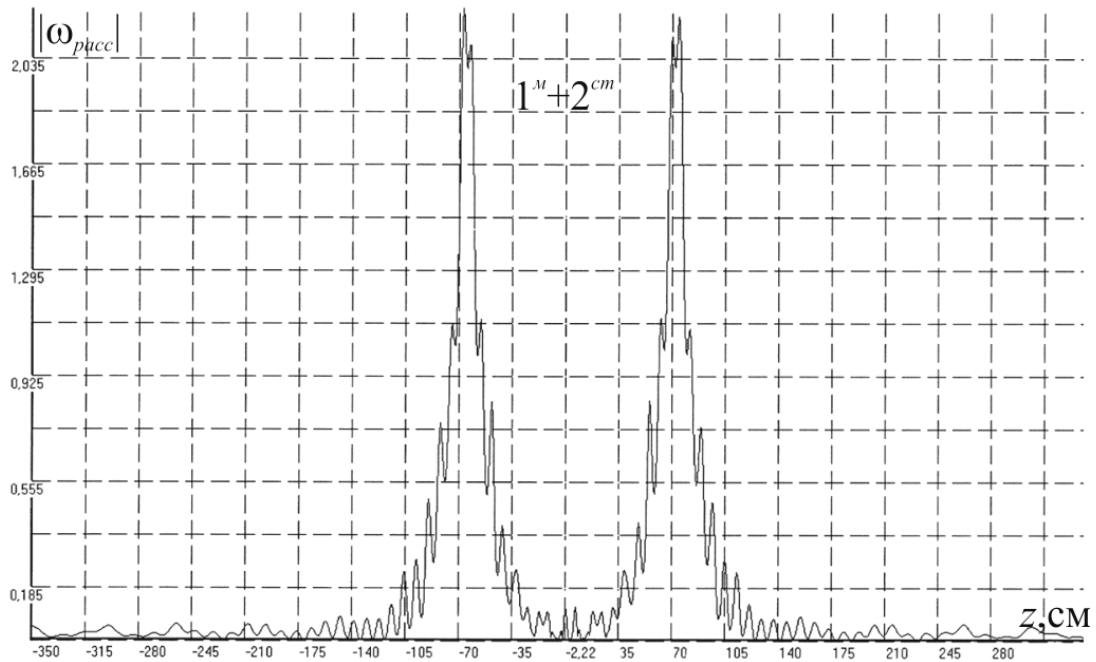


Рис. 2.21 с

Рис. 2.21 *a, b, c*. Зависимости плотности энергии поля $|\omega_{pacc}|$ (1.20) системы двух одинаковых плоских квадратных параллельных решеток сфер, когда $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 48,9$; $\mu' = 1$; $d = h = 6,875$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = 3,704$ см; $\lambda_p^m = 6,875$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$, $l_z = 20\lambda_p^m = 137,5$ см – расстояние между решетками, от изменения координат x, y, z точки наблюдения поля.

На рис. 2.21 *d, e* представлены распределения полей $|E_{pacc}|$ по оси z для системы двух одинаковых плоских прямоугольных параллельных решеток (рис.2.2, $p = 1, 2$), в сферах которых возбуждены внутренние резонансы электрического типа – 1^p .

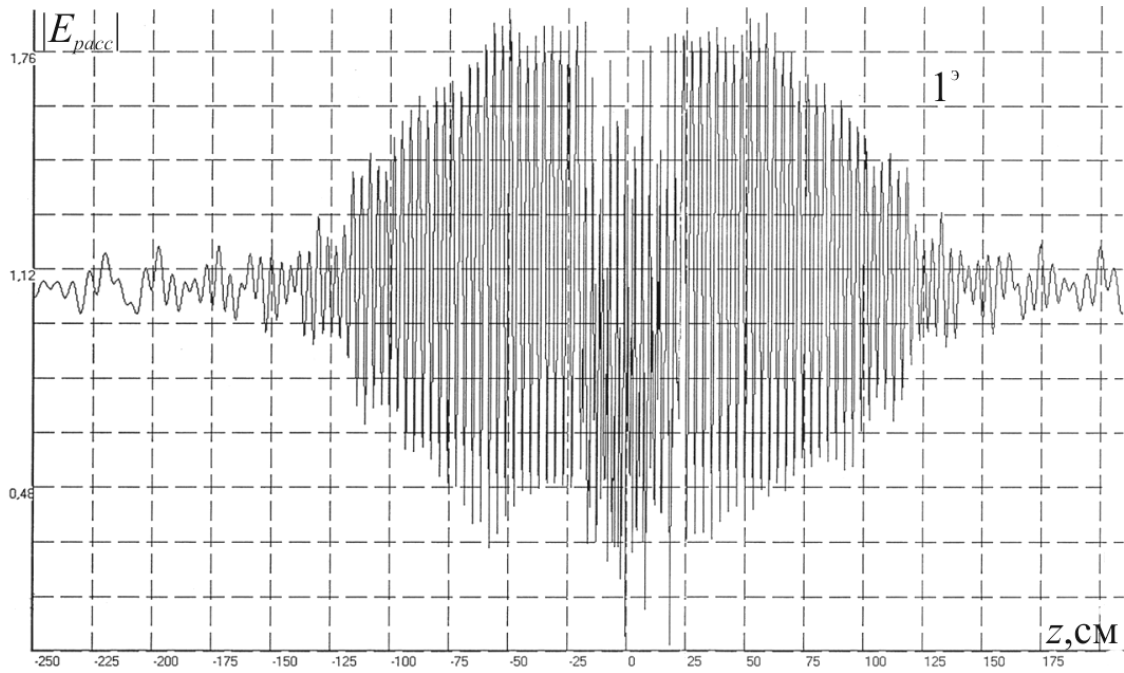


Рис. 2.21 d

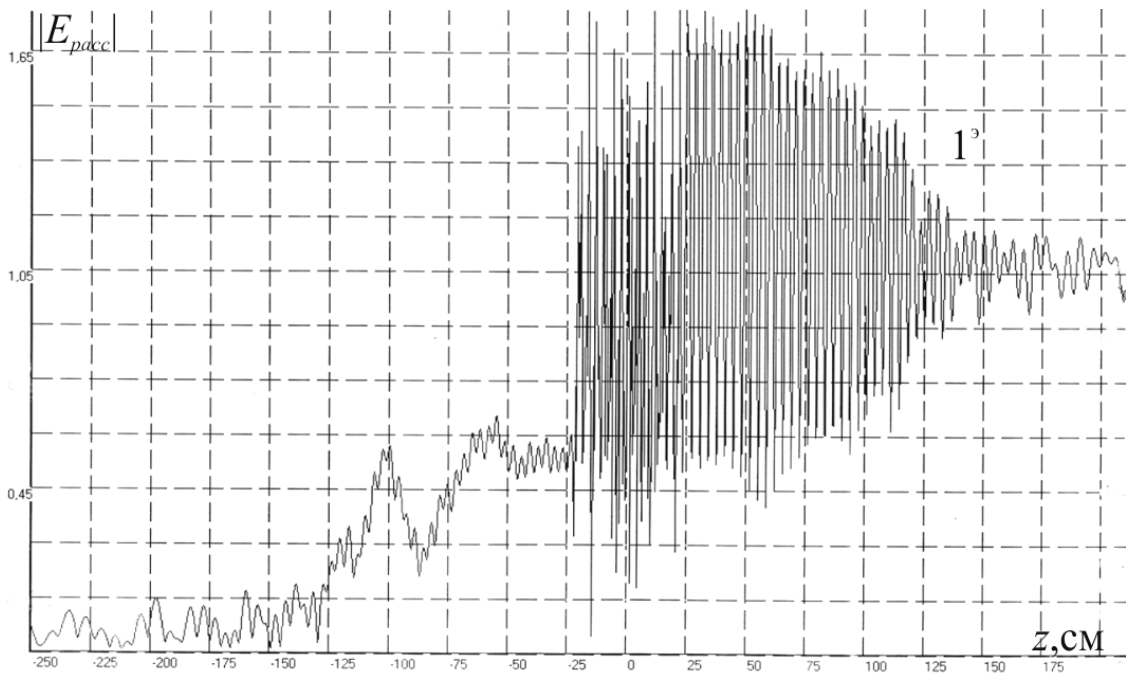


Рис. 2.21 e

Рис. 2.21 d, e. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) системы двух одинаковых плоских прямоугольных параллельных решеток сфер, когда $a = 0,15$ см; $\epsilon' = 100$; $\mu' = 1$; $d = 2,3$ см; $h = 1$ см; $x_{s=0} = 1,5$ см; $y_{t=0} = 0,5$ см; $\lambda_p^m = 2,1155$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 100$, от изменения координаты z точки наблюдения поля для случаев:

a) расстояние между решетками $l_z = 20\lambda_p^m = 42,31$ см,

b) расстояние между решетками $l_z = 46$ см – не кратно резонансной длине волны λ_p^{ε} .

Из этих графиков следует, что когда расстояние между решетками вдоль оси z кратно резонансному значению длины волны λ_p , то распределение поля вне системы решеток симметрично (рис. 2.21 *c, d*), в противном случае симметрия нарушается (рис. 2.21 *e*) и меняется модовая структура рассеянного поля в зоне Френеля. Изменяя параметры решеток, их ориентацию относительно друг друга, создавая в них дефекты, можно формировать необходимую структуру рассеянного поля решеток.

На рис. 2.21 рассеиваемая волна (2.26) движется из области $z < 0$.

2.8. Рассеяние электромагнитных волн резонансной системой, состоящей из линейной и плоской решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

В разделе представлен анализ численных расчетов рассеянного электромагнитного поля (2.19), (1.4) для системы, состоящей из дискретных ограниченных линейной и плоской решеток, в которой возбуждались структурные резонансы (cm) и внутренние резонансы сфер электрического (ε) и магнитного (m) типов. Рассматривалось два случая:

– в плоской решетке возбуждался совмещенный резонанс ($\varepsilon + cm$) (рис. 2.16 *e*), а в линейной решетке совмещенный резонанс ($m + cm$), (рис. 2.22 *c, d*);

– в плоской решетке возбуждался совмещенный резонанс ($m + cm$) (рис. 2.17 *e*), а в линейной решетке совмещенный резонанс ($\varepsilon + cm$) (рис. 2.6 *c*, рис. 2.22 *e, f*).

Эти структуры ($\varepsilon + m + cm$) и ($m + \varepsilon + cm$) резонировали на одной и той же длине рассеиваемой волны λ . Плоская решетка располагалась в плоскости XU , а линейная решетка – вдоль оси z (рис. 2.10).

Изменяя пространственную конфигурацию подобного рода систем сфер и тип внутренних резонансов сфер, совмещая внутренние резонансы сфер со структурными (решеточными) резонансами, используя дефекты системы можно конструировать рассеивающие системы со специальными свойствами [55, 56].

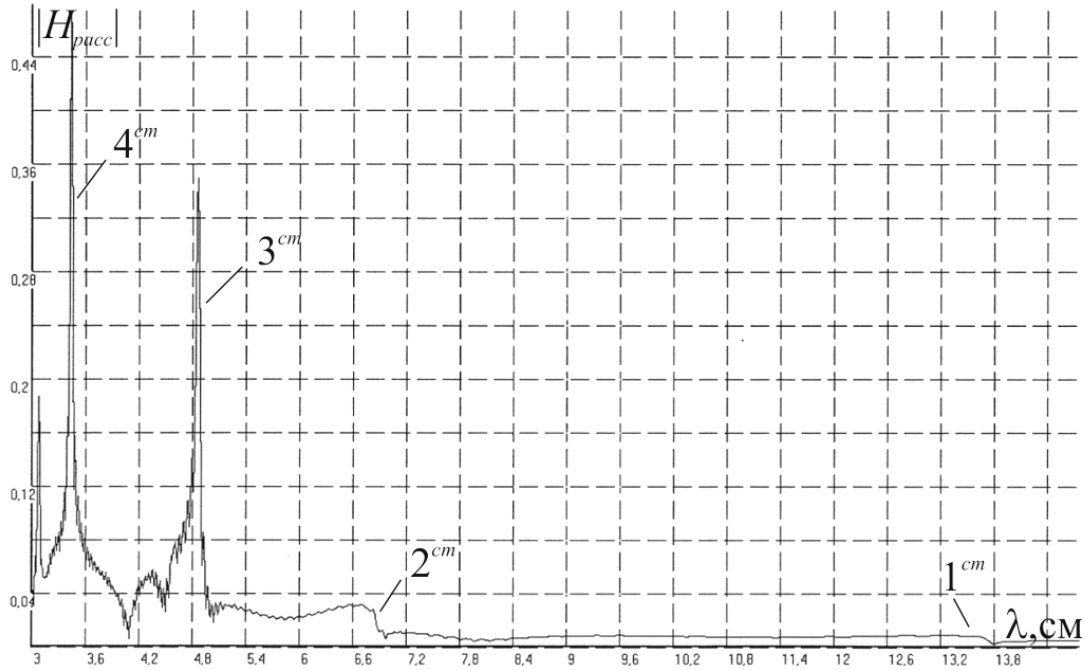


Рис. 2.22 а

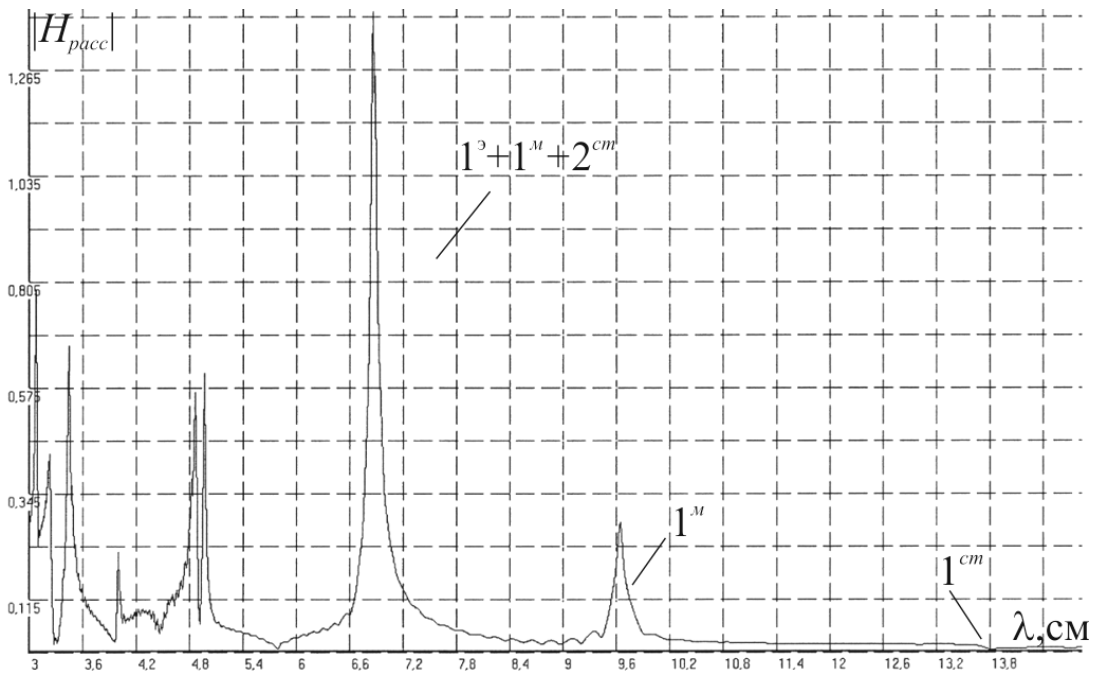


Рис. 2.22 б

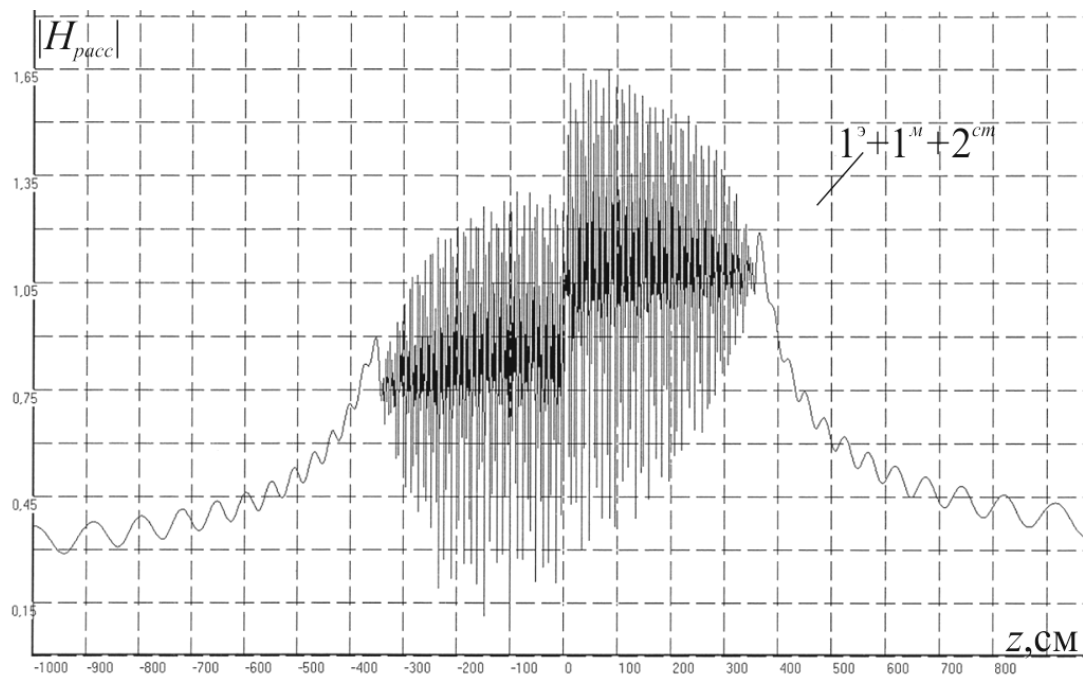


Рис. 2.22 с

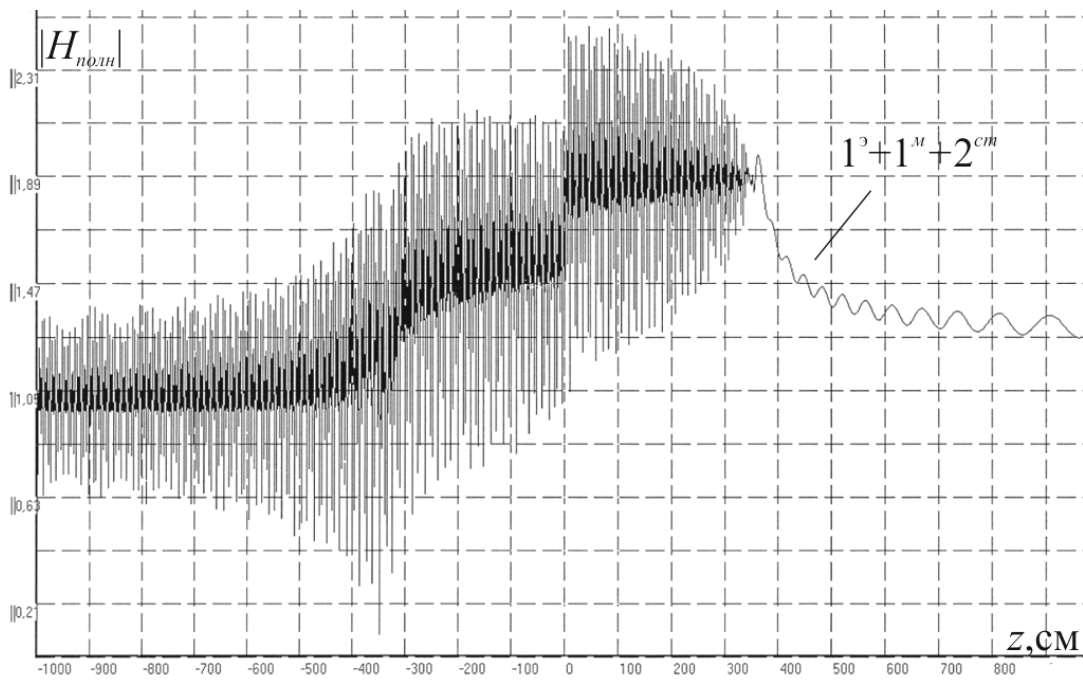


Рис. 2.22 d

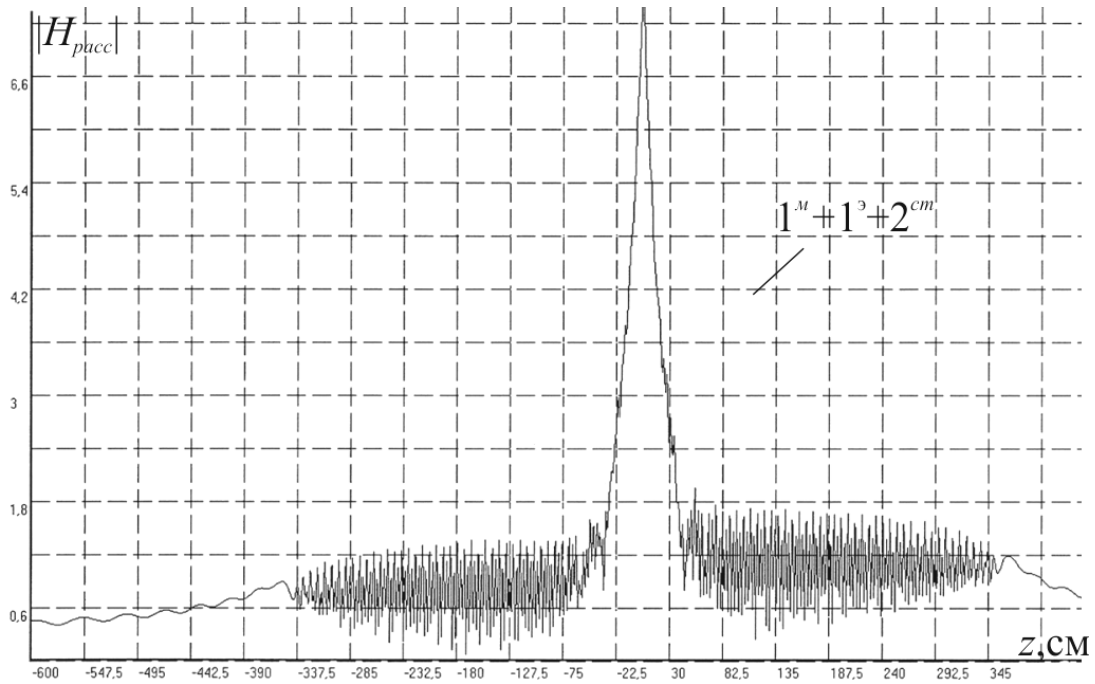


Рис. 2.22 e

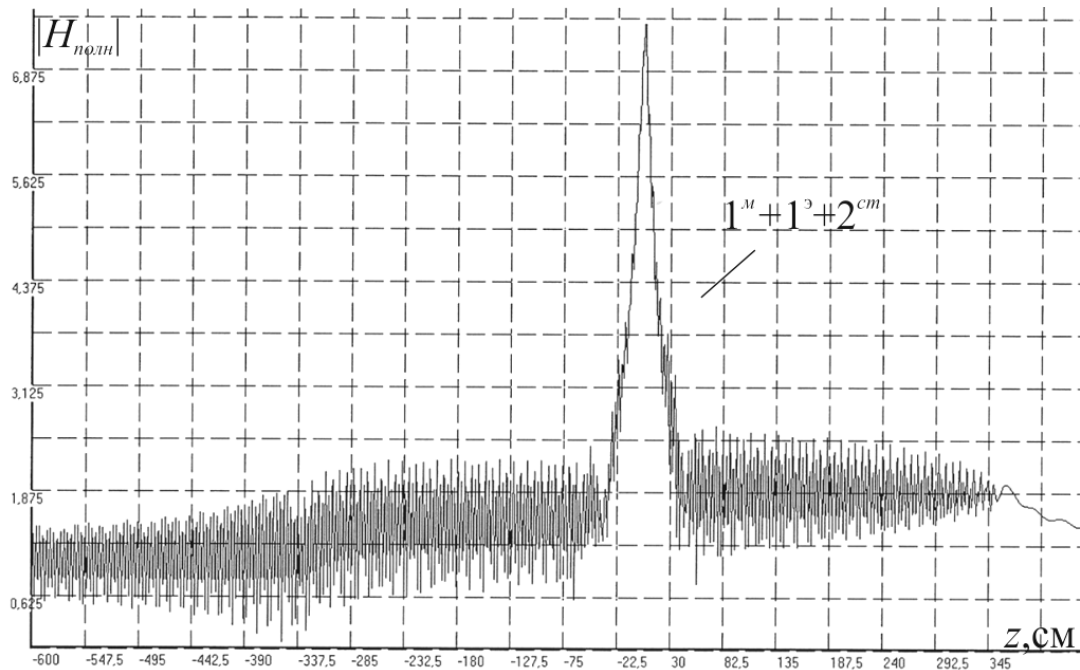


Рис. 2.22 f

Рис. 2.22. Зависимости поля $|H_{расс}|$, $|H_{полн}|$ (2.19), (1.4) системы, состоящей из плоской и линейной решеток сфер, от изменения:

а) длины рассеиваемой волны λ при $\epsilon' = 5$; $\mu' = 1$ у сфер системы,

b) длины рассеиваемой волны λ при $\varepsilon'=95$; $\mu'=1$ у сфер плоской решетки и $\varepsilon'=48,9$; $\mu'=1$ у сфер линейной решетки, когда в системе сфер возбужден резонанс $(1^{\vartheta} + 1^M + 2^{cm})$,

c, d) координаты точки наблюдения z , когда в системе сфер возбужден резонанс $(1^{\vartheta} + 1^M + 2^{cm})$ – резонанс 1^{ϑ} в линейной и 1^M – в плоской решетках,

e, f) координаты точки наблюдения z , когда в системе сфер возбужден резонанс $(1^M + 1^{\vartheta} + 2^{cm})$ – резонанс 1^M в линейной и 1^{ϑ} – в плоской решетках.

Радиус сфер решеток $a = 0,5$ см; $\lambda = 6,875$ см; число сфер плоской решетки – $N = 10000$; линейной решетки – $N = 100$.

На рис. 2.22 рассеиваемая волна (2.26) движется из области $z < 0$.

ГЛАВА 3

РЕЗОНАНСНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ИЗ МАЛЫХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

В научной литературе присутствуют постоянное внимание к изучению электродинамических свойств трехмерных систем малых тел разной природы [67], в том числе и к пространственным системам тел с резонансными свойствами [68-72].

Исследование дискретных ограниченных трехмерных резонансных систем резонансных малых магнитоэлектрических сфер, которые можно рассматривать как целостные трехмерные образования, и для которых характерно наличие электромагнитного взаимодействия между сферами, представляет значительный теоретический и практический интерес. Данная глава посвящена изучению такого рода пространственных структур.

В разделах 3.1-3.3 рассматриваются дискретные ограниченные сложные трехмерные решетки сфер с внешней и внутренней топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел.

3.1 Рассеяние электромагнитных волн резонансными сложными трехмерными решетками малых резонансных магнитоэлектрических сфер с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел

В данном разделе представлено решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на резонансных дискретных ограниченных сложных системах малых резонансных однородных изотропных магнитоэлектрических сфер, находящихся в свободном пространстве.

Изложим постановку и решение задачи [19-21, 73-78].

Рассмотрим описание сложной трехмерной решетки, состоящей из C подрешеток – простых решеток c ($c \in C$) [19, 21]. Эти подрешетки c

порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= \left[s - 0,5 \left\{ (-1)^s - 1 \right\} \right] d - (-1)^{s-1} x_{c,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= \left[t - 0,5 \left\{ (-1)^t - 1 \right\} \right] h - (-1)^{t-1} y_{c,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= \left[p - 0,5 \left\{ (-1)^p - 1 \right\} \right] l - (-1)^{p-1} z_{c,p=0} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где величины d , h , l определяются условиями $x=0$, $x=d$; $y=0$, $y=h$; $z=0$, $z=l$, а $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (рис. 3.1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 &\leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Координаты $x_{c,s}$, $y_{c,t}$, $z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (3.2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}$, $y_{c,t=0}$, $z_{c,p=0}$. Каждому узлу пространственной подрешетки c (3.1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $u = c(p, s, t)$. Выделенный узел решетки будем обозначать $u' = c'(p', s', t')$, а узел внутри области (3.2) – $c(p=0, s=0, t=0)$. Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (3.1), можно формировать решетки разных размеров. Пространственная система узлов (3.1) – ограниченная.

На рис. 3.2 представлена система узлов (3.1) для случая, когда $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и порождающий подрешетку (3.1) узел $c(p=0, s=0, t=0)$ смещен от центра области (3.2).

Топологическую структуру периодической системы (3.1) можно рассматривать как связанную с натуральным рядом чисел через значение параметров (p, s, t) , которые не зависят друг от друга.

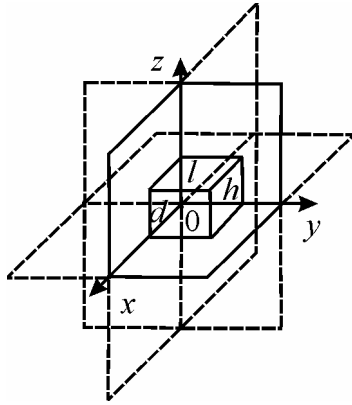


Рис. 3.1. Геометрия решетки

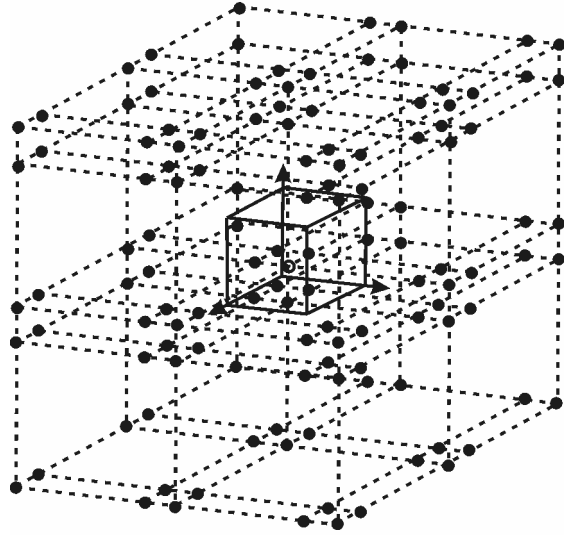


Рис. 3.2. Пространственная система узлов

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивной, объемно-центрированной, гранецентрированной и других) формируют из C узлов внутри области (3.2), которую повторит за пределами области (3.2) координатное представление (3.1) в виде пространственной решетки определенного вида.

Если изменять координаты узлов в области (3.2), то положения узлов вне области (3.2) также соответствующим образом смещаются, и будет происходить перестройка и формирование пространственной конфигурации решетки и ее ячеек. Когда порождающий узел находится в центре области (3.2), то d , h , l являются постоянными правильной ортогональной решетки по осям x , y , z соответственно.

Расстояние между узлами решетки найдем из выражения

$$r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)} = r_{u'u} = \sqrt{(x_{c',s'} - x_{c,s})^2 + (y_{c',t'} - y_{c,t})^2 + (z_{c',p'} - z_{c,p})^2}, \quad (3.3)$$

учитывая координатное представление (3.1), связанное с натуральным рядом чисел. Здесь $u' = c'(p',s',t')$, $u = c(p,s,t)$.

В узлы подрешетки (3.1) помещаются центры сфер с проницаемостями $\varepsilon_{c(p,s,t)}$, $\mu_{c(p,s,t)}$ и радиусами $a_{c(p,s,t)}$, далее обозначим – $\varepsilon_c, \mu_c, a_c$, и на их

основе образуют сложные трехмерные системы сфер с топологической структурой, задаваемой натуральным рядом чисел.

Рассеянное поле (1.1) по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{\varepsilon}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{\mu}$ потенциалы Герца (1.2).

Внутреннее поле выделенной $c'(p', s', t')$ сферы сложной системы с конкретной топологической структурой находят из системы взаимосвязанных неоднородных уравнений, которую можно построить, опираясь на уравнения (1.6). Входящие в эту систему неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{0c'(p', s', t')}(\vec{r}', t) = & \left(\frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{c'(p', s', t')}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
 & - \sum_{\substack{p \ s \ t \\ c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t')}} \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
 & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^{\mu}(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_{c'} - \\
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_{\substack{p \ s \ t}} \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_{c(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^{\mu}(\vec{r}) \vec{H}_{c(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_{c},
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{0c'(p', s', t')}(\vec{r}', t) = & \left(\frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{c'(p', s', t')}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
 & - \sum_{\substack{p \ s \ t \\ c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t')}} \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^{\mu}(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) \right] \Bigg]_{c'} - \\
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t) \right] \right\} \right)_c,
 \end{aligned}$$

где $\vec{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ и $\vec{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t)$ – поле падающей волны и индуцированное внутреннее поле $c'(p',s',t')$ сферы, а $\vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}',t)$ – индуцированные внутренние поля остальных сфер, $\theta_{1c}^2 = k^2 a_c^2 \varepsilon_0 \mu_0$.

Величины $W_{c(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r})$, $W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r})$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 W_{c(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}, \\
 W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}$ определяется выражением (3.3) и координатным представлением – (3.1), а величины $\varepsilon_{c\varepsilon\phi}$, $\mu_{c\varepsilon\phi}$ запишем как (1.8), (1.9), (рис. 1.1).

Первые слагаемые справа в уравнениях (3.4) связаны с внутренним полем выделенной $c'(p',s',t')$ сферы, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на $c'(p',s',t')$ рассеиватель всех остальных сфер.

Основная матрица системы уравнений (3.4) содержит информацию об особенностях электромагнитного взаимодействия между сферами рассматриваемого типа решеток.

Система уравнений (3.4) является алгебраической системой, состоящей из $2N = 2 \sum_{c=1}^C N_c$ взаимосвязанных векторных неоднородных уравнений, где N – общее число сфер решетки, а N_c – число сфер подрешетки c . Решение этой системы уравнений для выделенной сферы по формулам Крамера имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{g}_u^{\text{э}u'} \vec{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}_u^{\text{э}u'} \vec{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) \right] \right)_c, \\ \vec{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{\beta}_u^{\text{м}u'} \vec{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{g}_u^{\text{м}u'} \vec{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) \right] \right)_c, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_u^{\text{э}u'} &= \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\text{э}u'} & g_{xyu}^{\text{э}u'} & g_{xzu}^{\text{э}u'} \\ g_{yxu}^{\text{э}u'} & g_{yuu}^{\text{э}u'} & g_{yzu}^{\text{э}u'} \\ g_{zxu}^{\text{э}u'} & g_{zyu}^{\text{э}u'} & g_{zzu}^{\text{э}u'} \end{bmatrix}; & \hat{\beta}_u^{\text{э}u'} &= \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\text{э}u'} & \beta_{xyu}^{\text{э}u'} & \beta_{xzu}^{\text{э}u'} \\ \beta_{yxu}^{\text{э}u'} & \beta_{yuu}^{\text{э}u'} & \beta_{yzu}^{\text{э}u'} \\ \beta_{zxu}^{\text{э}u'} & \beta_{zyu}^{\text{э}u'} & \beta_{zzu}^{\text{э}u'} \end{bmatrix}; \\ \hat{\beta}_u^{\text{м}u'} &= \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\text{м}u'} & \beta_{xyu}^{\text{м}u'} & \beta_{xzu}^{\text{м}u'} \\ \beta_{yxu}^{\text{м}u'} & \beta_{yuu}^{\text{м}u'} & \beta_{yzu}^{\text{м}u'} \\ \beta_{zxu}^{\text{м}u'} & \beta_{zyu}^{\text{м}u'} & \beta_{zzu}^{\text{м}u'} \end{bmatrix}; & \hat{g}_u^{\text{м}u'} &= \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\text{м}u'} & g_{xyu}^{\text{м}u'} & g_{xzu}^{\text{м}u'} \\ g_{yxu}^{\text{м}u'} & g_{yuu}^{\text{м}u'} & g_{yzu}^{\text{м}u'} \\ g_{zxu}^{\text{м}u'} & g_{zyu}^{\text{м}u'} & g_{zzu}^{\text{м}u'} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $g_{xxu}^{\text{э}u'}, g_{xzu}^{\text{э}u'}, \dots; \beta_{xxu}^{\text{э}u'}, \beta_{xyu}^{\text{э}u'}, \dots$ – адьюнкты детерминанта $\Delta^{\text{эм}}$ основной матрицы системы уравнений (3.4), соответствующие элементам этого детерминанта, здесь $u = c(p, s, t)$, $u' = c'(p', s', t')$.

Компоненту внутреннего электрического поля сферы (3.6) представим в виде

$$\begin{aligned} E_{xu'}^0(\vec{r}',t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{xxu}^{\text{э}u'} \vec{E}_{0xu}(\vec{r}',t) + g_{xyu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\vec{r}',t) + g_{xzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\vec{r}',t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{xxu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\vec{r}',t) + \beta_{xyu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\vec{r}',t) + \beta_{xzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\vec{r}',t) \right] \right), \end{aligned}$$

остальные компоненты внутренних полей сферы получают аналогично из (3.6).

Если электромагнитным взаимодействием между сферами решетки пренебречь, то выражения для внутреннего поля произвольной сферы решетки (3.6) будут иметь вид аналогичный выражениям (1.14).

Для случая, когда можно предположить, что у всех сфер с одинаковым индексом p каждой подрешетки внутренние поля отличаются от поля выделенной сферы $c'(p', s' = 0, t' = 0)$ на фазовый множитель с модулем, равным единице, то систему уравнений (3.4) для сложной решетки можно свести к системе, число уравнений которой будет равно $-(2|p_m| + 1)C$, где p_m – максимальное значение индекса p . Входящие в эту систему уравнения, например, для выделенной сферы $c'(p', s' = 0, t' = 0)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_{oc'(p', s'=0, t'=0)}(\vec{r}', t) = & \left(\frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{c'(p', s'=0, t'=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & \left. \left. c'(p, s, t) \neq c'(p', s' = 0, t' = 0) \right. \right. \\ & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right] \right\}_{c'} - \\ & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c(p, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right] \right\}_c \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{oc'(p', s'=0, t'=0)}(\vec{r}', t) = & \left(\frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{c'(p', s'=0, t'=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) + \right. \\ & \left. c'(p, s, t) \neq c'(p', s' = 0, t' = 0) \right. \\ & \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\}_{c'} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p,s=0,t=0)}^0(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c(p,s=0,t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_c.
 \end{aligned}$$

Если можно предположить, что внутренние поля всех сфер решетки отличаются от поля выделенной, например, сферы $c'(p'=0, s'=0, t'=0)$ на фазовый множитель с модулем, равным единице, то система взаимосвязанных $2N$ уравнений (3.4) распадается на N независимых пар вида

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{oc'(p'=0, s'=0, t'=0)}(\vec{r}', t) &= \left(\frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'} (\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{c'(p'=0, s'=0, t'=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
 & - \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p=0, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
 & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p=0, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_{c'} - \\
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c(p=0, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p=0, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_c,
 \end{aligned}$$

(3.8)

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{oc'(p'=0, s'=0, t'=0)}(\vec{r}', t) &= \left(\frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'} (\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{H}_{c'(p'=0, s'=0, t'=0)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
 & - \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c'(p=0, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) + \right. \\
 & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}_{c'(p=0, s=0, t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_{c'} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c\varphi}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \vec{H}_{c(p=0,s=0,t=0)}^0(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c\varphi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^{\varepsilon}(\vec{r}) \vec{E}_{c(p=0,s=0,t=0)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right)_c,
 \end{aligned}$$

из решения которых находят выражения для внутренних полей каждой сферы, входящей в систему ограниченных трехмерных решеток.

Если в системе уравнений (3.8) пренебречь слагаемыми с оператором rot , в силу их малости при резонансе, то эта система упрощается и система (3.8) распадается на $2N$ независимых уравнений. Решение этой задачи можно свести к одночастичному приближению предположив, что внутренние поля всех сфер системы решеток равны полю выделенной сферы $u' = c'(p' = 0, s' = 0, t' = 0)$ и решив систему уравнений (3.8).

Эти упрощения в системе уравнений (3.4) приводят к потере некоторых сведений о внутреннем поле выделенной сферы решетки.

Для периодического случая (3.1), когда падающая волна распространяется вдоль оси z , внутренние и рассеянные поля представим через пространственные гармоники.

Разложим по собственным функциям постоянных d, h ортогональной решетки (3.1), (3.3) выражение

$$\frac{e^{-ik_1 r_{uu'}}}{r_{uu'}} = \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{mn}{d} (x_{c',s'} - x_{c,s}) + \frac{n\pi}{h} (y_{c',t'} - y_{c,t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c,p}| \right]}, \quad (3.9)$$

где

$$\chi_{mn} = \begin{cases} 2, & \text{если } m = 0 \text{ или } n = 0, \\ 1, & \text{если } m, n > 0, \end{cases}$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда величины $W_{c(p,s,t)}^{\varepsilon}(\vec{r})$ и $W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r})$ (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 W_{c(p,s,t)}^{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - \\
 &- k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{mn}{d} (x_{c',s'} - x_{c,s}) + \frac{n\pi}{h} (y_{c',t'} - y_{c,t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c,p}| \right]}, \\
 W_{c(p,s,t)}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - \\
 &- k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{mn}{d} (x_{c',s'} - x_{c,s}) + \frac{n\pi}{h} (y_{c',t'} - y_{c,t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c,p}| \right]}.
 \end{aligned}$$

Поля падающей волны относительно рассеивающей сферы представим в виде бесконечной суммы пространственных гармоник

$$\vec{E}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{E}_{oc(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t), \quad (3.10)$$

$$\vec{H}_{oc(p,s,t)}(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{H}_{oc(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t).$$

Индукированные внутренние поля сферы также запишем в виде разложения

$$\vec{E}_{c(s,t,p)}^0(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{E}_{c(s,t,p)}^{0mn}(\vec{r}', t), \quad (3.11)$$

$$\vec{H}_{c(s,t,p)}^0(\vec{r}', t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{H}_{c(s,t,p)}^{0mn}(\vec{r}', t),$$

это представление нельзя рассматривать как разложение Фурье.

Уравнения для компонент индуцированных внутренних полей $\vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$ произвольной сферы сложной трехмерной решетки (3.1) запишем в виде (3.9), (3.10), (3.11)

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{oc'(p',s',t')}^{mn}(\vec{r}', t) &= \left(\frac{(\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2 \varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c'} (\varepsilon_{c'\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}} \vec{E}_{c'(p',s',t')}^{0mn}(\vec{r}', t) - \right. \\
 &- \sum_{\substack{p \ s \ t \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c, -k_1 a_c, \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{c'(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -ik\mu_0 \left[\nabla, \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{c'(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) \right] \left. \right\} e^{-i \left[\frac{\pi m}{d}(x_{c',s'} - x_{c',s}) + \frac{n\pi}{h}(y_{c',t'} - y_{c',t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c',p}| \right]} \Bigg|_{c'} - \\
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_{p,s,t} \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{c(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{c(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) \right] \right\} e^{-i \left[\frac{\pi m}{d}(x_{c',s'} - x_{c',s}) + \frac{n\pi}{h}(y_{c',t'} - y_{c',t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c',p}| \right]} \right) \Bigg|_c,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_{oc'(p',s',t')}^{mn}(\vec{r}', t) &= \left(\frac{(\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c}^2 \mu_{c'\varepsilon\phi} + i\theta_{1c} (\mu_{c'\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}} \vec{H}_{c'(p',s',t')}^{0mn}(\vec{r}', t) - \right. \\
 & - \sum_{\substack{p,s,t \\ c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')}} \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_{c'} - k_1 a_{c'} \cos k_1 a_{c'}) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\mu_{c'\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{c'(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) + \right. \\
 & \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \left(\frac{\varepsilon_{c'\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{c'(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) \right] \right\} e^{-i \left[\frac{\pi m}{d}(x_{c',s'} - x_{c',s}) + \frac{n\pi}{h}(y_{c',t'} - y_{c',t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c',p}| \right]} \Bigg|_{c'} - \\
 & - \sum_{\substack{c=1 \\ (c \neq c')}}^C \left(\sum_{p,s,t} \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ (\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{c(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{c(p,s,t)}^{0mn}(\vec{r}', t) \right] \right\} e^{-i \left[\frac{\pi m}{d}(x_{c',s'} - x_{c',s}) + \frac{n\pi}{h}(y_{c',t'} - y_{c',t}) + \beta_{mn} |z_{c',p'} - z_{c',p}| \right]} \right) \Bigg|_c.
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3.12) по формулам Крамера для внутренних полей произвольной сферы сложной трехмерной решетки (3.1) представим в виде

$$\vec{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta^{mn}} \sum_{c=1}^C \left[\sum_u \left(\hat{g}_u^{\varepsilon u' mn} \vec{E}_{oc(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_u^{\varepsilon u' mn} \vec{H}_{oc(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) \right) \right] \right), \tag{3.13}$$

$$\vec{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta^{mn}} \sum_{c=1}^C \left[\sum_u \left(\hat{g}_u^{\mu u' mn} \vec{E}_{oc(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_u^{\mu u' mn} \vec{H}_{oc(p,s,t)}^{mn}(\vec{r}', t) \right) \right] \right),$$

где Δ^{mn} – детерминант системы уравнений (3.12).

Числа m , n , связанные с распространяющимися и затухающими волнами, определяются соответственно условиями:

$$k^2 \varepsilon_0 \mu_0 > \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2, \quad (3.14)$$

$$k^2 \varepsilon_0 \mu_0 < \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2. \quad (3.15)$$

Решение системы уравнений (3.12) можно упростить, если использовать приближение, аналогичное случаю (3.8).

Потенциалы Герца (1.10) рассеянного сферами решетки поля можно представить, учитывая (3.6) и (3.13), в виде суперпозиций потенциалов Герца отдельных сфер решетки

$$\vec{\Pi}^o(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\varepsilon_{c\varphi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right]_c, \quad (3.16)$$

$$\vec{\Pi}^M(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c\varphi}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right]_c.$$

$$\text{Здесь } r_{c(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{c,s})^2 + (y - y_{c,t})^2 + (z - z_{c,p})^2},$$

где (x, y, z) – координаты точки наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки, $(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p})$ – координаты точки нахождения центров рассеивающих сфер решетки (3.1).

В соотношениях для потенциалов Герца (3.16) выражение с экспонентой можно представить в виде разложения по собственным функциям постоянных d, h ортогональной решетки (3.1)

$$\frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} = \frac{2\pi}{dh} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} e^{-i \left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{c,s}) + \frac{n\pi}{h}(y-y_{c,t}) + \beta_{mn}|z-z_{c,p}| \right]}. \quad (3.17)$$

Тогда, учитывая (3.6) и (3.16), найдем искомые поля, рассеянные сферами решетки с конкретной топологической структурой, задаваемой координатным представлением (3.1) в виде

$$\vec{E}_{pacc}(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c3\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \widehat{L}_c \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') - \right. \right. \\ \left. \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c3\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \widehat{P}_c \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right]_c, \quad (3.18)$$

$$\vec{H}_{pacc}(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c3\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \widehat{L}_c \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') + \right. \right. \\ \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c3\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \widehat{P}_c \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right]_c,$$

где \widehat{L}_c и \widehat{P}_c – функциональные матрицы вида

$$\widehat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{xzc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{yzc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zcc} \end{bmatrix}; \quad \widehat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (3.19), имеют вид

$$\Psi_{xxc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k_1^2 + \frac{3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (x - x_{c,s})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{yyc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k_1^2 + \frac{3(y - y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (y - y_{c,t})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{zcc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k_1^2 + \frac{3(z - z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (z - z_{c,p})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(z - z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} = \frac{3(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} = \frac{3(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{yzc} = \Psi_{zyc} = \frac{3(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xc} = \frac{(x - x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(x - x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{xc}^0 = -\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc} = \frac{(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{yc}^0 = -\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc} = \frac{(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{zc}^0 = -\Psi_{zc}.$$

Для случая (3.14), (3.15), (3.17) рассеянные решеткой поля представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\sum_u \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \widehat{L}_c^{mn} \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \widehat{P}_c^{mn} \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i\left(\omega t - \left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{c,s}) + \frac{n\pi}{h}(y-y_{c,t}) + \beta_{mn}|z-z_{c,p}| \right] \right)} \right] \right)_c, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, t) = \sum_{c=1}^C \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\sum_u \frac{2\pi}{dhk_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}} \left\{ \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \widehat{L}_c^{mn} \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \widehat{P}_c^{mn} \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i\left(\omega t - \left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{c,s}) + \frac{n\pi}{h}(y-y_{c,t}) + \beta_{mn}|z-z_{c,p}| \right] \right)} \right] \right)_c, \end{aligned}$$

где \widehat{L}_c^{mn} , \widehat{P}_c^{mn} – функциональные матрицы вида (2.21).

Для частного случая ($c=1; p=0; s, t=0$) одинаковых сфер (рис. 2.3), когда рассеивается волна

$$\vec{E}_{0x}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}, \quad \vec{H}_{0y}(z, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}$$

и можно пренебречь электромагнитным взаимодействием между сферами, компонента рассеянного поля $E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t)$ из (3.18) для ближней зоны имеет

вид $\left(r_{c(p,s,t)} = r_s, x_{c,s} = x_s \right)$

$$\begin{aligned} E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t) = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left[\frac{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)} E_0 \times \right. \\ \left. \times \sum_{-s}^s \left(3(x - x_s)^2 - r_s^2 \right) \left(\frac{1}{r_s^5} + ik_1 \frac{1}{r_s^4} \right) - ik\mu_0 \frac{(\mu_{\varepsilon\phi} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s}^s \frac{z}{r_s^3} \right] e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

а для дальней зоны –

$$E_{x_{расc}}(\vec{r}, t) = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left[k_1^2 \frac{(\varepsilon_{эф} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{эф} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{эф} + i\theta_1 (\varepsilon_{эф} + 2\varepsilon_0)} E_0 \times \right. \\ \left. \times \sum_{-s}^s \left(\frac{1}{r_s} - \frac{(x - x_s)^2}{r_s^3} \right) e^{-ik_1 r_s} + k_1 k \mu_0 \frac{(\mu_{эф} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{эф} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{эф} + i\theta_1 (\mu_{эф} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s}^s z \frac{e^{-ik_1 r_s}}{r_s^2} \right] e^{i\omega t},$$

Из детерминанта системы уравнений (3.4) определяются резонансные условия. Когда проницаемости ε_c , μ_c одинаковых сфер решетки действительны и $a_c/\lambda_g \sim 1$, они находятся из выражения

$$\det \operatorname{Re} \left\| \alpha_{sj}^{\varepsilon, \mu} \right\| = 0, \quad (3.21)$$

разрешая его относительно функции $F(\theta_c)$ (1.9), где $\left\| \alpha_{sj}^{\varepsilon, \mu} \right\|$ – основная матрица системы уравнений (3.4). Если пренебречь электромагнитным взаимодействием сфер в уравнении (3.21) и разрешить его относительно функции $F(\theta_c)$, то условия для внутренних резонансов электрического типа c -й сферы имеют вид (1.15).

3.2. Структурные функции электромагнитного взаимодействия трехмерной резонансной решетки малых резонансных магнитодиэлектрических сфер

Ограничимся здесь построением приближенных выражений компонент тензорной функции $\mathcal{F}_c^{\varepsilon}(\vec{r}_{u'u})$ (1.47) в предположении, что внутренние поля сфер ограниченной трехмерной ортогональной простой решетки одинаковы. Найдем резонансные условия для электрического внутреннего поля сфер из решения уравнения (1.37), которое в явном виде представим [39, 88]

$$\det \operatorname{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\varepsilon} \right\| = \det \begin{bmatrix} \Psi_{cxx}^{\varepsilon 0'} + \Psi_{uxx}^{\varepsilon'} & \Psi_{uxy}^{\varepsilon'} & \Psi_{uxz}^{\varepsilon'} \\ \Psi_{uyx}^{\varepsilon'} & \Psi_{cyy}^{\varepsilon 0'} + \Psi_{uyy}^{\varepsilon'} & \Psi_{uyz}^{\varepsilon'} \\ \Psi_{uzx}^{\varepsilon'} & \Psi_{uzy}^{\varepsilon'} & \Psi_{czz}^{\varepsilon 0'} + \Psi_{uzz}^{\varepsilon'} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Элементы, входящие в матрицу $\text{Re} \left\| \alpha_{ij}^{\vartheta} \right\|$ (3.22), учитывая (3.19), (3.3), имеют

ВИД

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{cxx}^{\vartheta 0'} + \Psi_{uxx}^{\vartheta'} \right) &= A_{c\varepsilon}^{0'} - A_{c\varepsilon} \tau_{uxx}^{\vartheta'}, \quad \left(\Psi_{cyy}^{\vartheta 0'} + \Psi_{uyy}^{\vartheta'} \right) = A_{c\varepsilon}^{0'} - A_{c\varepsilon} \tau_{uyy}^{\vartheta'}, \\ \left(\Psi_{czz}^{\vartheta 0'} + \Psi_{uzz}^{\vartheta'} \right) &= A_{c\varepsilon}^{0'} - A_{c\varepsilon} \tau_{uzz}^{\vartheta'}, \quad \Psi_{uxy}^{\vartheta'} = \Psi_{uyx}^{\vartheta'} = -A_{c\varepsilon} \tau_{uxy}^{\vartheta'}, \\ \Psi_{uxz}^{\vartheta'} &= \Psi_{uzx}^{\vartheta'} = -A_{c\varepsilon} \tau_{uxz}^{\vartheta'}, \quad \Psi_{uyz}^{\vartheta'} = \Psi_{zyu}^{\vartheta'} = -A_{c\varepsilon} \tau_{uyz}^{\vartheta'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{uxx}^{\vartheta'} &= B_c \sum_p \sum_s \sum_t \left(c_{uxx} \cos k_1 r_{u'u} + a_{uxx} \sin k_1 r_{u'u} \right), \\ c'(p, s, t) &\neq c'(p' = 0, s' = 0, t' = 0) \\ \tau_{uxy}^{\vartheta'} &= B_c \sum_p \sum_s \sum_t \left(c_{uxy} \cos k_1 r_{u'u} + a_{uxy} \sin k_1 r_{u'u} \right), \\ c'(p, s, t) &\neq c'(p' = 0, s' = 0, t' = 0) \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} c_{uxx} &= \frac{1}{r_{u'u}} k_1^2 + \frac{3(x_{c',s'=0} - x_{c,s})^2 - r_{u'u}^2}{r_{u'u}^5} - k_1^2 \frac{(x_{c',s'=0} - x_{c,s})^2}{r_{u'u}^3}, \quad a_{uxx} = k_1 \frac{3(x_{c',s'=0} - x_{c,s}) - r_{u'u}^2}{r_{u'u}^4}, \\ c_{uxy} &= \frac{3(x_{c',s'=0} - x_{c,s})(y_{c',t'=0} - y_{c,t})}{r_{u'u}^5} - k_1^2 \frac{(x_{c',s'=0} - x_{c,s})(y_{c',t'=0} - y_{c,t})}{r_{u'u}^3}, \\ a_{uxy} &= k_1 \frac{3(x_{c',s'=0} - x_{c,s})(y_{c',t'=0} - y_{c,t})}{r_{u'u}^4}, \quad A_{c\varepsilon}^{0'} = \frac{(\varepsilon_{c\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c}^2 \varepsilon_{c\varepsilon\phi} + \theta_{1c}^2 (\varepsilon_{c\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0}, \\ A_{c\varepsilon} &= \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right), \quad B_c = \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c), \end{aligned}$$

если длина волны $\lambda \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \tau_{uxx}^{\vartheta'} &= \frac{a^3}{3} \sum_p \sum_s \sum_t \frac{3(x_{c',s'=0} - x_{c,s})^2 - r_{u'u}^2}{r_{u'u}^5}, \\ c'(p, s, t) &\neq c'(p' = 0, s' = 0, t' = 0) \\ \tau_{uxy}^{\vartheta'} &= \frac{a^3}{3} \sum_p \sum_s \sum_t \frac{3(x_{c',s'=0} - x_{c,s})(y_{c',t'=0} - y_{c,t})}{r_{u'u}^5}, \\ c'(p, s, t) &\neq c'(p' = 0, s' = 0, t' = 0) \end{aligned}$$

Выражения для величин $\tau_{uyy}^{\vartheta'}$, $\tau_{uzz}^{\vartheta'}$, $\tau_{uxz}^{\vartheta'}$, $\tau_{uyz}^{\vartheta'}$ (3.22) можно получить из (3.23), если заменить нижние индексы координат сфер в (3.23) соответственно нижним индексам этих величин.

В результате решения кубического уравнения (3.22) компоненты тензорной функции $\hat{\Phi}_c^\vartheta(\vec{r}_{u'u})$ (1.44) представим в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{cxx}^\vartheta(\vec{r}_{u'u}) &= \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{cxx}^\vartheta(\vec{r}_{u'u}), \\ \Phi_{cyy}^\vartheta(\vec{r}_{u'u}) &= \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{cyy}^\vartheta(\vec{r}_{u'u}), \\ \Phi_{czz}^\vartheta(\vec{r}_{u'u}) &= \frac{3 + 4\theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} + f_{czz}^\vartheta(\vec{r}_{u'u}),\end{aligned}\tag{3.24}$$

где $f_{cxx}^\vartheta(\vec{r}_{u'u})$, $f_{cyy}^\vartheta(\vec{r}_{u'u})$, $f_{czz}^\vartheta(\vec{r}_{u'u})$ – корни кубического уравнения (3.22).

Компоненты тензорной функции $\hat{\Phi}_c^M(\vec{r}_{u'u})$ (1.44) можно найти аналогичным способом. Из (3.24) можно получить частные случаи (2.34) и (2.44).

Из анализа выражений (3.24) вытекает, что когда длина волны в трехмерной решетке соизмерима с постоянными этой решетки, то в решетке возникают структурные резонансы электромагнитного взаимодействия магнитного и электрического типов.

Эти структурные резонансы магнитного и электрического типов одновременно сосуществуют в решетке и имеют практически одинаковые резонансные значения длин волн, зависящие от геометрии решетки. Каждый тип решеточных структурных резонансов оказывает влияние только на аналогичный по типу внутренний резонанс магнитодиэлектрических сфер решетки. Возможен физический эффект резонансного взаимодействия сфер при совмещении решеточных структурных резонансов с внутренними резонансами сфер, который можно использовать для усиления влияния на тонкую структуру внутреннего поля сфер и структуру рассеянного решеткой поля.

На рис. 3.3; 3.4 изображены дисперсионные зависимости для компонент тензорных функций (1.47, 3.24) и поля $|E_{pacc}|$ (3.18) кубической решетки сфер, когда в решетке возбуждены структурные (*см*) резонансы. Здесь имеется полное соответствие между резонансами для структурных функций (рис. 3.3) и резонансами для поля $|E_{pacc}|$ (рис. 3.4). Эти совпадения подтверждают правильность использованного условия (3.21).

Из анализа представленных графических зависимостей для трехмерных решеток сфер следует, что структурные резонансы позволяют определять области структурного (решеточного) и неструктурного резонансного рассеяния волн решетками, упрощают анализ решеточных дисперсионных характеристик рассеяния ограниченных решеток. Их можно использовать для анализа рассеивающих свойств резонансных решеток металлических сфер.

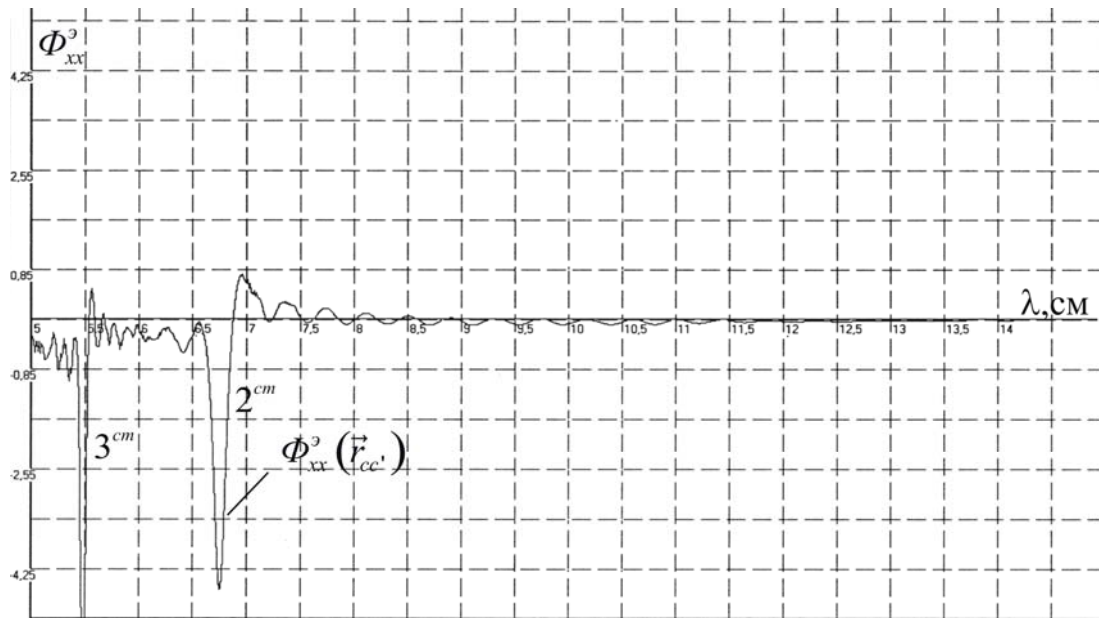


Рис. 3.3 а

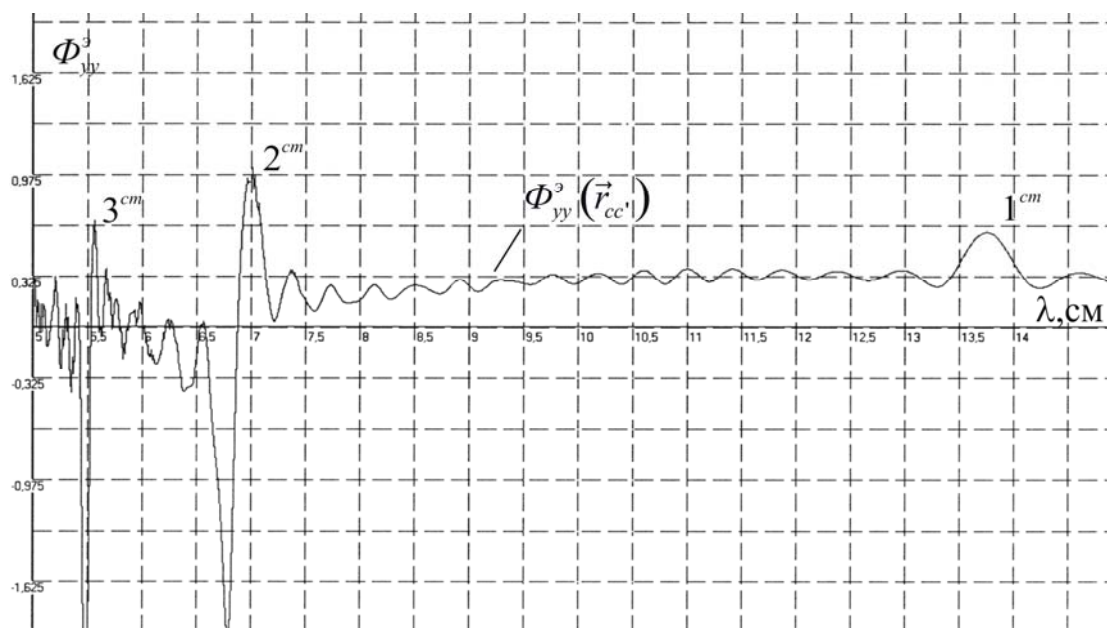


Рис. 3.3 б

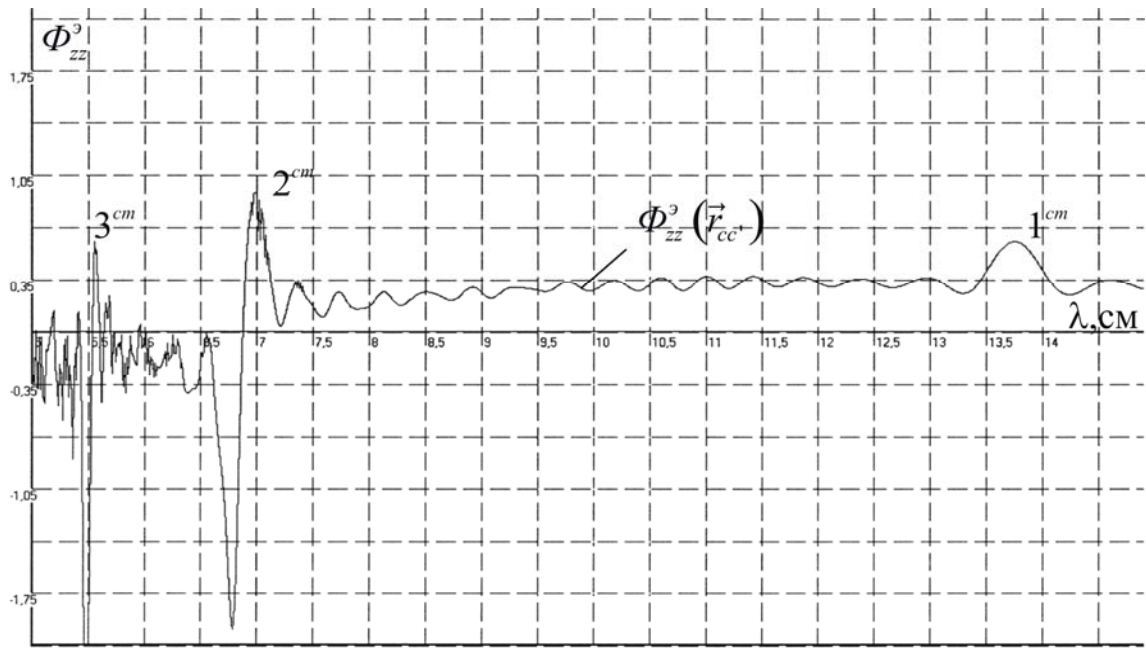


Рис. 3.3 с

Рис. 3.3. Зависимости компонент тензорной структурной функции электромагнитного взаимодействия $\hat{\Phi}^{\hat{a}}(\vec{r}_{cc'})$, (1.47) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ при $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $d=h=l=6,875$ см; $(s,t,p)=0,\pm 1,\dots,\pm 20$

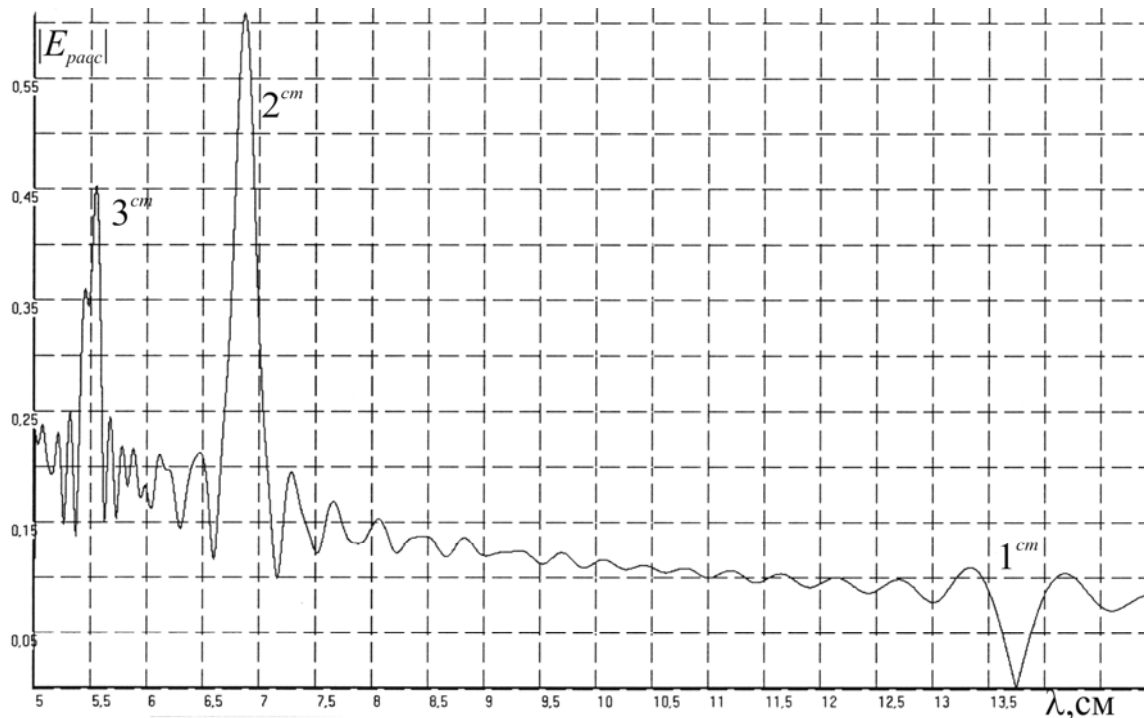


Рис. 3.4. Зависимость поля $|E_{\text{расс}}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ при $a=0,5$ см; $\epsilon'=5$; $\mu'=1$; $d=h=l=6,875$ см; $x=y=z=0$ см; $(s,t,p)=0,\pm 1,\dots,\pm 20$, когда в решетке возбуждены структурные (см) резонансы

3.3. Рассеяния электромагнитных волн резонансным кубическим кристаллом из малых магнитодиэлектрических сфер

В разделе предложен анализ численных расчетов для рассеянных внутренних и внешних полей резонансных кубических решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер (рис. 3.5). Внутренняя и внешняя топологическая структура ограниченных решеток задается натуральным рядом чисел. Рассматривается рассеяние плоской волны (2.26).

Графические зависимости получены для относительных величин рассеянных полей $|E_{\text{расс}}| = |E_{\text{расс}}(\vec{r})| / E_0(\vec{r})$, $|H_{\text{расс}}| = |H_{\text{расс}}(\vec{r})| / H_0(\vec{r})$ резонансных трехмерных решеток малых резонансных магнитодиэлектрических сфер от изменения длины рассеиваемой волны λ и координат x, y, z точек наблюдения рассеянного поля [73, 75, 77].

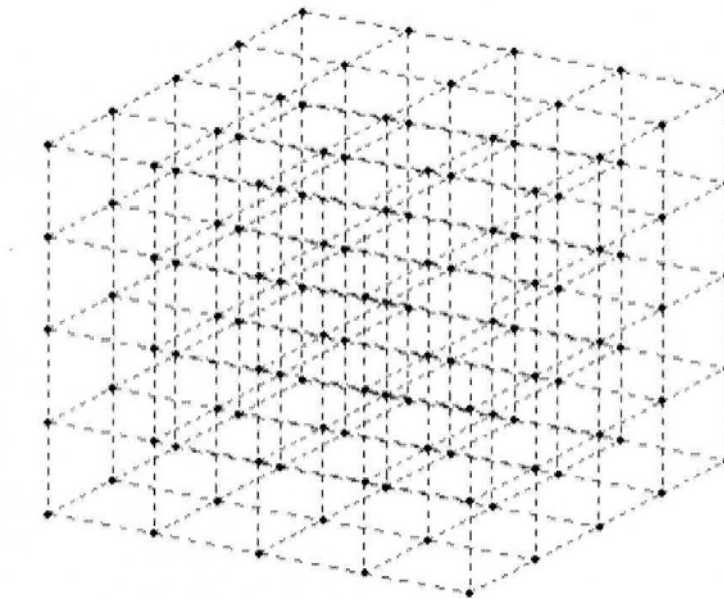


Рис. 3.5. Пространственная система узлов

3.3.1. Структурный резонанс кубического кристалла

В подразделе анализируются поля (1.4), (3.18) для простой кубической решетки при возбуждении в ней структурного (решеточного) резонанса [39,88] в окрестности центра резонансной зоны сфер кристалла $1^m - 1^o$ (рис. 3.6 *b*).

На рис. 3.6 *a, b* представлены дисперсионные зависимости для модулей рассеянного поля $|E_{\text{расс}}|$ (3.18) простой кубической решетки для случаев:

1) в решетке возбуждаются только структурные (решеточные) резонансы – $1^{cm}, 2^{cm}, 3^{cm}, 4^{cm}$ (рис. 3.6 *a*);

2) в решетке возбуждены несовмещенные структурные (решеточные) – $1^{cm}, 2^{cm}, 3^{cm}, 4^{cm}$ резонансы рассеяния и резонансы рассеяния – $1^m, 1^o, 2^m, 2^o$, связанные с внутренними резонансами сфер магнитного и электрического типов (рис. 3.6 *b*).

Из анализа графических зависимостей (рис. 3.6) вытекает, что спектр структурных (решеточных) резонансов кубической решетки дискретный и резонансные значения длин волн λ_p^{cm} являются характерными для данной геометрии решетки, а поля $|E_{\text{расс}}|$ и $|H_{\text{расс}}|$ при структурном резонансе 2^{cm} принимают практически одинаковое значение (рис. 3.7).

Для заданного значения постоянной решетки d кубического кристалла возможны структурные (решеточные) резонансы кристалла при длинах рассеиваемой волны, определяемых условием

$$\lambda_{pn}^{cm} = \bar{m}_n \cdot d, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Здесь значения коэффициента \bar{m}_n найдены численно для первых восьми структурных (решеточных) резонансов в виде:

$$\bar{m}_n \approx 2; 1; 0,8; 0,666; 0,6; 0,54; 0,5; 0,47, \quad (3.26)$$

где индекс n определяет номер структурного (решеточного) резонанса $1^{cm}, 2^{cm}, 3^{cm}, \dots$ (рис. 3.6). Резонансы со значением индекса $n = 1, 2, 4, 7$ соответствуют брэгговскому случаю [53].

В ограниченной кубической решетке возможны структурные (решеточные) резонансы при длинах рассеиваемой волны λ , не превышающих постоянную кубической решетки d в два раза $\lambda \leq 2d$.

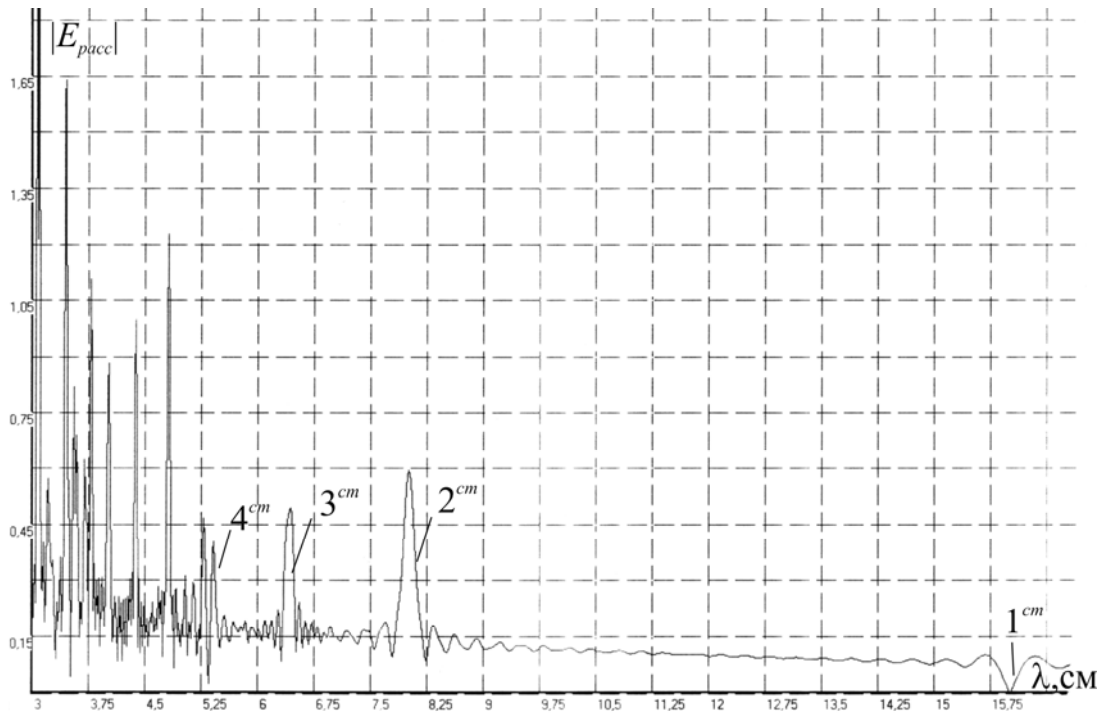


Рис. 3.6 а. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда в решетке возбуждены структурные (решеточные) (cm) резонансы, $a = 0,5$ см; $d = h = l = 8$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 5$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

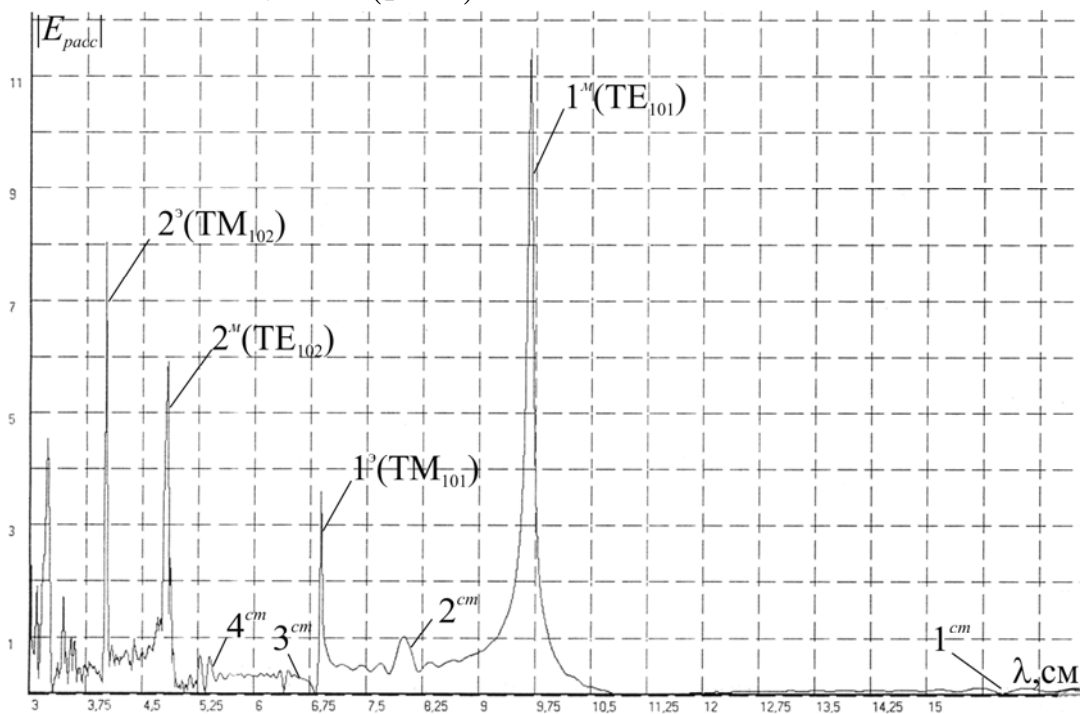


Рис. 3.6 б. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда возбужденные структурные (решеточные) (cm), магнитные (m) и электрические (ϵ) резонансы рассеяния не совмещены друг с другом, при $a = 0,5$ см; $d = h = l = 8$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

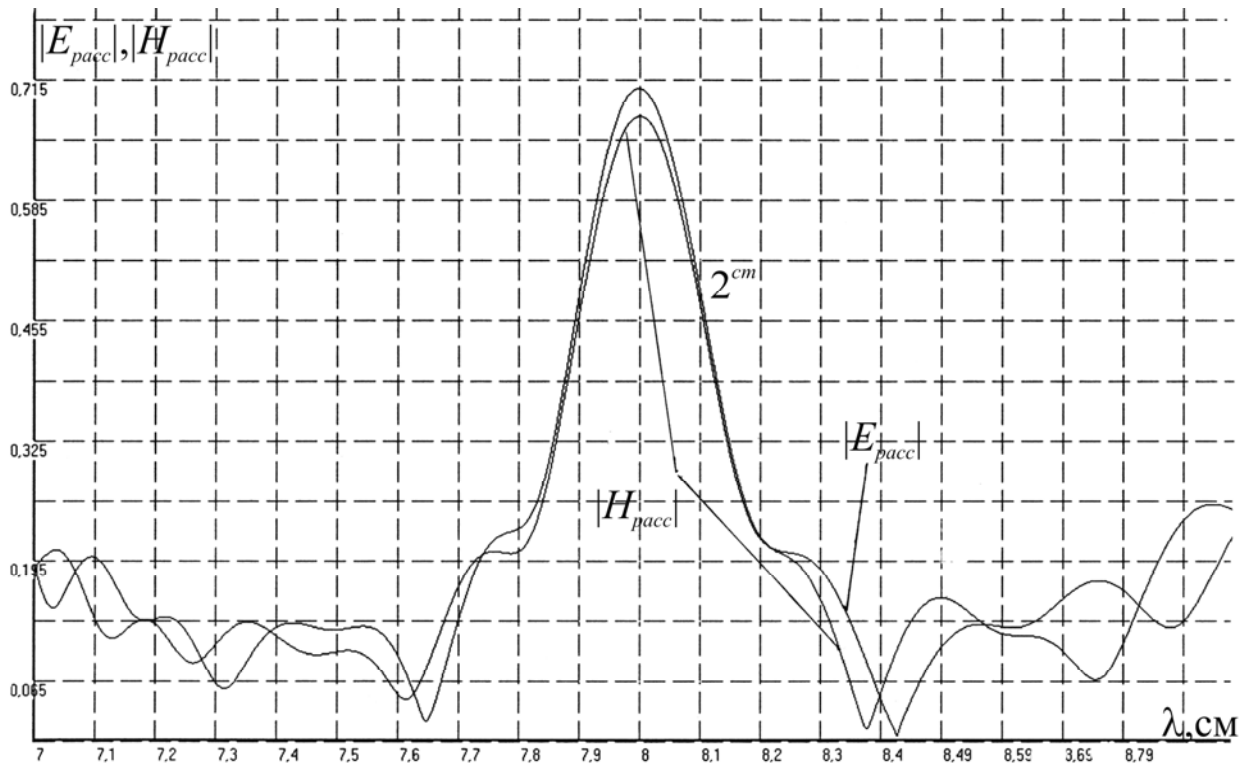


Рис. 3.7. Зависимости полей $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для структурного резонанса 2^{cm} при $a = 0,5$ см; $d = h = l = 8$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

На рис. 3.8 и 3.9 представлены структурные зависимости полей (3.18), (4.1) для произвольных расстояний от центров сфер кристалла до точек наблюдения поля по осям x, y, z (рис.3.1) внутри и вне решетки сфер в зонах Френеля и Фраунгофера для случая, когда в решетке возбужден структурный (решеточный) резонанс 2^{cm} (рис. 3.6 b), находящийся в окрестности центра резонансной зоны сфер кристалла $1^m - 1^p$ сфер. Как следует из рис. 3.8 e, f; 3.9 e, f, при этом типе резонанса кристалла наблюдается преимущественно брэгговское [53] рассеяние поля (3.18) в сторону, противоположную движению рассеиваемой волны по оси z , что является характерной чертой для этого типа структурного резонанса кристалла.

Вид графических зависимостей, изображенных на рис. 3.9 i, j, обусловлен интерференцией падающей и рассеянной волн.

На рис. 3.8 a – f изображены зависимости (3.18) для внутренних полей кубического кристалла для случая, когда $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$.

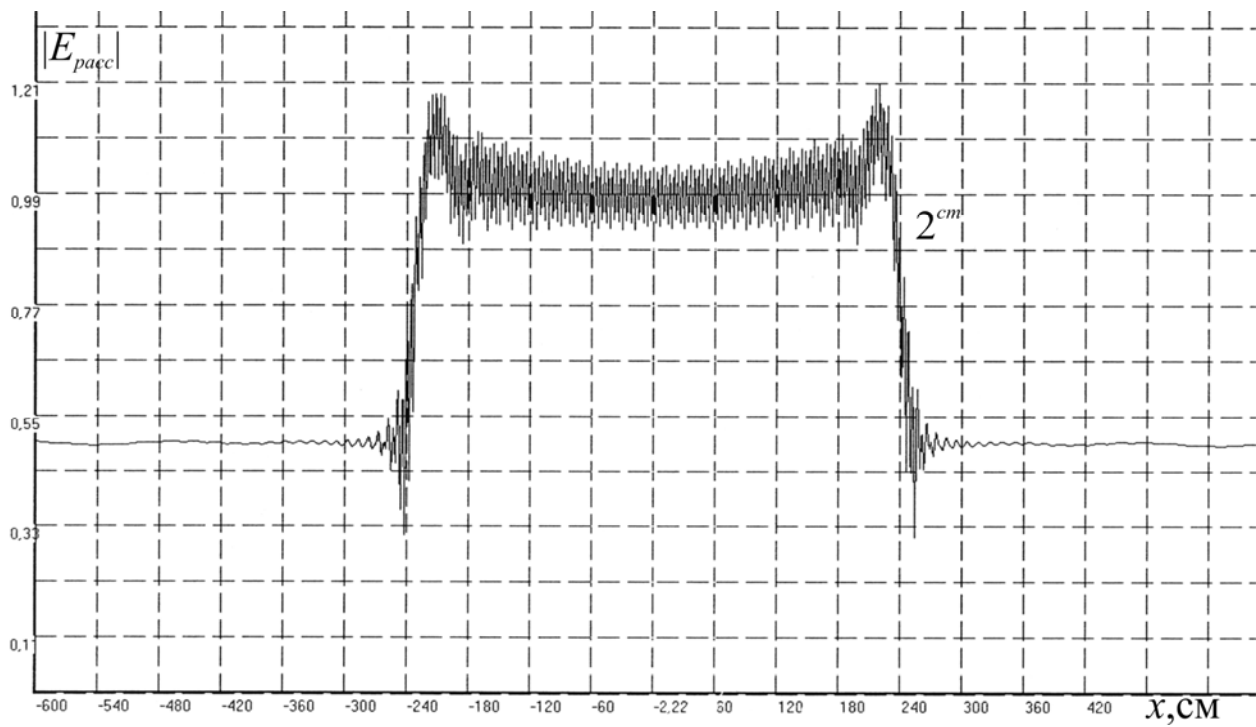


Рис. 3.8 а

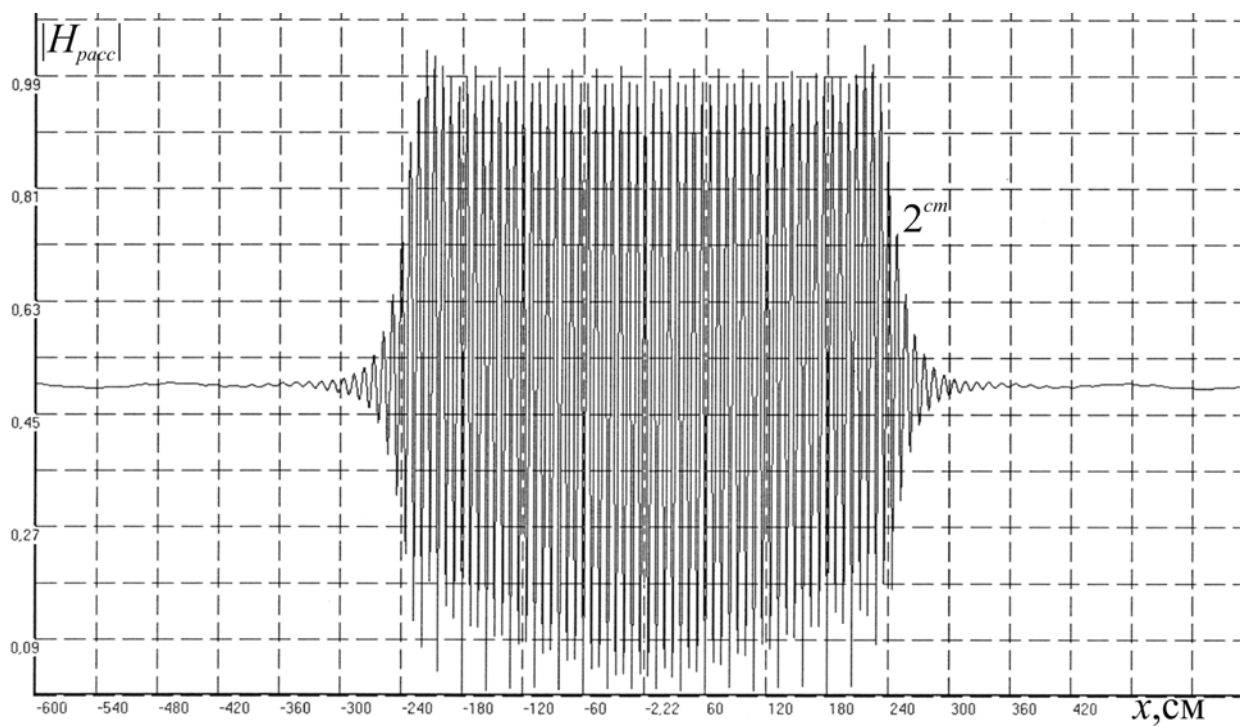


Рис. 3.8 б

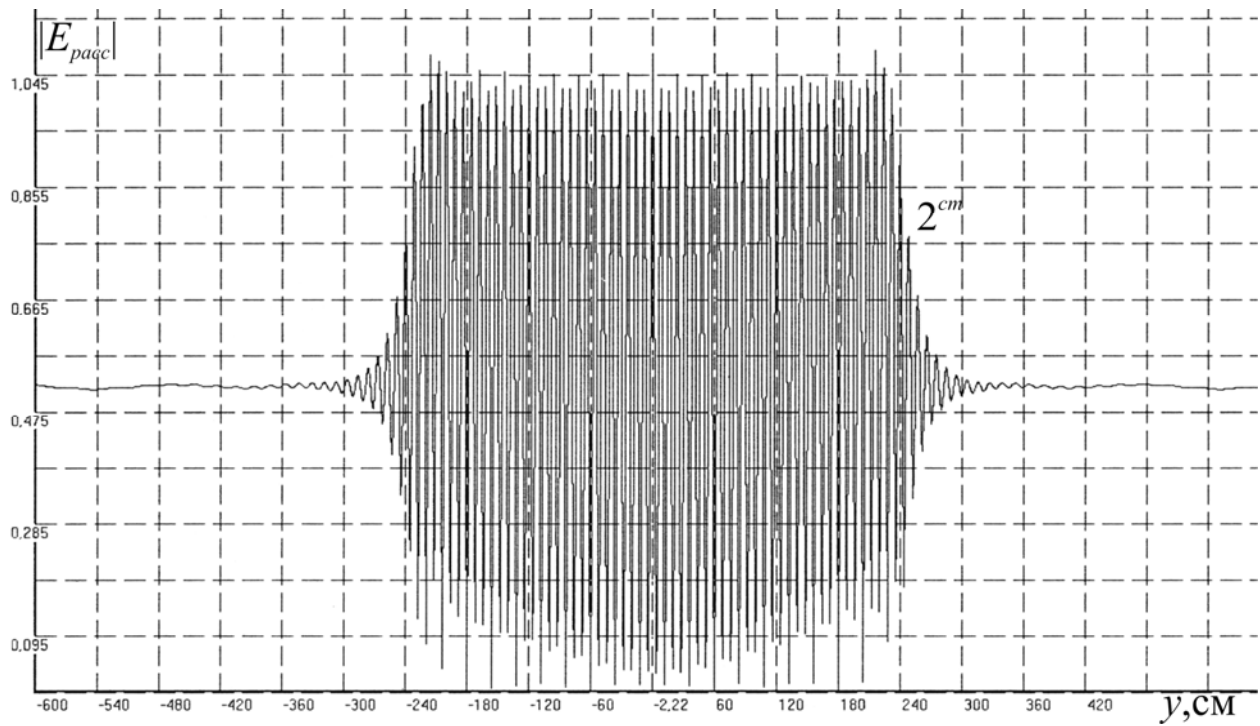


Рис. 3.8 с

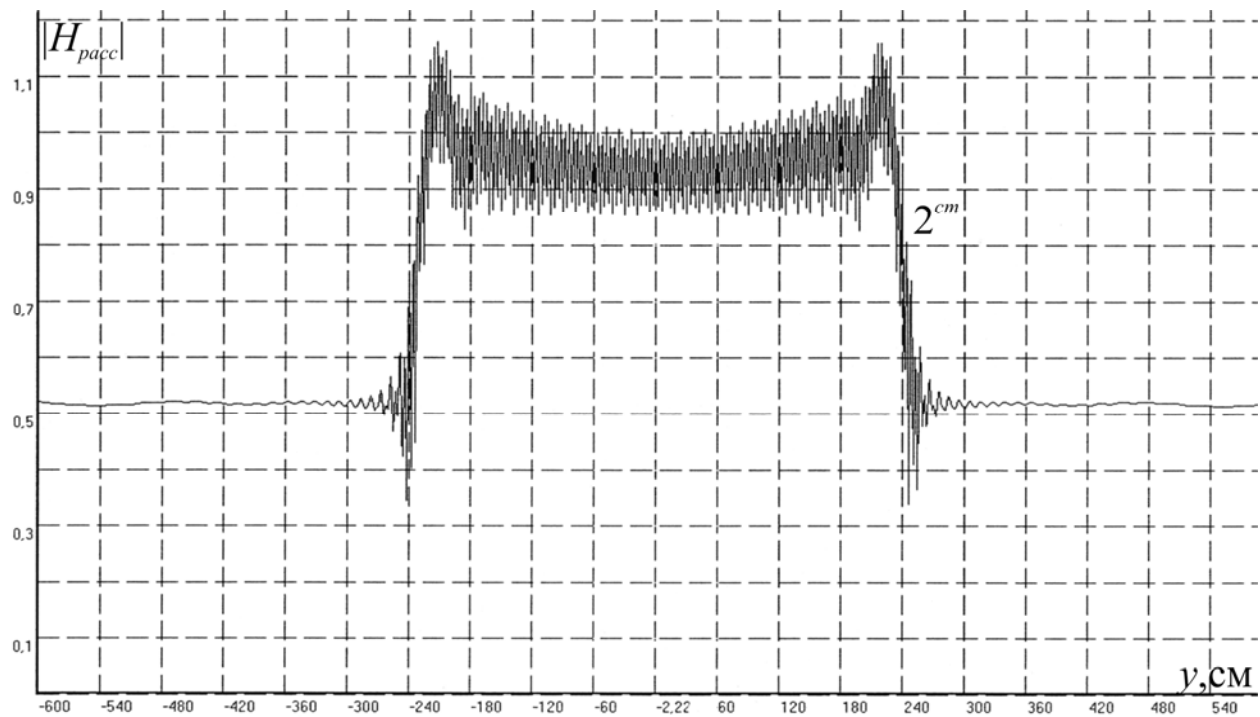


Рис. 3.8 d

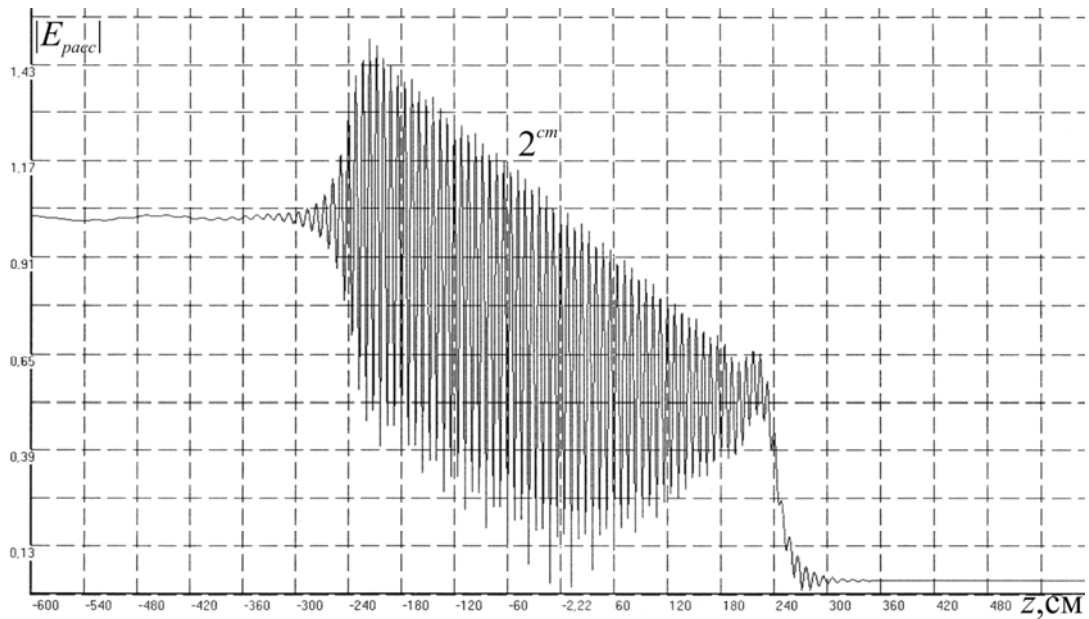


Рис. 3.8 e

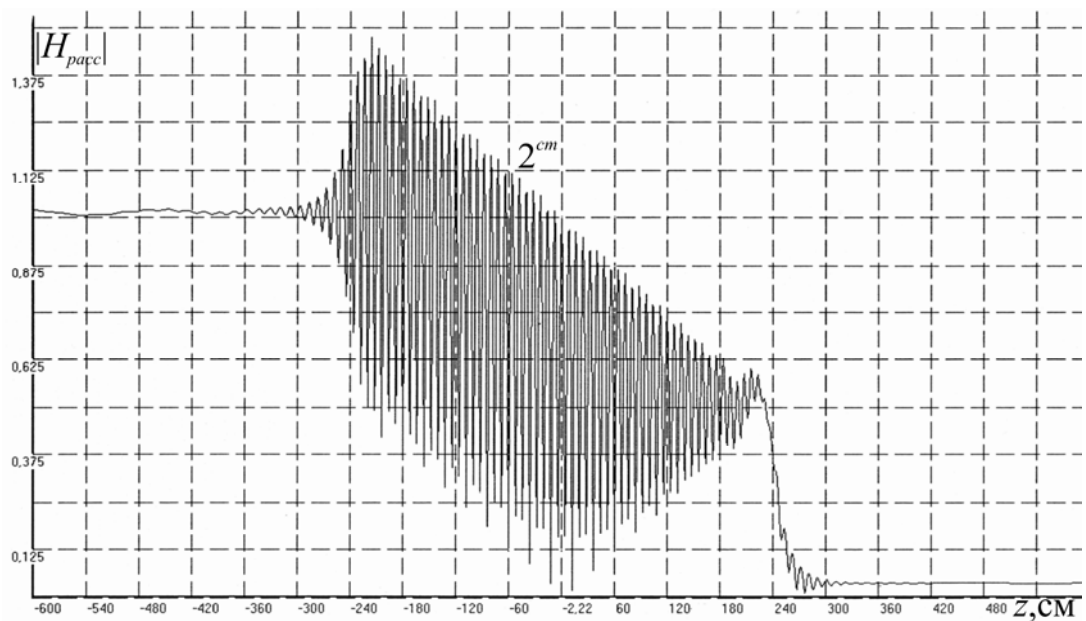


Рис. 3.8 f

Рис. 3.8 a – f. Зависимости для внутренних полей $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер, когда в ней возбужден структурный резонанс 2^{cm} (рис. 3.6 b), от изменения координат точек наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^{cm} = d = h = l = 8$ см; $y = z = 0$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$,

c, d) y при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^{cm} = d = h = l = 8$ см; $x = z = 0$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$,

e, f) z при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^{cm} = d = h = l = 8$ см; $x = y = 0$ см

Рассеиваемая волна на рис. 3.8 движется из области $z < 0$.

На рис. 3.9 *a* – *f* представлены зависимости (3.18) для зон Френеля и Фраунгофера для случая, когда $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$.

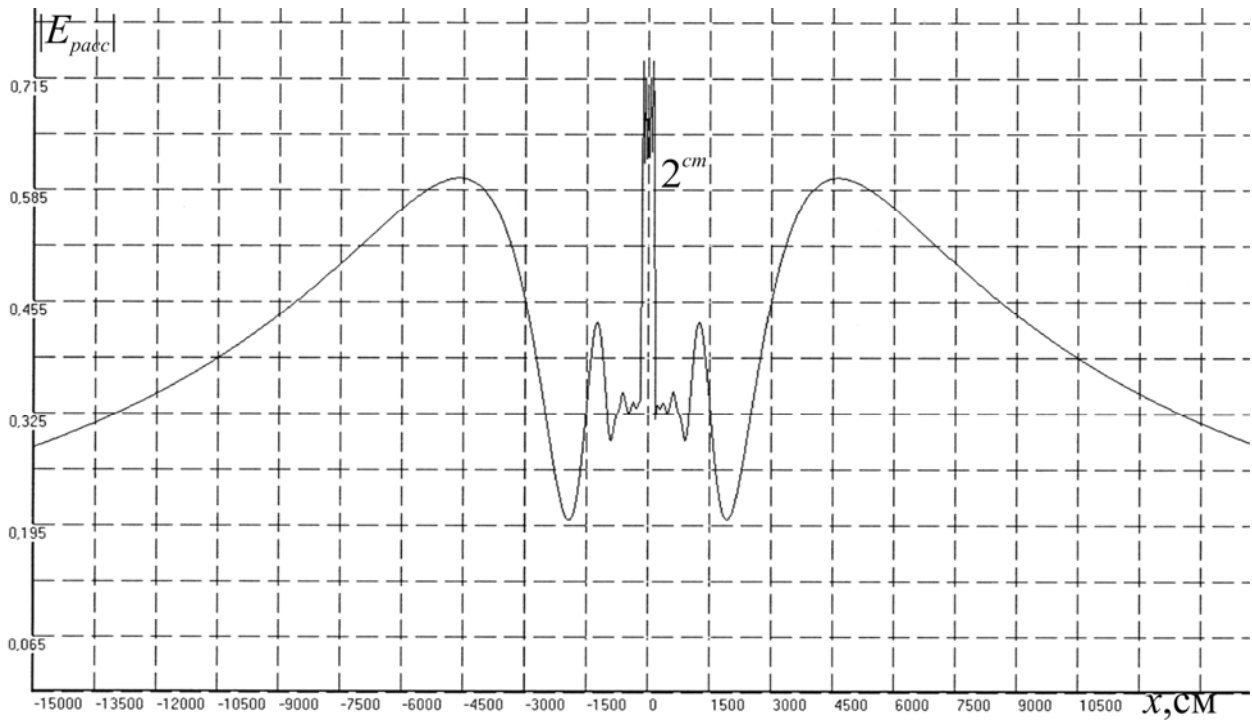


Рис. 3.9 *a*

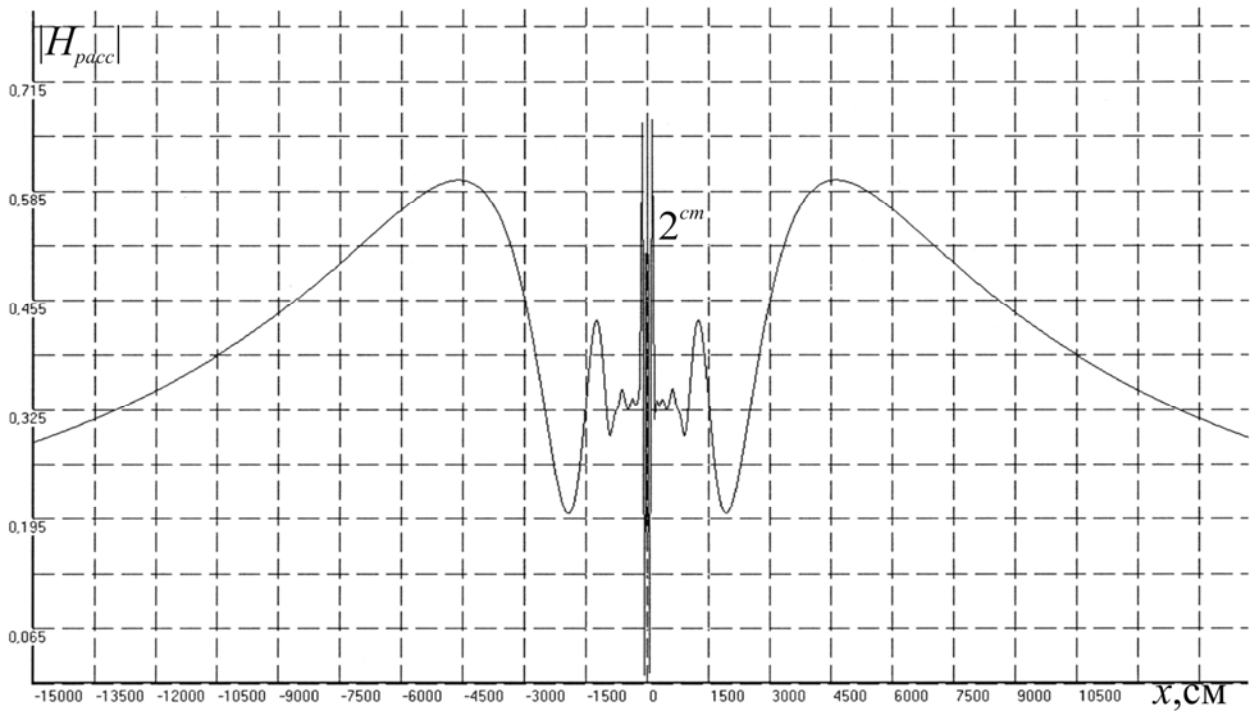


Рис. 3.9 *b*

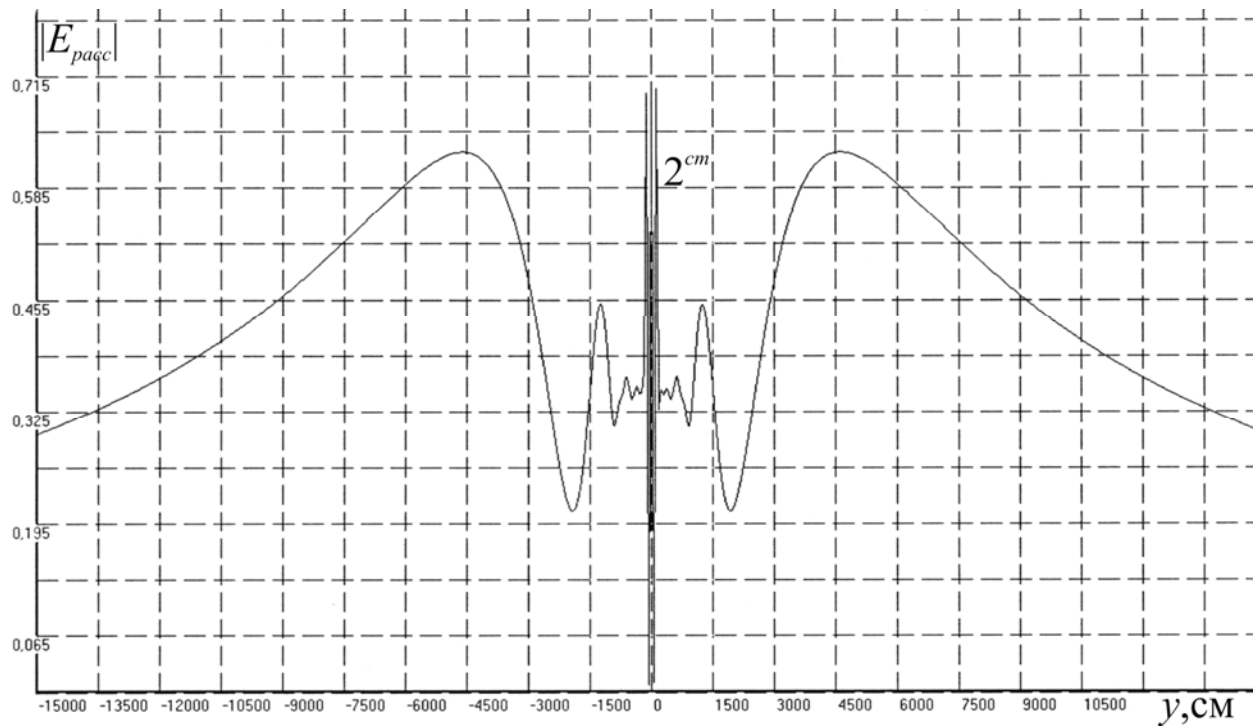


Рис. 3.9 c

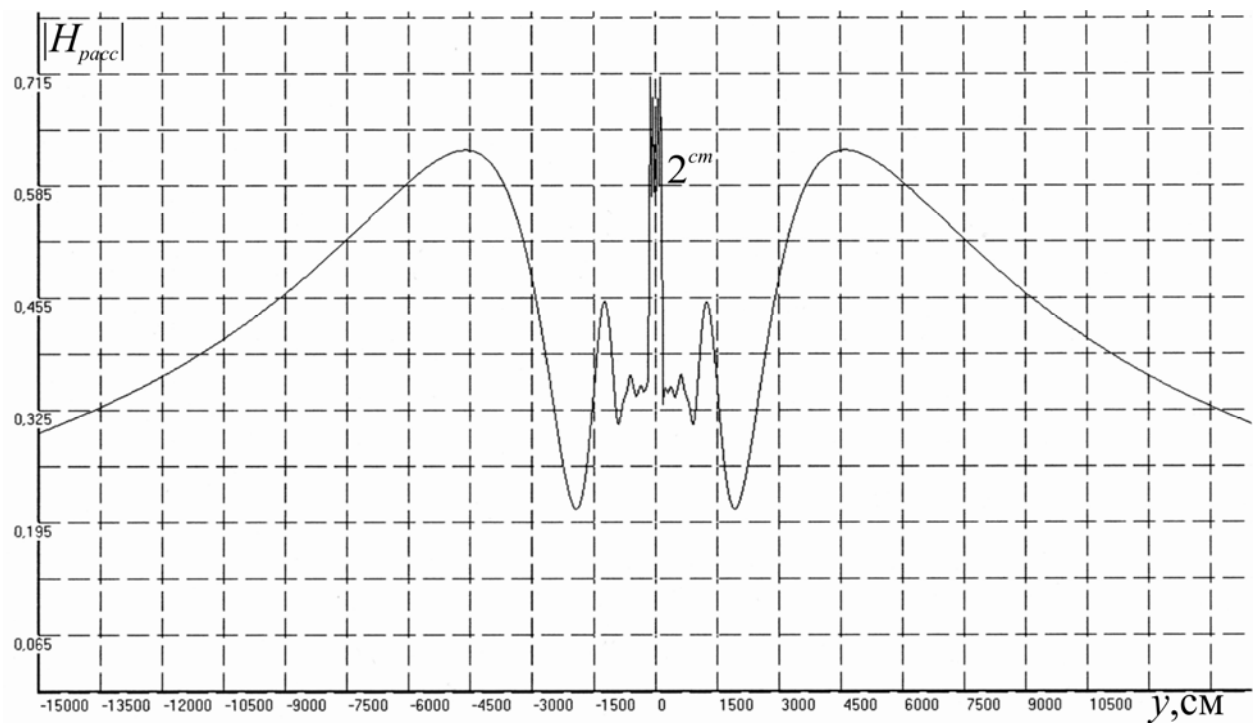


Рис. 3.9 d

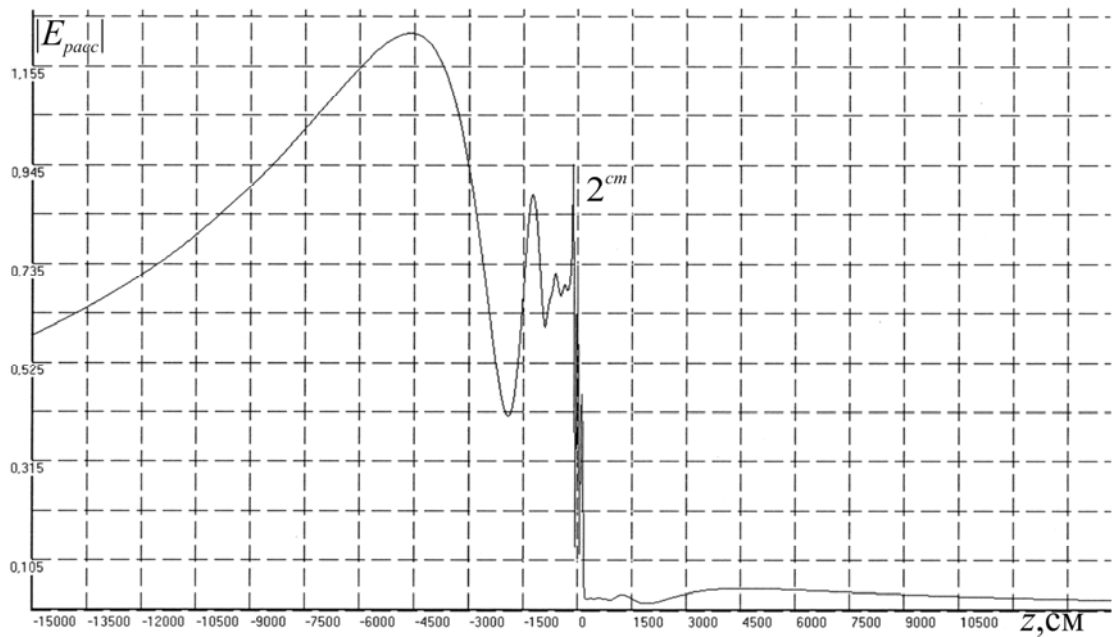


Рис. 3.9 e

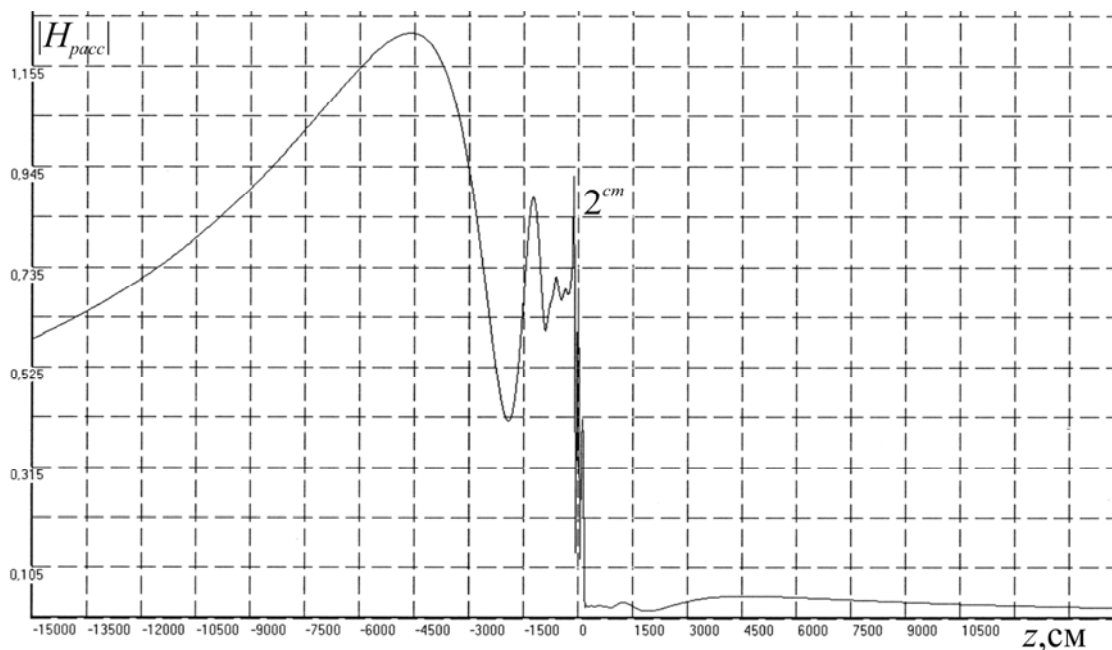


Рис. 3.9 f

Рис. 3.9 a – f. Зависимости полей $|E_{расс}|$, $|H_{расс}|$ (3.18), (3.1) в зонах Френеля и Фраунгера кубической решетки сфер, когда в ней возбужден структурный резонанс 2^{cm} (рис. 3.6 b) от изменения координат точек наблюдения поля x, y, z рассеянного поля при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^{cm} = d = h = l = 8$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$

Рассеиваемая волна на рис. 3.9 движется из области $z < 0$.

На рис. 3.9 g – j изображены зависимости (3.18), (1.4) для зон Френеля и Фраунгера для случая, когда $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$.

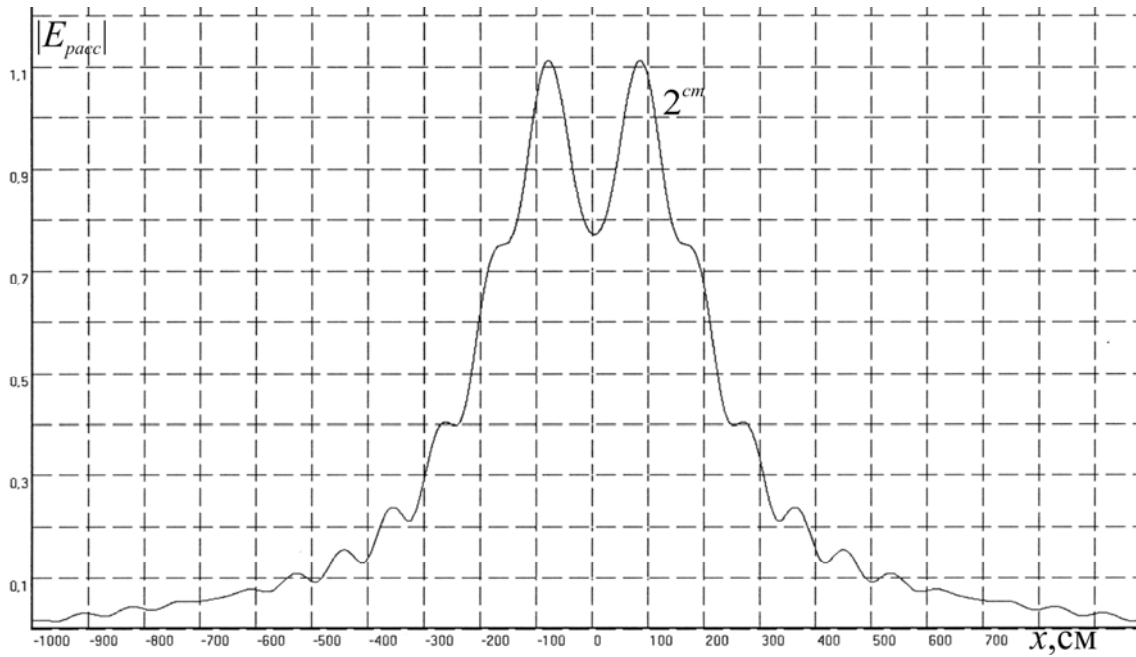


Рис. 3.9 g

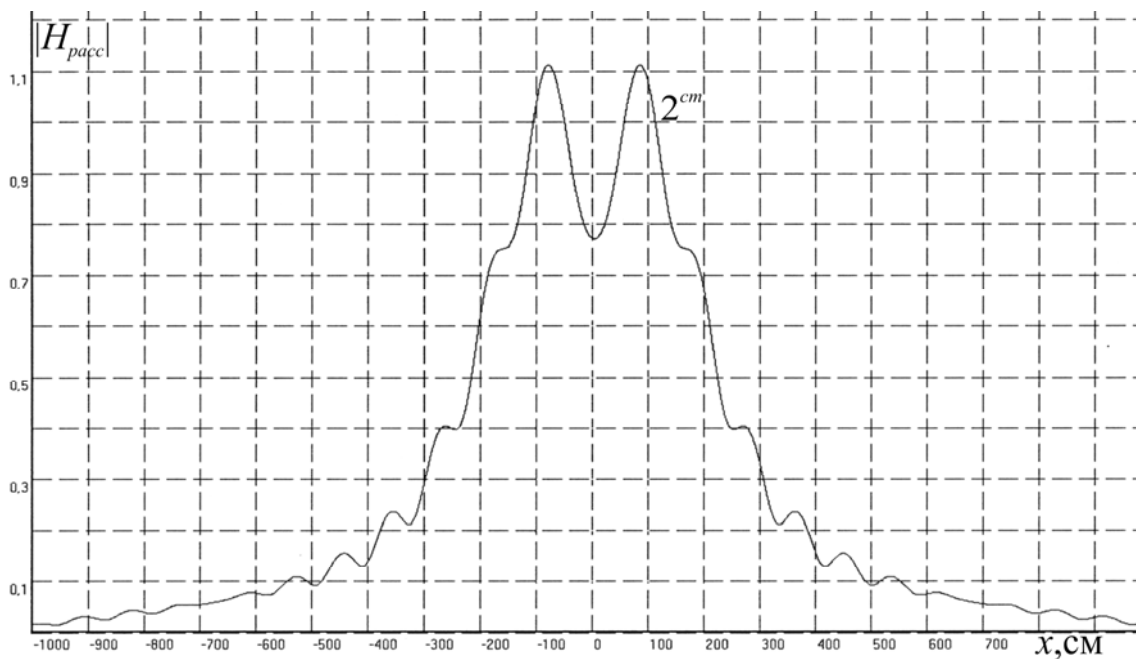


Рис. 3.9 h

Рис. 3.9 g, h. Зависимости полей $|E_{racc}|$, $|H_{racc}|$ (3.18), (3.1) в зоне Френеля кубической решетки сфер, когда в ней возбужден структурный резонанс 2^{cm} (рис. 3.6 b), от изменения координаты точки наблюдения x рассеянного поля и фиксированном значении координат $y=0$ см; $z=-5000$ см при $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $\lambda_p^{cm}=d=h=l=8$ см; $(p,s,t)=0,\pm 1,\dots,\pm 30$

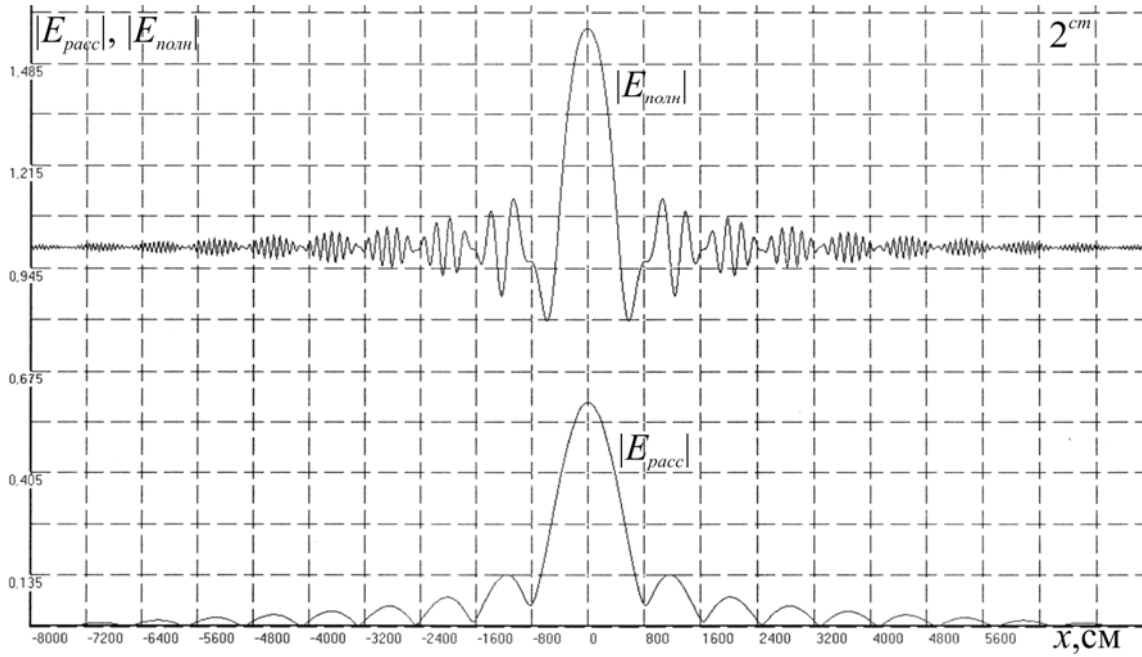


Рис. 3.9 i

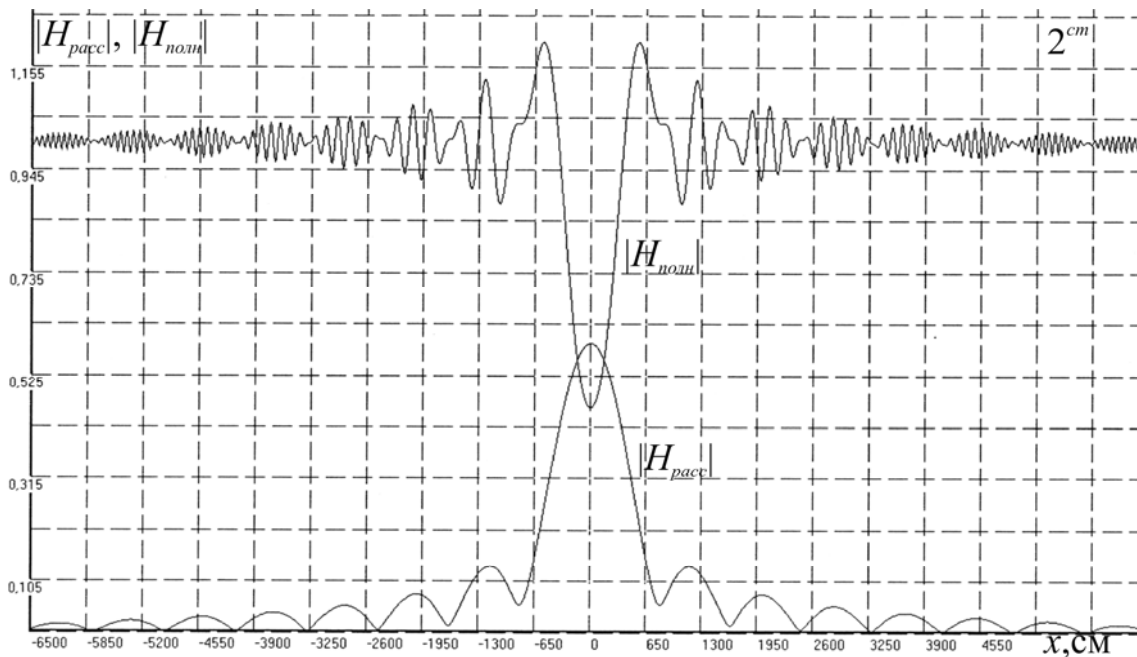


Рис. 3.9 j

Рис. 3.9 g, h. Зависимости полей $|E_{расс}|$, и $|H_{расс}|$, $|H_{полн}|$ (3.18), (1.4), (3.1) в зоне Фраунгофера кубической решетки сфер, когда в ней возбужден структурный резонанс 2^{cm} (рис. 3.6 b), от изменения координаты точки наблюдения x рассеянного поля и фиксированном значении координат $y = 0$ см; $z = -50000$ см при $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^{cm} = d = h = l = 8$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$

3.3.2. Магнитный резонанс кубического кристалла

В подразделе численно исследуются рассеянное (3.18) и полное (1.4) поля простой кубической решетки при возбуждении в ней совмещенных структурного (решеточного) резонанса и внутреннего резонанса сфер магнитного типа. Здесь о резонансе вида $(m+st)$ будем говорить как о магнитном резонансе кубического кристалла.

На рис. 3.10; 3.11 представлены дисперсионные зависимости для модуля полей (3.18) простой кубической решетки для случаев:

1) в решетке возбуждены только структурные (решеточные) резонансы – 1^{cm} , 2^{cm} , 3^{cm} , 4^{cm} (рис. 3.10 а);

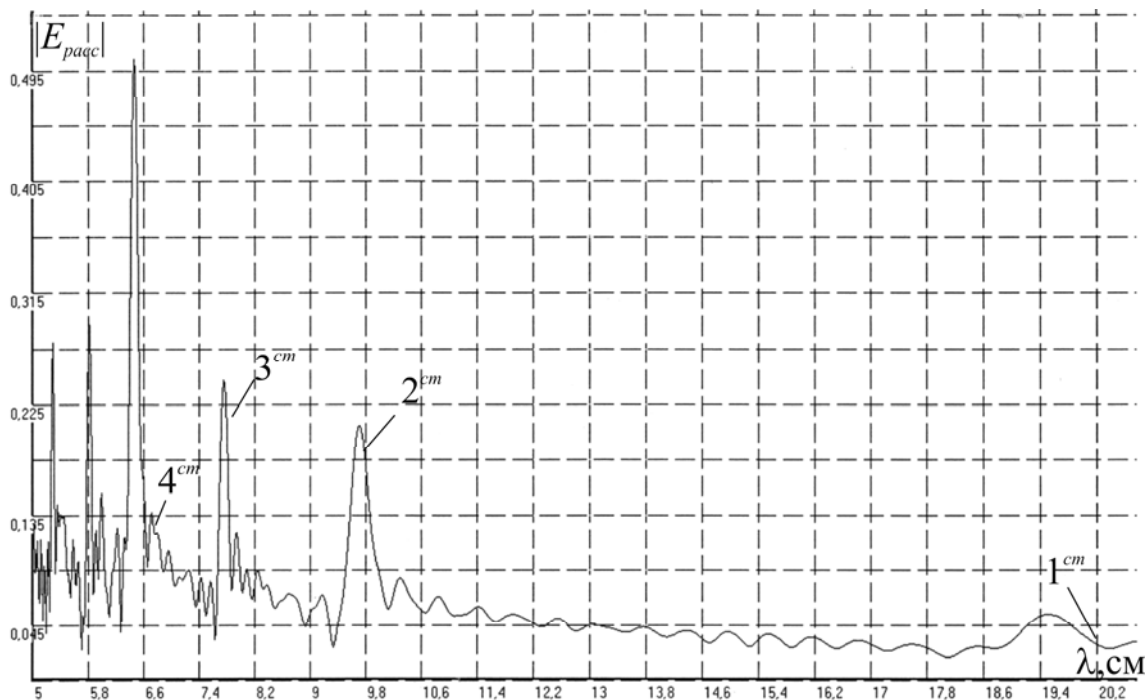


Рис. 3.10 а. Зависимость поля $|E_{racc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда в решетке возбуждены структурные (решеточные) (cm) резонансы, $a = 0,5$ см; $d = h = l = 9,661$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 5$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

2) в решетке возбужден совмещенный резонанс $(1^m + 2^{cm})$ и несовмещенные структурные (решеточные) – 1^{cm} , 3^{cm} , 4^{cm} резонансы и резонанс рассеяния 1^s , связанный с внутренним резонансом сфер электрического типа (рис. 3.10 б);

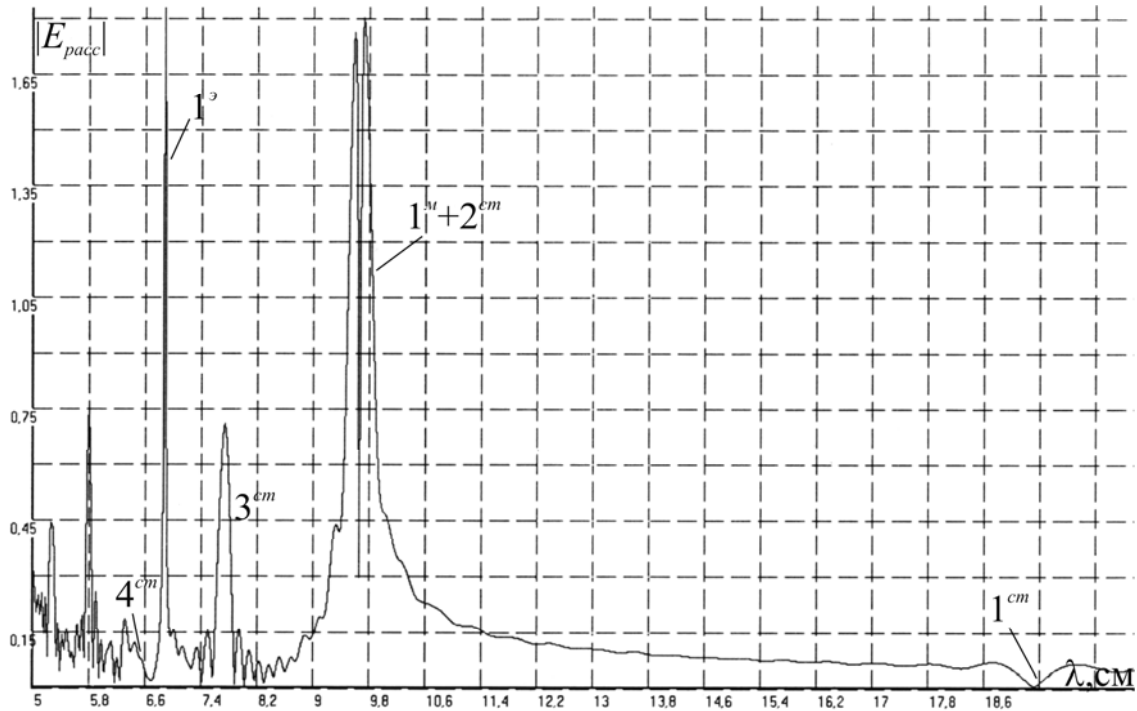


Рис. 3.10 б. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда возбужденные структурный 2^{cm} и магнитный 1^m резонансы рассеяния совмещены друг с другом ($1^m + 2^{cm}$), при $a = 0,5$ см; $d = h = l = 9,661$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

3) приведено сопоставление модулей полей (318) для резонанса ($1^m + 2^{cm}$) (рис. 3.11).

Из этих дисперсионных зависимостей следует, что при возбуждении в кристалле резонанса ($1^m + 2^{cm}$) поля $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (3.18) сильно зависят от длины λ рассеиваемой волны, выбора точки наблюдения полей в кристалле и их графические зависимости обладают отличительными особенностями, характерными для магнитного резонанса кубического кристалла.

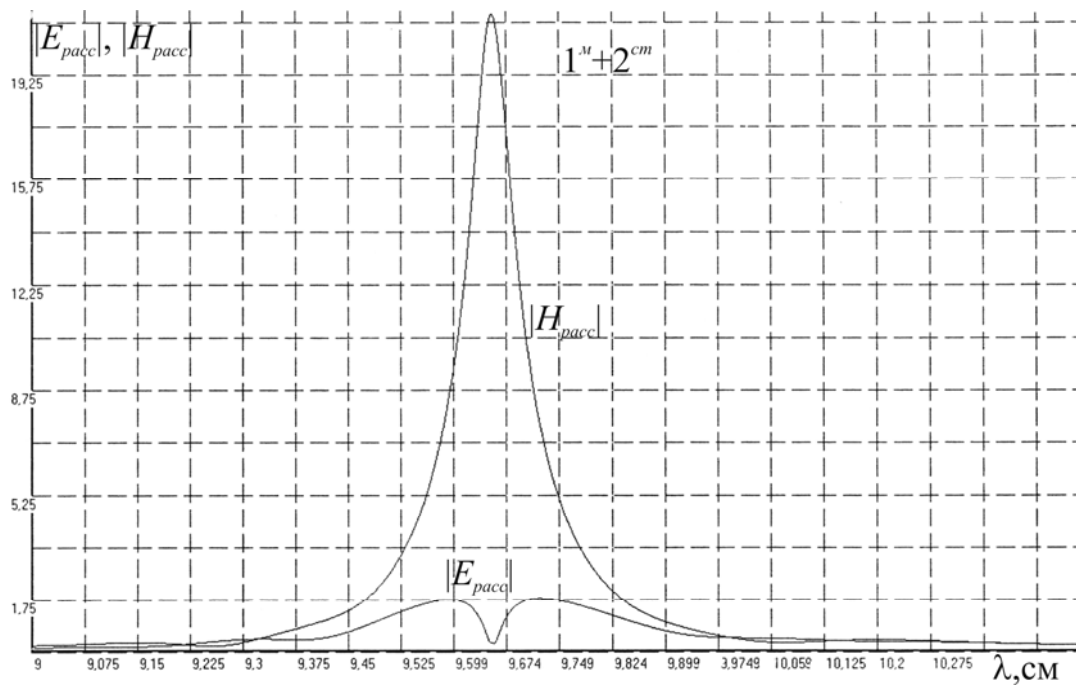


Рис. 3.11. Зависимости полей $|H_{racc}|$, $|E_{racc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для совмещенных резонансов $(1^m + 2^{cm})$ при $a = 0,5$ см; $d = h = l = 9,661$ см; $x = y = z = 0$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

Проведено численное исследование структуры рассеянного кубическим кристаллом модуля поля (3.18) для совмещенного резонанса $(1^m + 2^{cm})$.

На рис.3.12, 3.13 представлены графические зависимости модуля полей рассеяния для произвольных расстояний от центров сфер кристалла и до точек наблюдения поля вдоль осей x, y, z (рис. 3.1) внутри и вне решетки в зонах Френеля и Фраунгофера. Из графических зависимостей следует, что при резонансе $(1^m + 2^{cm})$ поле рассеивается преимущественно в плоскости x, z (рис. 3.1), и в направлении оси y рассеяние поля $|E_{racc}|$ минимально (рис. 3.12 *c*; 3.13 *c, d*). Вид этих зависимостей для выбранных точек наблюдения рассеянного поля является характерным. Для рассматриваемого случая, когда $\lambda_p^m = d = h = l$, на графиках (рис. 3.12) имеются области затухающих составляющих рассеянного поля вне решетки в зоне Френеля.

Вид графических зависимостей на рис. 3.13 *g – k* для $|E_{полн}|$, $|H_{полн}|$ связан с интерференцией падающей и рассеянной волн в зоне Фраунгофера.

В области $z < 0$ эти волны движутся в противоположных направлениях относительно оси z , а в области $z > 0$ направление их движения вдоль оси z совпадает (рис. 3.13 *g, h*).

На рис. 3.12 (*a – f*) представлены зависимости (3.18) для внутренних полей кубического кристалла.

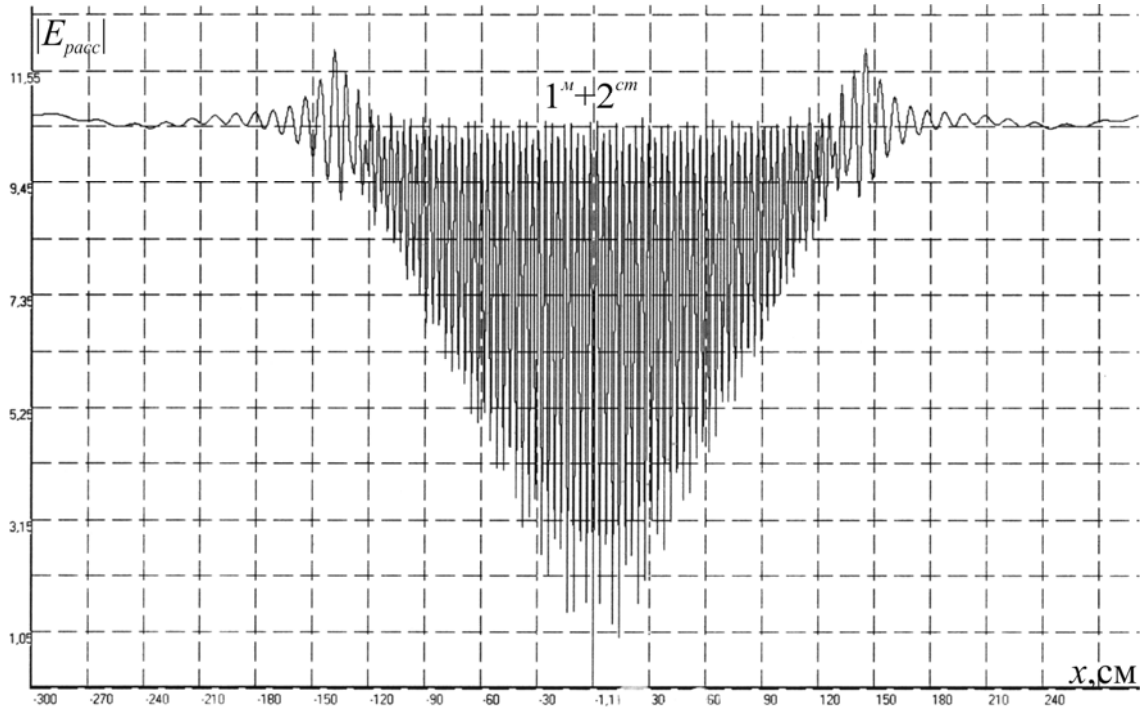


Рис. 3.12 *a*

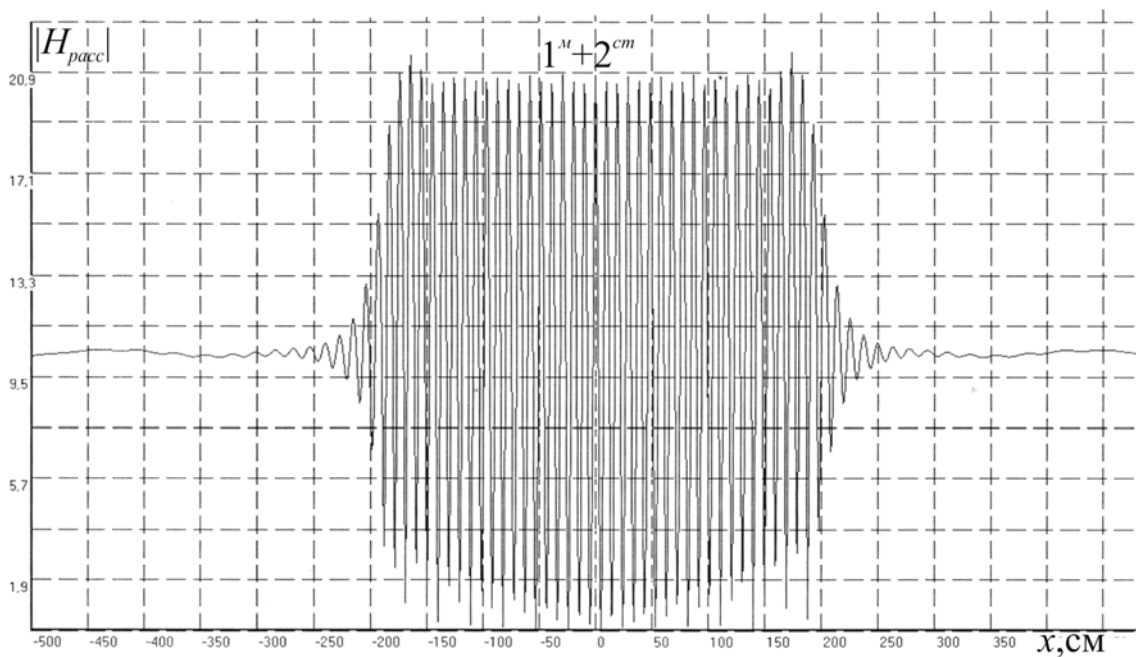


Рис. 3.12 *b*

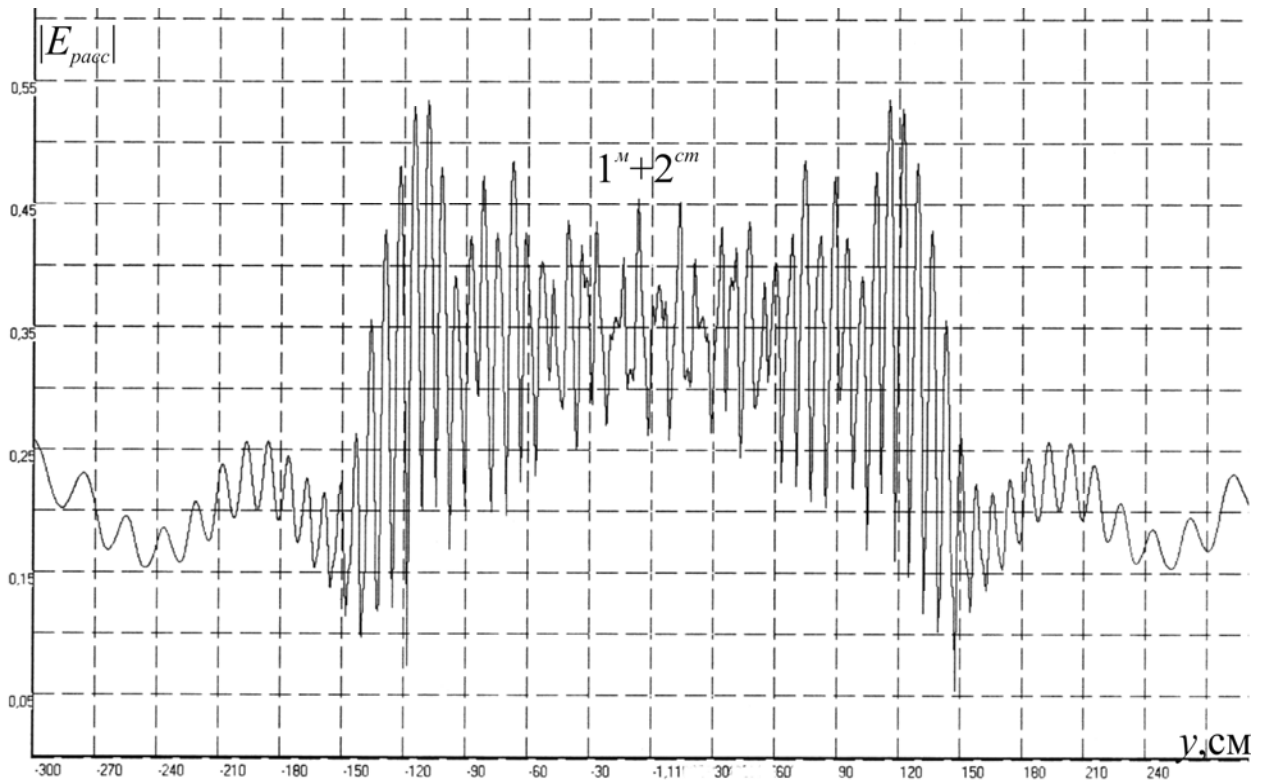


Рис. 3.12 c

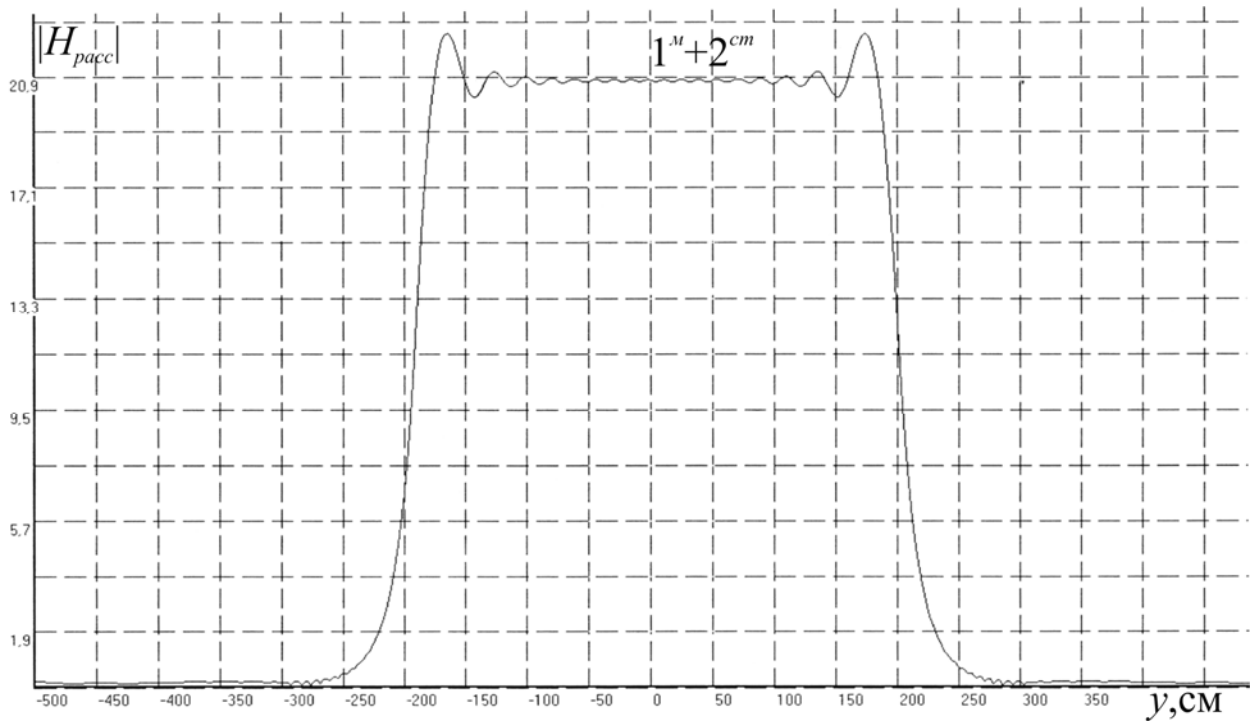


Рис. 3.12 d

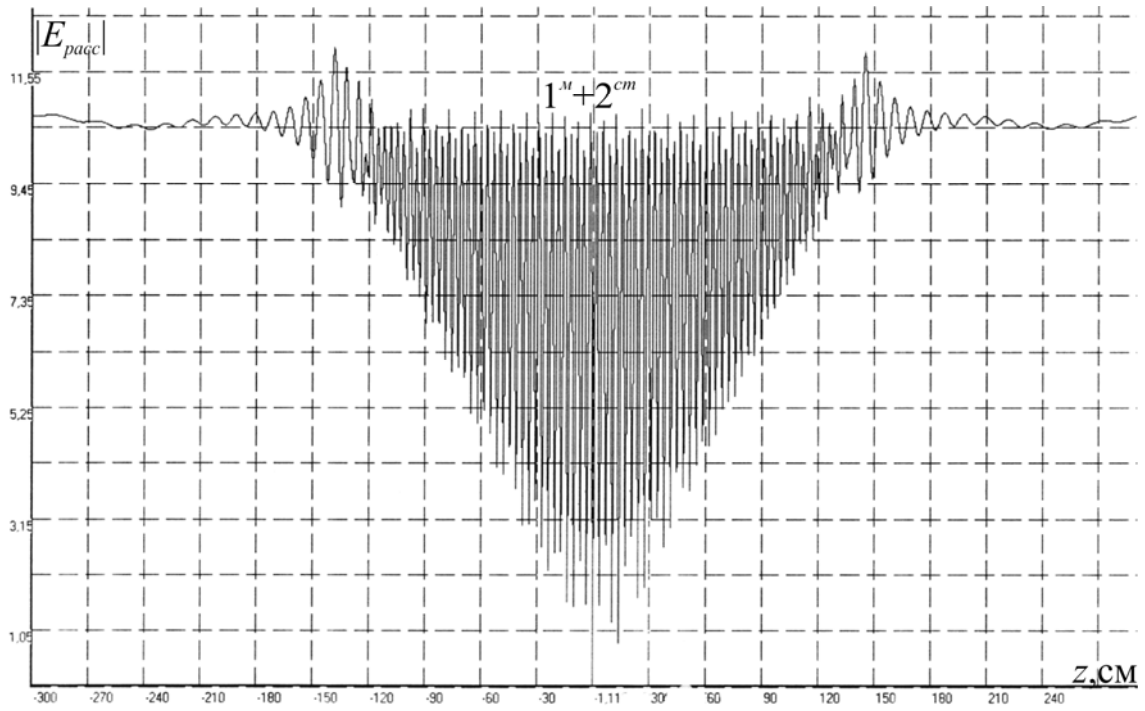


Рис. 3.12 e

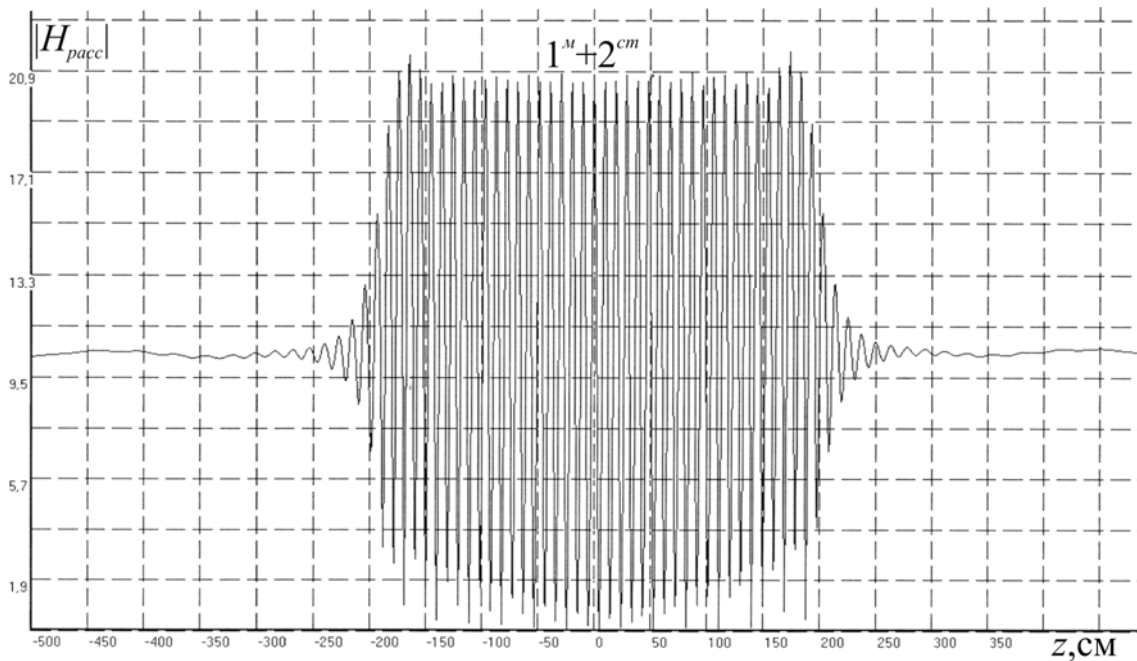


Рис. 3.12 f

Рис. 3.12 a – f. Зависимости для внутренних полей $|E_{racc}|$, $|H_{racc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер, когда структурный 2^{cm} и магнитный 1^M резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.10 b), от изменения координаты точки наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^M = d = h = l = 9,661$ см; $y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

$c, d)$ y при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661 \text{ см}$; $x = z = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,
 $e, f)$ z при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

На рис. 3.13 $a - f$ изображены зависимости (3.18) для зон Френеля и Фраунгофера.

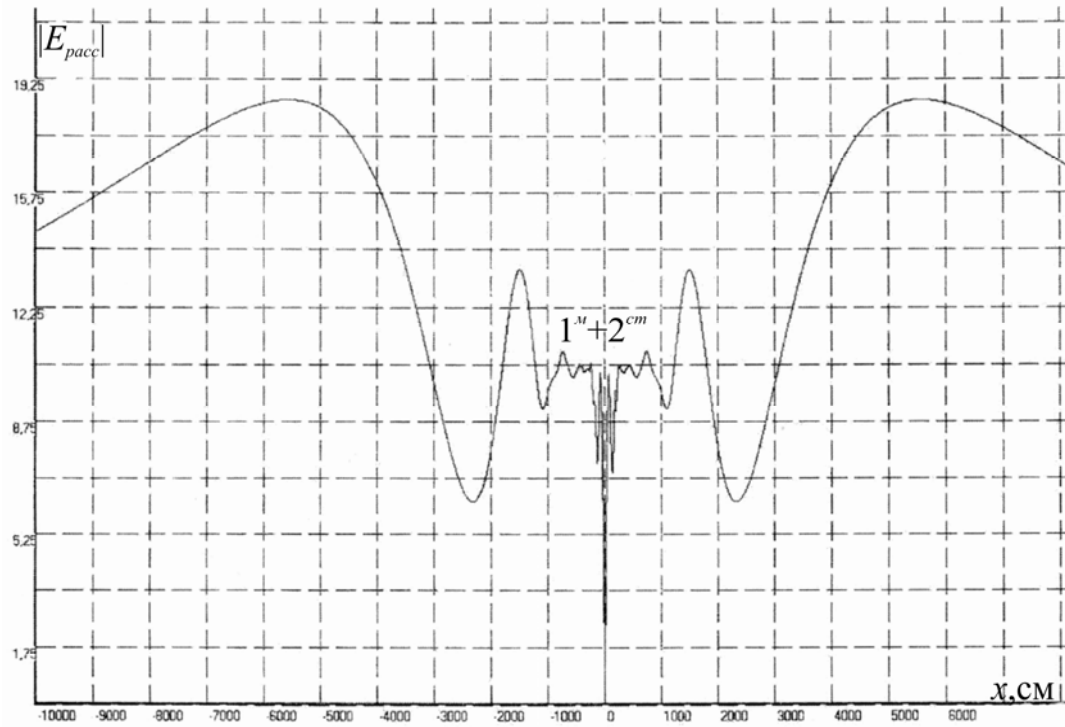


Рис. 3.13 a

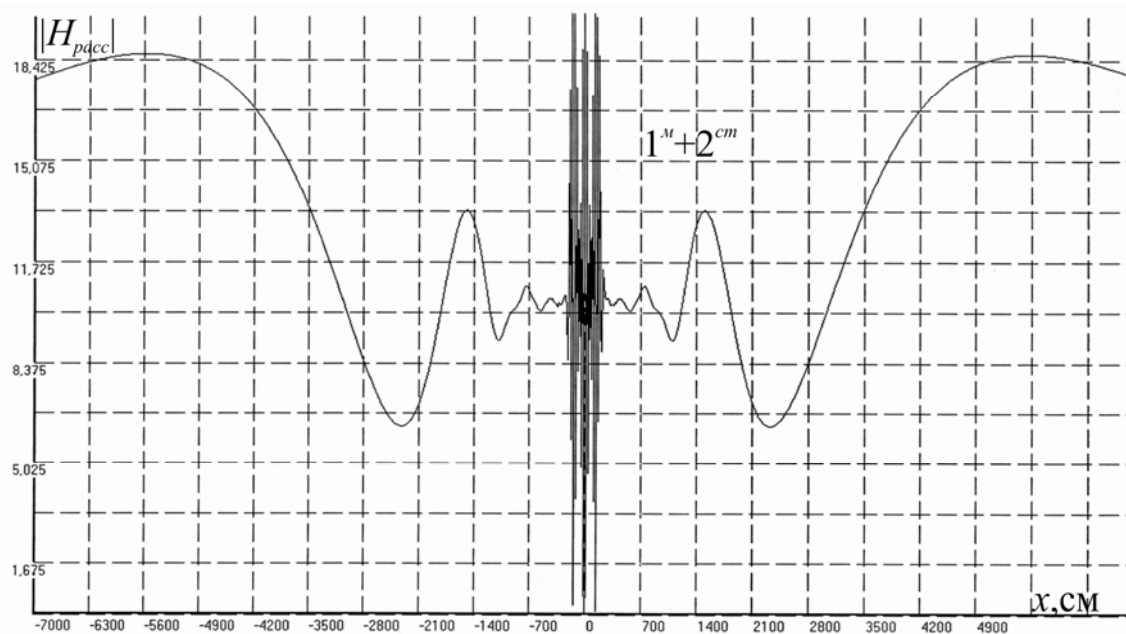


Рис. 3.13 b

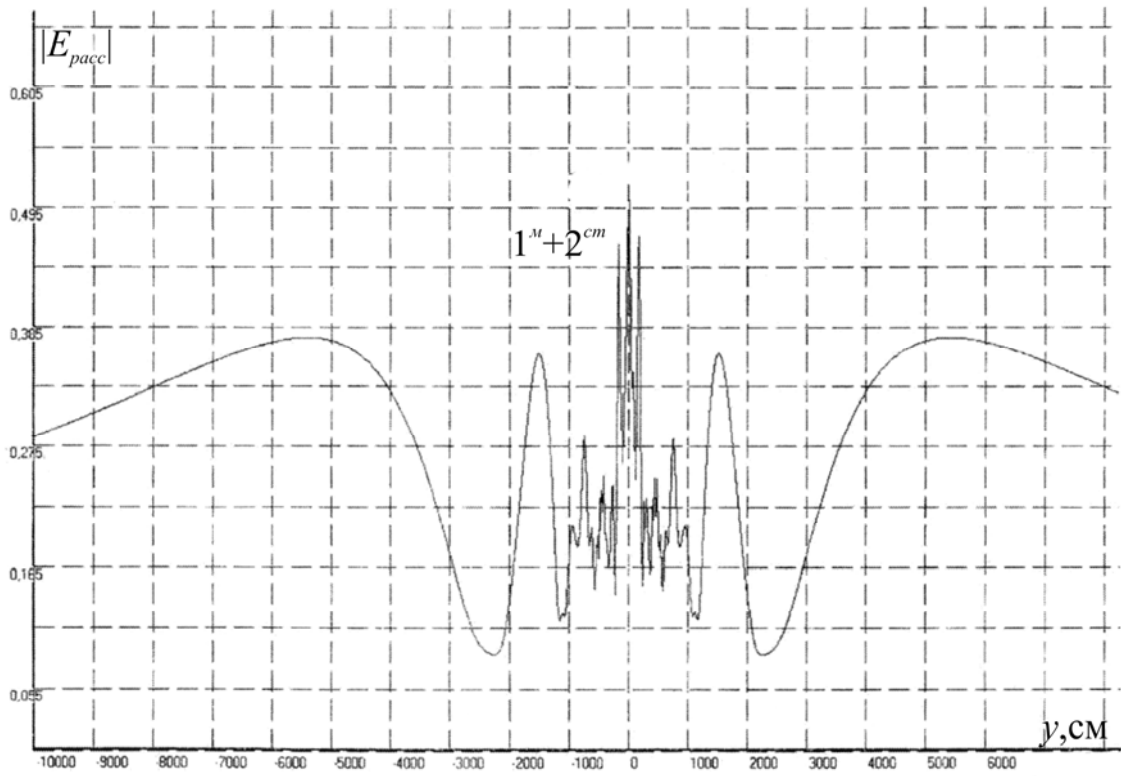


Рис. 3.13 c

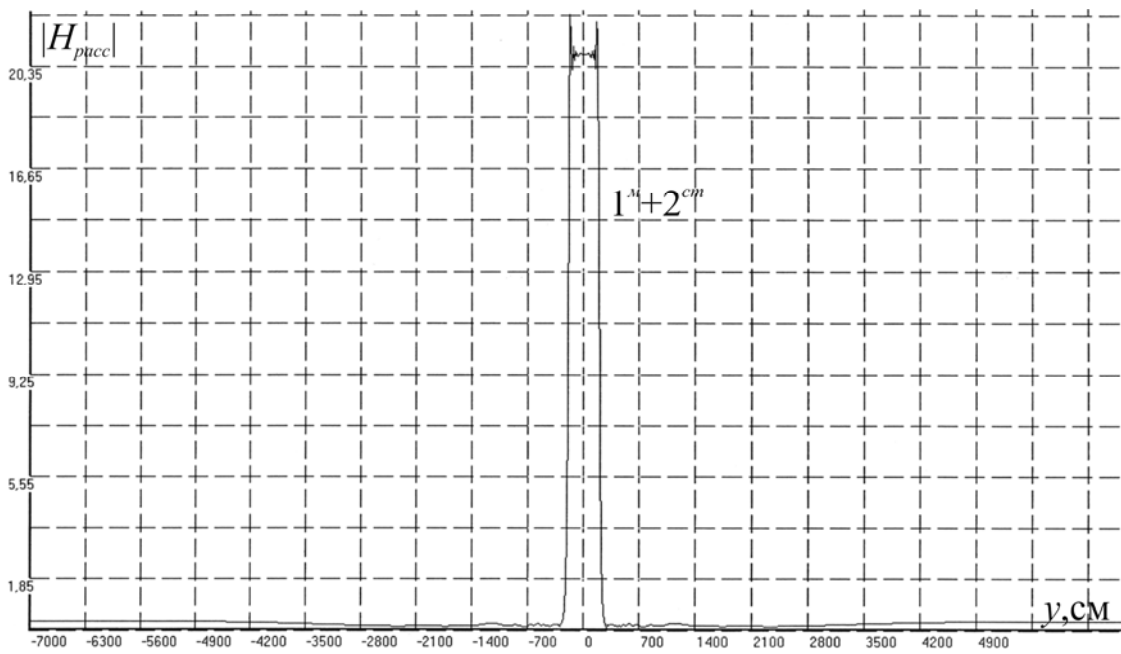


Рис. 3.13 d

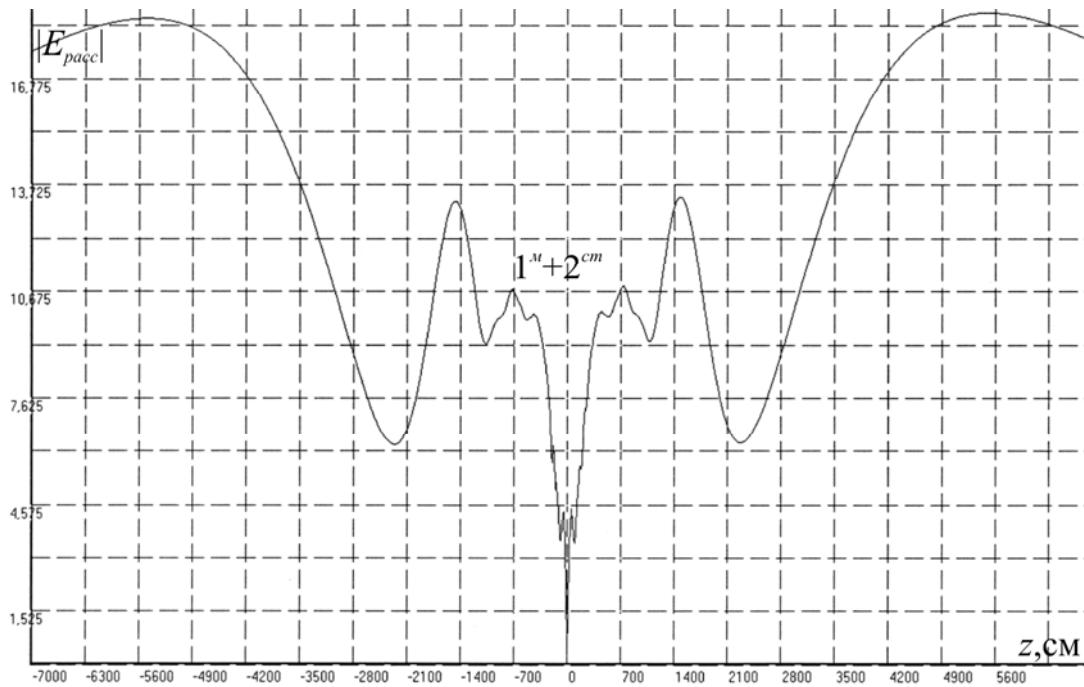


Рис. 3.13 e

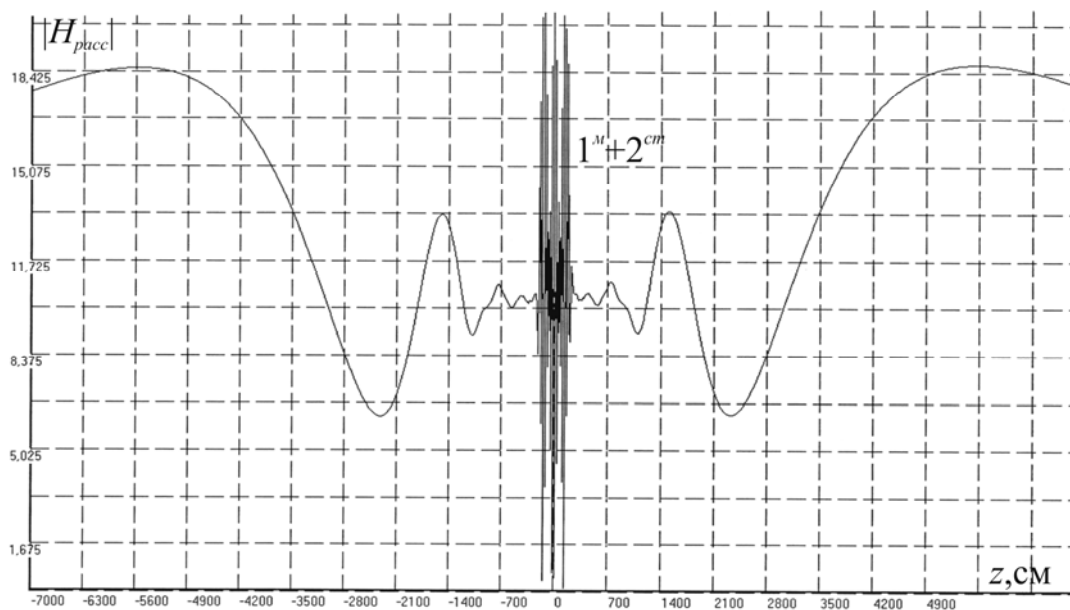


Рис. 3.13 f

Рис. 3.13 a – f. Зависимости для внутренних полей $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (3.18), (3.1) вне кубической решетки сфер, когда структурный 2^{cm} и магнитный 1^M резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.10 b), от изменения координаты точки наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^M = d = h = l = 9,661$ см; $y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

c, d) y при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^M = d = h = l = 9,661$ см; $x = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

$e, f) z$ при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

На рис. 3.13 $g - k$ представлены зависимости (3.18), (1.4) для зон Френеля и Фраунгофера.

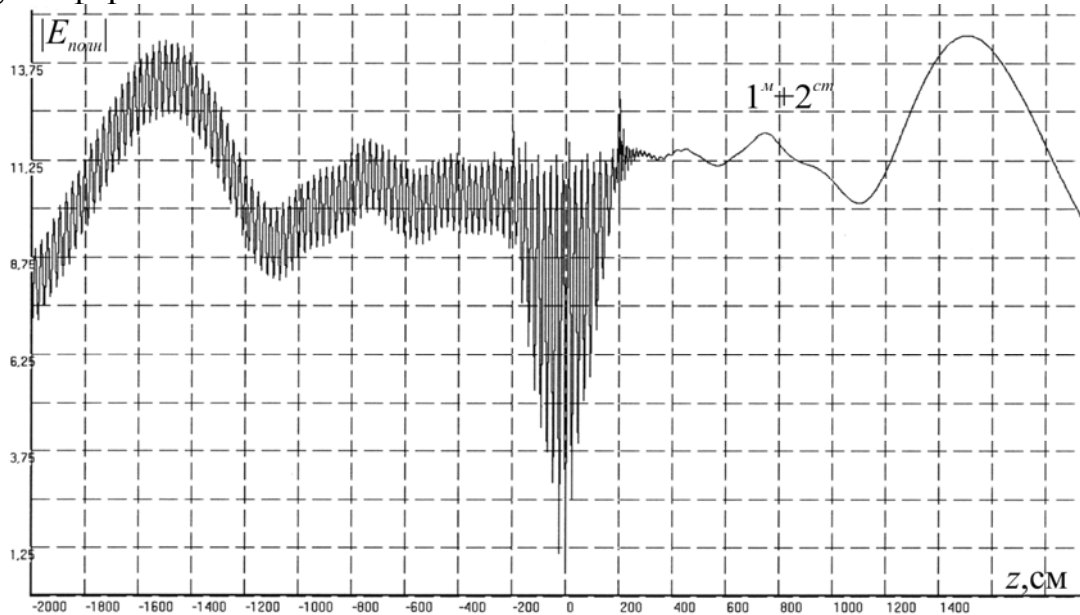


Рис. 3.13 g

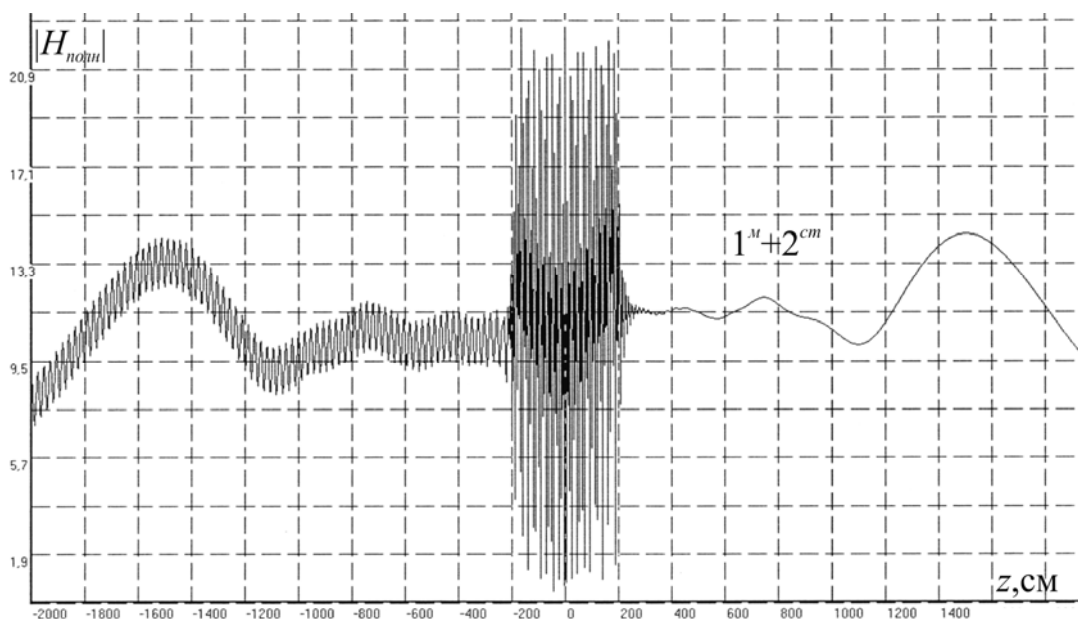


Рис. 3.13 h

Рис. 3.13 g, h – Зависимости для внутренних полей $|E_{\text{полн}}|$, $|H_{\text{полн}}|$ (1.4), (3.18) кубической решетки сфер внутри решетки и вне решетки в зоне Френеля, когда структурный 2^{cm} и магнитный 1^m резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.10 b), от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

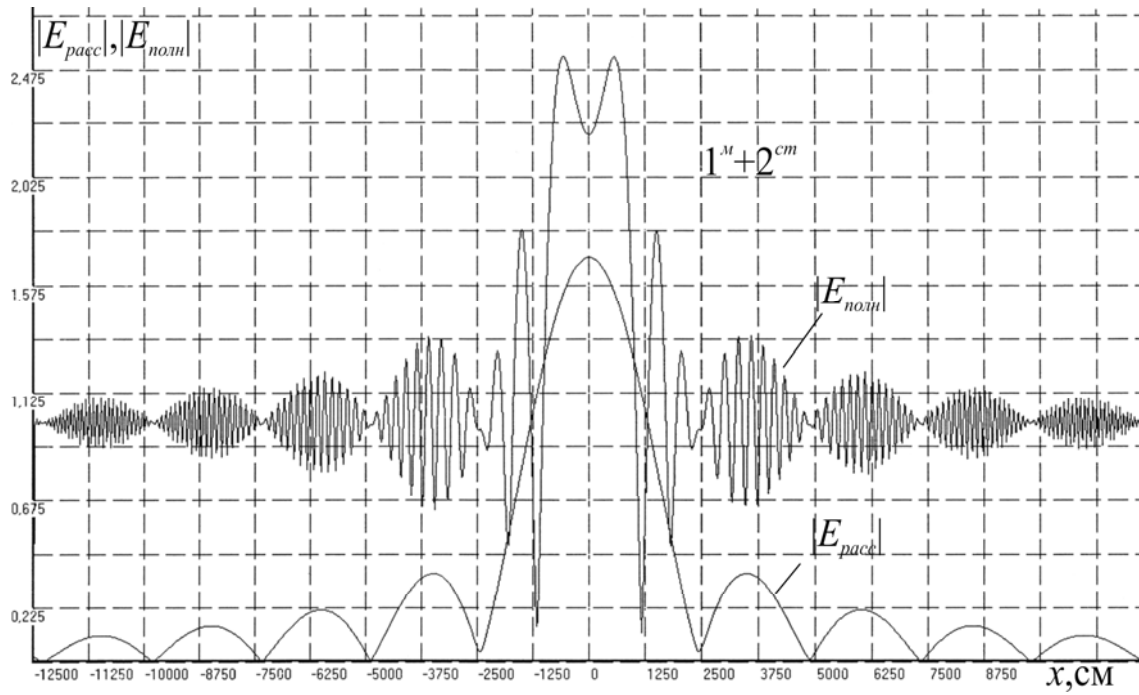


Рис. 3.13 *i*

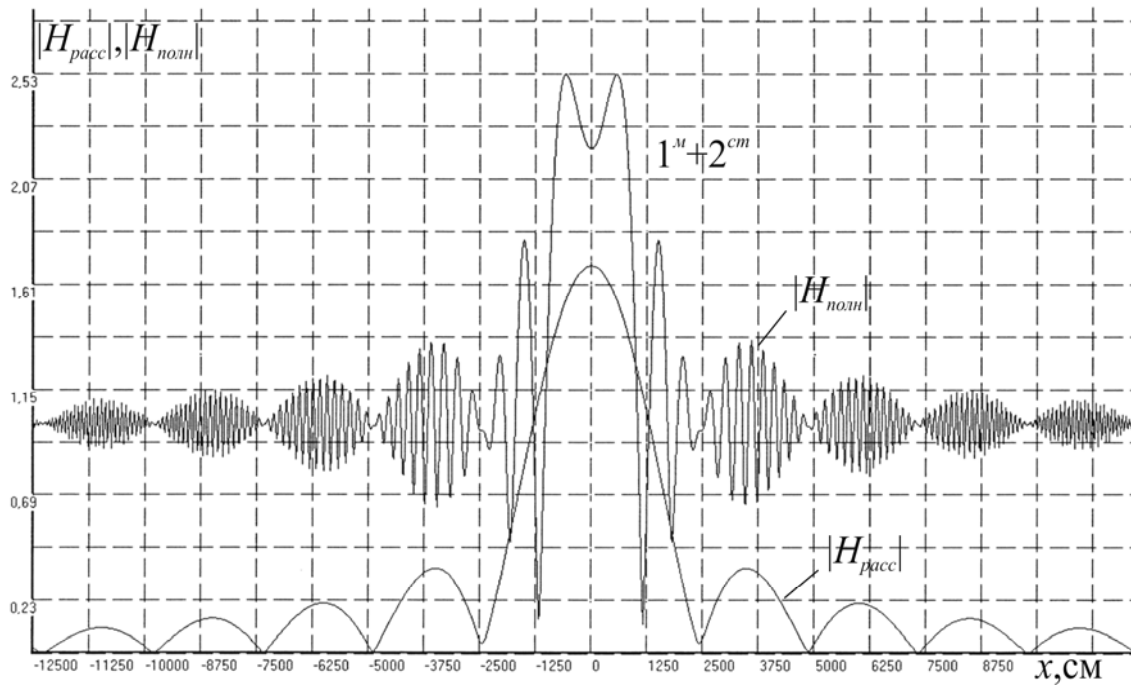


Рис. 3.13 *j*

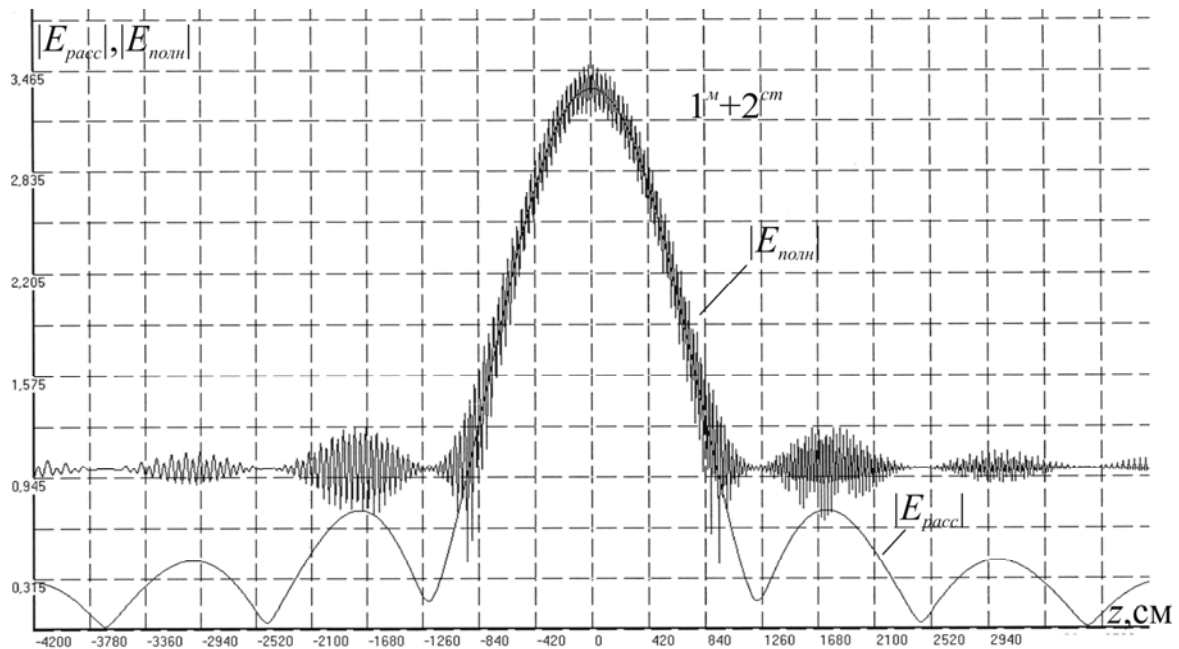


Рис. 3.13 k

Рис. 3.13 *i, j, k* – Зависимости полей $|E_{расс}|$, $|E_{полн}|$ и $|H_{расс}|$, $|H_{полн}|$ (3.18), (1.4), (3.1) кубической решетки сфер в зоне Фраунгофера, когда структурный 2^{cm} и магнитный 1^m резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.10 *b*), от изменения координаты точки наблюдения поля:

i, j) x при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661$ см; $y = 0$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $z = 100\,000$ см (рис. 3.13 *e, f*),

k) z при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661$ см; $y = 0$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $x = -50\,000$ см (рис. 3.13 *a*)

На рис. 3.14 представлено поведение поля $|E_{расс}|$ в окрестности совмещенного резонанса рассеяния магнитного типа $(1^m + 2^{cm})$, когда $\lambda_p^m < d, h, l$. Несовпадение внутренних резонансов сфер со структурным резонансом решетки приводит к резкому изменению структуры внутреннего поля решетки (рис. 3.12 *e*) и поля вне решетки в зонах Френеля и Фраунгофера (рис. 3.12 *e*). В этом случае основная часть рассеянного поля переизлучается в направлении распространения падающей волны. Изменяя параметры решетки в окрестности совмещенных резонансов, можно влиять на структуру рассеянного поля.

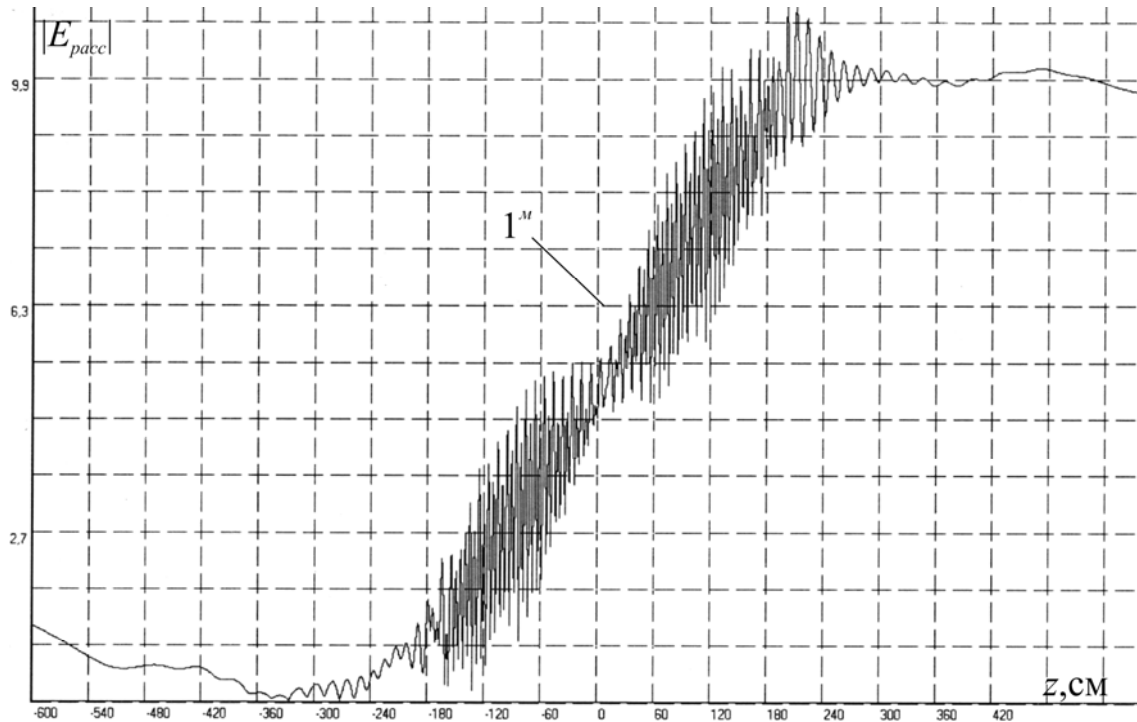


Рис. 3.14 а

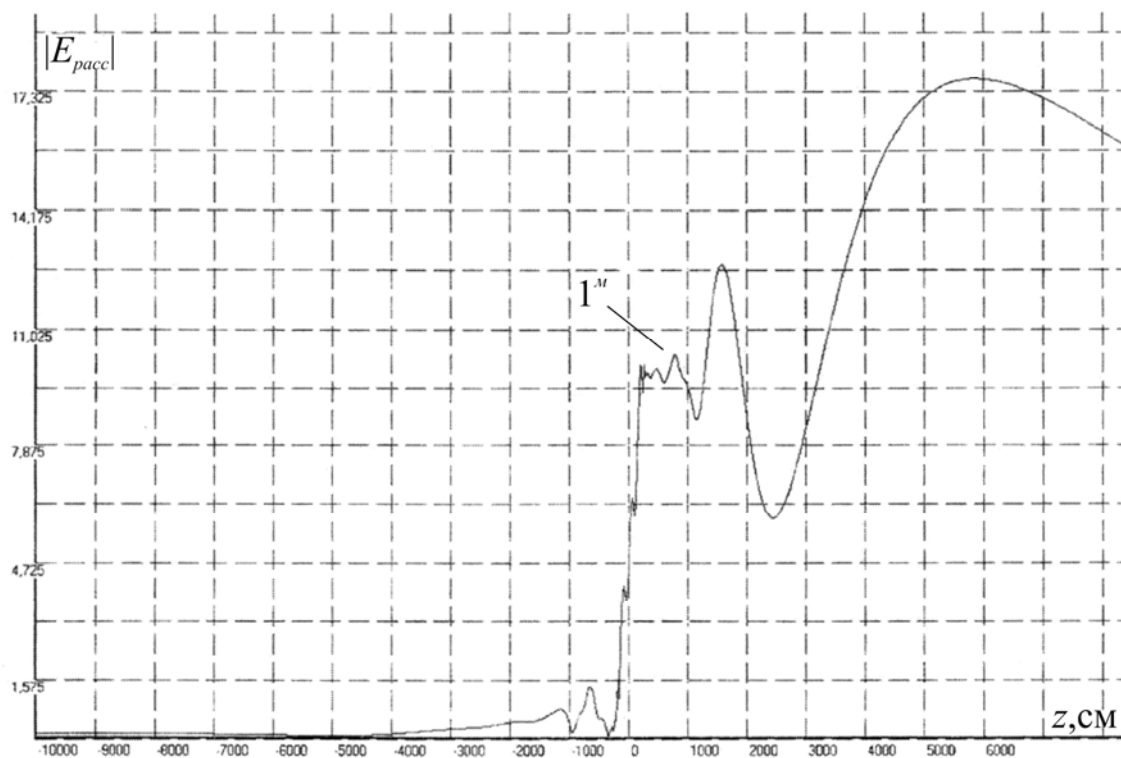


Рис. 3.14 б

Рис. 3.14 а, б – Зависимости поля $|E_{pacc}|$ в окрестности зоны резонанса $1^m + 2^{cm}$ (рис. 3.10 б), когда $\lambda_p^m < d, h, l$ от изменения координаты точки

наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^m = 9,661$ см; $d = h = l = 9,9$ см; $x = y = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$:

a) внутри решетки (рис. 3.12 e),

b) вне решетки в зонах Френеля и Фраунгофера (рис. 3.13 e)

Исследовалось многомодовое рассеяние поля решетками.

На рис. 3.15, 3.16 изображены графические зависимости для многомодового рассеянного поля $|E_{\text{расс}}|$, $|H_{\text{расс}}|$, $|\omega_{\text{полн}}|$ (3.18), (1.20), когда длина волны внутреннего резонанса сфер λ_p^m в два раза меньше постоянной кубического решетки.

Из сопоставления рис. 3.16 a, b, c и рис. 3.12 e, 3.13 e следует, что совмещая внутренний резонанс сфер с различными структурными (см) резонансами решетки (3.25, 3.26) можно влиять на модовую структуру затухающей составляющей рассеянного поля.

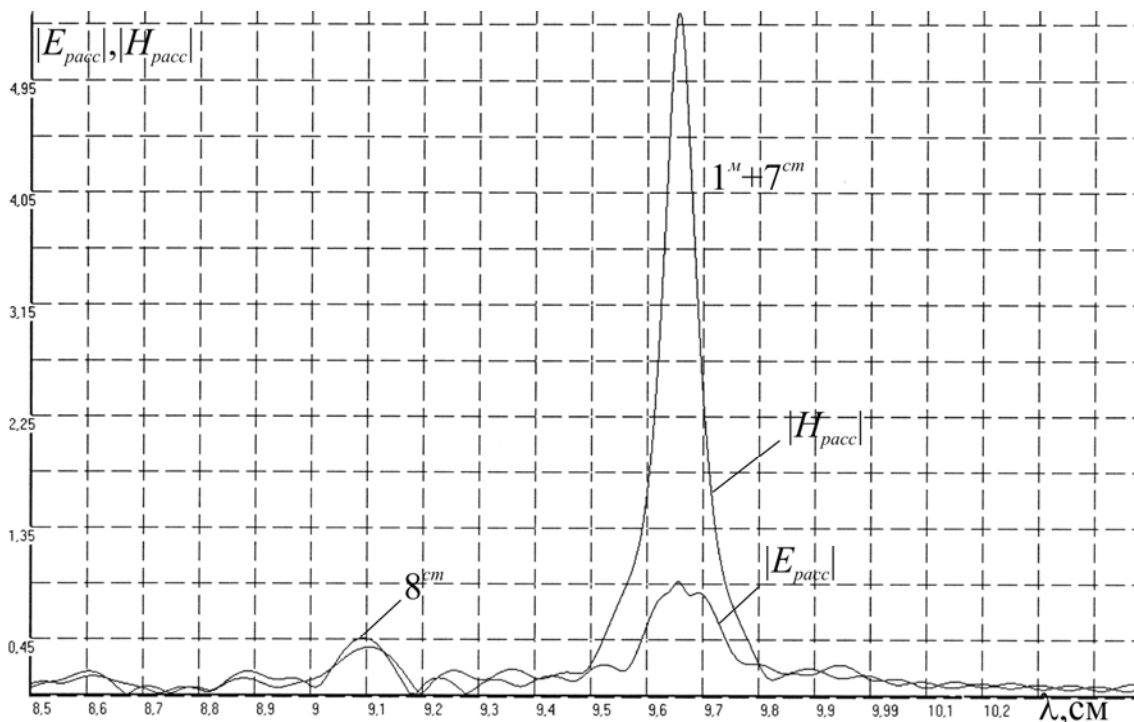


Рис. 3.15. Зависимость поля $|E_{\text{расс}}|$, $|H_{\text{расс}}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда структурный 7^{cm} и магнитный 1^m резонансы рассеяния совмещены друг с другом, при $a = 0,5$ см; $2\lambda_p^m = d = h = l = 19,322$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ (здесь многомодовый случай рассеяния)

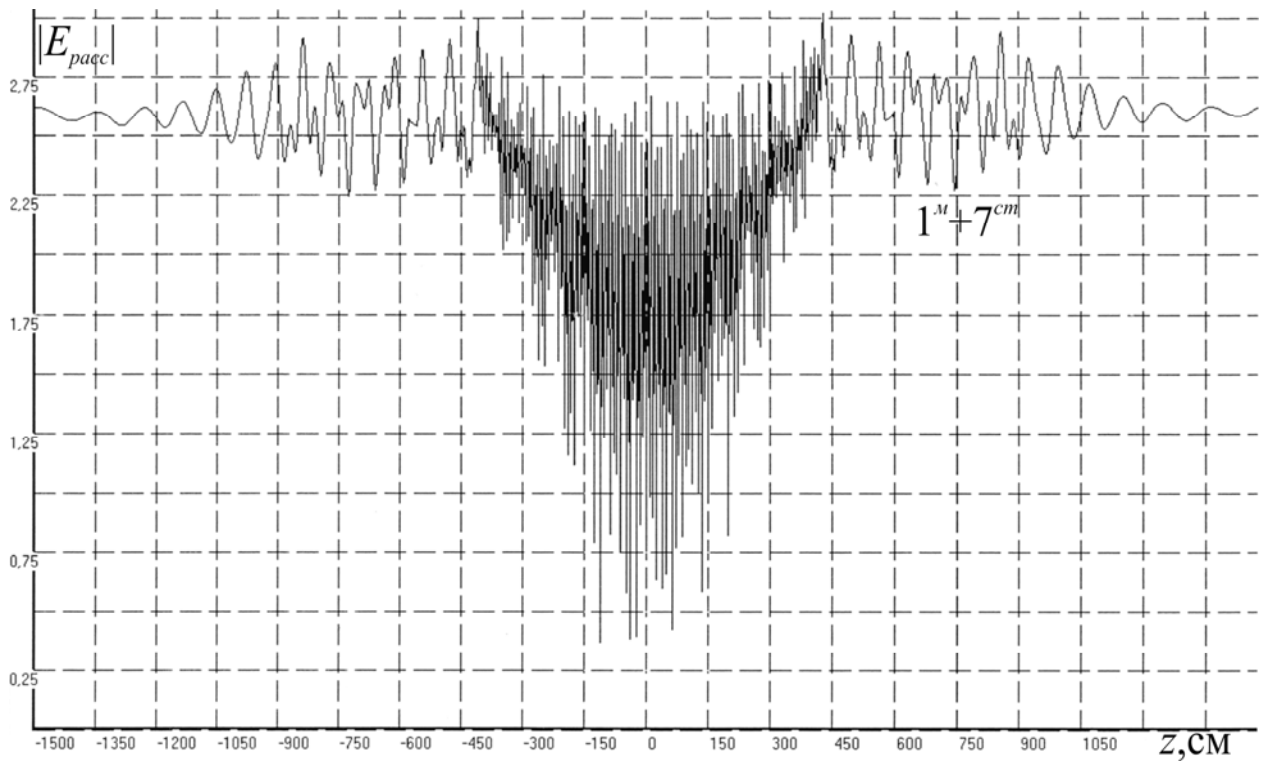


Рис. 3.16 а

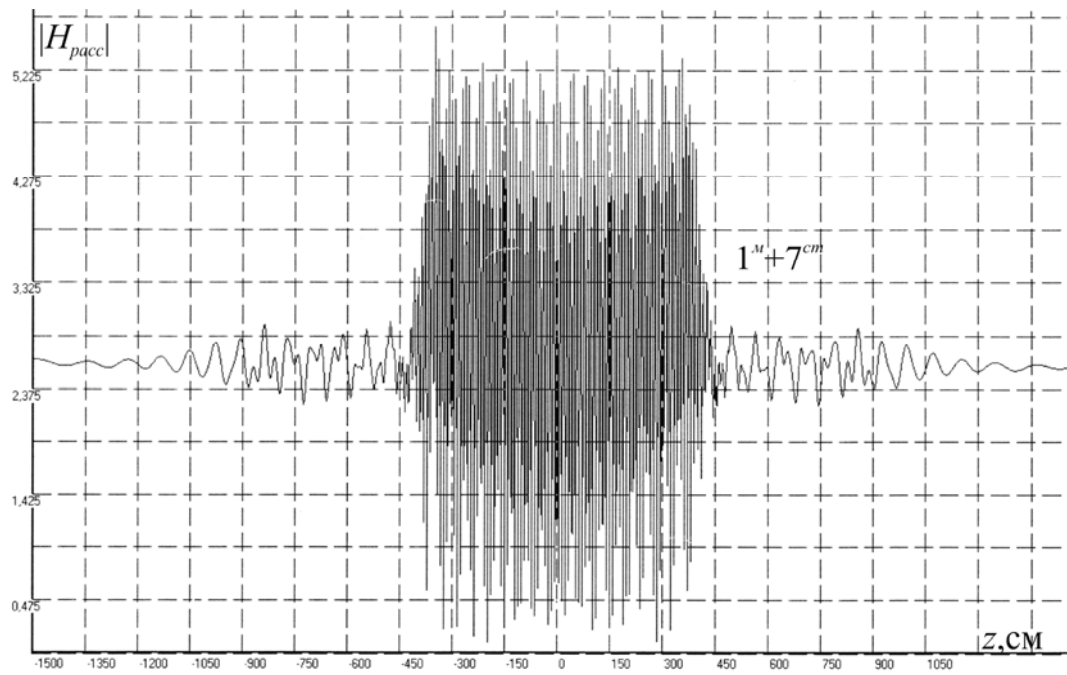


Рис. 3.16 б

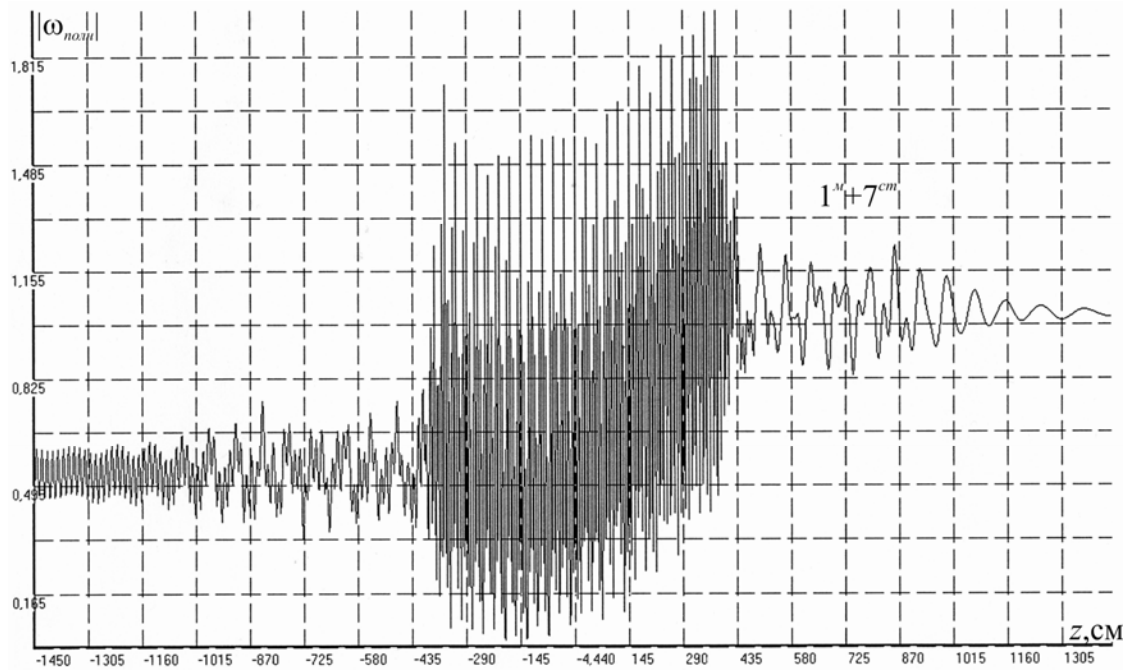


Рис. 3.16 с

Рис. 3.16. Зависимости полей $|E_{расс}|$, $|H_{расс}|$, $|\omega_{полн}|$ (3.18), (1.20), (3.1) кубической решетки сфер, когда структурный 7^{cm} и магнитный 1^m резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.15), от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $2\lambda_p^m = d = h = l = 19,322$ см; $x = y = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

3.3.3. Электрический резонанс кубического кристалла

В подразделе численно изучается поведение модуля рассеянного (3.18) и полного (1.4) полей простой кубической решетки, когда в ней возбужден совмещенный структурный (решеточный) и внутренний резонанс сфер электрического типа. Этот резонанс назовем электрическим резонансом – $(\varepsilon + cm)$ кубического кристалла.

На рис. 3.17; 3.18 изображены дисперсионные зависимости для модуля полей (3.18) кубического кристалла:

- 1) возбуждаются только структурные (решеточные) резонансы – $1^{cm}, 2^{cm}, 3^{cm}, 4^{cm}$ (рис. 3.17 а);
- 2) в решетке возбужден совмещенный резонанс $1^s + 2^{cm}$ (рис. 3.18);
- 3) сопоставлены модули полей $|E_{расс}|$ и $|H_{расс}|$ для резонанса $1^s + 2^{cm}$ (рис. 3.18).

Зависимости рис. 3.18 при сравнении с зависимостями рис. 3.11 показывают отличительные особенности электрического и магнитного резонансов кубического кристалла.

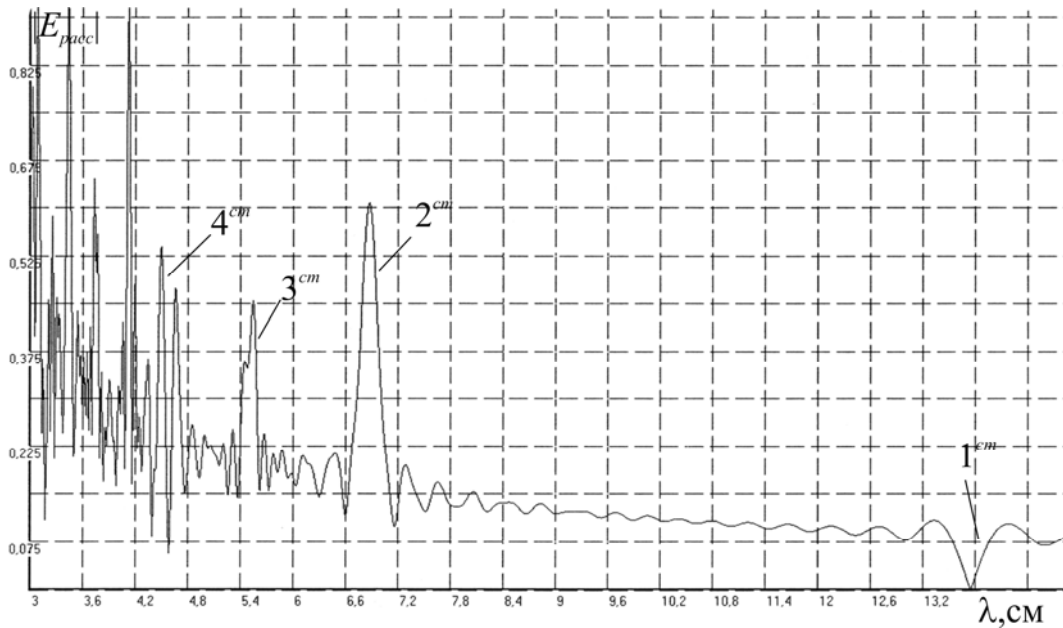


Рис. 3.17 а. Зависимость поля $|E_{расс}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда в решетке возбуждаются структурные (решеточные) (cm) резонансы, при $a = 0,5$ см; $d = h = l = 6,875$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 5$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

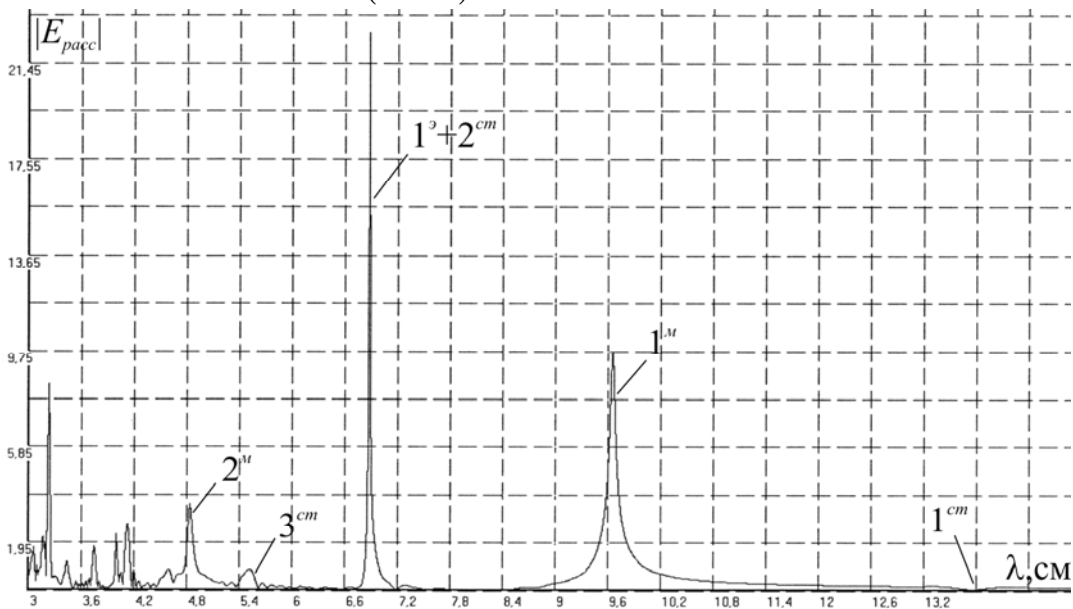


Рис. 3.17 б. Зависимость поля $|E_{расс}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда возбужденные структурный 2^{cm} и электрический 1^p резонансы рассеяния совмещены друг с другом ($1^p + 2^{cm}$), при $a = 0,5$ см; $d = h = l = 6,875$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

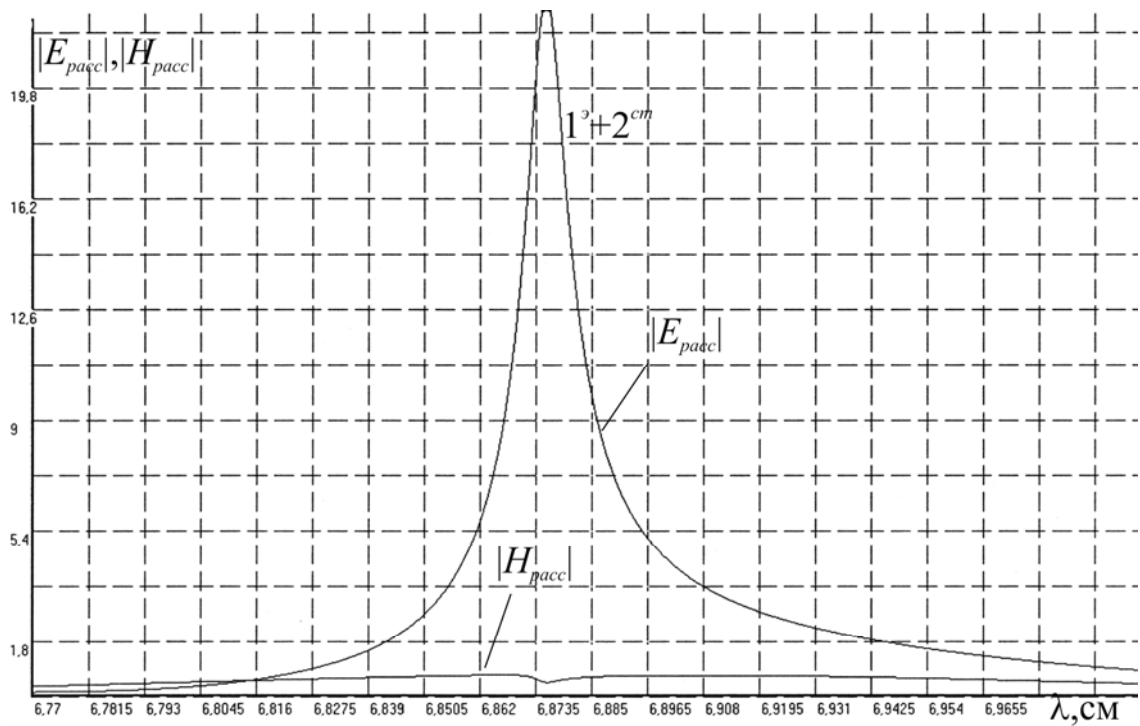


Рис. 3.18. Зависимости полей $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для совмещенных резонансов $(1^3 + 2^{cm})$ $a = 0,5$ см; $d = h = l = 6,875$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

На рис. 3.19; 3.20 изображены структурные зависимости полей (3.18), (1.4) кубической решетки сфер внутри и вне решетки в зонах Френеля и Фраунгофера, когда в решетке возбужден совмещенный резонанс рассеяния электрического типа $(1^3 + 2^{cm})$. В отличие от случая, связанного с резонансом рассеяния $(1^m + 2^{cm})$ (рис. 3.12; 3.13), здесь поле рассеивается преимущественно в плоскости y, z (рис. 3.1) и в направлении оси x рассеяние поля $|H_{pacc}|$ минимально (рис. 3.19 b, 3.20 b).

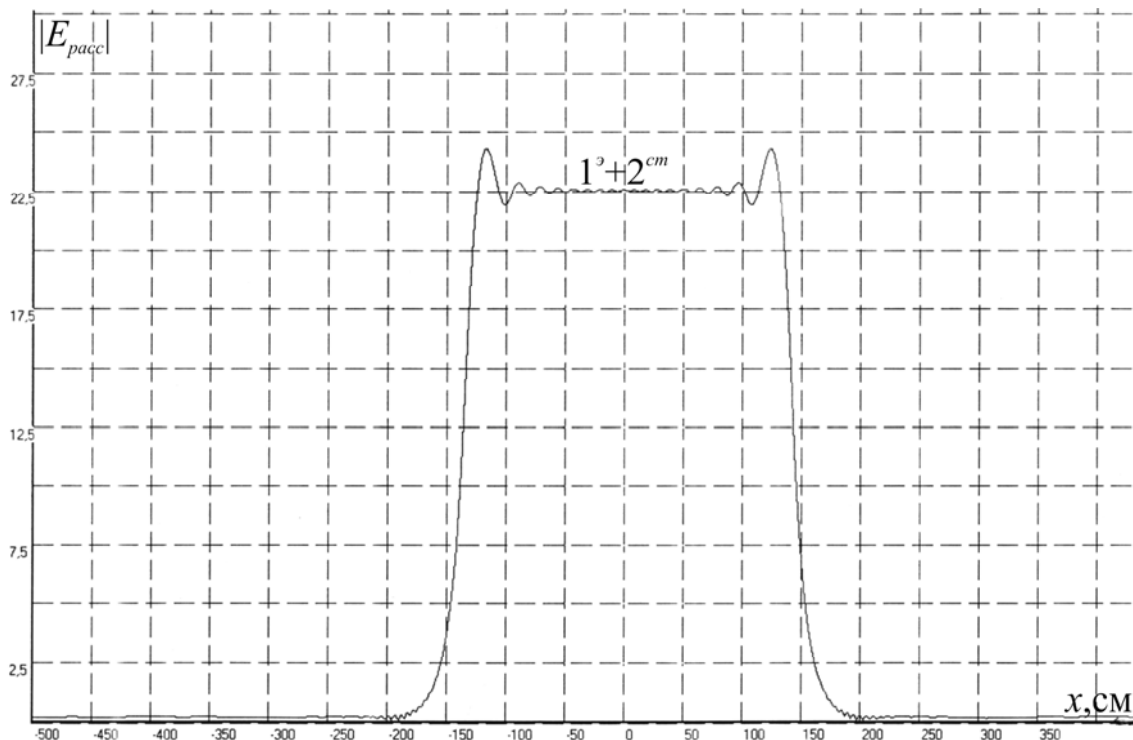
Структура рассеянного поля резонанса $(1^3 + 2^{cm})$ внутри решетки имеет характерный вид (рис. 3.19) и отличается от вида структуры внутреннего поля резонанса $(1^m + 2^{cm})$ (рис. 3.12), что можно использовать для их идентификации.

Структура поля вне решетки по оси z (рис. 3.13 e, f) почти идентична структуре поля, изображенной на рис. 3.20 e, f, но структуры полей по осям x, y

меняются местами. Внутри решетки амплитуда поля $|H_{расc}|$ по осям y и z в два раза меньше поля $|E_{расc}|$ (рис. 3.19), что связано с возбуждением в сферах решетки резонанса электрического типа. Аналогичная ситуация по осям x и z наблюдается при возбуждении в сферах решетки резонанса магнитного типа, здесь магнитное поле $|H_{расc}|$ по амплитуде в два раза превышает поле $|E_{расc}|$ (рис. 3.12).

Характер зависимостей, изображенных на рис. 3.20 $g-j$ обусловлен интерференцией падающей и рассеянной волн в зоне Фраунгофера. Сопоставление зависимостей рис. 3.20 g, h и рис. 3.13 g, h позволяет судить об отличительных особенностях электрического и магнитного резонансов кубического кристалла.

На рис. 3.19 $a-f$ представлены зависимости (3.18) для внутренних полей кубического кристалла.

Рис. 3.19 a

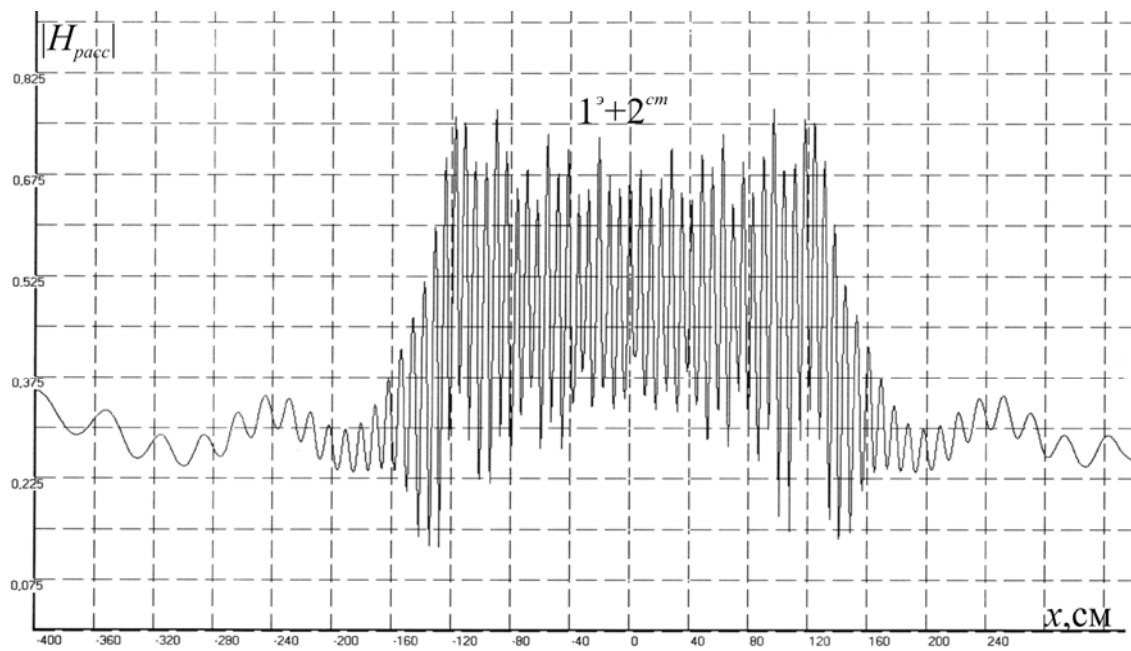


Рис. 3.19 б

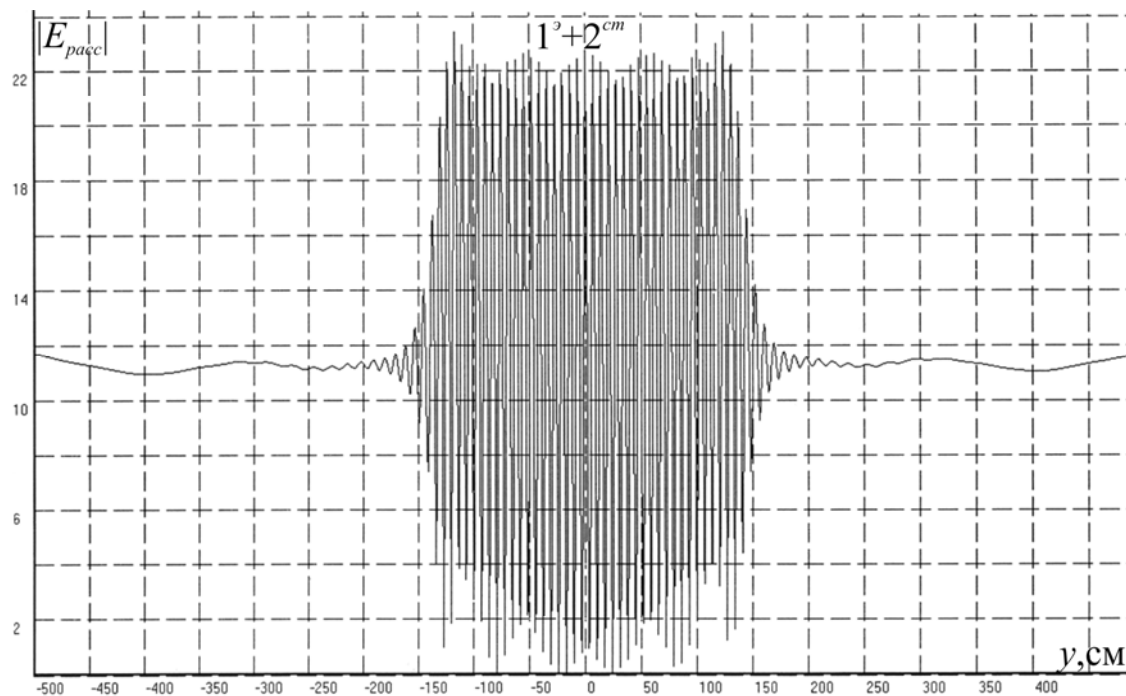


Рис. 3.19 с

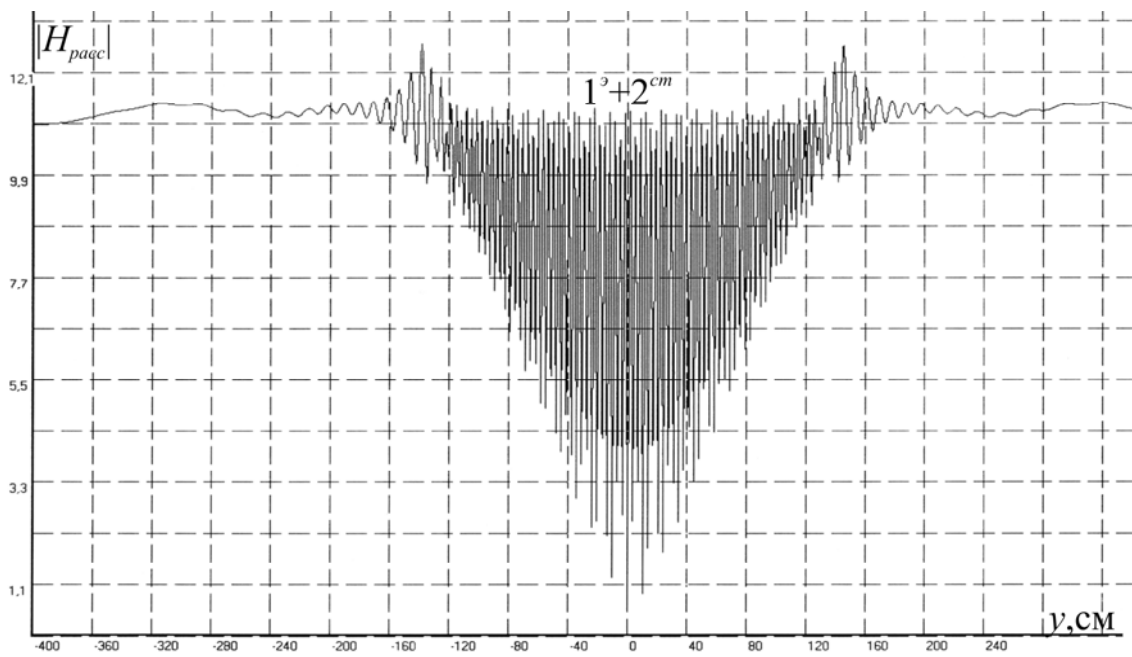


Рис. 3.19 d

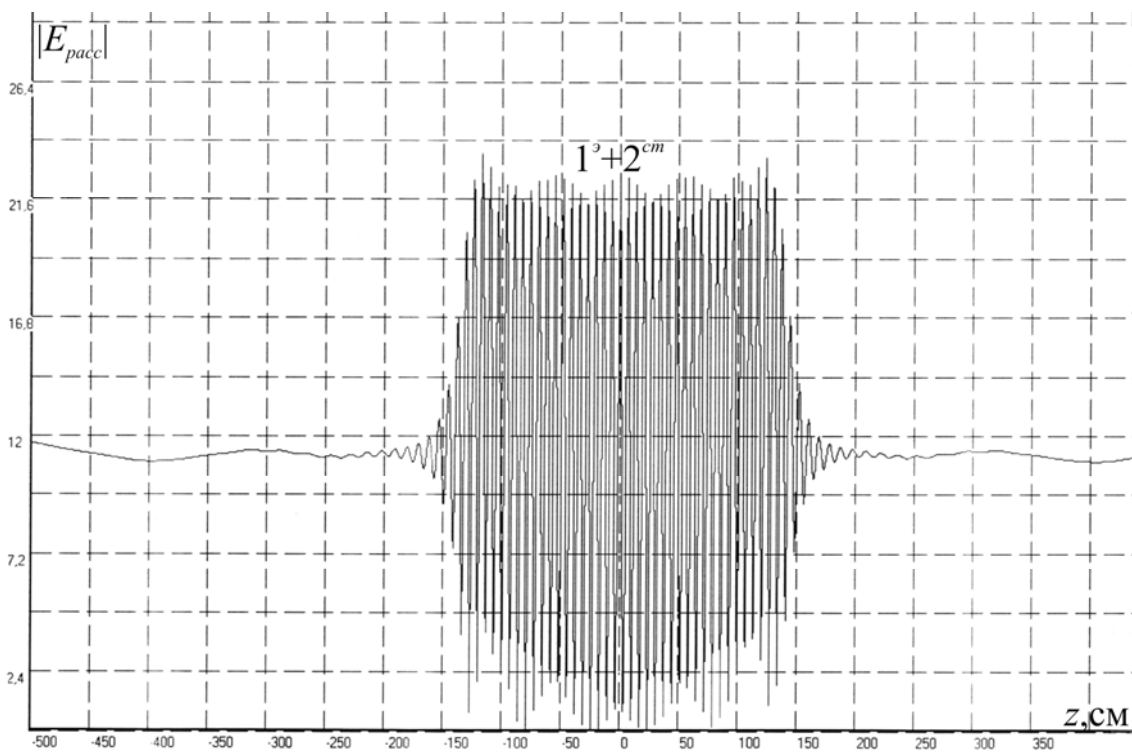


Рис. 3.19 e

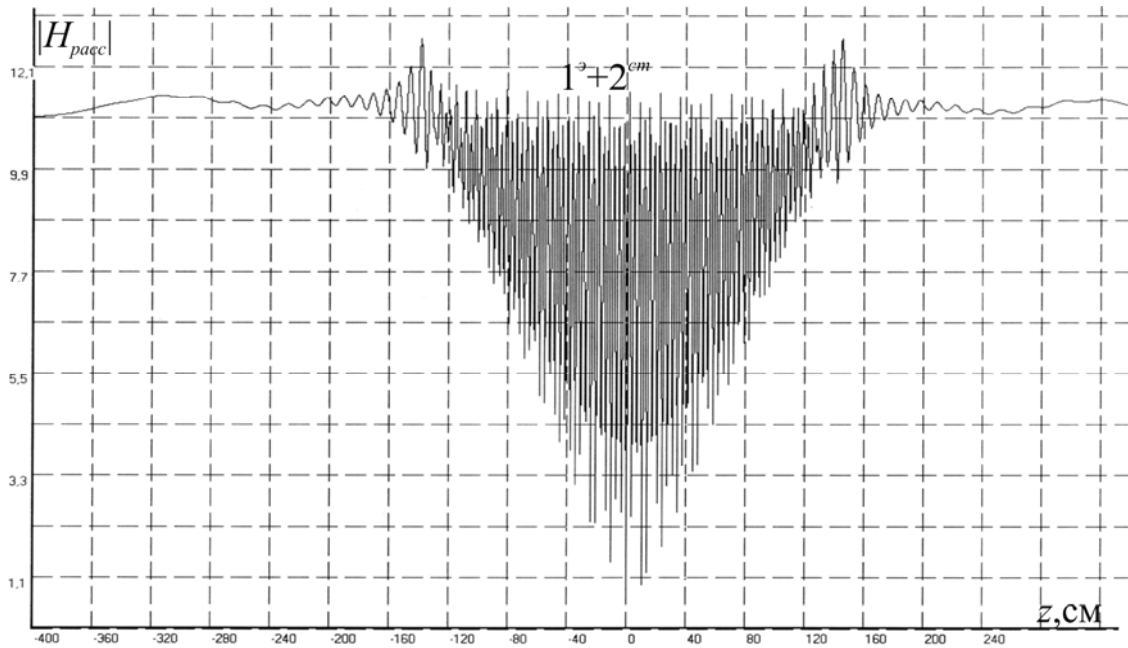


Рис. 3.19 f

Рис. 3.19 a – f. Зависимости для внутренних полей $|E_{racc}|$, $|H_{racc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер, когда структурный 2^{cm} и электрический 1^o резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.17 b), от изменения координаты точки наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^o = d = h = l = 6,875$ см; $y = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

c, d) y при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^o = d = h = l = 6,875$ см; $x = z = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

e, f) z при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^o = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

На рис. 3.20 a – f изображены зависимости (3.18) для зон Френеля и Фраунгофера.

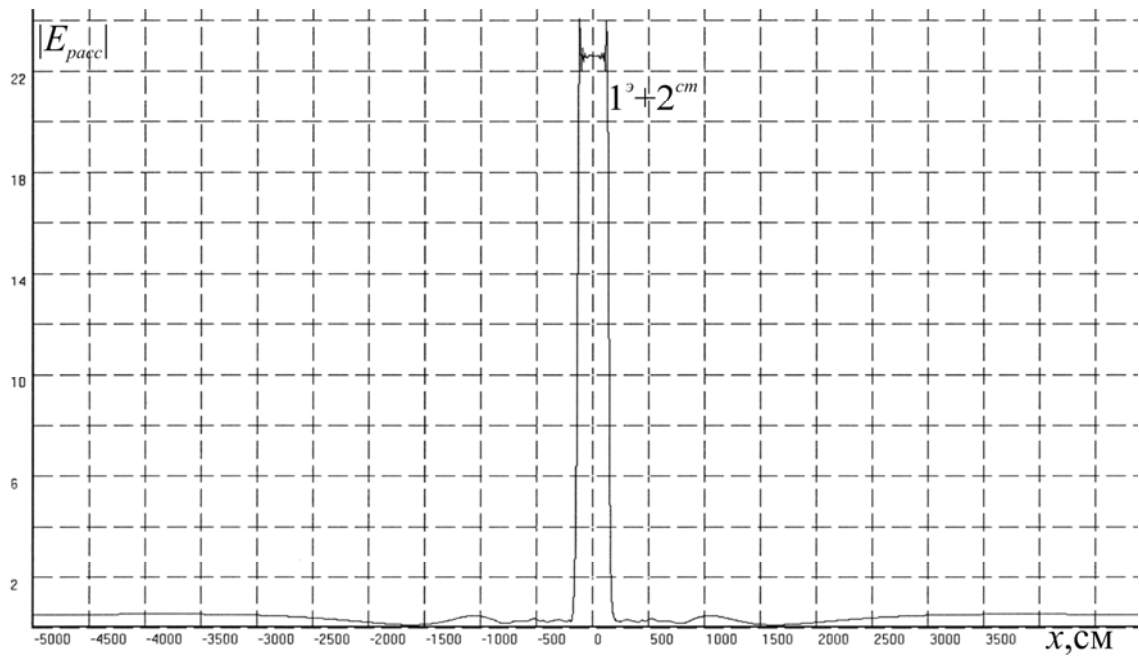


Рис. 3.20 а

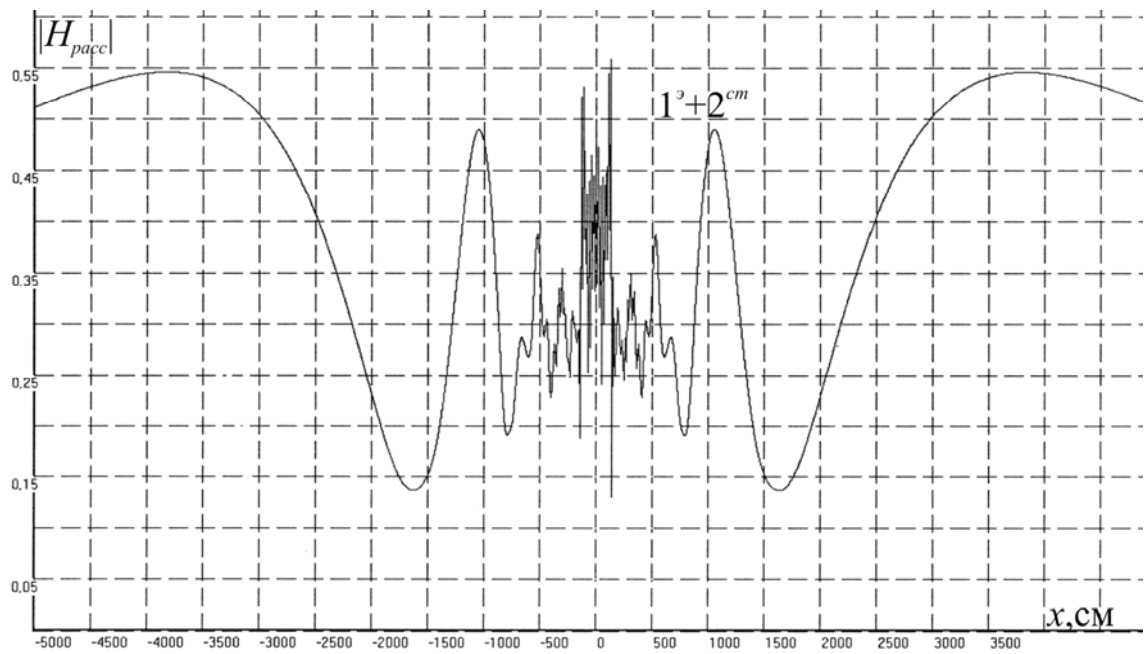


Рис. 3.20 б

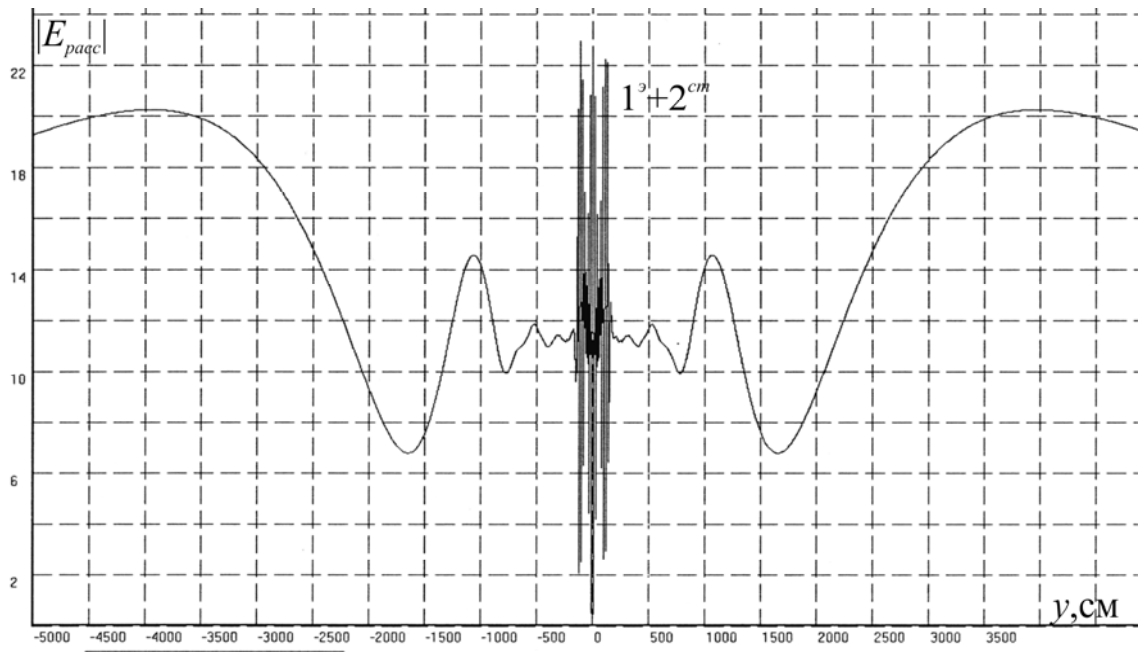


Рис. 3.20 c

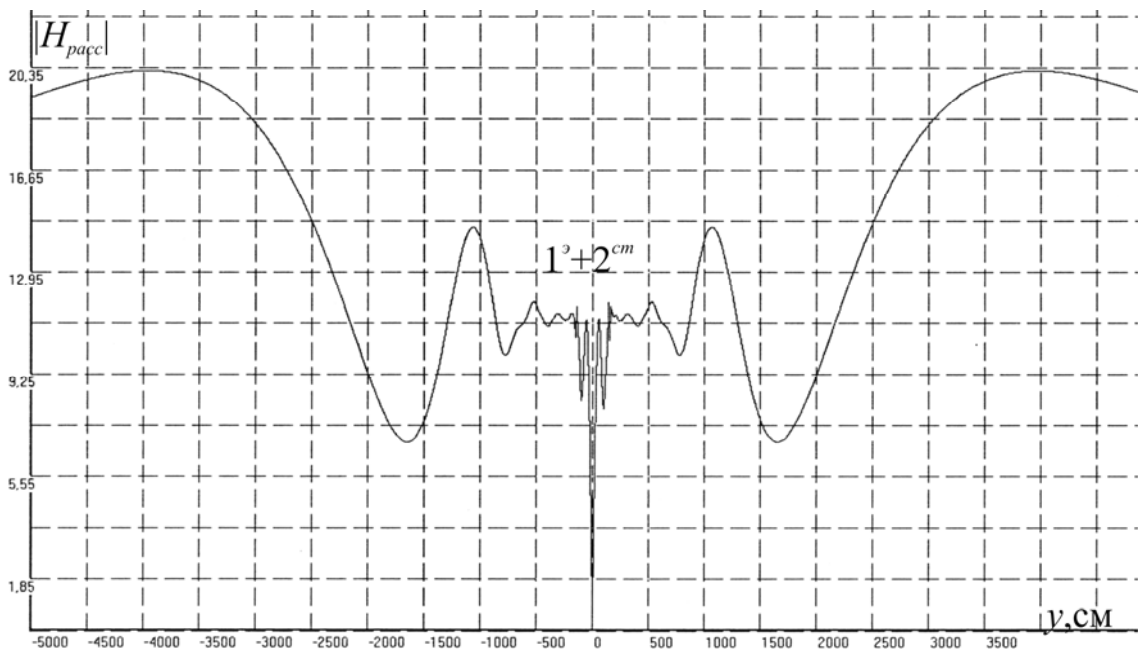


Рис. 3.20 d

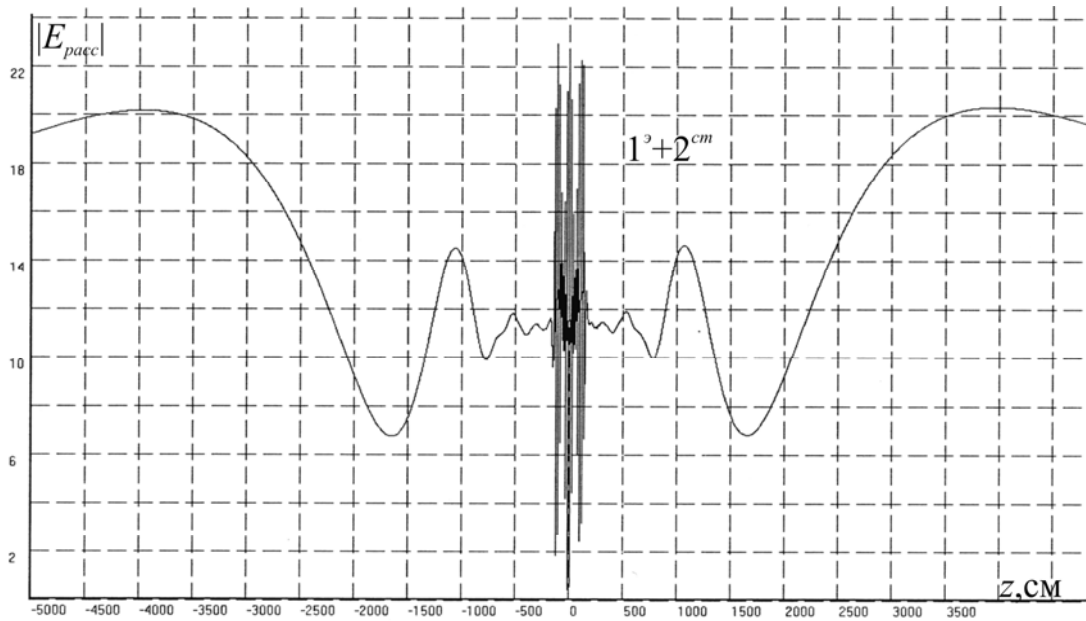


Рис. 3.20 e

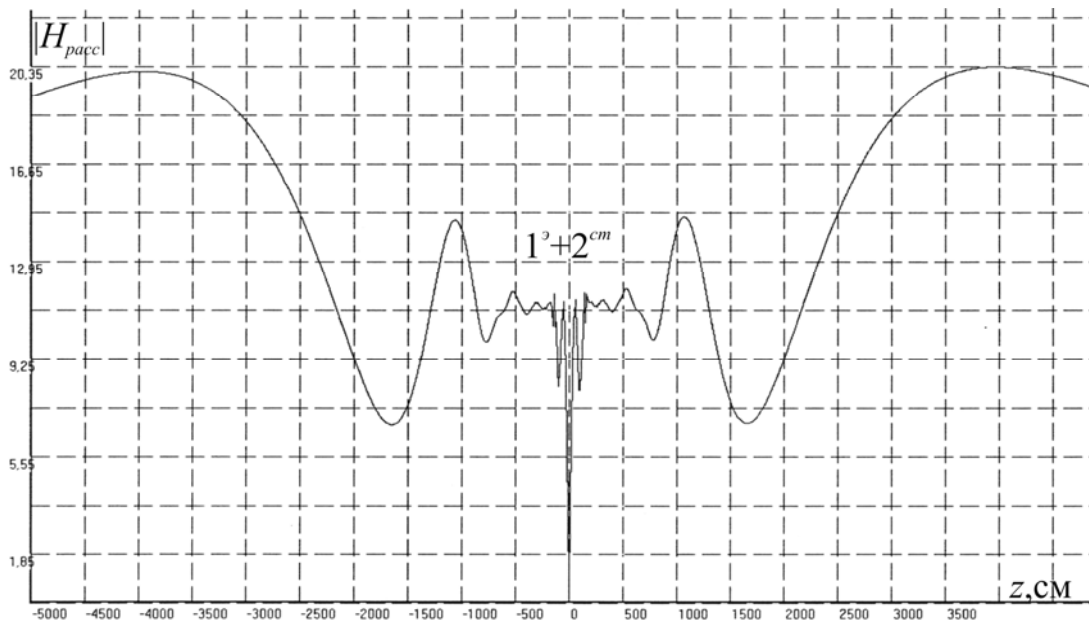


Рис. 3.20 f

Рис. 3.19 a – f. Зависимости внешних полей $|E_{pacc}|$, $|H_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер в зонах Френеля и Фраунгофера, когда структурный 2^{cm} и электрический 1^3 резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.17 b), от изменения координаты точки наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $y = z = 0 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

c, d) y при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $x = z = 0 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

e, f) z при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

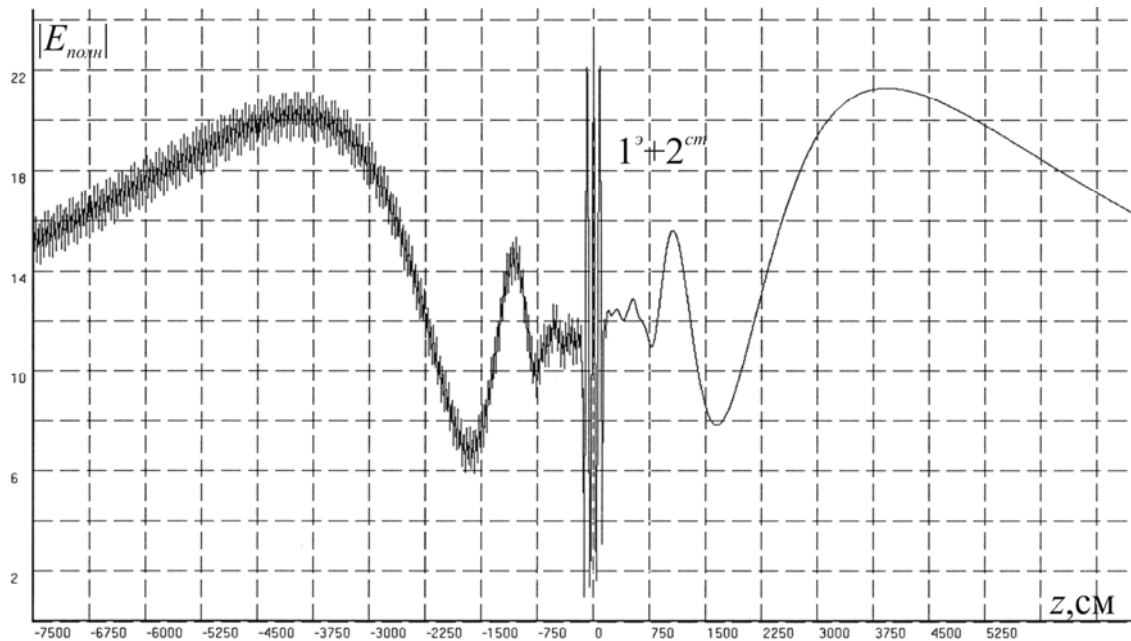


Рис. 3.20 г

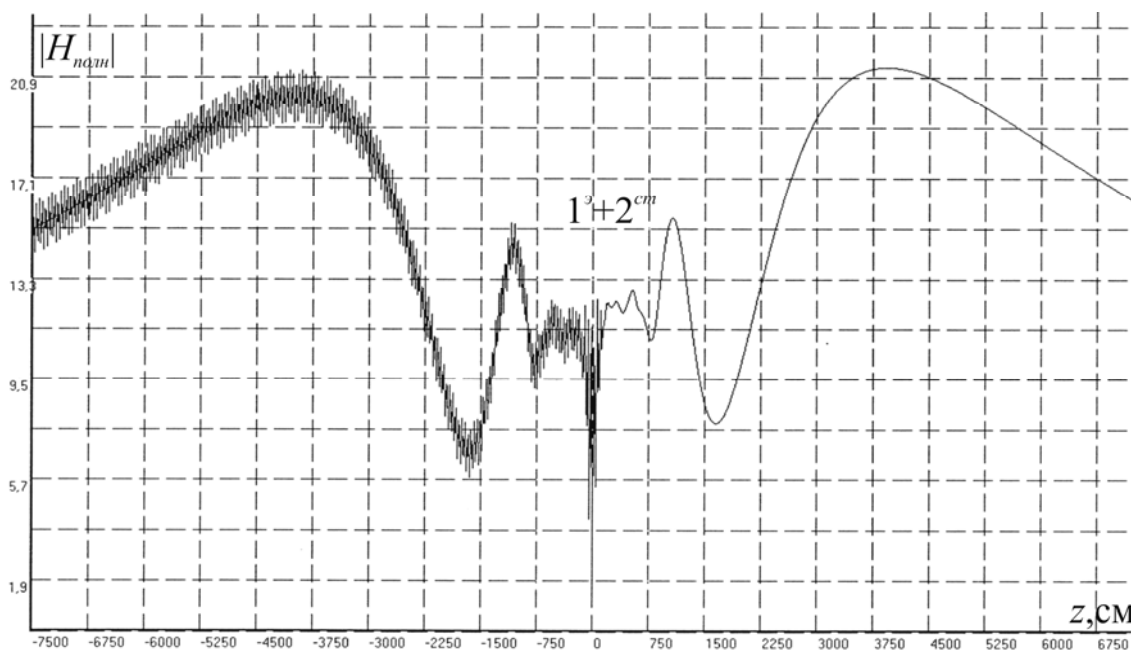


Рис. 3.20 h

Рис. 3.20 г, h. Зависимости полей $|E_{полн}|$, $|H_{полн}|$ (1.4), (3.18) кубической решетки сфер в зонах Френеля и Фраунгофера, когда структурный $2^{ст}$ и электрический $1^э$ резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.17 b), от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $d=h=l=6,875$ см; $x=y=0$ см; $(p,s,t)=0,\pm 1,\dots,\pm 20$

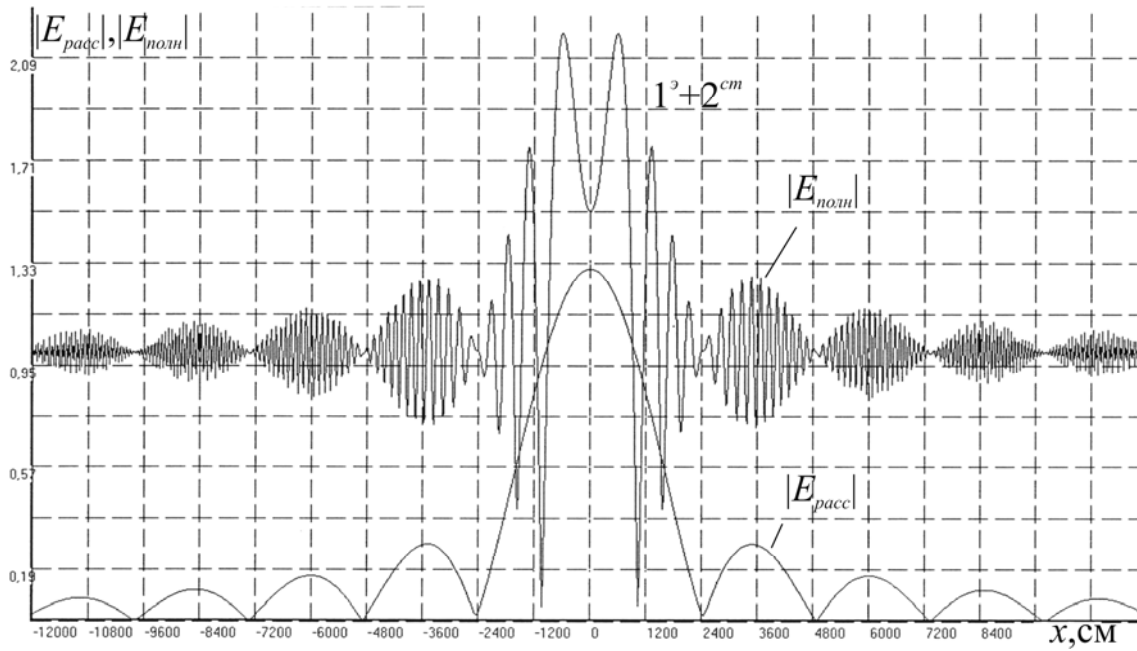


Рис. 3.20 i

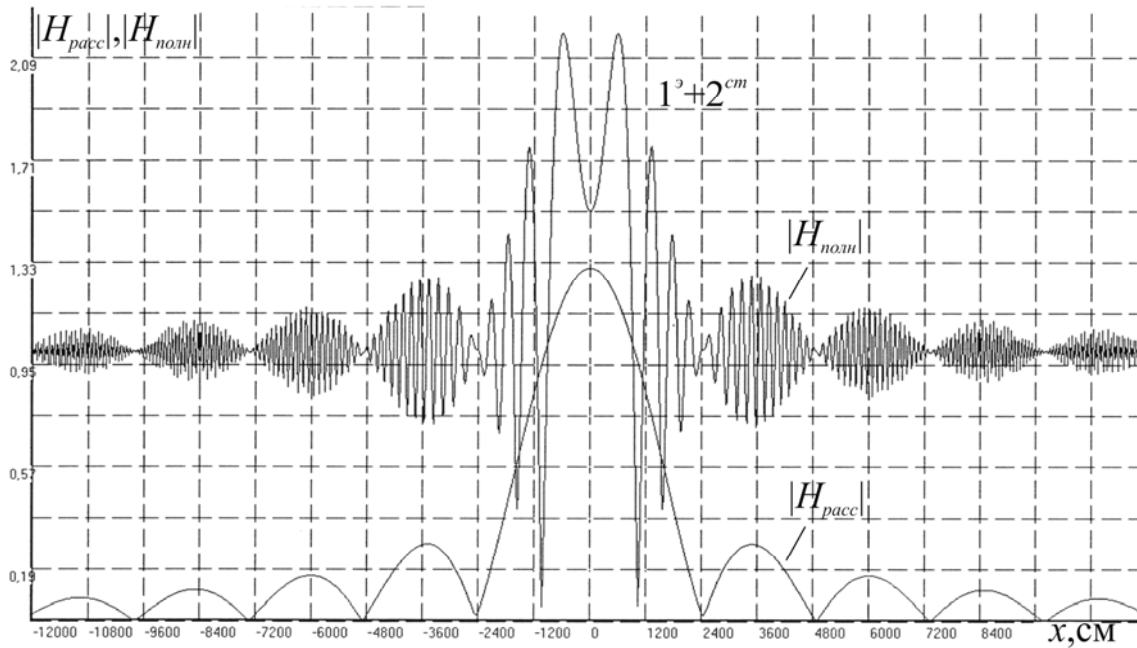


Рис. 3.20 j

Рис. 3.20 i, j. Зависимости полей $|E_{расс}|$, $|E_{полн}|$ и $|H_{расс}|$, $|H_{полн}|$ (1.4), (3.1), (3.18) кубической решетки сфер в зоне Фраунгофера, когда структурный 2^{cm} и электрический 1^o резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.17 b), от изменения координаты точки наблюдения поля x при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $d = h = l = 6,875$ см; $y = 0$ см; $z = 100000$ см (рис. 3.20 e–h); $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

3.3.4 Вырожденный резонанс кубического кристалла

В подразделе численно изучается поведение модуля рассеянного (3.18) и полного (1.4) полей простой кубической решетки, когда в ней возбужден структурный (решеточный) резонанс, совмещенный с вырожденным резонансом сферрешетки. Этот тип резонанса назовем вырожденным резонансом – $(m, \varepsilon + cm)$ кубического кристалла [76, 86, 87, 91].

На рис. 3.21; 3.22 изображены дисперсионные зависимости для модуля полей (3.18) кубического кристалла:

- 1) в решетке возбуждаются только структурные (решеточные) резонансы – $1^{cm}, 2^{cm}, 3^{cm}, 4^{cm}$ (рис. 3.21 а);
- 2) в решетке возбужден совмещенный резонанс $(1^{m,\varepsilon} + 2^{cm})$ (рис. 3.21 б);
- 3) сопоставлены модули полей $|E_{расс}|$ и $|H_{расс}|$ для резонанса $(1^{m,\varepsilon} + 2^{cm})$ (рис. 3.22).

Для вырожденного резонанса кристалла зависимости для модуля полей $|E_{расс}|$ и $|H_{расс}|$, изображенные на рис. 3.22, совпадают, что является отличительной особенностью этого типа резонанса кристалла от резонансов магнитного (рис. 3.11) и электрического (рис. 3.18) типов кристалла. Нужно отметить, что модули полей $|E_{расс}|$ и $|H_{расс}|$ совпадают и для структурного резонанса кристалла (рис. 3.7).

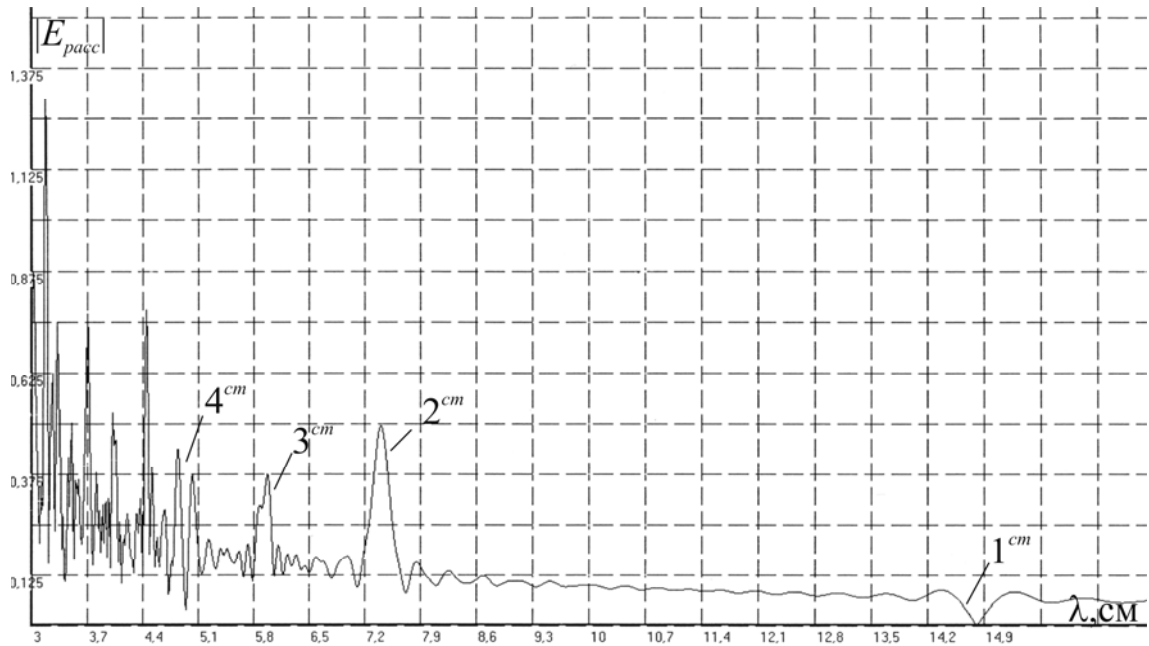


Рис. 3.21 а. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда в решетке возбуждены структурные (решеточные) (cm) резонансы при $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 5$; $\mu' = 1$; $d = h = l = 7,402$ см; $x = y = z = 0$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

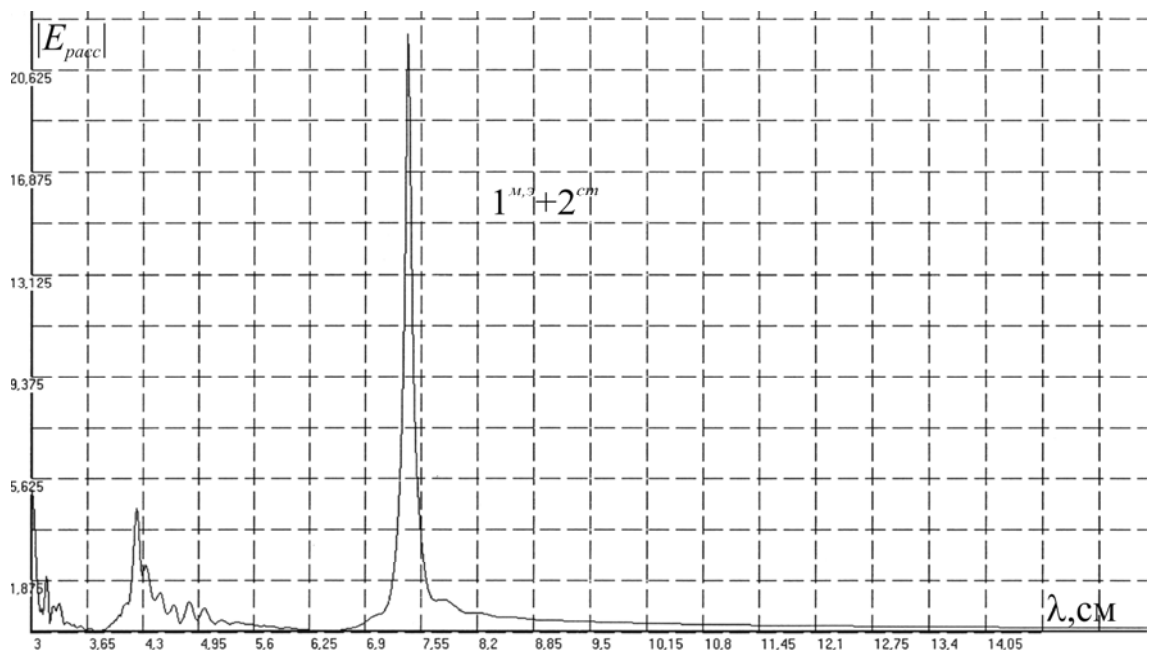


Рис. 3.21 б. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для случая, когда структурный 2^{cm} (рис. 3.21 а) и вырожденный $1^{M,3}$ резонансы рассеяния совмещены друг с другом ($1^{M,3} + 2^{cm}$) при $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$; $d = h = l = 7,4$ см; $x = y = z = 0$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

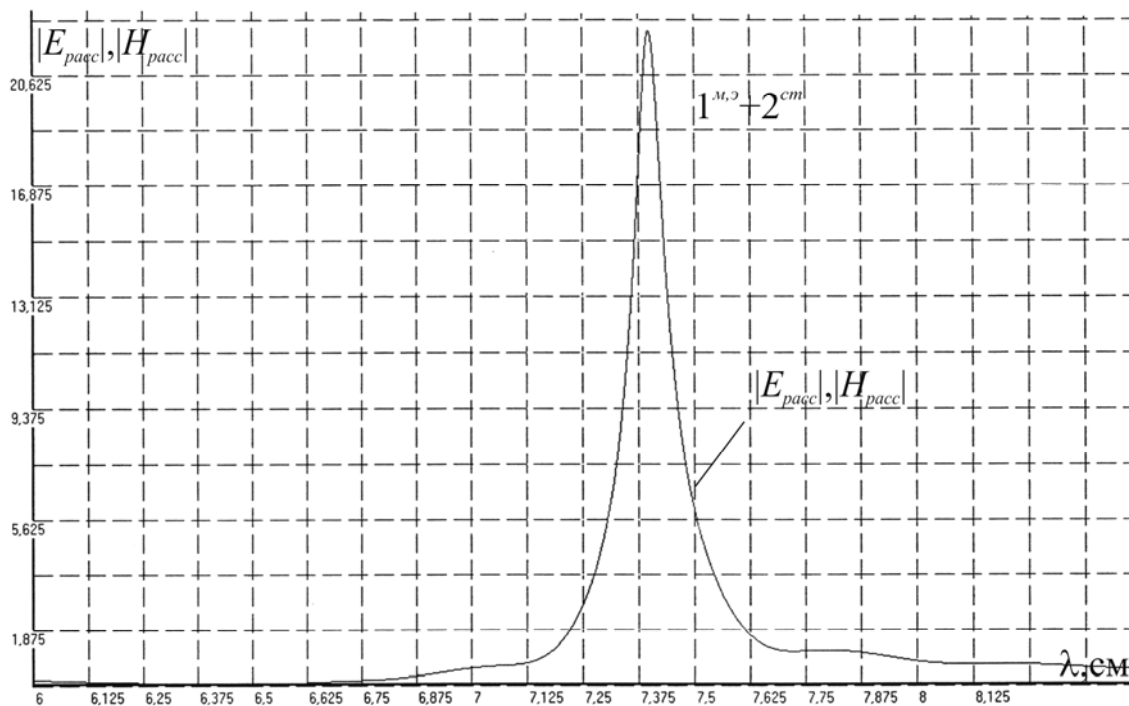


Рис. 3.22. Зависимости полей $|E_{расс}|$, $|H_{расс}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер от изменения длины волны λ для совмещенных резонансов $(1^{m,0} + 2^{cm})$ при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $d = h = l = 7,4$ см; $x = y = z = 0$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

На рис. 3.23; 3.24 представлены структурные зависимости для модуля полей (3.18), (1.4) внутри кубического кристалла и вне кристалла в зонах Френеля и Фраунгофера, когда в решетке сфер возбужден совмещенный резонанс $(1^{m,0} + 2^{cm})$.

При совмещении структурного (решеточного) резонанса решетки и вырожденного резонанса внутренних полей сфер наблюдается преимущественное резонансное рассеяние поля (3.18) в сторону, совпадающую с движением рассеиваемой волны по оси z (рис. 3.23 *e, f*; рис. 3.24 *e, f*), что является отличительной чертой этого типа резонанса от рассмотренных ранее структурного, магнитного и электрического резонансов кубического кристалла.

Отличие зависимостей, представленных на рис. 3.24 *g, h*, обусловлено интерференцией падающей и рассеянной волн по осям x и z вне кристалла в зоне Фраунгофера.

На рис. 3.23 *a – f* изображены модули зависимостей (3.18) для внутренних полей кубического кристалла вдоль осей x, y, z (рис. 3.1).

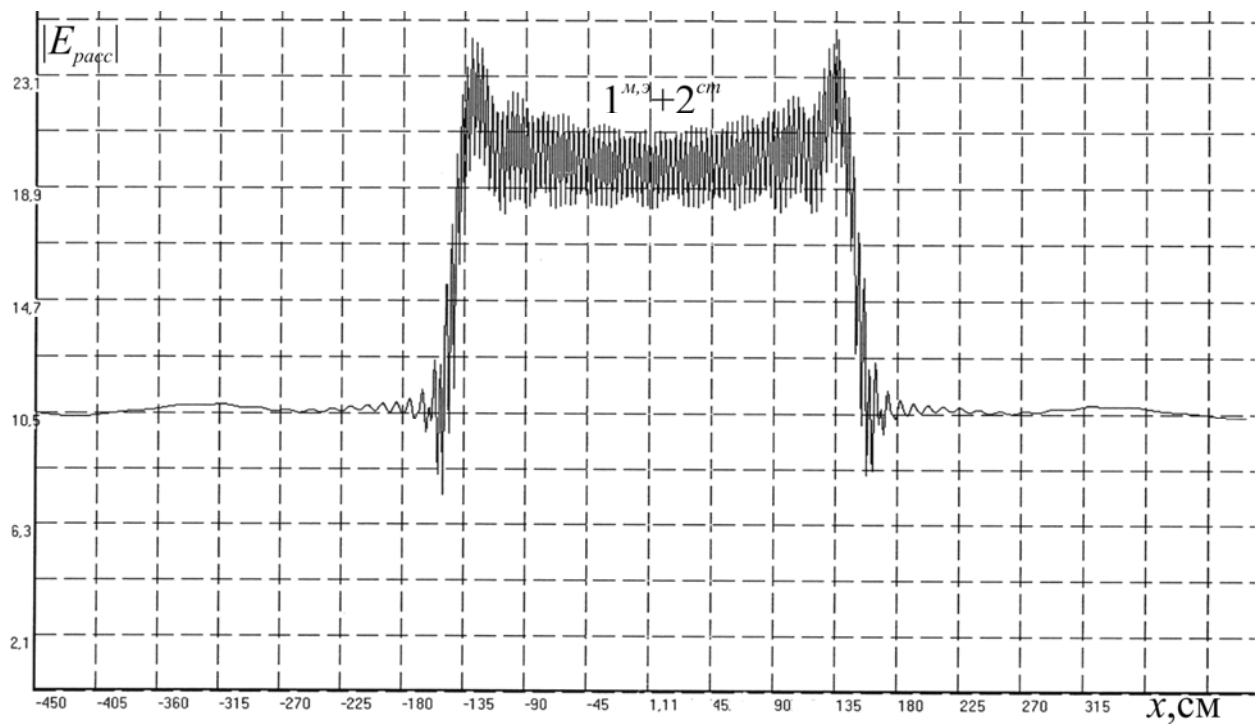


Рис. 3.23 а

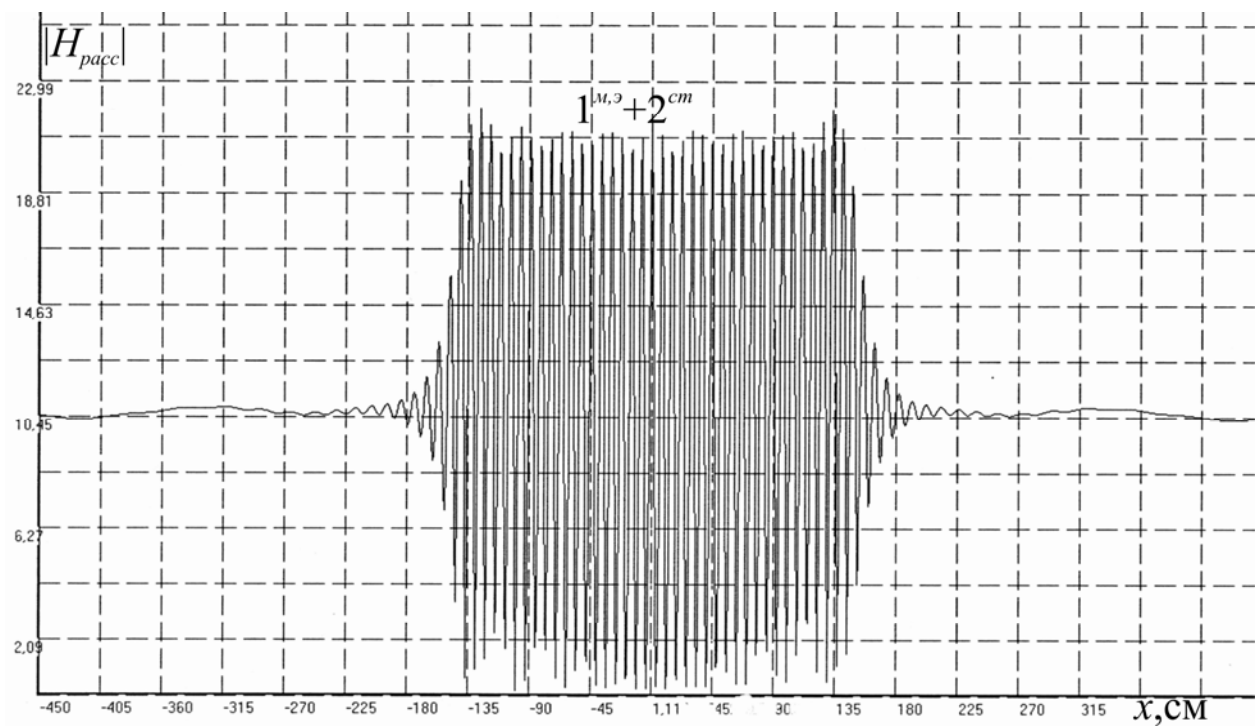


Рис. 3.23 б

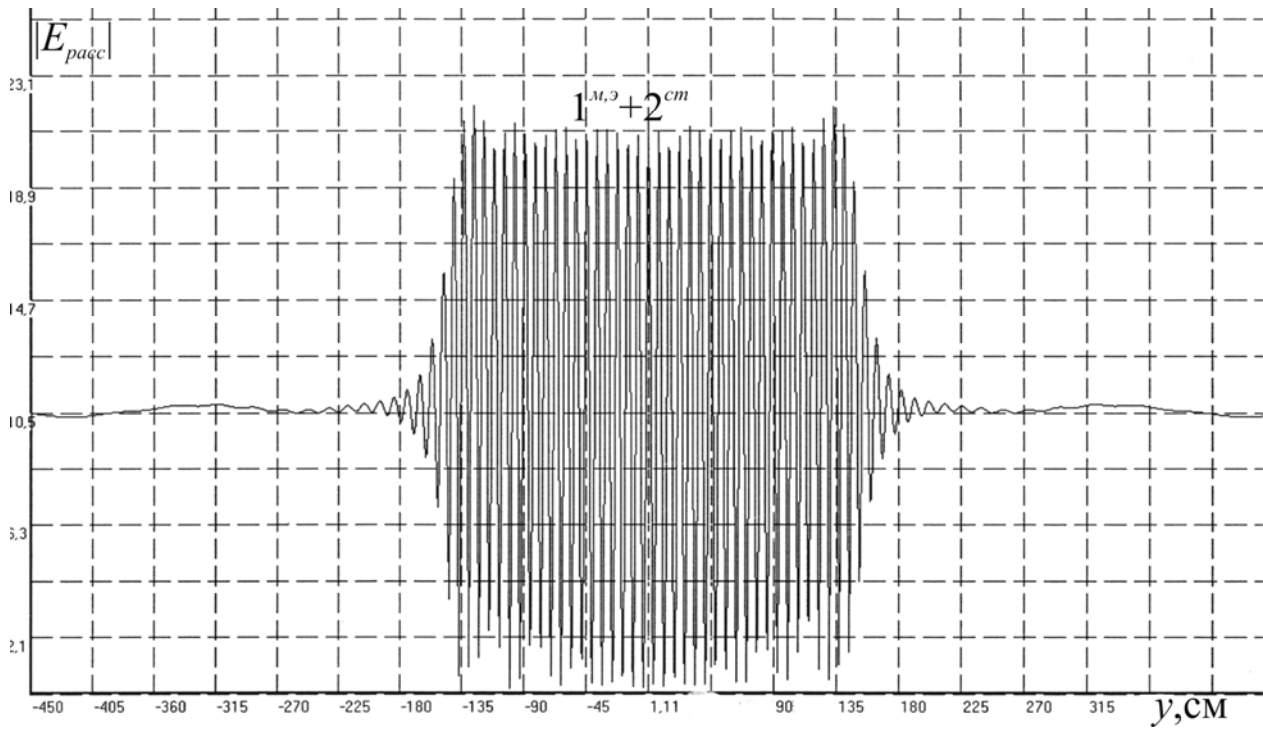


Рис. 3.23 с

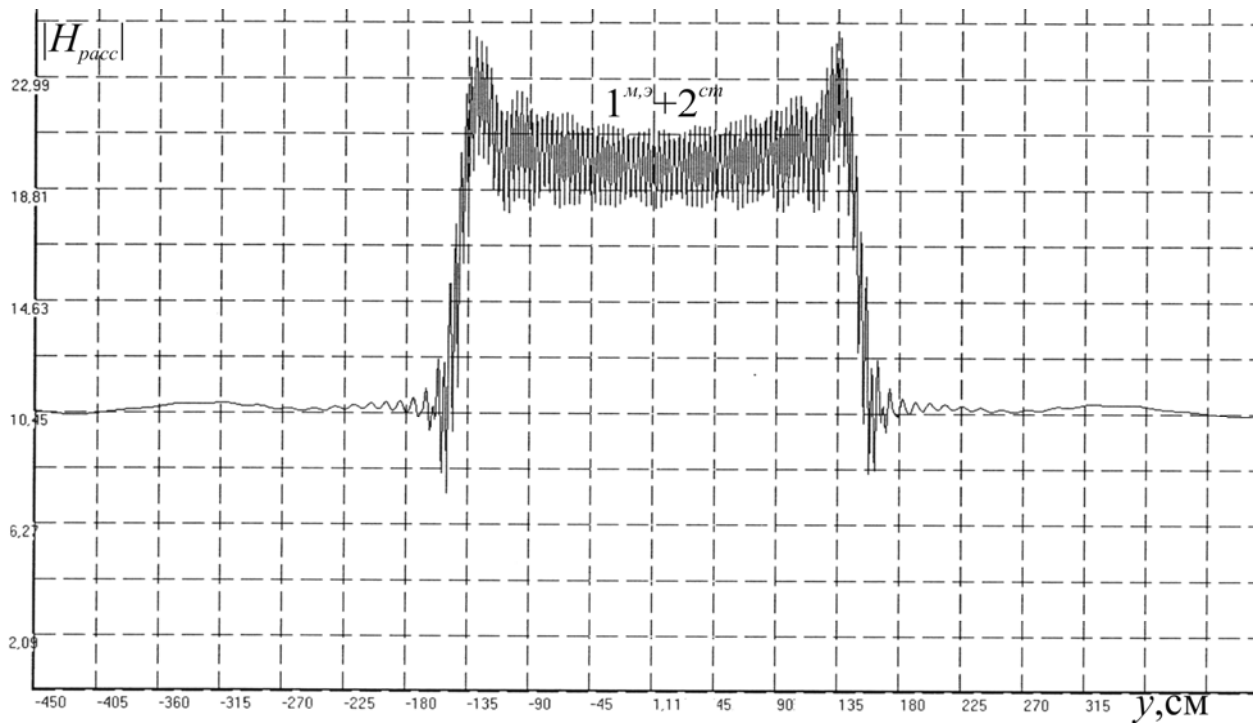


Рис. 3.23 d

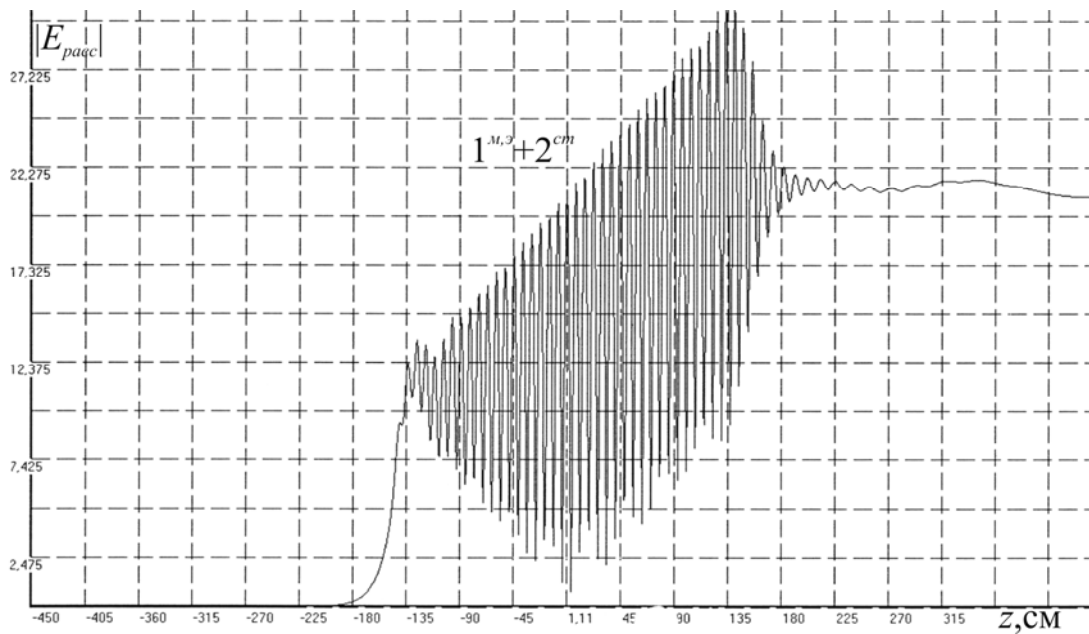


Рис. 3.23 e

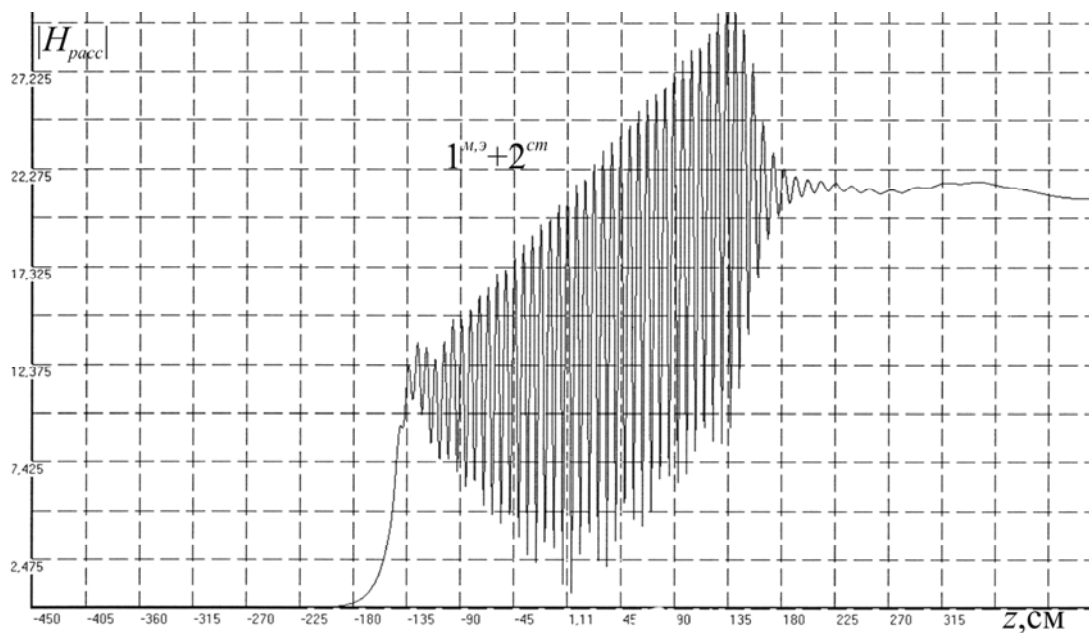


Рис. 3.23 f

Рис. 3.23 a – f. Зависимости полей $|E_{racc}|$, $|H_{racc}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер, когда структурный 2^{cm} и вырожденный $1^{M,3}$ резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.21 b), от изменения координаты точки наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^{M,3} = d = h = l = 7,4$ см; $y = z = 0$ см; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

c, d) y при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^{M,3} = d = h = l = 7,4$ см; $x = z = 0$ см; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

$e, f) z$ при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^{m,\varepsilon} = d = h = l = 7,4 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$;
 $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

Рассеиваемая волна на рис. 3.23 движется из области $z > 0$.

На рис. 3.24 $a - f$ представлены модули зависимостей (3.18) для зон Френеля и Фраунгофера вдоль осей x, y, z (рис. 3.1).

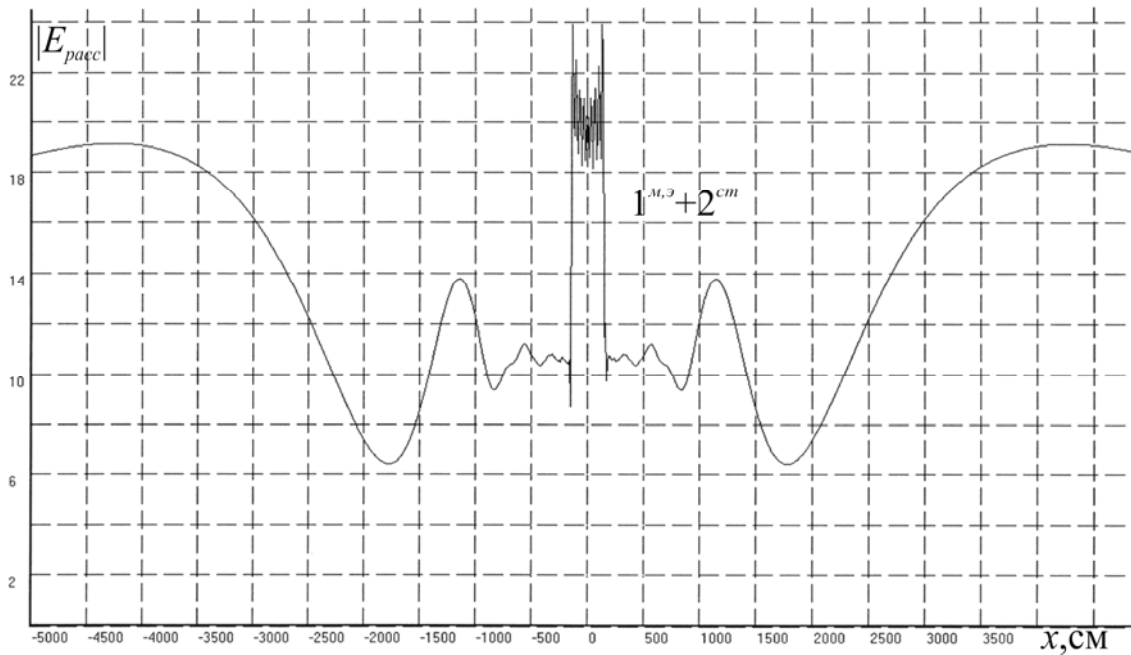


Рис. 3.24 а

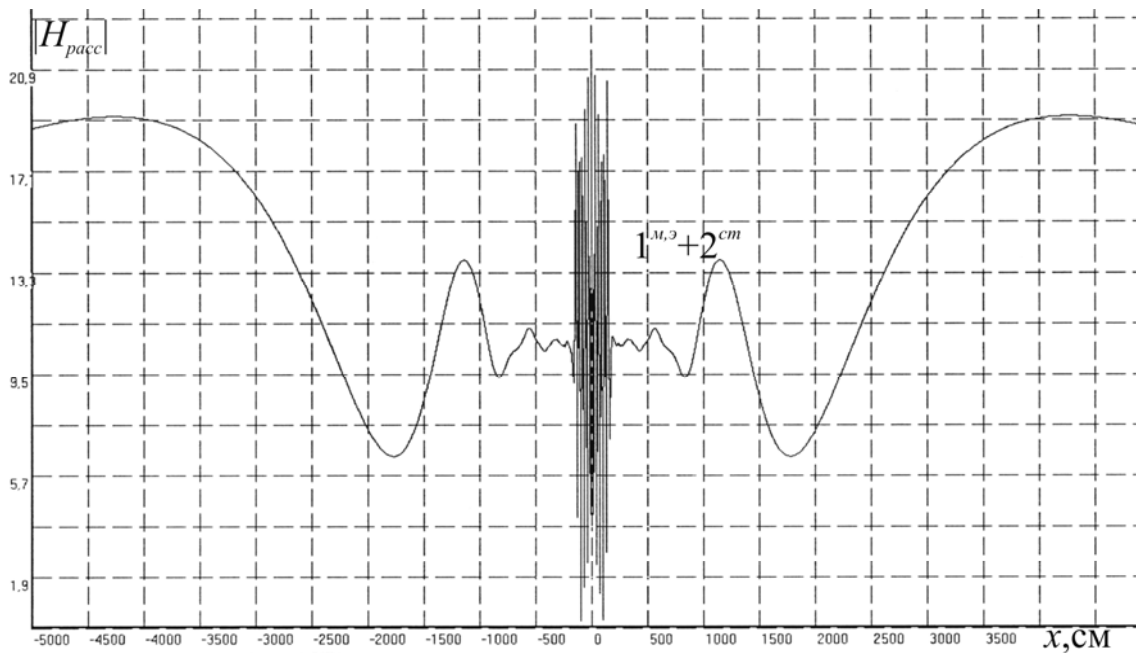


Рис. 3.24 б

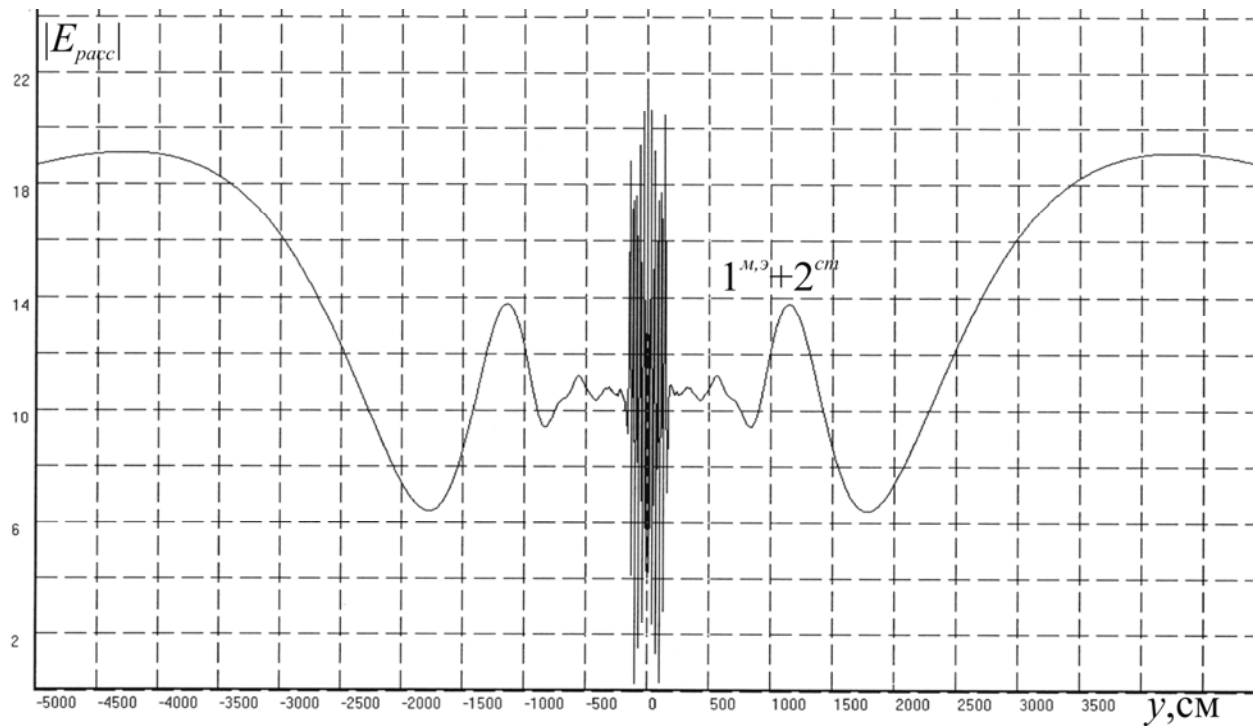


Рис. 3.24 с

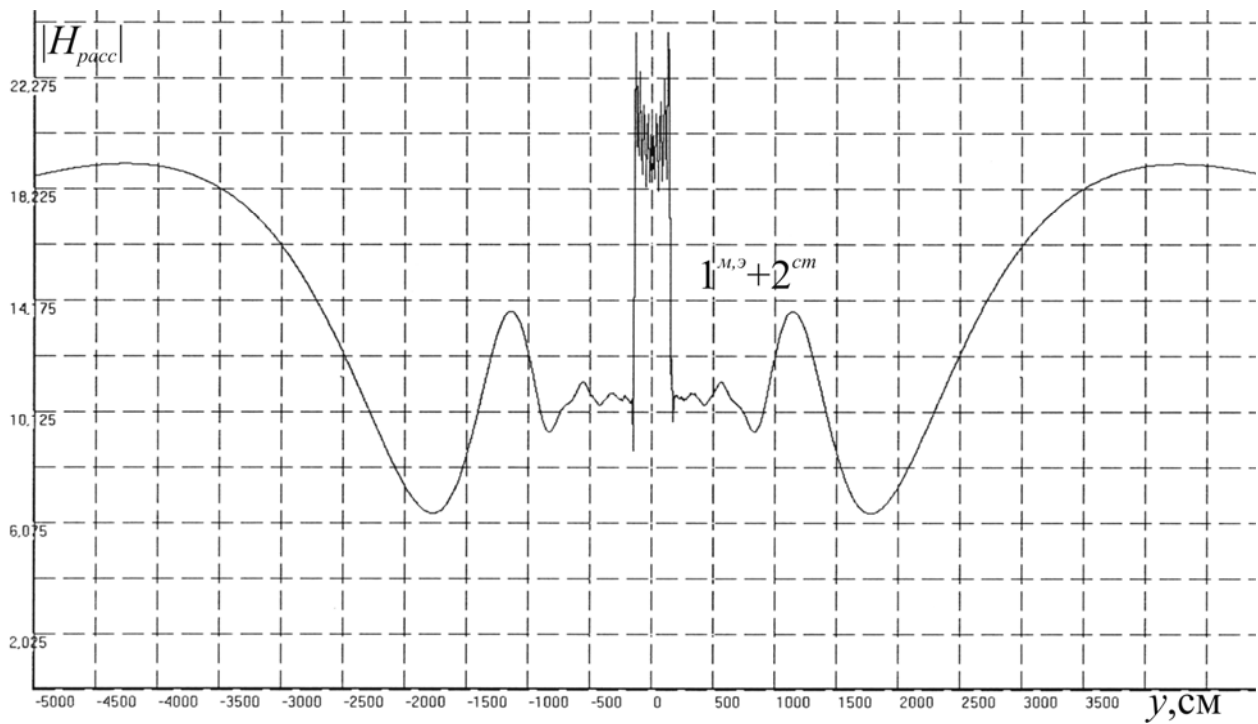


Рис. 3.24 d

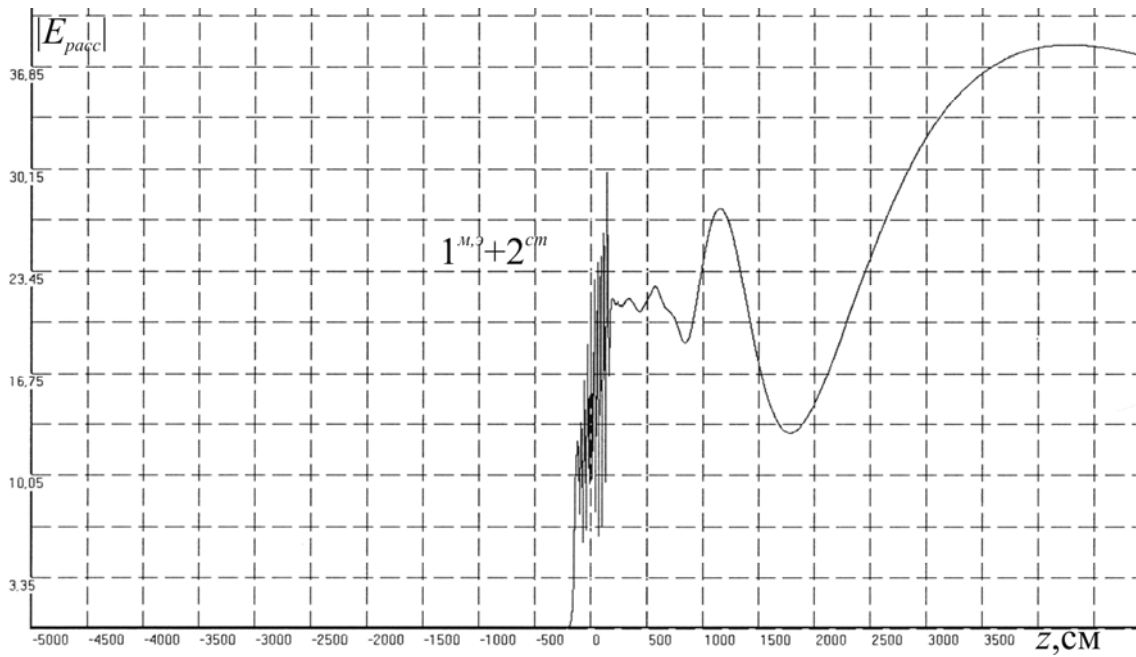


Рис. 3.24 e

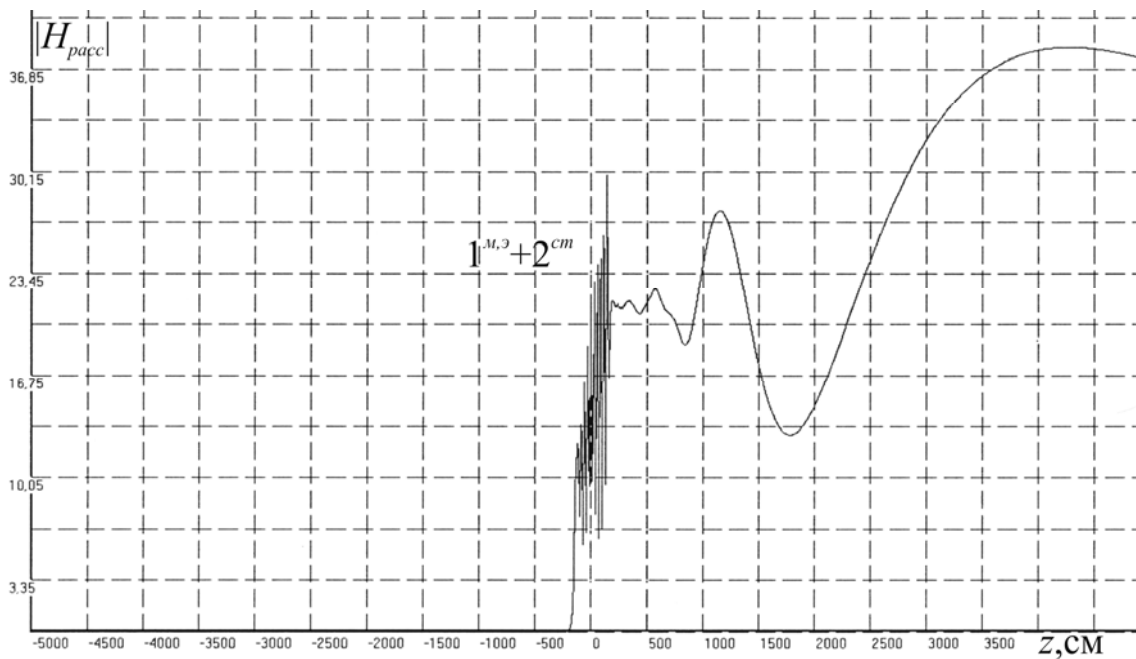


Рис. 3.24 f

Рис. 3.24 a – f. Зависимости полей $|E_{\text{расс}}|$, $|H_{\text{расс}}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер в зонах Френеля и Фраунгофера, когда структурный 2^{cm} и вырожденный $1^{M, \vartheta}$ резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.21 b), от изменения координаты точки наблюдения поля:

a, b) x при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^{M, \vartheta} = d = h = l = 7,4 \text{ см}$; $y = z = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$,

c, d) y при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^{M, \vartheta} = d = h = l = 7,4 \text{ см}$; $x = z = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$,

e, f) z при $a = 0,5 \text{ см}$; $\lambda_p^{M, \vartheta} = d = h = l = 7,4 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$

Рассеиваемая волна на рис. 3.24 *a* – *f* движется из области $z < 0$.

На 3.24 *g*, *h* изображены модули зависимостей (1.4), (3.18) для зоны Фраунгофера.

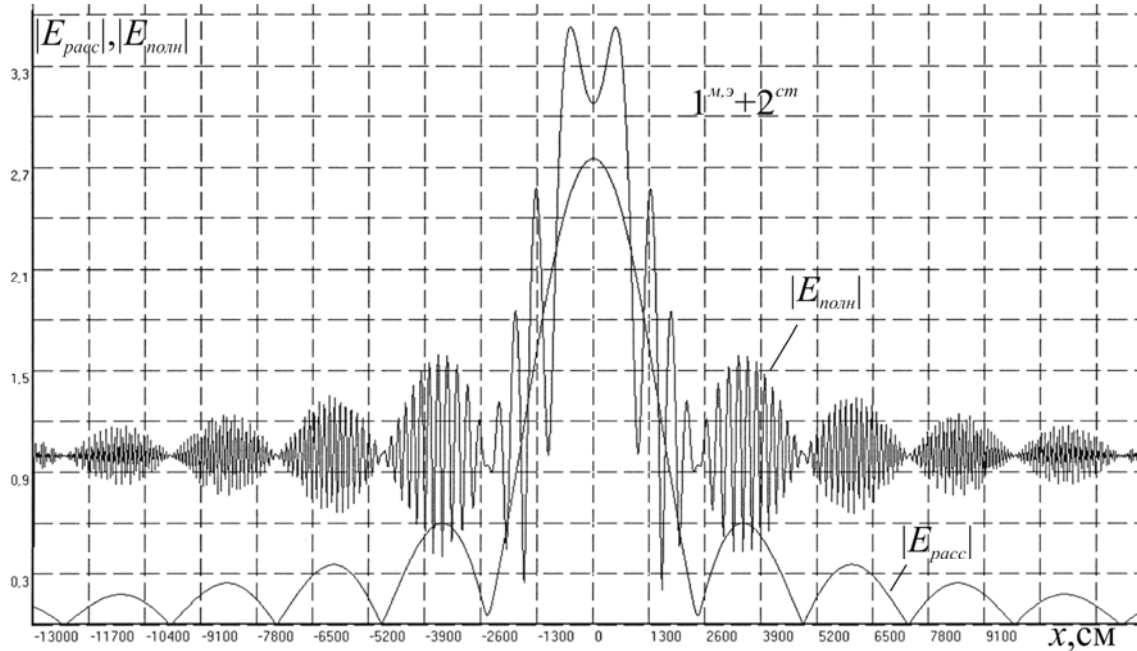


Рис. 3.24 *g*

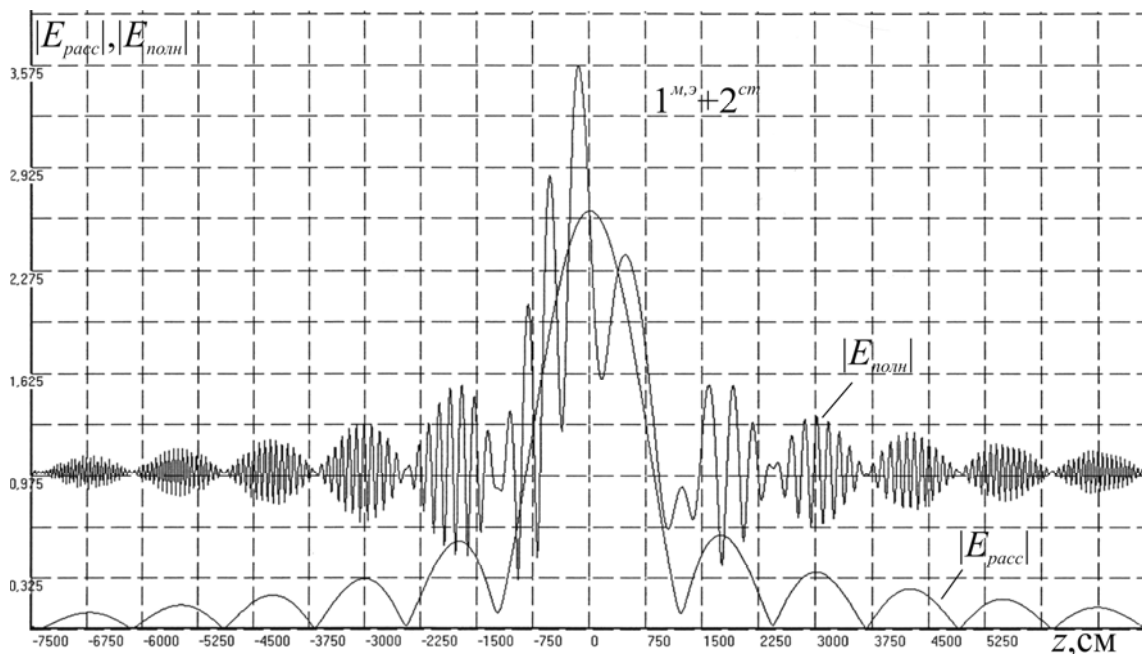


Рис. 3.24 *h*

Рис. 3.24 *g*, *h*. Зависимости полей $|E_{расc}|$, $|E_{полн}|$ (3.18), (1.4), (3.1) кубической решетки сфер в зоне Фраунгофера, когда структурный 2^{cm} и вырожденный $1^{M,э}$ резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.21 *b*), от изменения координаты точки наблюдения поля:

g) x при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^{m,3} = d = h = l = 7,4$ см; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$, $y = 0$ см; $z = 100000$ см (рис. 3.24 e, f),

h) z при $a = 0,5$ см; $\lambda_p^{m,3} = d = h = l = 7,4$ см; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$, $x = 0$ см; $y = 50000$ см; $z = 100000$ см (рис. 3.24 c)

На рис. 3.24 g, h рассеиваемая волна (2.26) движется из области $z < 0$.

3.3.5. Рассеянное поле в окрестности ребра резонансного кубического кристалла

В подразделе численно исследуется поведение рассеянного поля в окрестности ребра резонансного кубического кристалла. Направление ребра кристалла выбрано совпадающим с направлением оси z (рис. 3.1) и направлением распространения рассеиваемой плоской волны

$$\vec{E}_{0x}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}, \quad \vec{H}_{0y}(z, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}$$

В кристалле возбуждается совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$.

Рассеянное поле изучалось над и под ребром кристалла на расстоянии порядка $\sim d/2$, где d – постоянная кубической решетки кристалла. Обнаружено, что при переходе через ребро кристалла наблюдается скачок поля в сторону его убывания. Вид графических зависимостей на рис. 3.25 c, d, g, h связан с интерференцией падающей и рассеянной волн. Сопоставление рассеянного поля в центре кристалла (рис. 3.19 e, f) с полем в окрестности ребра кристалла (рис. 3.25 a, e) говорит о сильной неоднородности рассеянного поля в кристалле. Структура рассеянного поля над ребром кристалла связана с существованием затухающей составляющей рассеянного поля вне кристалла, которая с удалением от ребра убывает по величине. Особенности в поведении рассеянной волны над ребром кристалла и под ним хорошо видны из сопоставления приведенных графических зависимостей на рис. 3.25.

На рис. 3.25 a, c, e, g представлены модули полей (1.4), (3.18) под ребром кристалла, а на рис. 3.25 b, d, f, h – над ребром кубического кристалла.

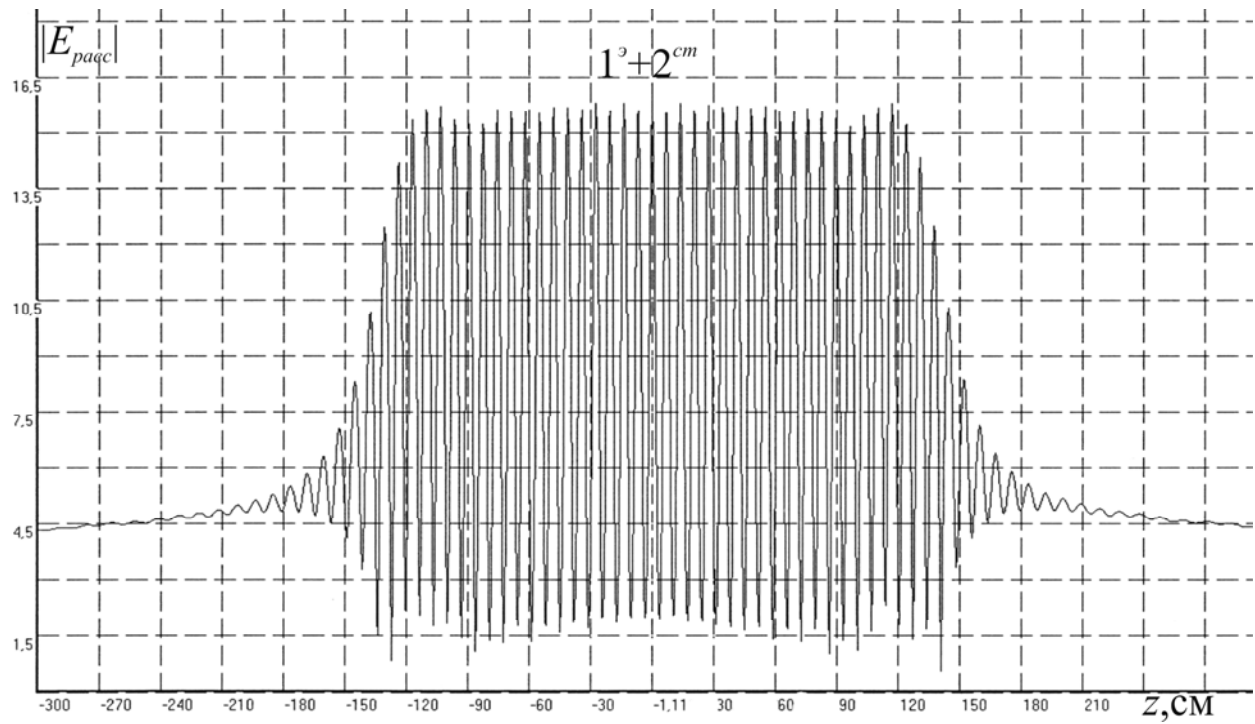


Рис. 3.25 а

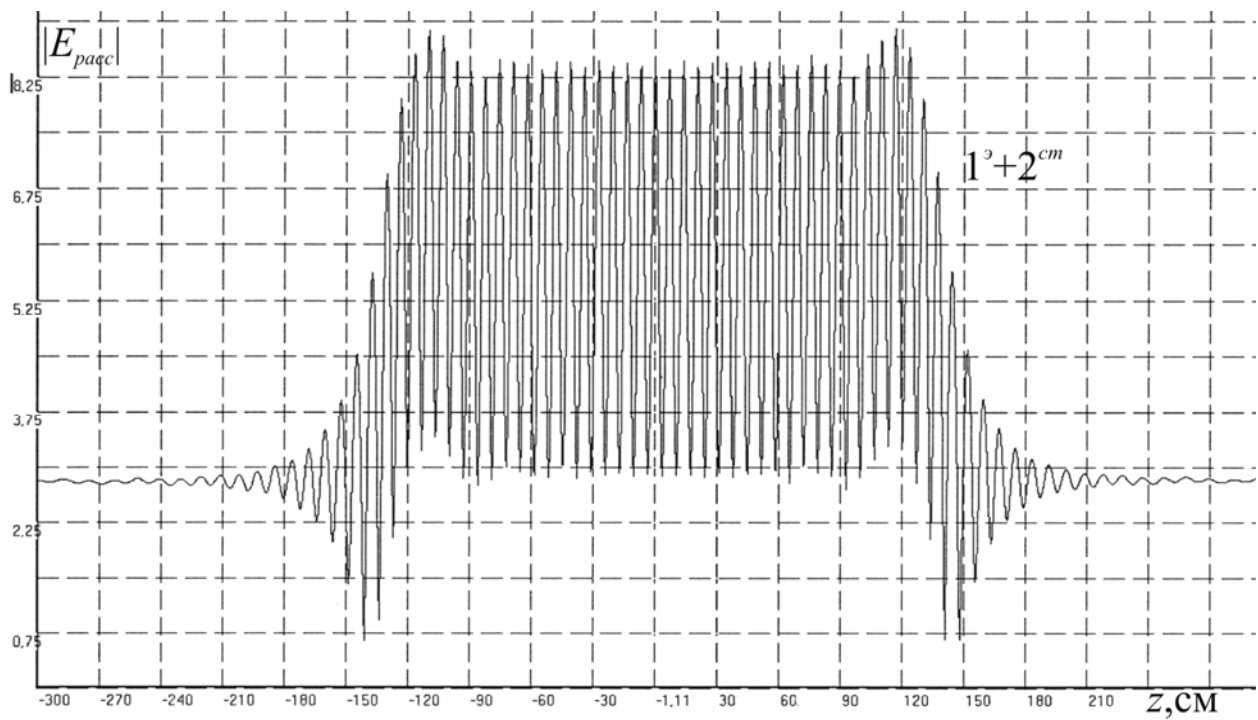


Рис. 3.25 б

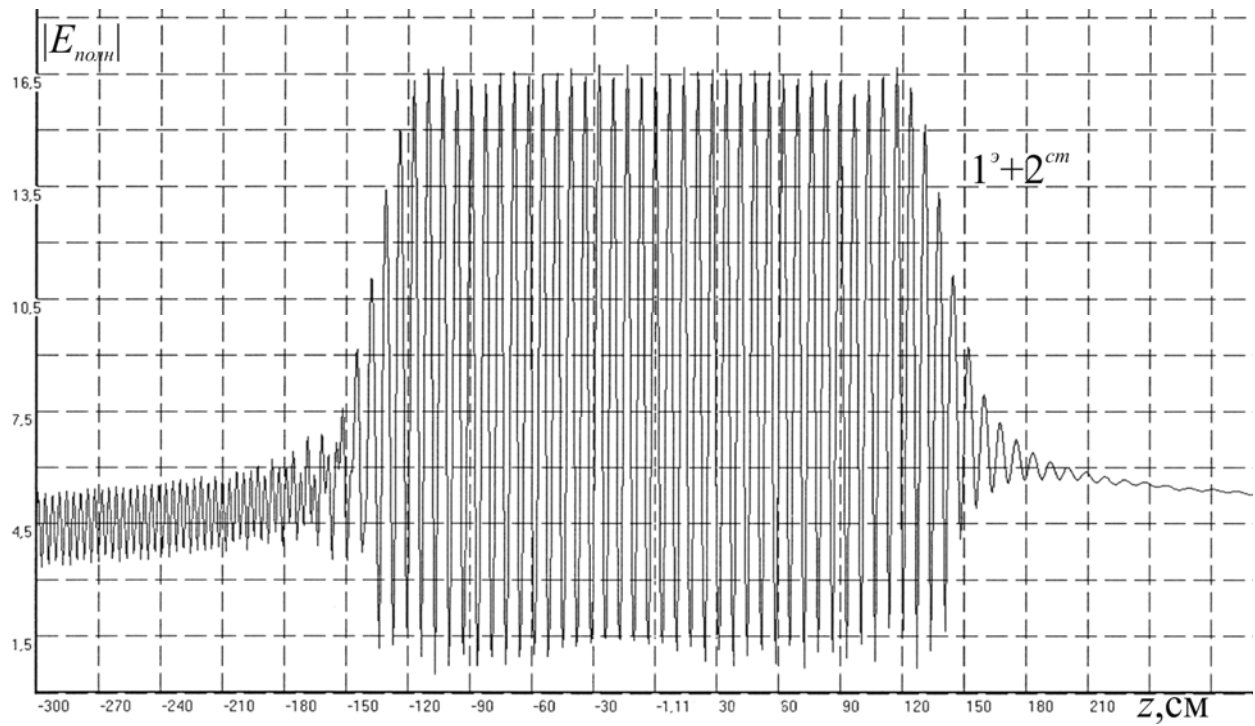


Рис. 3.25 *c*

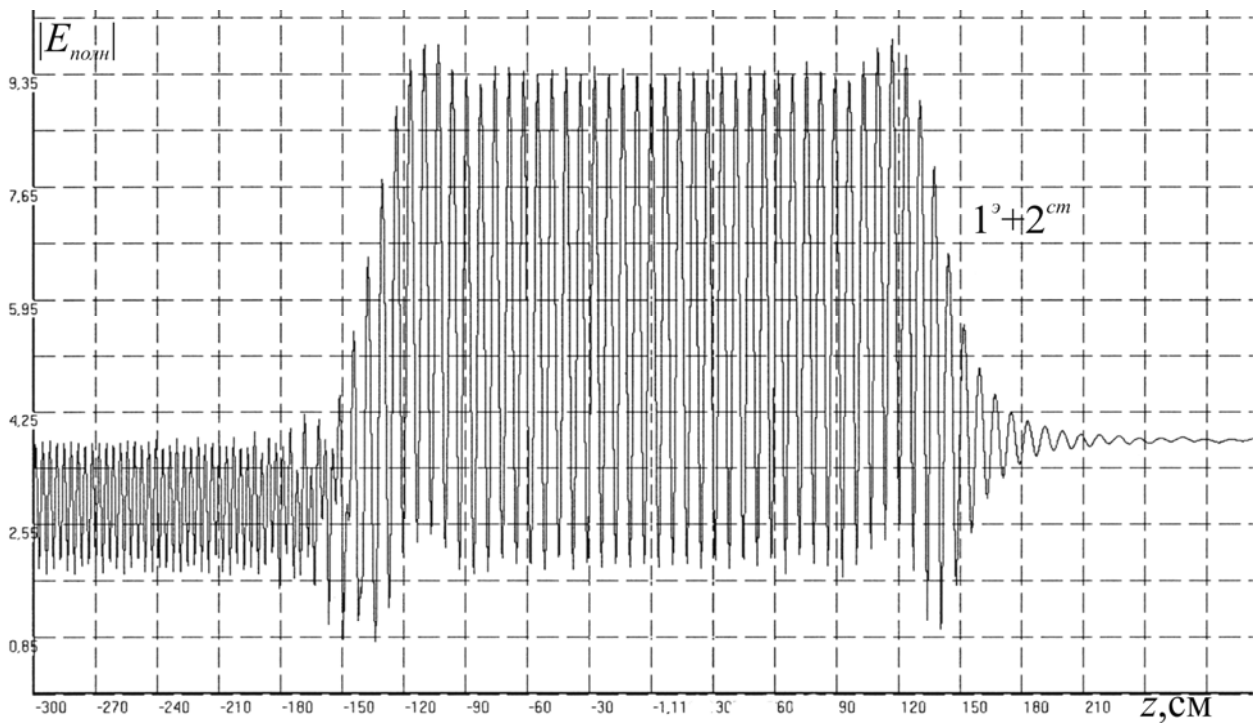


Рис. 3.25 *d*

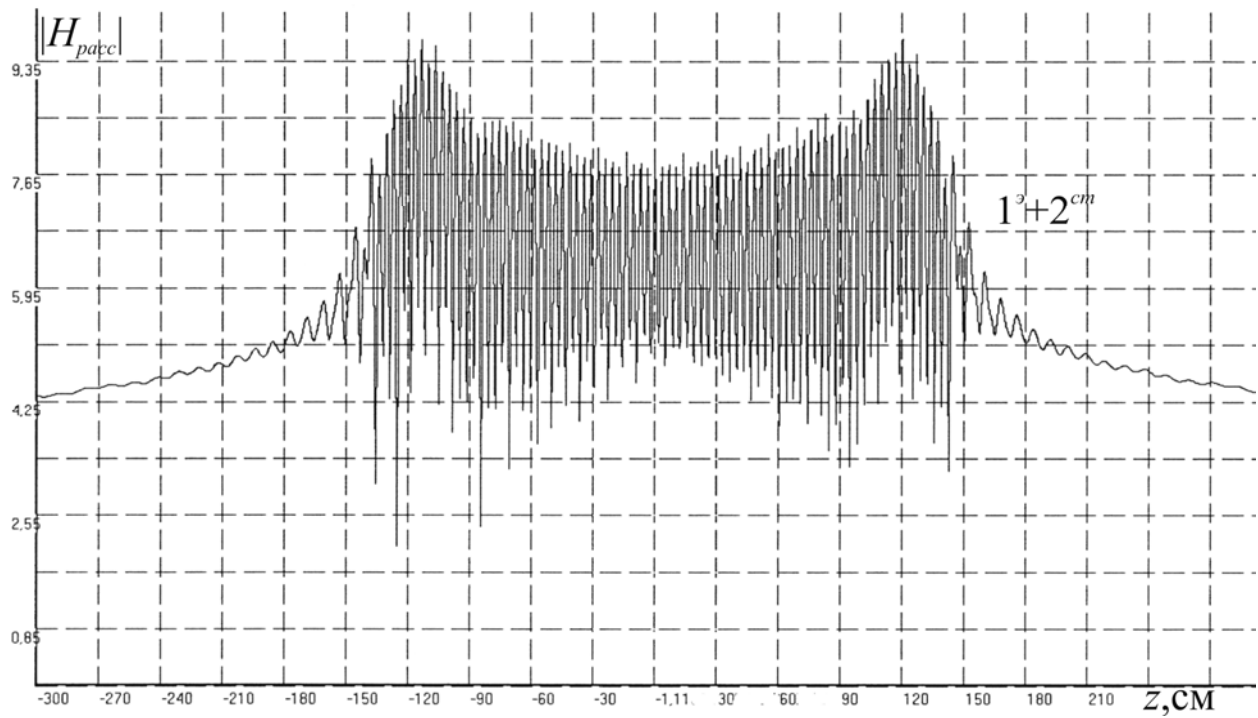


Рис. 3.25 e

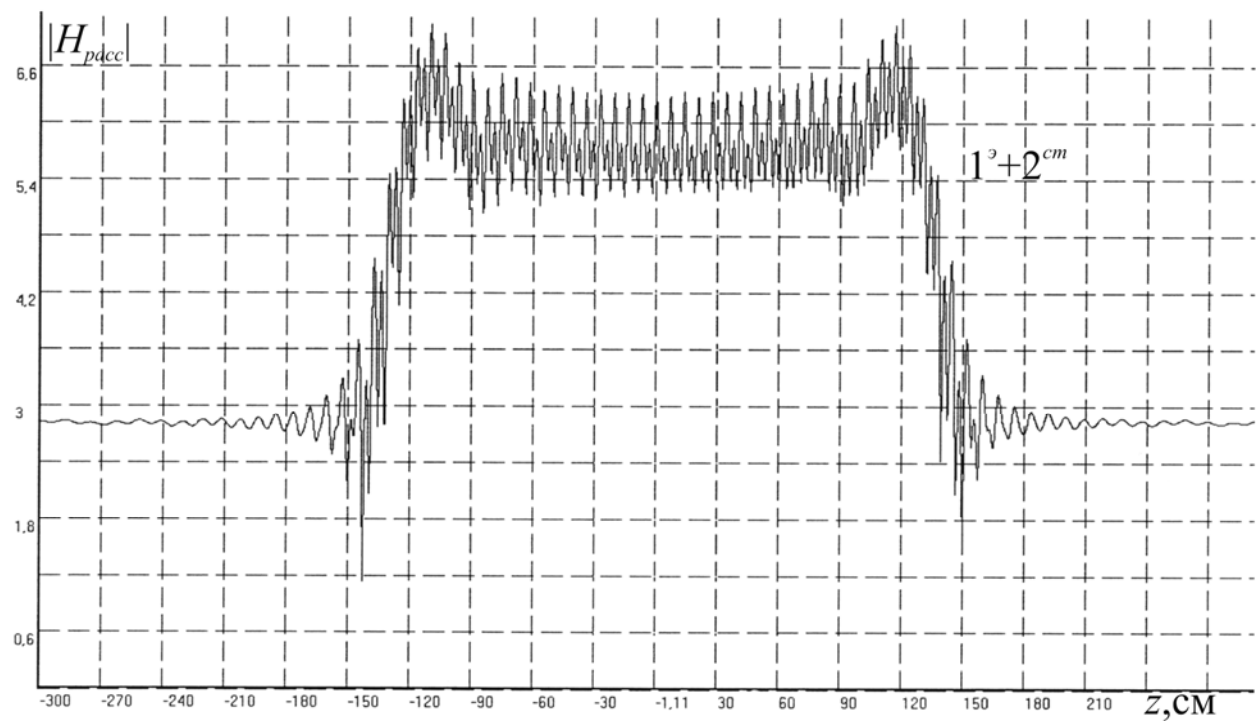


Рис. 3.25 f

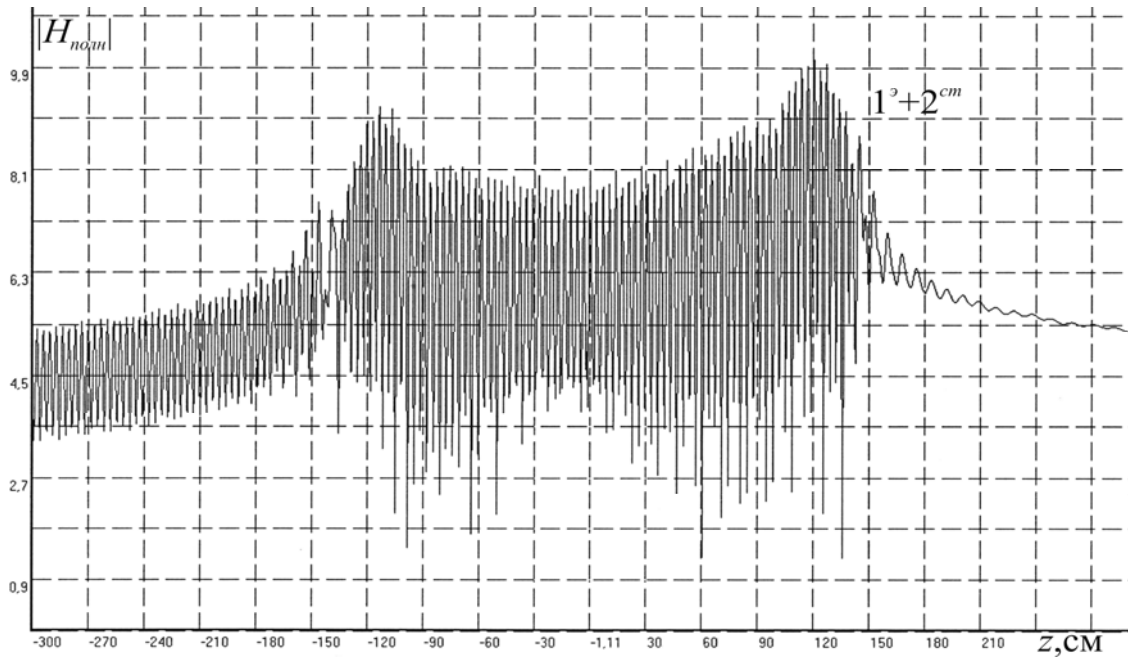


Рис. 3.25 g

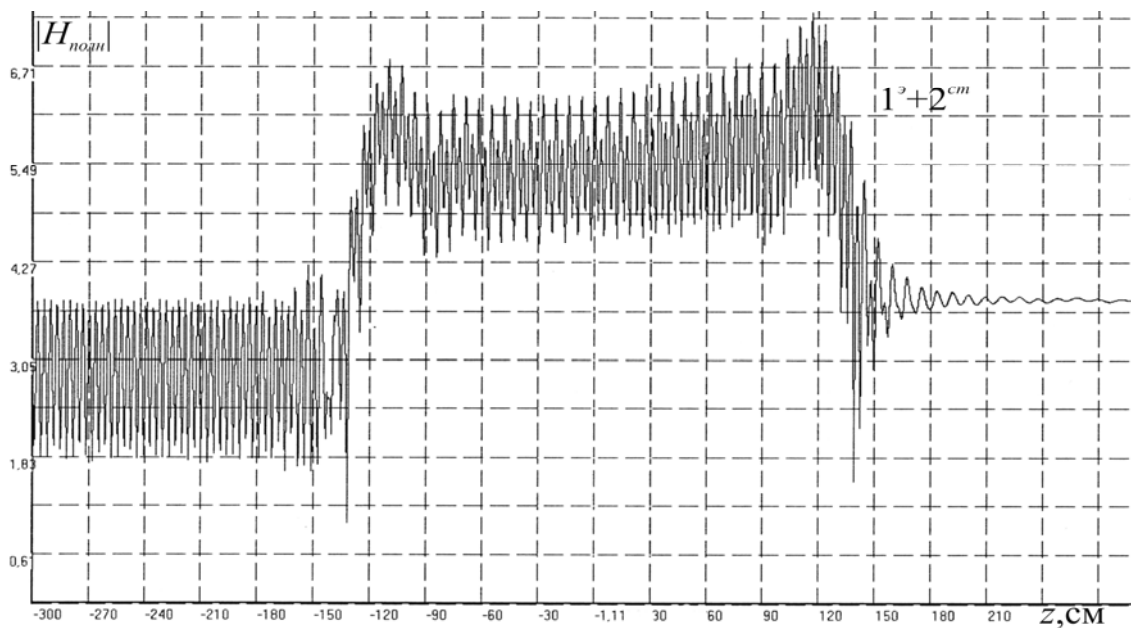


Рис. 3.25 h

Рис. 3.25. Зависимости полей (3.18), (1.4) при совмещенном резонансе $(1^3 + 2^{cm})$ в окрестности ребра кубического кристалла вдоль оси z , когда $a = 0,5 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$. Здесь представлены зависимости для полей:

под ребром кристалла при $x = y = 137,5 \text{ см}$ – a, c, e, g ;

над ребром кристалла при $x = y = 144,375 \text{ см}$ – b, d, f, h

На рис. 3.25 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

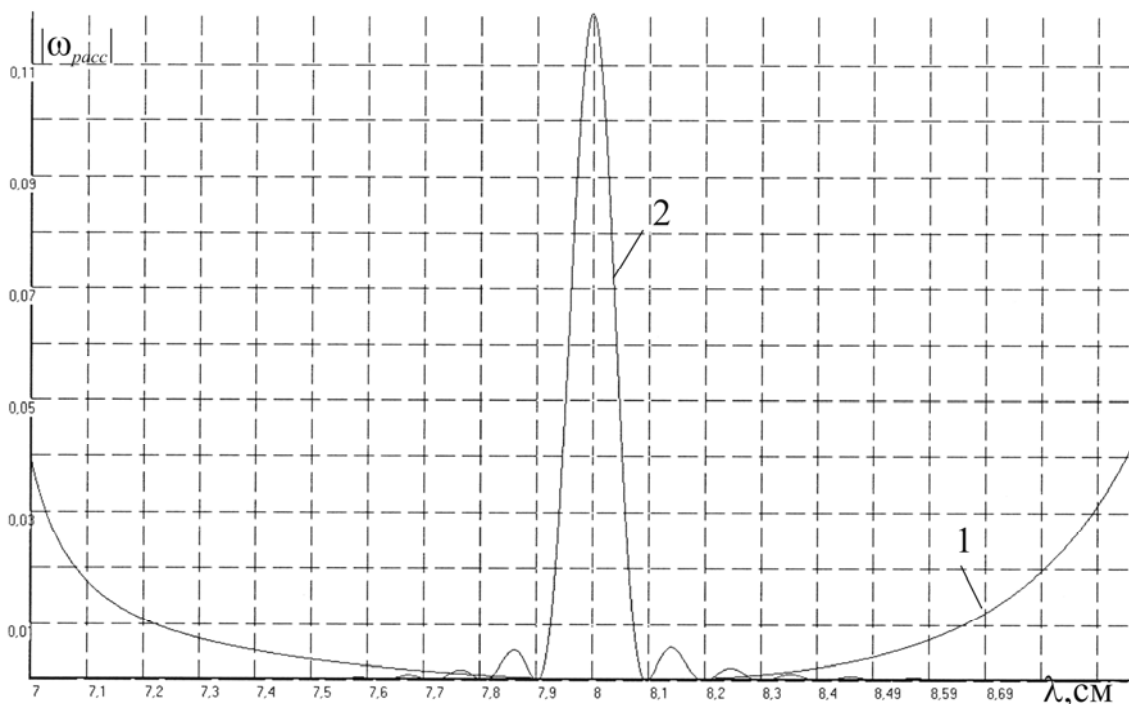
3.3.6. Запрещенные зоны резонансного кубического кристалла

Ранее найдены соотношения (3.25), (3.26), которые определяют для ограниченного кубического кристалла резонансные значения длин волн для структурных (решеточных) резонансов. Электромагнитные волны с длинами волн

$$\lambda_p^{cm} = 2d; d; 0,666d; 0,5d,$$

где d – постоянная кубической решетки, в резонансных зонах сфер кубического кристалла испытывают сильное отражение по оси z (рис. 3.8 *e, f*; 3.9 *e, f*), что отвечает брэгговскому отражению [53]. В окрестности этих резонансных значений длин волн можно выделить интервалы длин волн – запрещенные зоны, в области которых рассеиваемые волны преимущественно отражаются.

Произвести оценку ширины этих запрещенных зон можно численно, если найти дисперсионные зависимости $|\omega_{pacc}|$ (1.20) или $|E_{pacc}|$ (3.18), как это показано на рис. 3.26. Вычислив для фиксированного расстояния по оси z дисперсионные зависимости по обе стороны кристалла в направлении распространения рассеиваемой волны в зонах Френеля и Фраунгофера, можно оценить ширину запрещенной зоны.

Рис. 3.26 *a*

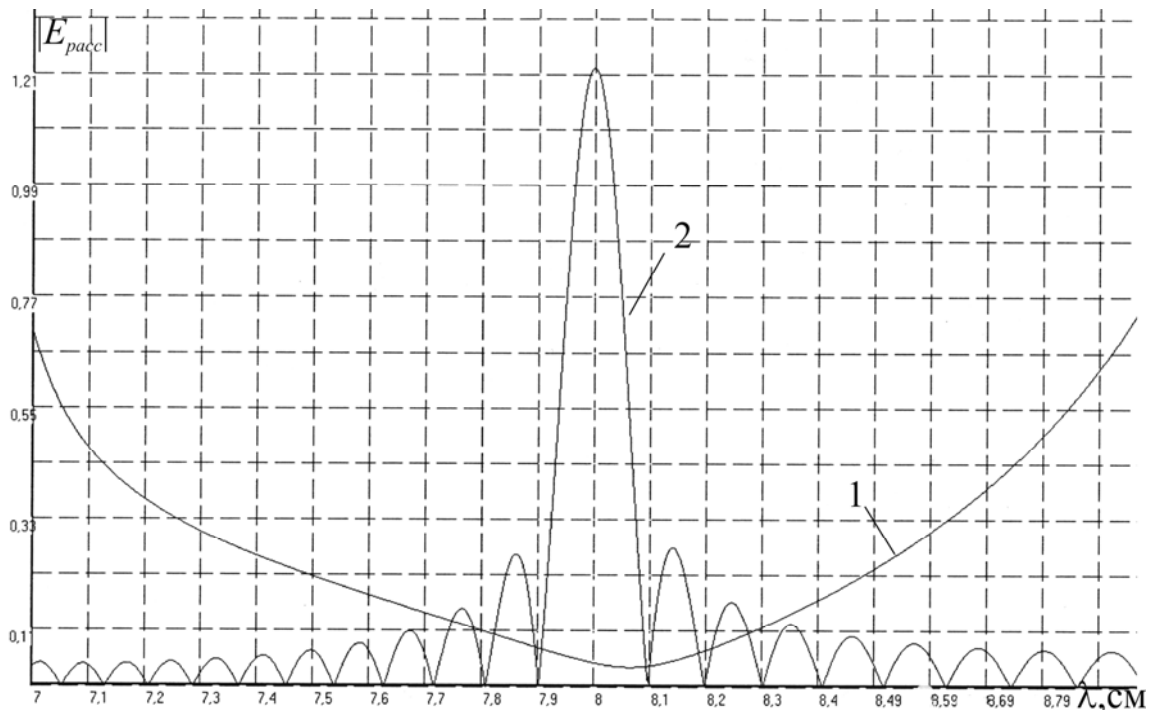


Рис. 3.26 б

Рис. 3.26 а, б. Дисперсионные зависимости $|\omega_{расс}|$ (1.20) и $|E_{расс}|$ (3.18) в окрестности структурного (решеточного) резонанса 2^{cm} (рис. 3.7) в зоне Френеля по обе стороны кристалла по оси z (рис. 3.9 е), когда $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $d = h = l = 8$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; точки наблюдения поля: $z = +4500$ см (кривая 1); $z = -4500$ см (кривая 2) при $x = y = 0$ см

3.3.7. Влияние каналов, полостей, резонансных дефектов на рассеивающие свойства резонансного кубического кристалла

Изучалось влияние сквозного внутреннего канала резонансного кубического кристалла вдоль оси z на структуру рассеянного поля внутри кристалла (рис. 3.27 а, б).

Обнаружено, что канал в кристалле с магнитным резонансом вызывает проседание резонансной кривой по оси z , в то время как в кристалла с вырожденным резонансом поле вдоль оси $z > 0$ нарастает, что можно использовать в пучковых задачах. Изменение величины поперечного сечения канал существенно влияет на структуру рассеянного в нем поля.

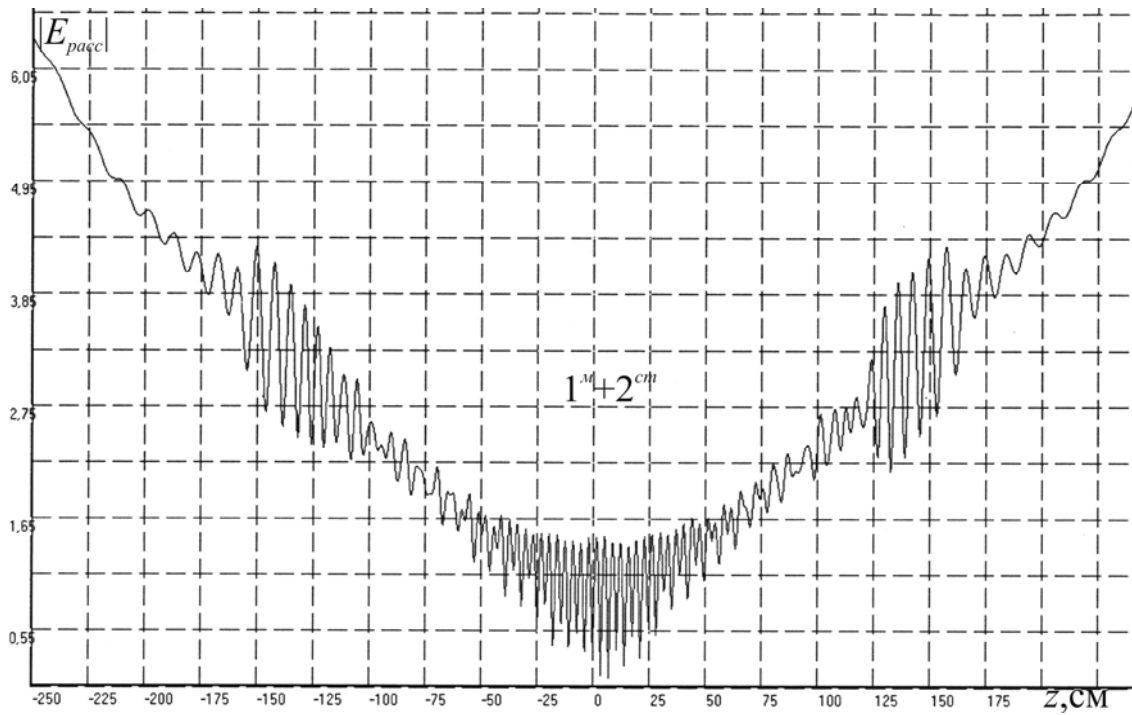


Рис. 3.27 а

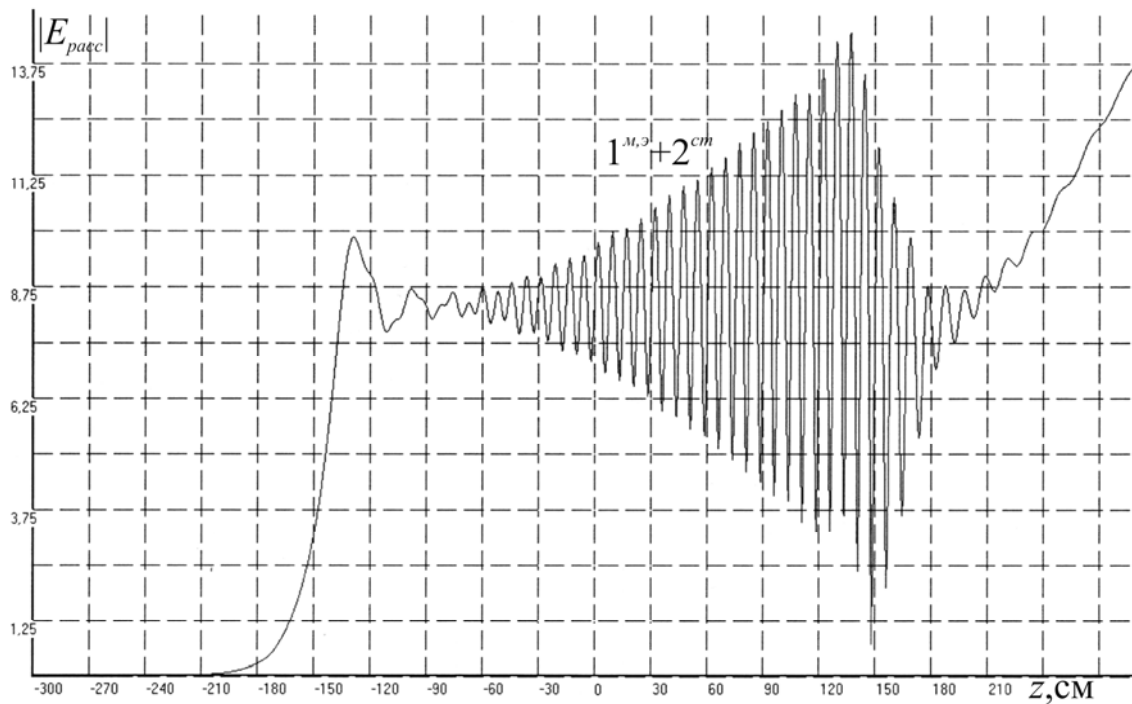


Рис. 3.27 б

Рис. 3.27 а, б. Зависимости поля $|E_{расс}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер со сквозным внутренним каналом вдоль оси z , когда:

а) структурный 2^{cm} и магнитный 1^m резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.12 е) при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,661$ см; $x = y = 0$ см; $(p) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; $(s, t) = \pm 5, \dots, \pm 20$,

b) структурный 2^{cm} и вырожденный внутренний $1^{M,3}$ резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.23 *e*) при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $\lambda_p^{M,3} = d = h = l = 7,4$ см; $x = y = 0$ см; $(p) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; $(s, t) = \pm 5, \dots, \pm 20$

Рассеиваемая волна на рис. 3.27 *a, b* движется из области $z < 0$.

Проведен анализ влияния дефекта в виде полости (рис. 3.28) на структуру внутреннего поля $|E_{расc}|$ простой кубической решетки сфер (рис. 3.29; 3.30). Численный анализ показывает, что перемещая полость по объему решетки можно влиять на структуру рассеянного поля не только внутри, но и вне решетки. Из рис. 3.30 следует, что влияние «следа» полости разного размера вне кристалла проявляется, в основном, в зоне Френеля.

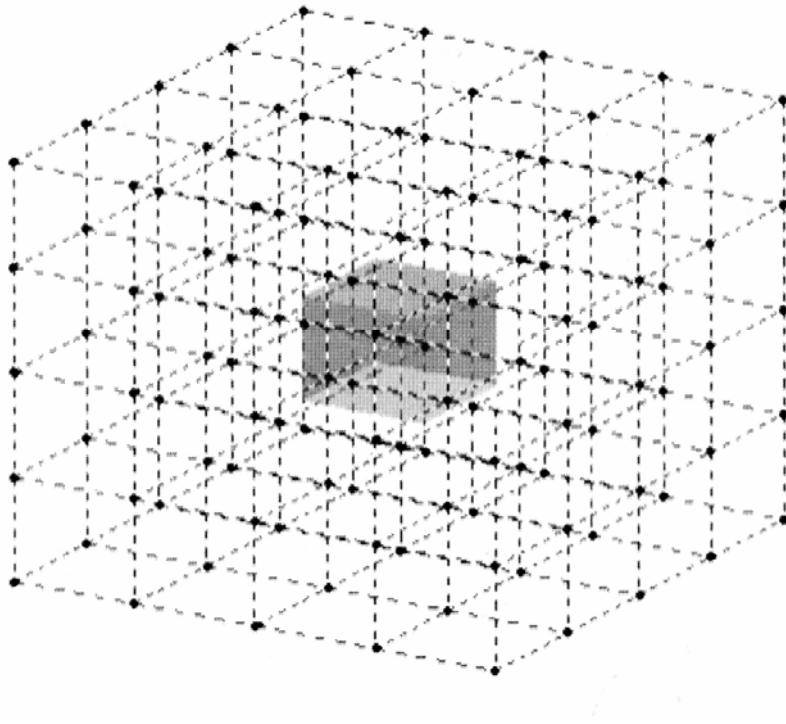


Рис. 3.28. Пространственная система узлов с полостью

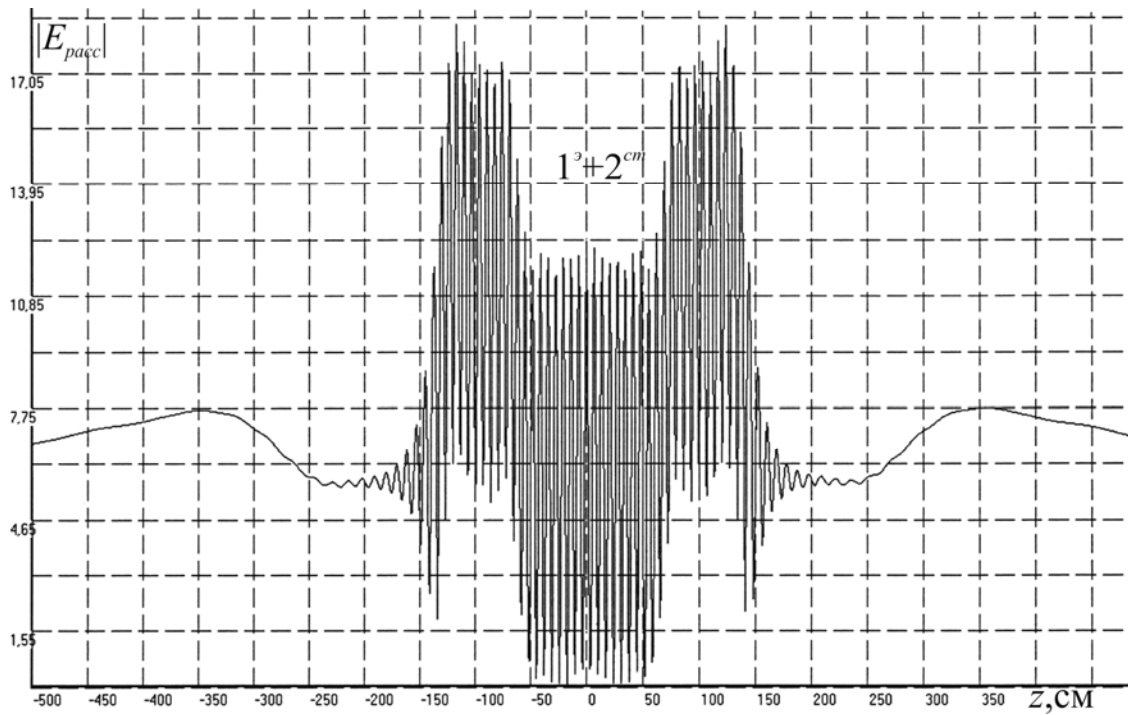


Рис. 3.29. Зависимости поля $|E_{расс}|$ (3.18), (3.1) кубической решетки сфер с внутренней полостью в центре кристалла, когда структурный 2^{cm} и электрический 1^o резонансы рассеяния совмещены друг с другом (рис. 3.17 b), от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $\lambda_p^o = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(p, s, t) = \pm 10, \dots, \pm 20$

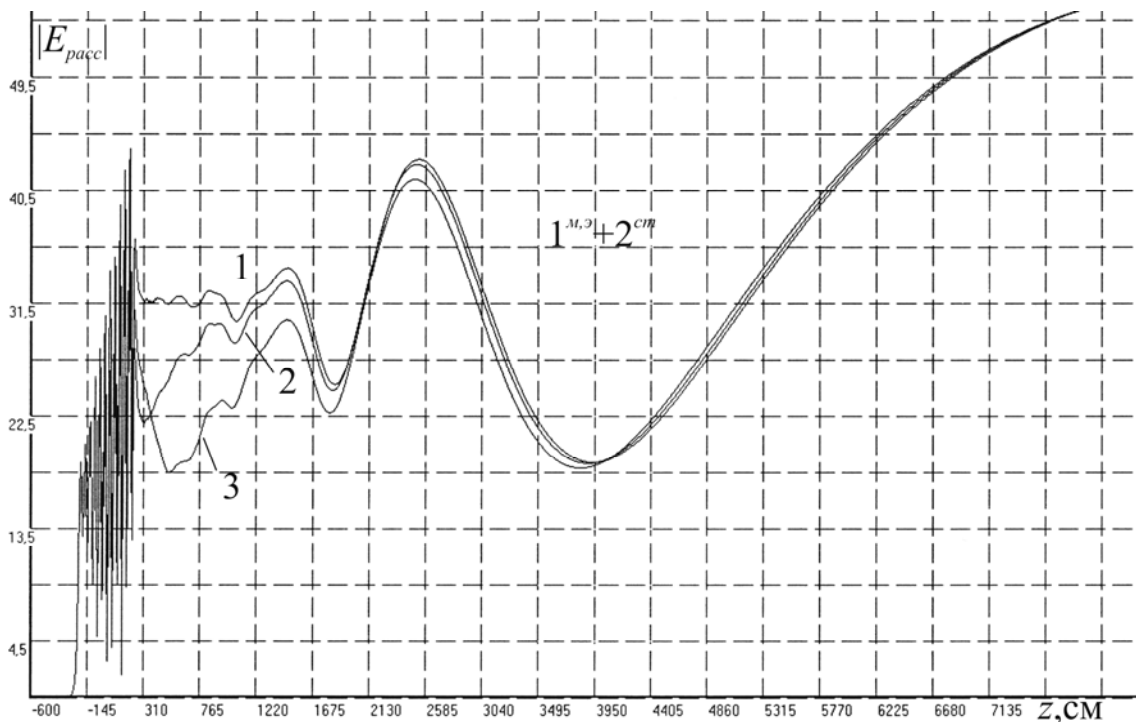


Рис. 3.30. Зависимости поля $|E_{расс}|$ (3.18), (3.1) вне кубической решетки сфер с разного размера полостью в зоне Френеля для совмещенного резонанса

$(1^z + 2^{cm})$ (рис. 3.24 e) от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $\lambda_p^{m,z} = d = h = l = 7,4$ см; $x = y = 0$ см; 1 кривая – $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$; 2 кривая – $(p, s, t) = \pm 6, \dots, \pm 30$ (полость); 3 кривая – $(p, s, t) = \pm 8, \dots, \pm 30$ (полость)

Рассеиваемая волна на рис. 3.29, 3.30 движется из области $z < 0$.

На свойства искусственного резонансного кристалла можно влиять, перемещая резонансные дефекты в виде отдельных сфер, фрагментов линейной, плоской и трехмерной решеток по объему кристалла.

В работе [74] приведены результаты изучения рассеяния плоской волны резонансным кристаллом с резонансным дефектом в виде фрагмента кубической решетки, который перемещался по внутреннему объему кристалла. В этом кристалле в сферах возбуждался резонанс магнитного типа, а в сферах дефекта резонанс электрического типа, которые совмещались со структурными резонансами магнитного и электрического типов решеток кристалла и дефекта. В месте совмещения возникала локальная область с объемноцентрированной решеткой.

Перемещая эту локальную область по объему кристалла, можно управлять рассеянным полем.

Исследовалось влияние размеров резонансного дефекта (рис. 3.31) в виде фрагмента кристаллической решетки $(p, s, t)_g$, помещенного в центре кристалла, где также возникала разного размера локальная область с объемноцентрированной решеткой. Здесь, как и в случае с полостью (рис. 3.30), влияние «следа» резонансного дефекта проявлялось вне кристалла, в основном, в зоне Френеля.

Полученные результаты численного исследования можно использовать для анализа электромагнитных процессов в резонансных метаматериалах и их неразрушающего контроля [74, 76, 86, 87, 91].

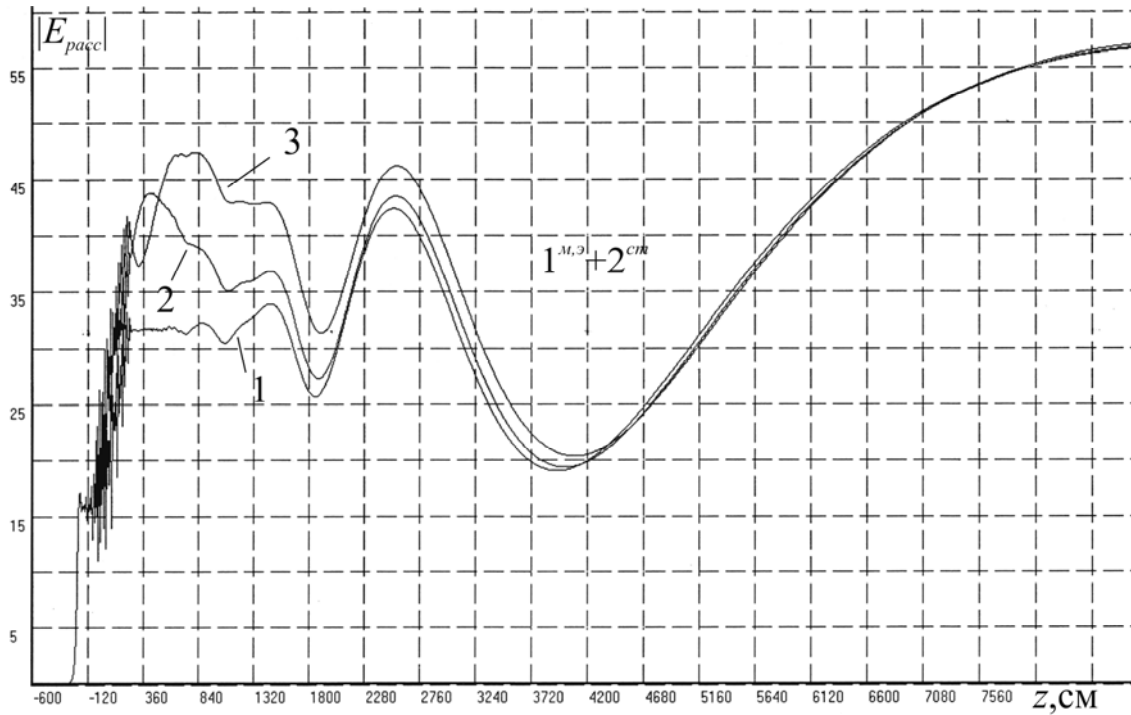


Рис. 3.31. Зависимости поля $|E_{racc}|$ (3.18), (3.1) вне резонансной кубической решетки сфер с резонансным дефектом в виде разного размера фрагмента кубической решетки для совмещенного в них резонанса $(1^{m,о} + 2^{cm})$ (рис. 3.24 e) в зоне Френеля, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $\lambda_p^{m,о} = d = h = l = 7,4$ см; $x = y = 0$ см; 1 кривая – $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 30$; 2 кривая – $(p, s, t)_g = 0, \pm 1, \dots, \pm 6$ (дефект); 3 кривая – $(p, s, t)_g = 0 \pm 1, \dots, \pm 8$ (дефект)

На рис. 3.31 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

3.3.8. Электромагнитная «невидимость» резонансного кубического кристалла, зеркало

В подразделе изучается возможность управления рассеянием электромагнитных волн резонансным кристаллом, когда в нем возбужден брэгговский структурный резонанс рассеяния (3.25), (3.26) [53]. Формируя узлы и пучности стоячей пространственной волны на гранях кристалла, можно управлять переизлученной кристаллом рассеиваемой волны, изменяя число сфер кристалла (p, s, t) в направлении осей x, y, z (рис. 3.1). Если для частного случая сформировать кристалл, когда $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 40$, и в области резонанса 2^{cm} возбудить пространственную стоячую волну с узлами на

всех гранях кристалла, то кристалл не будет переизлучать рассеиваемую волну в окружающее пространство, а рассеянное поле оказывается преимущественно сосредоточенным в объеме кристалла (рис. 3.32 *a, b*). В этом состоянии кристалл становится невидимым и ведет себя как трехмерный резонатор. Формируя пучности на гранях кристалла, перпендикулярных относительно осей x, y кристалла (рис. 3.1), можно заставить кристалл переизлучать волну в плоскости x, y или только в направлении осей x или y . В результате рассеиваемая волна не будет возвращаться назад по оси z и кристалл относительно источника рассеиваемой волны становится невидимым.

Если сформировать пучности на гранях кристалла перпендикулярных оси z для случая, когда $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 40$, то можно заставить кристалл отражать рассеиваемую волну в обратном направлении по оси $z < 0$, при отсутствии рассеяния по другим направлениям осей кристалла, и кристалл будет вести себя как отражающее зеркало (рис. 3.32 *c, d, e*).

Сопоставление графиков для $|E_{\text{расс}}|$ (3.18) и $|\omega_{\text{расс}}|, |\omega_{\text{полн}}|$ (1.20), (рис. 3.32) позволяет оценить рассеивающие особенности кристалла в окрестности структурного резонанса 2^{cm} .

Рассмотренные особенности кристалла существуют и в области других структурных резонансов.

Результаты изучения явления электромагнитной невидимости в области структурного резонанса 3^{cm} (рис. 3.6) (3.25), (3.26) для кристаллов в форме куба и октаэдра изложены в публикациях [89, 90].

Явление электромагнитной невидимости резонансного кристалла может использоваться при создании устройств, в которых применяются технологии «Stealth».

На рис. 3.32 *a, b* представлены зависимости (3.18), (1.20) для случая, когда кубический кристалл находится в состоянии электромагнитной невидимости.

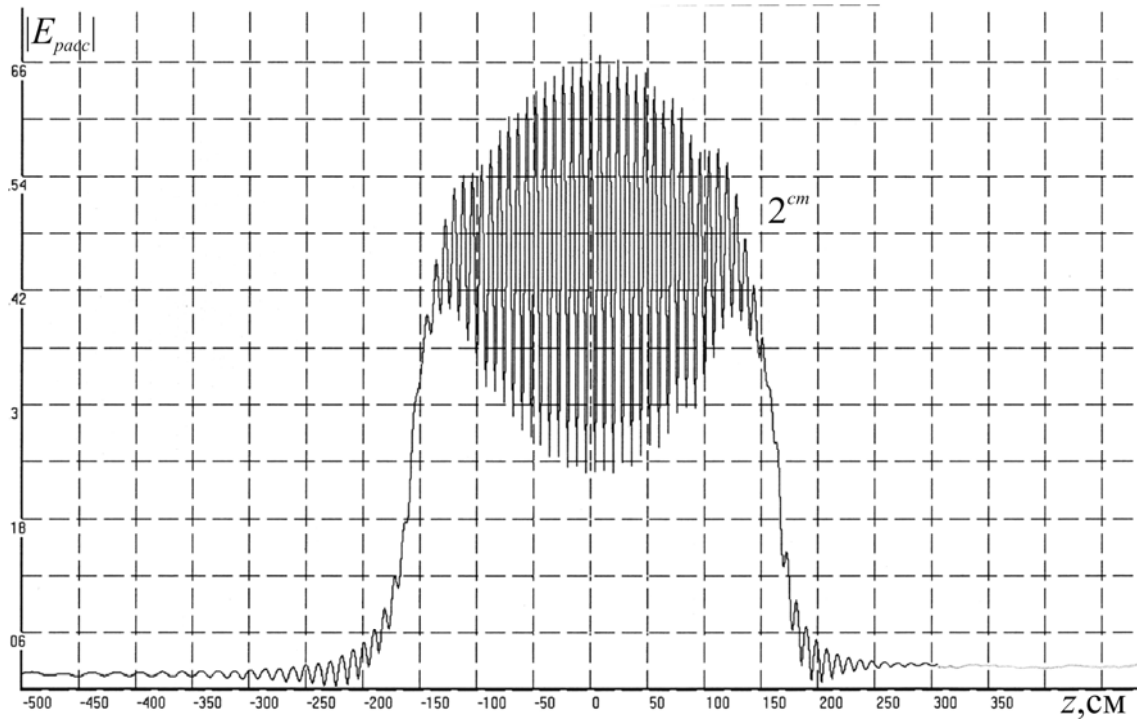


Рис. 3.32 а

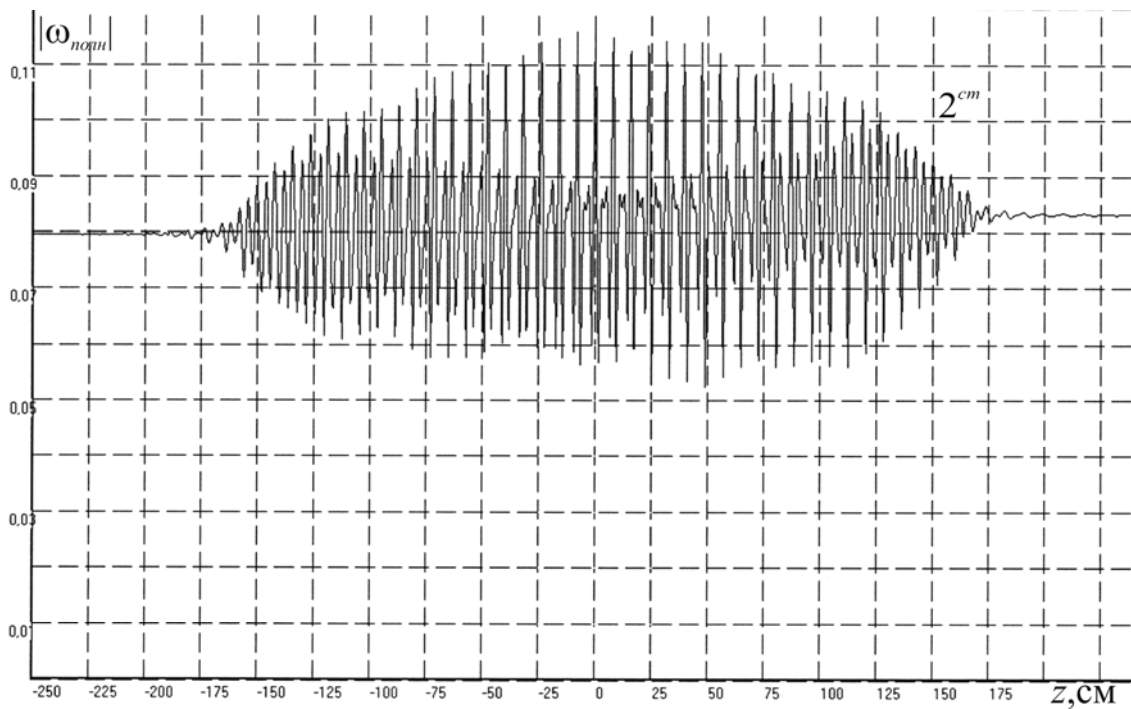


Рис 3.32 б

На рис. 3.32 *c, d, e* представлены зависимости (3.18), (1.20), для случая, когда кубический кристалл ведет себя как отражающее зеркало.

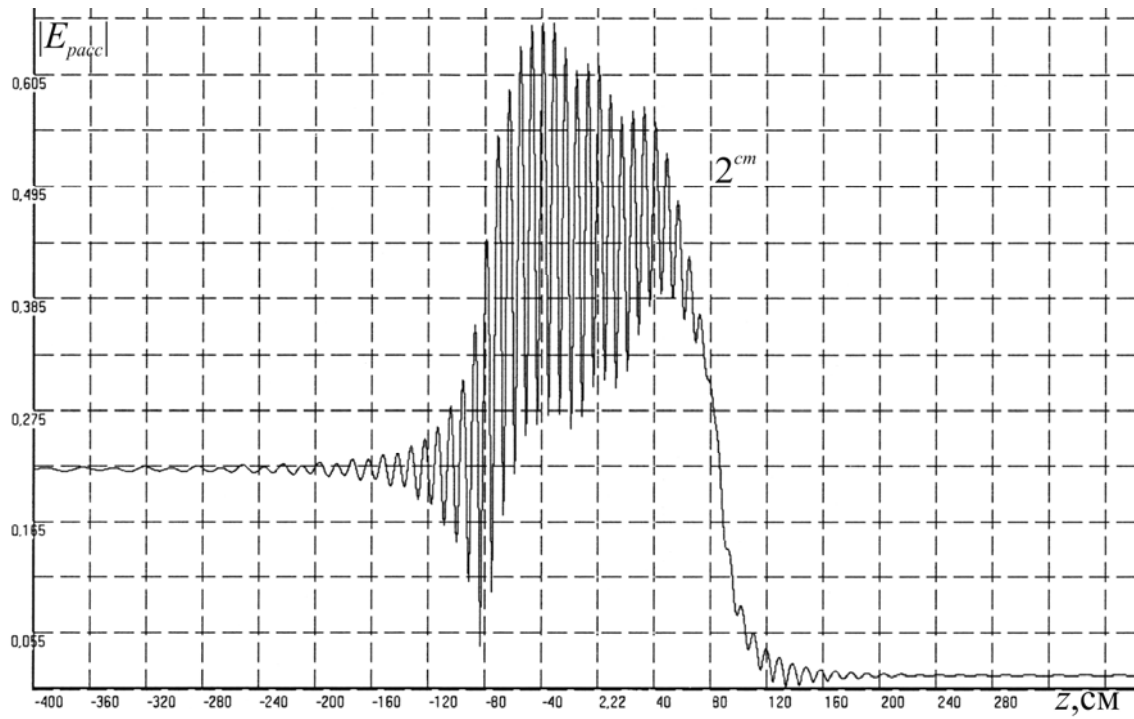


Рис. 3.32 *c*

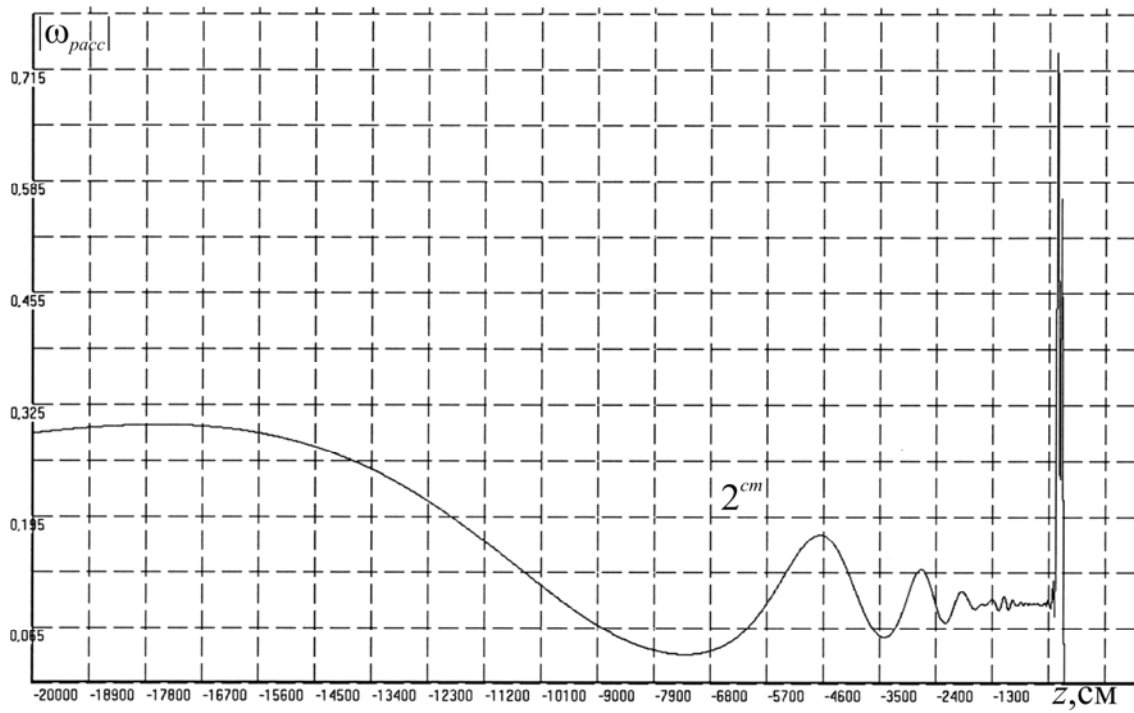


Рис. 3.32 *d*

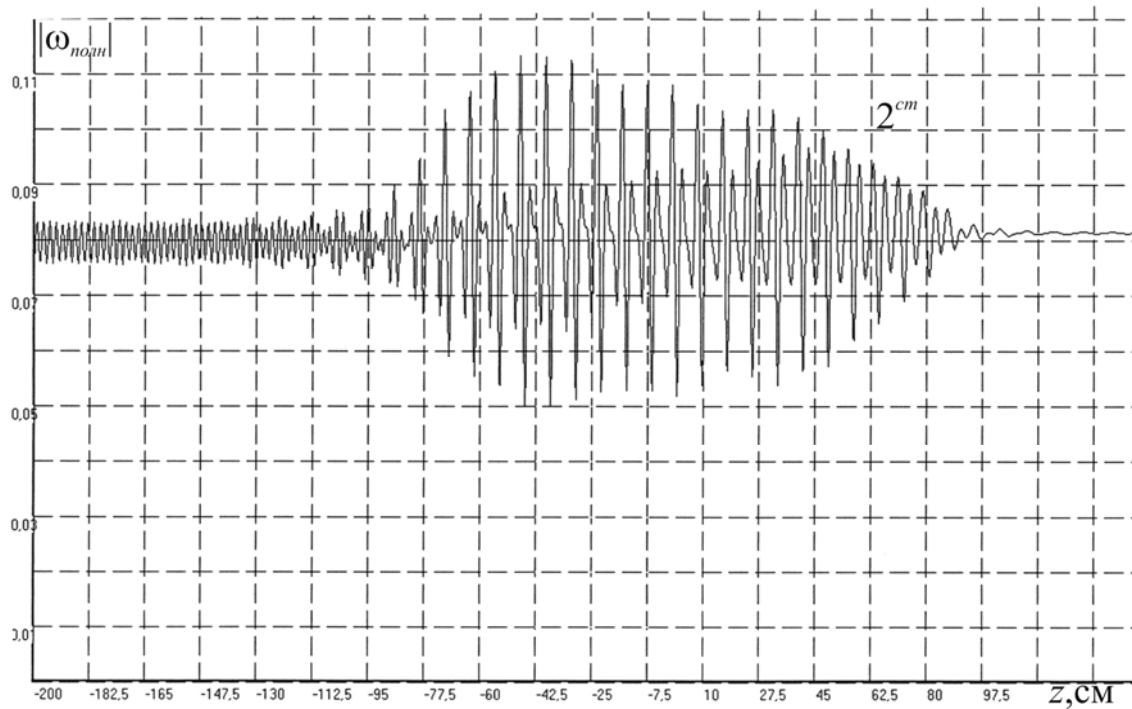


Рис. 3.32 e

Рис. 3.32 a, b, c, d, e. Зависимости поля $|E_{расс}|$ (3.18), (3.1) и $|\omega_{расс}|$, $|\omega_{полн}|$ (1.20) внутри и вне кубической решетки сфер в окрестности резонанса 2^{cm} , когда в кристалле возбуждена стоячая волна, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $d = h = l = 7,9$ см для случаев:

$$a, b) p = 0, \pm 1, \dots, \pm 20; (s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 40,$$

$$c, d, e) p = 0, \pm 1, \dots, \pm 10; (s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 40$$

На рис. 3.32 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

3.4 Рассеяние электромагнитных волн резонансным кристаллом с кубической объемноцентрированной решеткой из малых магнитодиэлектрических сфер

Изучалась кубическая объемноцентрированная решетка, составленная из двух простых кубических решеток, в каждой из которых возбуждался

совмещенный резонанс $(1^m + 2^{cm})$ и $(1^p + 2^{cm})$, и в результате в кристалле формировался резонанс $(1^m + 1^p + 2^{cm})$ вида [75, 78].

Для диэлектрической объемноцентрированной решетки с совмещенным резонансом $(1^m + 1^p + 2^{cm})$ на рис. 3.33 и рис. 3.34 представлены дисперсионная зависимость для $|E_{расc}|$ и зависимости, характеризующие структуру поля $|E_{расc}|$ внутри и вне решетки в зоне Френеля и Фраунгофера.

Как следует из рис. 3.34 *c, d* с резонансом $(1^m + 1^p + 2^{cm})$ связано практически полное прохождение падающего на кристалл излучения. Аналогичная ситуация возникает и в случае рассеяния волн на решетке, в которой возбужден совмещенный резонанс (рис. 3.23 *e*; 3.24 *e*), что связано с похожестью механизмов рассеяния волн для этих двух случаев.

Численное исследование показывает, что подобными свойствами обладает и объемноцентрированная решетка, составленная из диэлектрических и магнитных сфер (рис. 3.35 *a*). Если в этой решетке создать сквозной внутренний канал, то структура поля $|E_{расc}|$ в нем будет похожа на структуру поля в решетке с возбужденным в ней резонансом $(1^{m,p} + 2^{cm})$ (рис. 3.27 *b*), что также связано с похожестью механизмов рассеяния поля.

На рис. 3.36 *a, b, c, d* представлена структура поля $|E_{расc}|$, когда на гранях кубической объемноцентрированной решетки сформированы узлы стоячей пространственной волны в окрестности резонанса рассеяния 2^{cm} для двух случаев с разным числом сфер (p, s, t) в направлении осей x, y, z (рис. 3.1). Здесь переизлученное поле за пределами решетки мало по сравнению с полем рассеяния, сосредоточенным внутри кристалла и кристалл ведет себя как трехмерный резонатор. Формируя узлы и пучности стоячей пространственной волны на гранях кристалла можно управлять переизлучением кристаллом рассеиваемой волны и использовать эту возможность для создания отражающих зеркал и условий для электромагнитной невидимости кристалла.

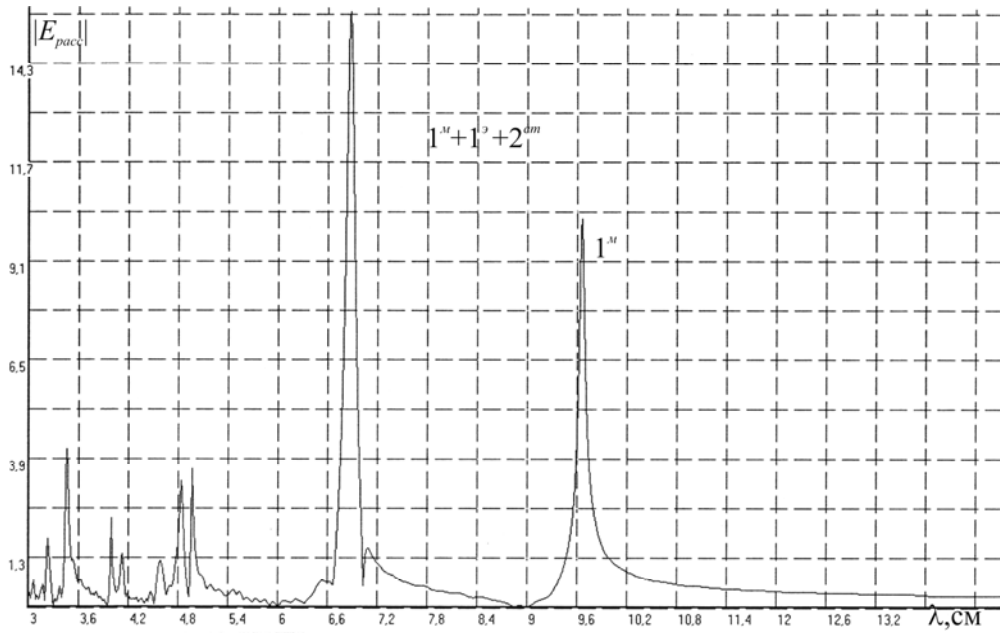


Рис. 3.33. Дисперсионная зависимость поля $|E_{pass}|$ кубической объемноцентрированной решетки, составленной из двух простых кубических решеток с резонансами $(1^M + 2^{cm})$ и $(1^S + 2^{cm})$ от изменения длины волны λ при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_1 = 95$; $\epsilon'_2 = 48,9$; $\mu'_{1,2} = 1$; $d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = z = 1,72$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

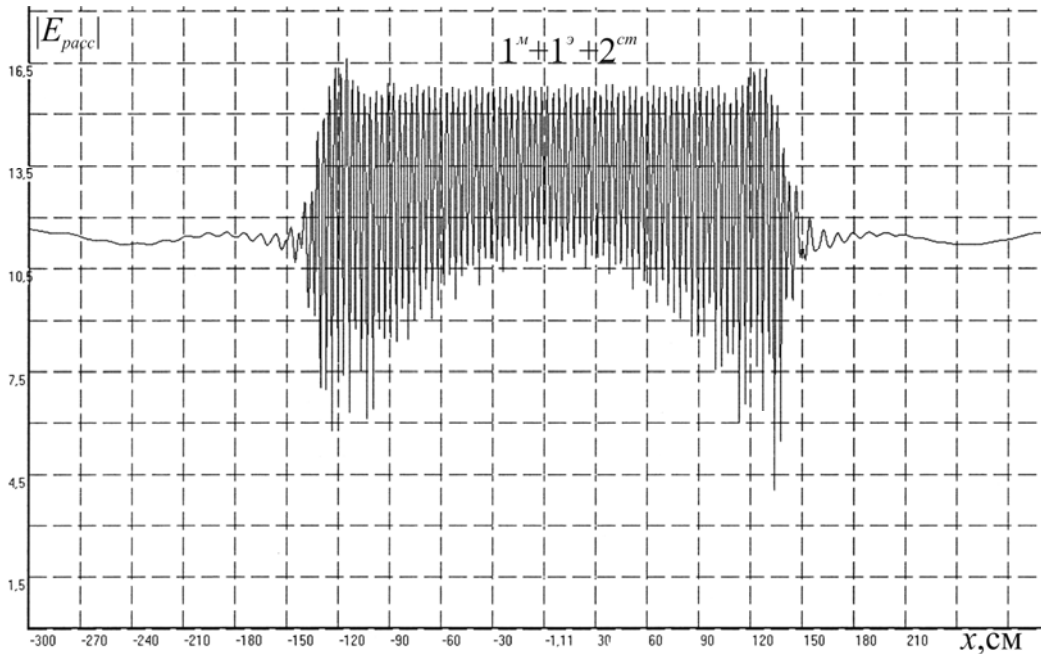


Рис. 3.34 а. Зависимость поля $|E_{pass}|$ кубической объемноцентрированной решетки сфер, составленной из двух простых кубических решеток с совмещенными резонансами $(1^M + 2^{cm})$ и $(1^S + 2^{cm})$ от изменения координаты точки наблюдения поля x при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_1 = 95$; $\epsilon'_2 = 48,9$; $\mu'_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $y = z = 1,72$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

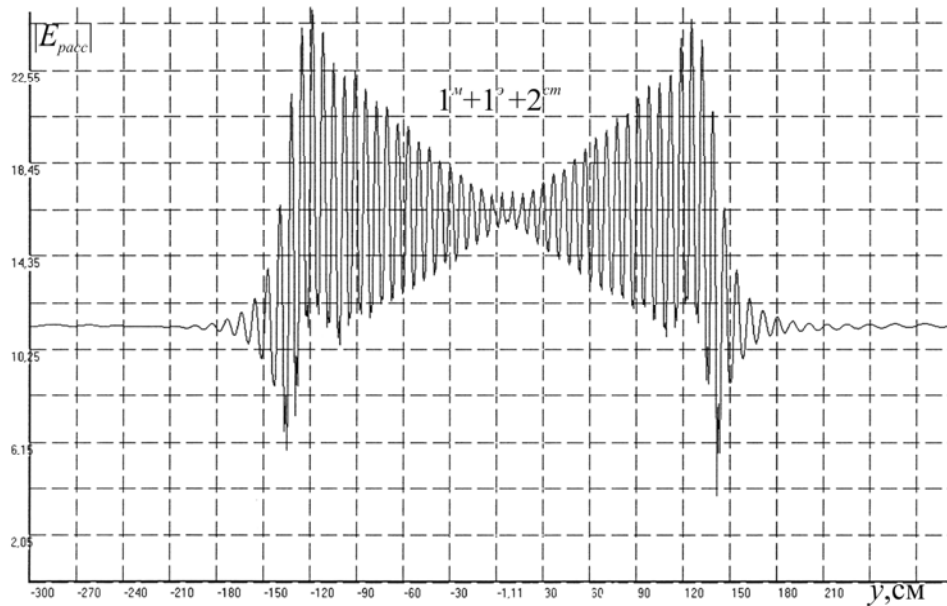


Рис. 3.34 б. Зависимость поля $|E_{racc}|$ внутри кубической объемноцентрированной решетки сфер, составленной из двух простых кубических решеток с совмещенными резонансами $(1^m + 2^{cm})$ и $(1^p + 2^{cm})$ от изменения координаты точки наблюдения поля y при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\varepsilon_1 = 95$; $\varepsilon_2 = 48,9$; $\mu_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = z = 1,72$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

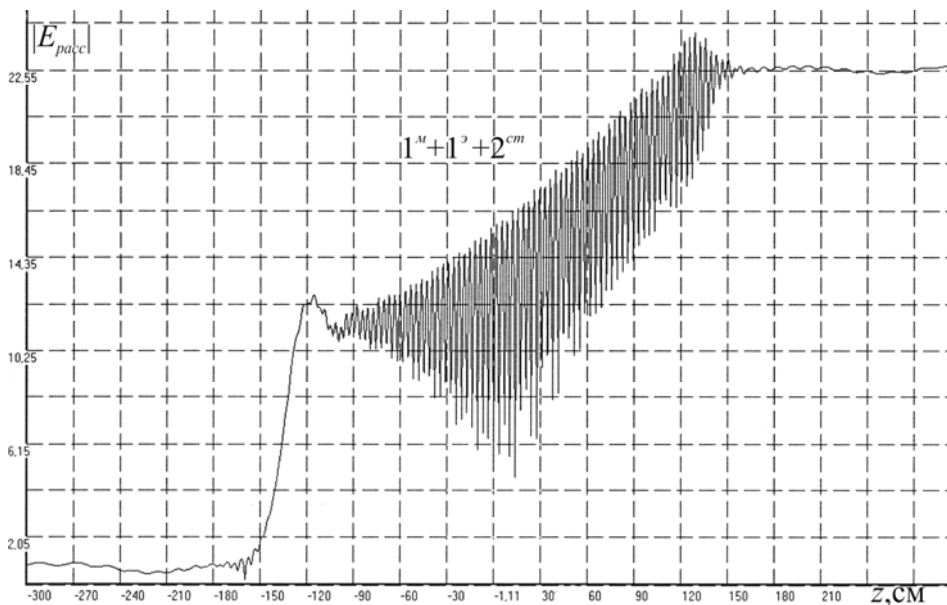


Рис. 3.34 с. Зависимость поля $|E_{racc}|$ внутри кубической объемноцентрированной решетки сфер, составленной из двух простых кубических решеток с совмещенными резонансами $(1^m + 2^{cm})$ и $(1^p + 2^{cm})$ от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\varepsilon_1 = 95$; $\varepsilon_2 = 48,9$; $\mu_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 1,72$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

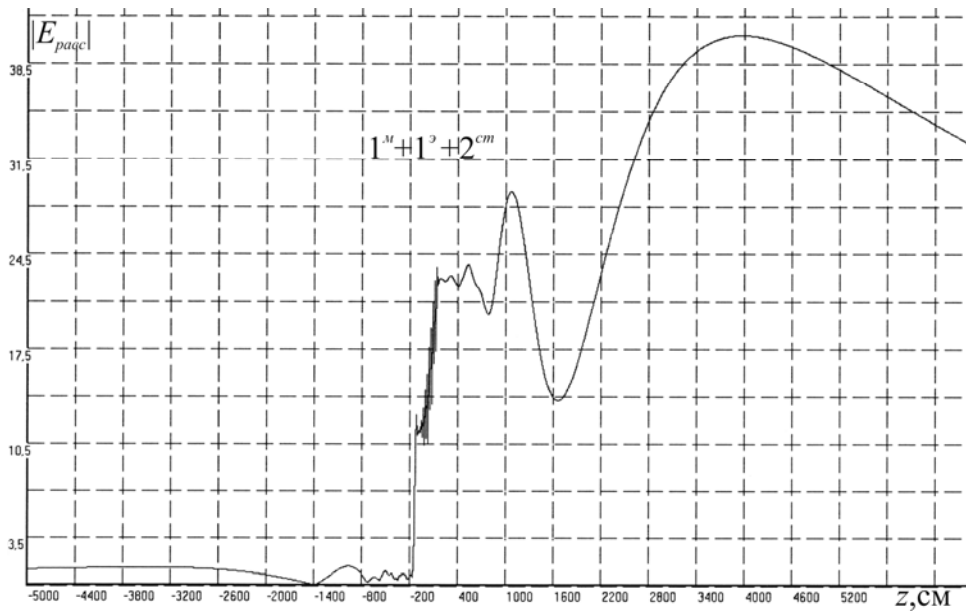


Рис. 3.34 d. Зависимость поля $|E_{racc}|$ внутри кубической объемноцентрированной решетки сфер, составленной из двух простых кубических решеток с совмещенными резонансами $(1^M + 2^{cm})$ и $(1^O + 2^{cm})$ от изменения координаты точки наблюдения поля z вне решеток в зонах Френеля и Фраунгофера при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon_1 = 95$; $\epsilon_2 = 48,9$; $\mu_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 1,72$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

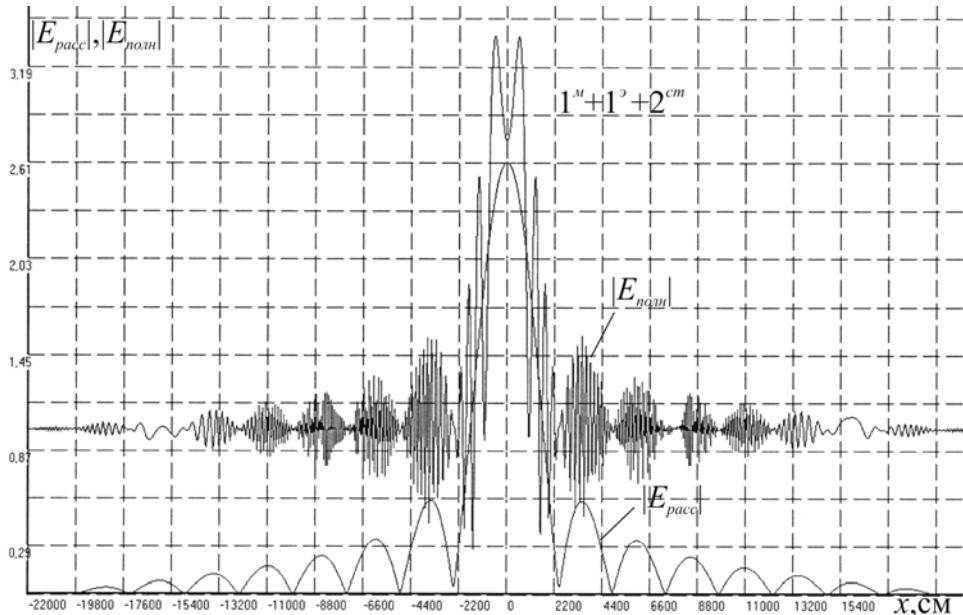


Рис. 3.34 e. Зависимость поля $|E_{racc}|$ и $|E_{полн}|$ (3.18), (1.4) кубической объемноцентрированной решетки сфер, составленной из двух простых кубических решеток с совмещенными резонансами $(1^M + 2^{cm})$ и $(1^O + 2^{cm})$ в зоне Фраунгофера от изменения координаты точки наблюдения поля x , когда $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon_1 = 95$; $\epsilon_2 = 48,9$; $\mu_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $y = 1,72$ см; $z = 100000$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

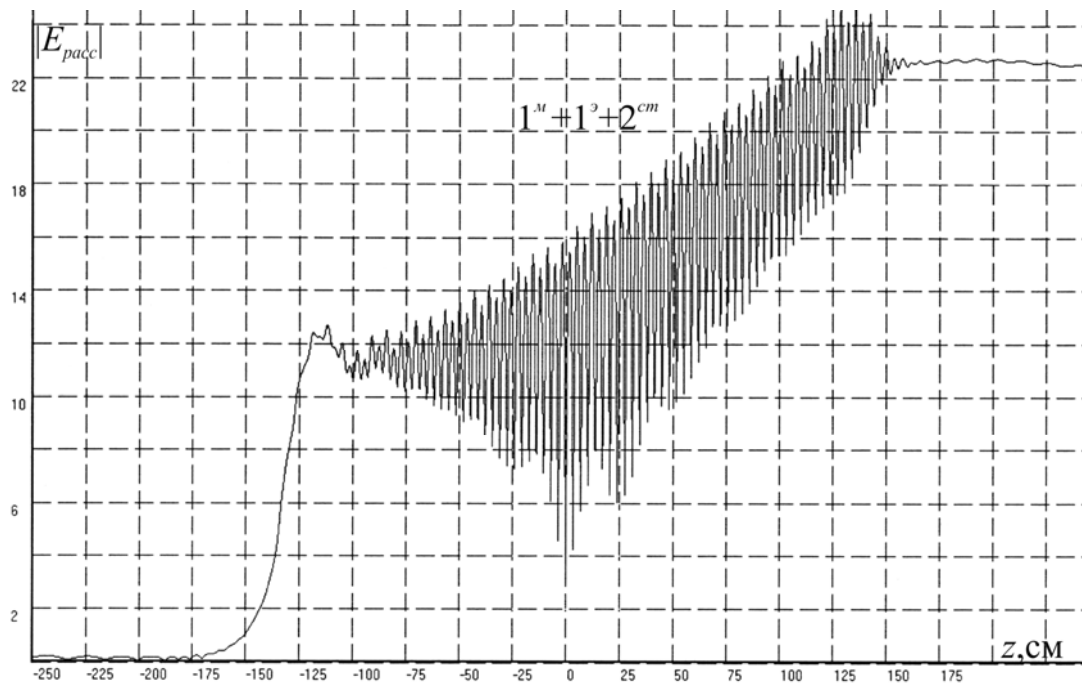


Рис. 3.35 а

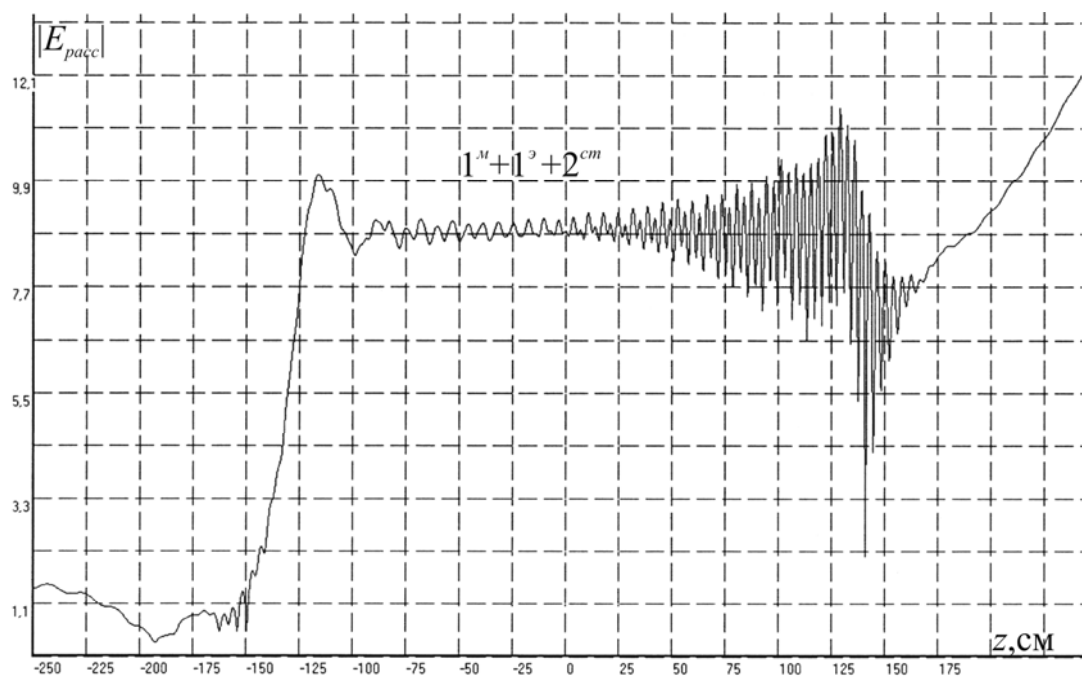


Рис. 3.35 б

Рис. 3.35 а, б. Зависимость поля $|E_{pass}|$ внутри кубической объемноцентрированной решетки сфер, составленной из двух простых кубических решеток с совмещенными резонансами $(1^m + 2^{cm})$ и $(1^p + 2^{cm})$ от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon_1' = 95$; $\mu_1' = 1$; $\epsilon_2' = 1$; $\mu_2' = 95$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 1,72$ см; когда

а) $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

б) $p_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; $(s, t)_{1,2} = \pm 5, \dots, \pm 20$ – сквозной канал

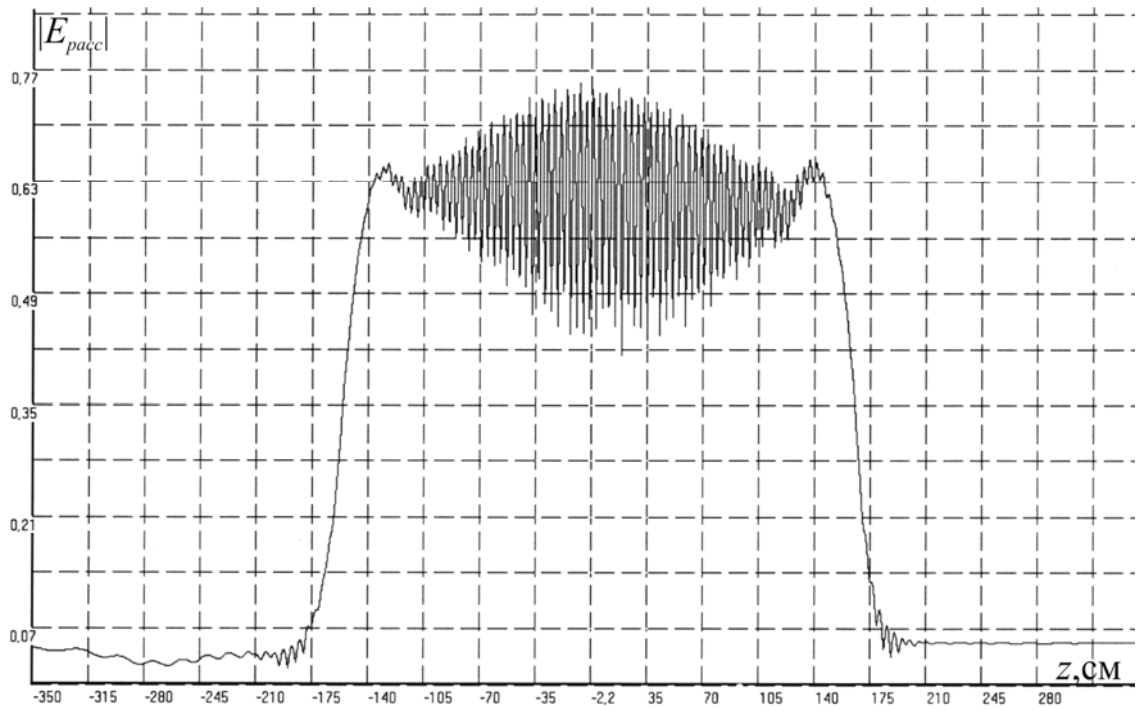


Рис. 3.36 а

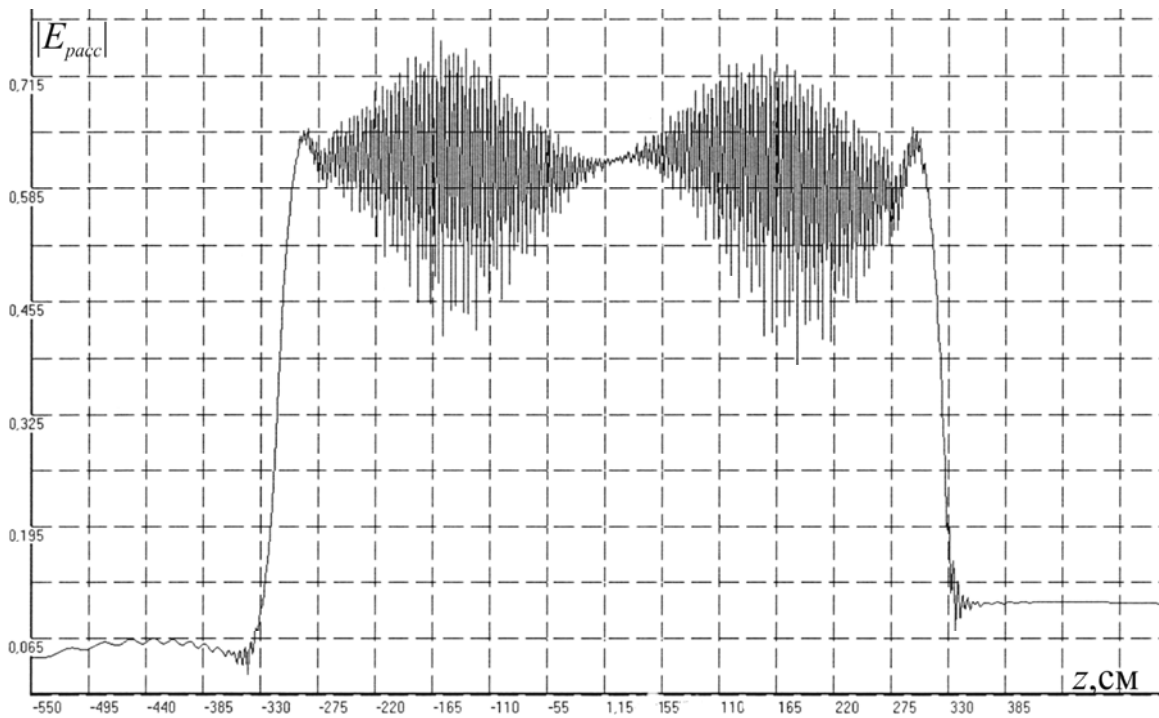


Рис. 3.36 б

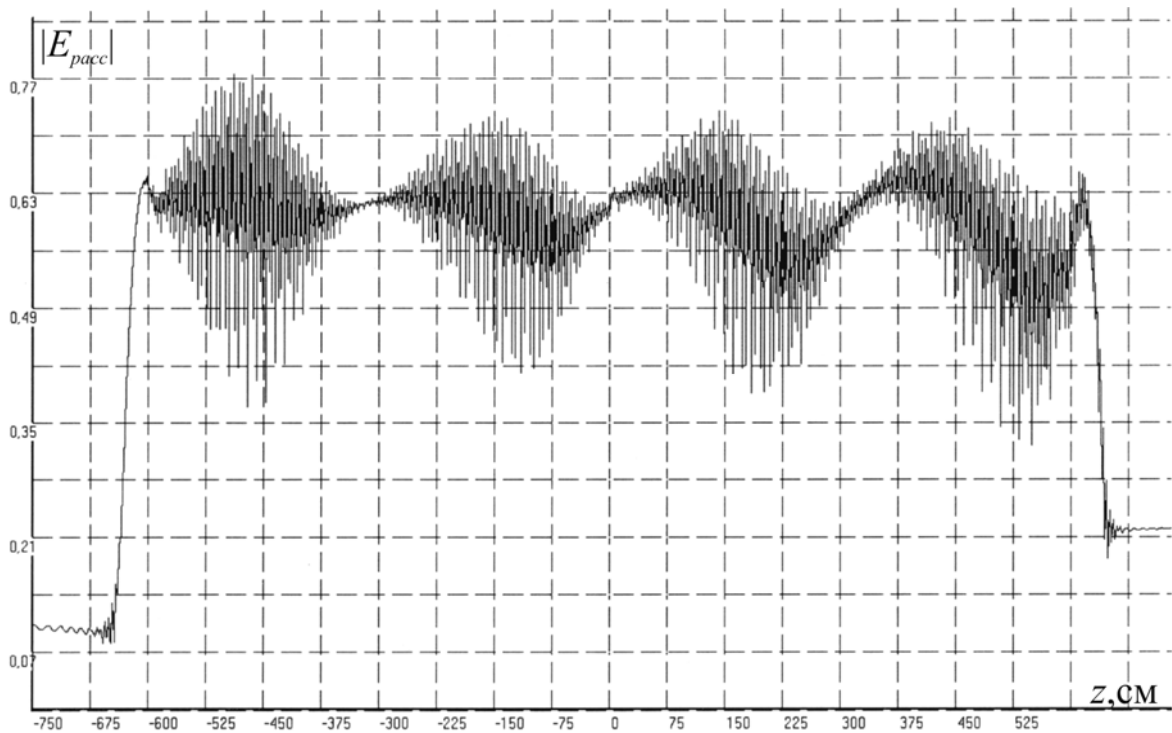


Рис. 3.36 с

Рис. 3.36 а, б, с. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ кубической объемноцентрированной решетки сфер в окрестности резонанса 2^{cm} (рис. 3.32 а), когда в кристалле возбуждена стоячая волна, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_{1,2} = 95$; $\mu'_{1,2} = 1$; $\lambda_p^{cm} = 8$ см; $(d = h = l)_{1,2} = 7,9$ см; $x = y = 2$ см:

а) $p_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; $(s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

б) $p_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 40$; $(s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$,

с) $p_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 80$; $(s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

3.5. Рассеяние электромагнитных волн на двух резонансных кубических кристаллах из малых магнитодиэлектрических сфер

Проведено исследование рассеяния электромагнитного поля системой двух разнесенных в пространстве простых кубических решеток из сфер (рис. 3.37). Здесь Δz – расстояние по оси z между внутренними гранями системы двух кубических кристаллов.

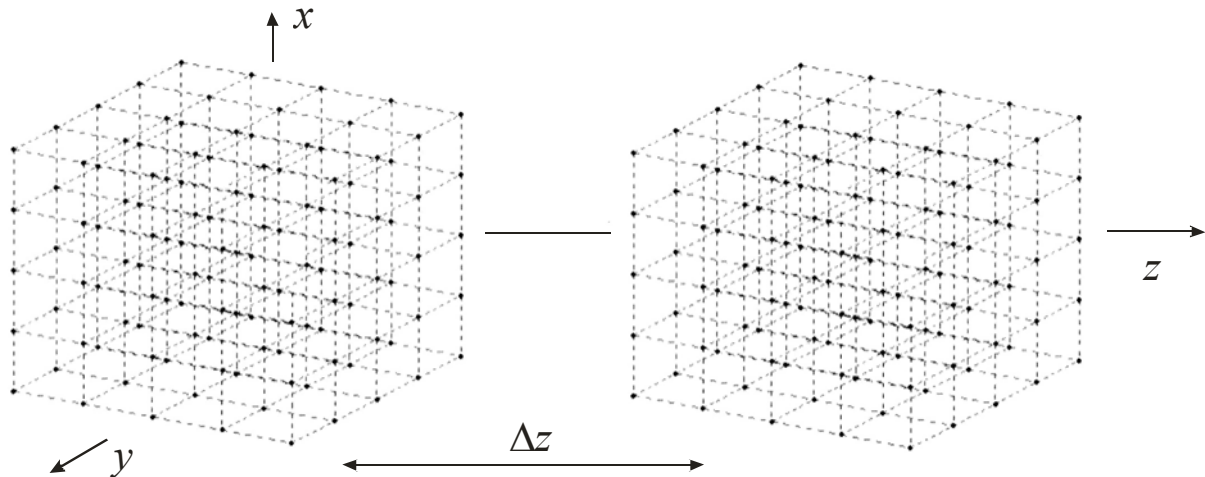


Рис. 3.37. Система двух кубических решеток сфер

На рис. 3.38 изображены графические зависимости для рассеянного электромагнитного поля, когда в двух ограниченных кубических решетках из сфер возбужден совмещенный резонанс $(1^p + 2^{cm})$. А на рис. 3.39 представлены аналогичные зависимости, когда в кубических решетках возбуждены совмещенные резонансы $(1^p + 2^{cm})$ и $(1^m + 2^{cm})$, положение которых вдоль оси z (рис. 3.37) меняется.

Используя интерференцию рассеянных волн на пространственной системе кубических кристаллов можно формировать необходимую структуру рассеянного поля внутри кристаллов, между ними и в зонах Френеля и Фраунгофера вне этой системы кристаллов [20].

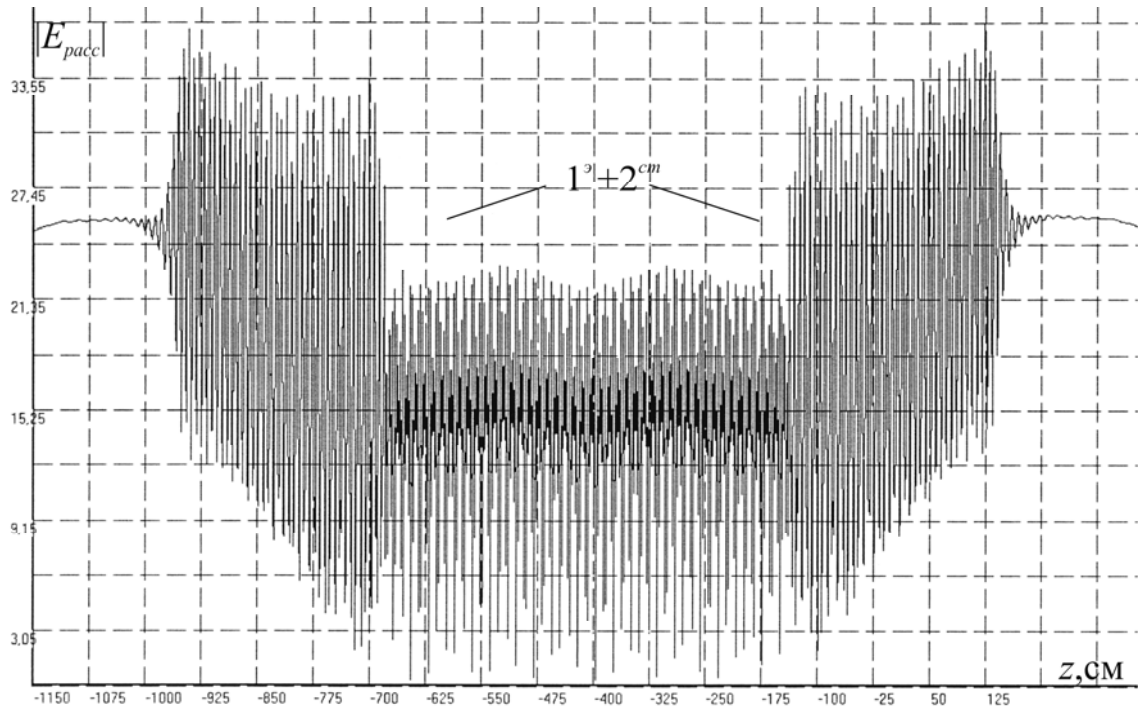


Рис. 3.38 а

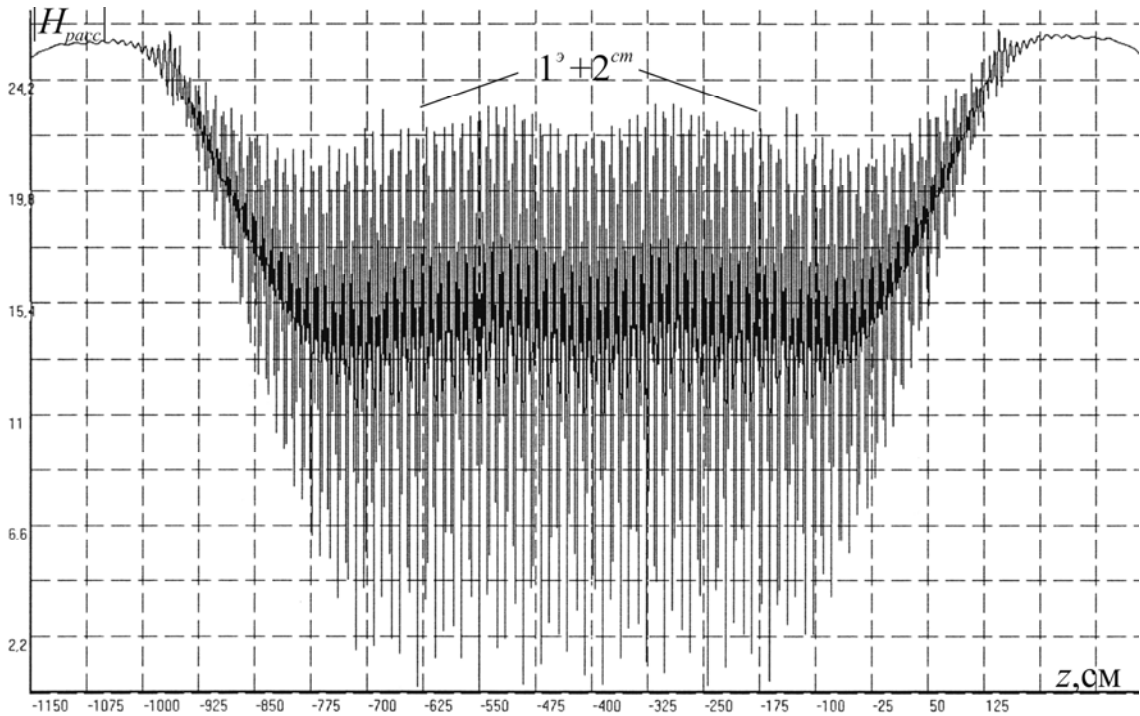


Рис. 3.38 б

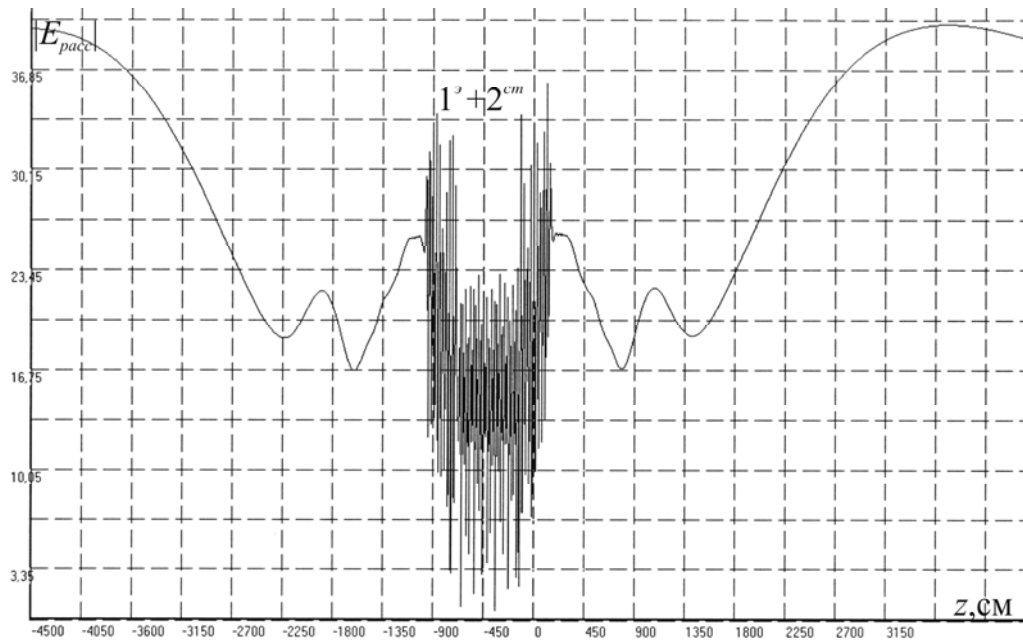


Рис. 3.38 с

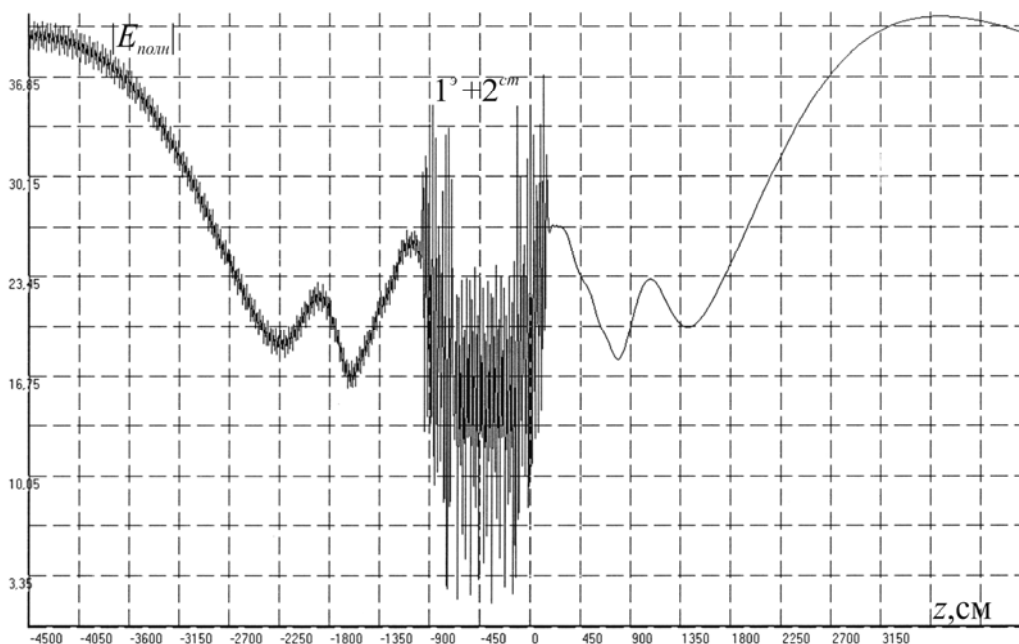


Рис. 3.38 d

Рис. 3.38 a, b, c, d. Зависимости поля $|E_{расc}|$, $|H_{расc}|$ (3.18) и $|E_{полн}|$ (1.4) для двух разнесенных по оси z кубических решеток (рис. 3.37), (3.1), в которых возбуждены совмещенные резонансы $(\Gamma^1 + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\epsilon'_{1,2} = 95$; $\mu'_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; расстояние по оси z между решетками $\Delta z = 550$ см для случаев:

a, b) внутри и между решетками; c, d) вне решеток в зонах Френеля и Фраунгофера

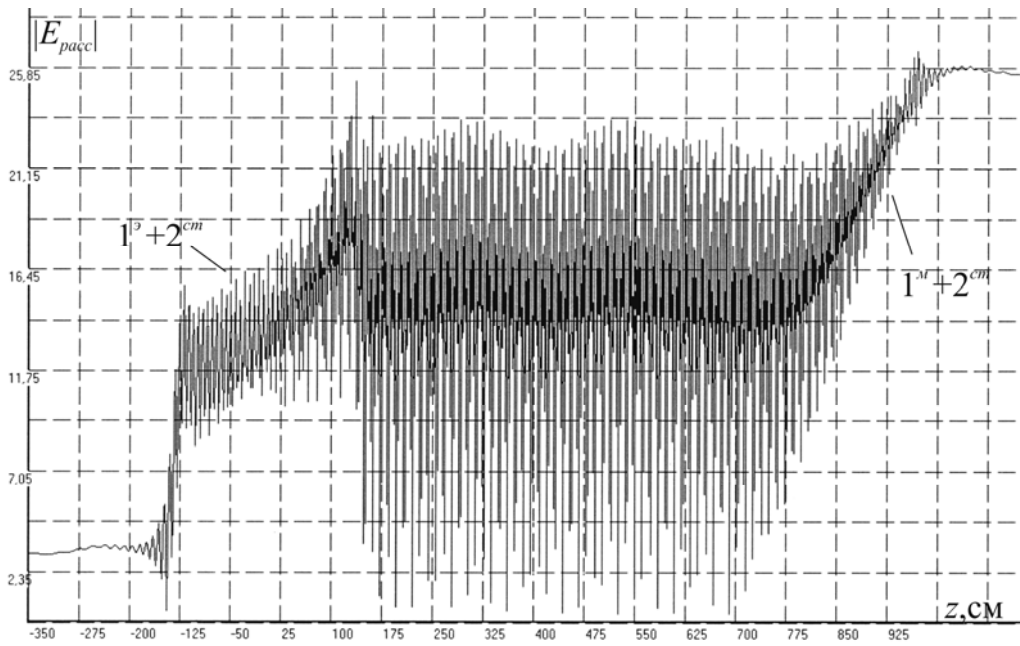


Рис. 3.39 а

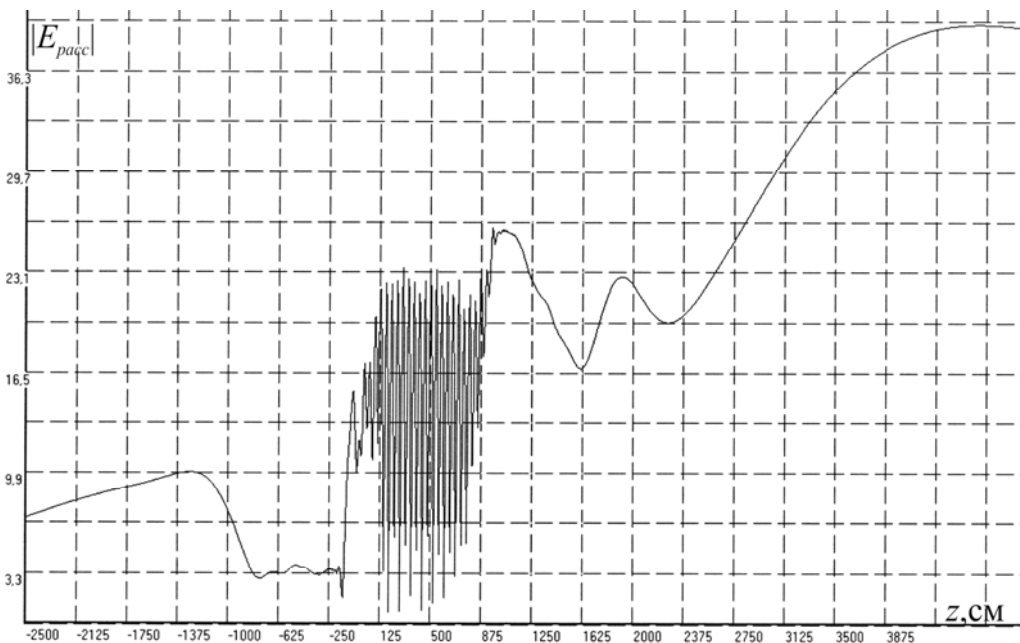


Рис. 3.39 б

Рис. 3.38 а, б. Зависимости поля $|E_{расс}|$ (3.18) для двух разнесенных по оси z кубических решеток (рис. 3.37), (3.1), в которых возбуждены совмещенные резонансы $(1^p + 2^{cm})$ и $(1^m + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon_1 = 95$; $\epsilon_2 = 48,9$; $\mu_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; расстояние по оси z между решетками $\Delta z = 550$ см для случаев:

а) внутри и между решетками, б) вне решеток в зонах Френеля и Фраунгофера

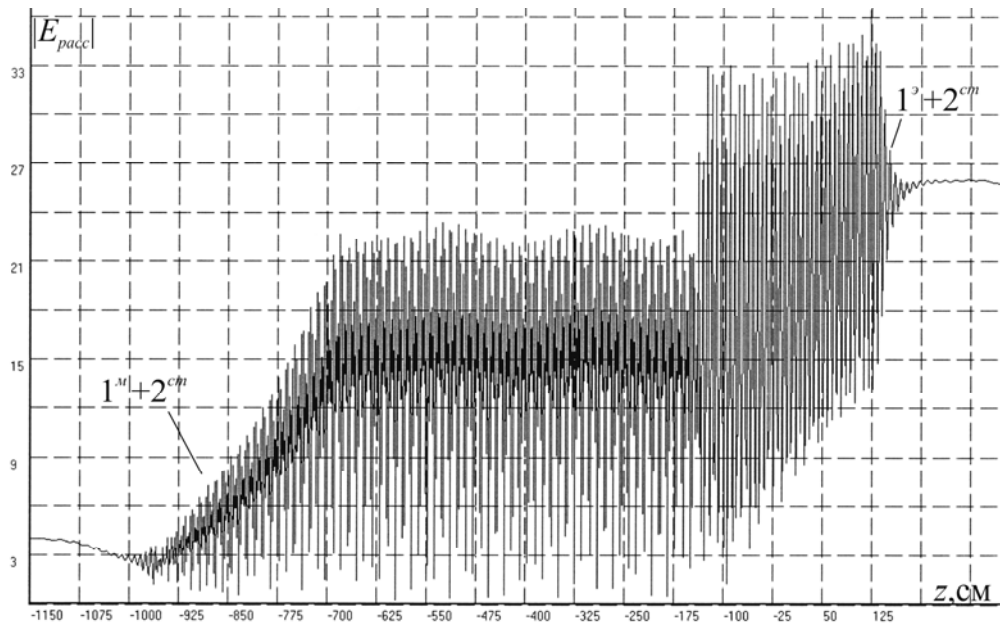


Рис. 3.39 *c*

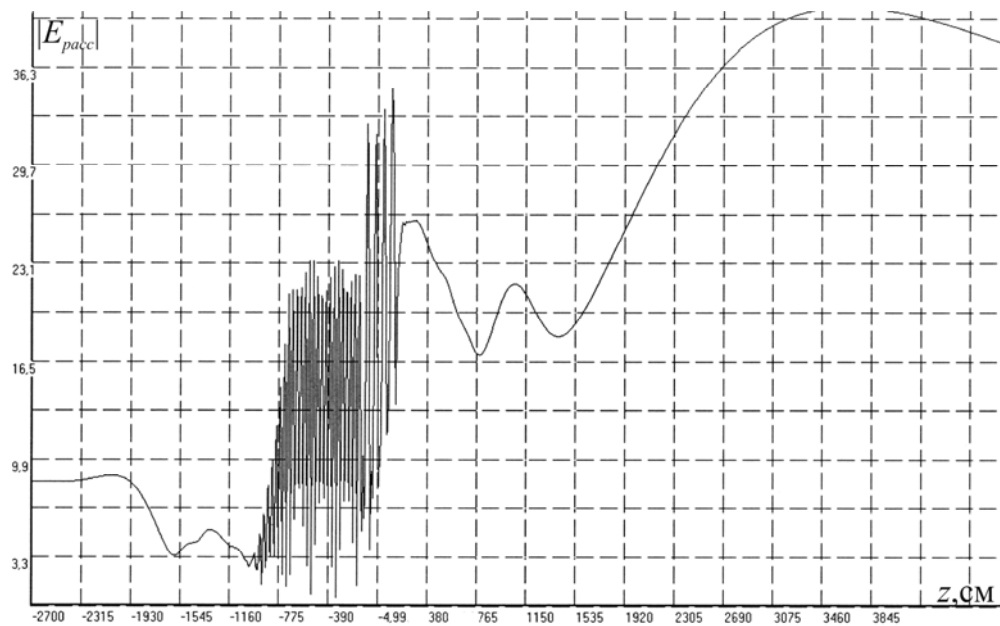


Рис. 3.38 *d*

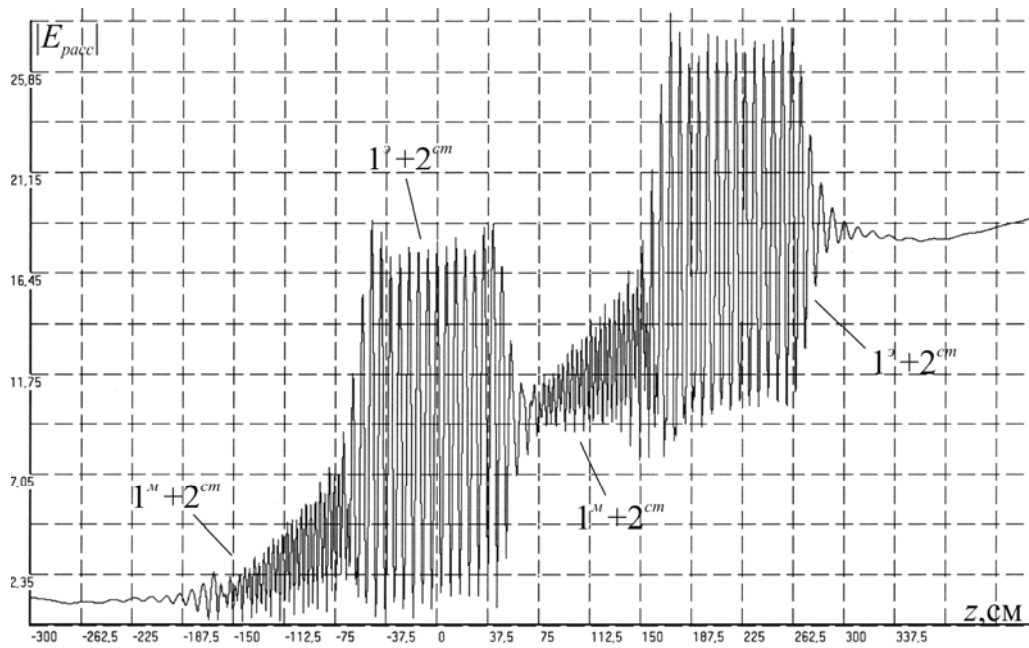
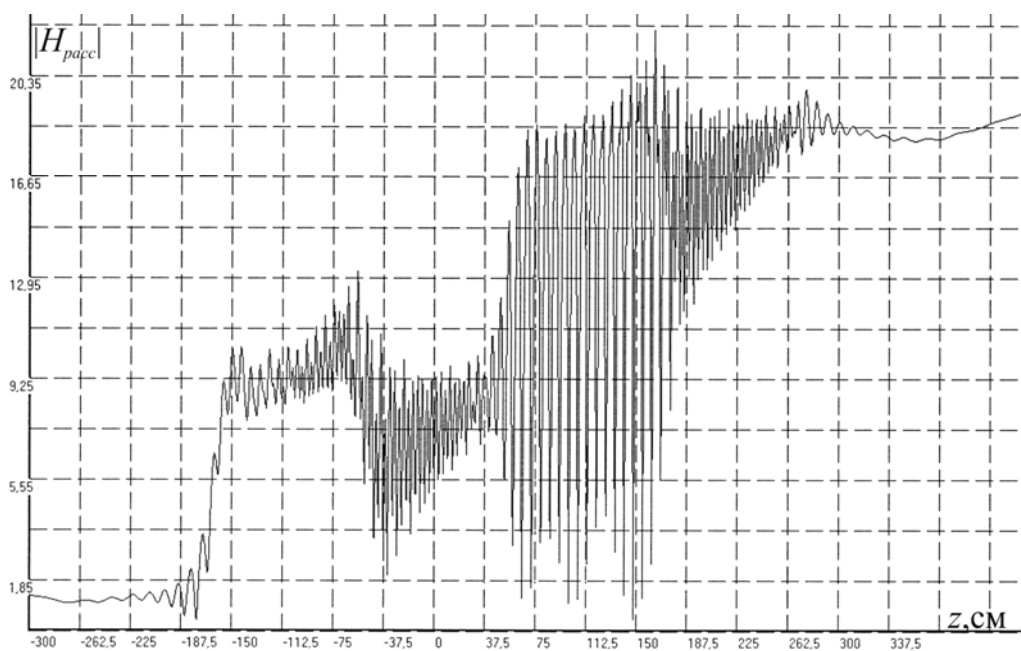
Рис. 3.38 *c, d*. Зависимости поля $|E_{расc}|$ (3.18) для двух разнесенных по оси z кубических решеток (рис. 3.37), (3.1), в которых возбуждены совмещенные резонансы $(1^m + 2^m)$ и $(1^o + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_1 = 95$; $\epsilon'_2 = 48,9$; $\mu'_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(p, s, t)_{1,2} = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; расстояние по оси z между решетками $\Delta z = 550$ см для случаев:

a, b) внутри и между решетками, *c, d*) вне решеток в зонах Френеля и Фраунгофера

На рис. 3.38; 3.39 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

3.6. Рассеяние электромагнитных волн на многослойных резонансных кубических структурах из малых магнитоэлектрических сфер

Численно изучались рассеянные поля многослойной структуры, составленной из перемежающихся слоев решеток сфер, в которых возбуждались совмещенные резонансы $(1^m + 2^{cm})$ и $(1^z + 2^{cm})$ (рис. 3.40 *a, b, c*).

Рис. 3.40 *a*Рис. 3.40 *b*

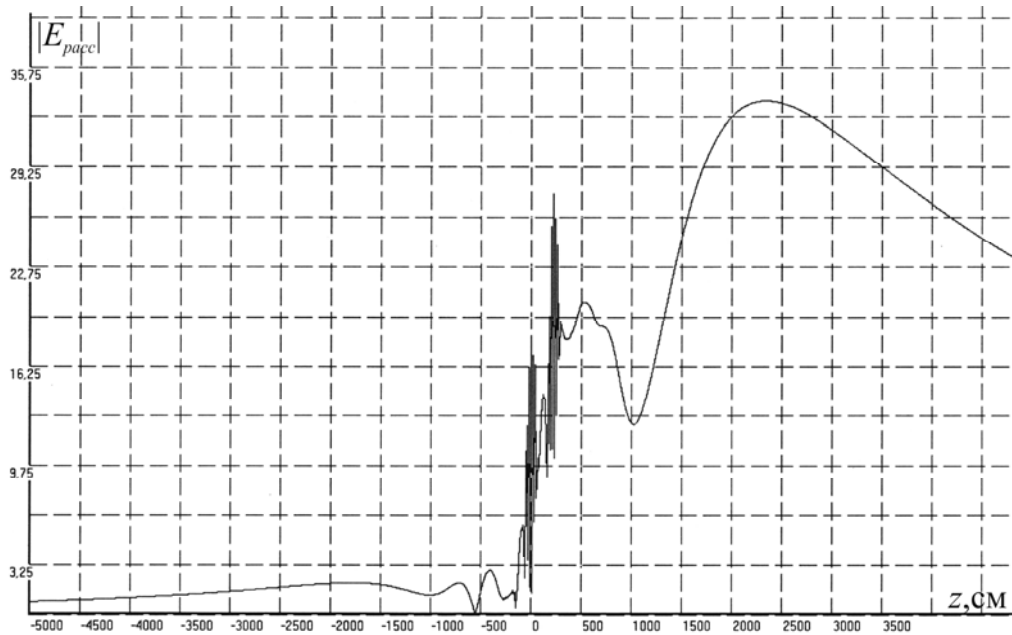


Рис. 3.40 с

Рис. 3.38 *a, b, c*. Зависимости поля $|E_{расс}|$, $|H_{расс}|$ для многослойной решетки сфер (3.18), (3.1), состоящей из четырех слоев, в которых возбуждены совмещенные резонансы $(1^m + 2^{cm})$ и $(1^s + 2^{cm})$ от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a_{1,2} = 0,5$ см; $\epsilon'_1 = 95$; $\epsilon'_2 = 48,9$; $\mu'_{1,2} = 1$; $\lambda_p = d_{1,2} = h_{1,2} = l_{1,2} = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 15$; ширина слоя $\Delta z = 116,875$ см для случаев:

a, b) внутри решетки, *c*) вне решетки в зонах Френеля и Фраунгофера
На рис. 3.40 рассеиваемая волна движется из области $z < 0$.

Обнаружено, что изменение последовательности в расположении слоев вдоль оси z оказывает влияние на структуру рассеянного поля. Изменение типов возбужденных в слоях резонансов также влияет на особенности рассеянного поля.

Резонансные многослойные структуры могут быть использованы при создании различного рода устройств, в которых необходима слоистая структура рассеянного поля, например, в пронизывающем эти слои сквозном канале, что может представлять интерес для пучковых задач.

3.7. Сопоставление численных результатов с экспериментальными данными

Проведено сопоставление численных результатов с опубликованными экспериментальными данными.

В статье Г.А. Брызгалова «Искусственный диэлектрик, образованный сферическими диэлектрическими рассеивателями» (Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения (4). – 2004. – №4. – С. 86-88) приведены графические данные по экспериментальному исследованию искусственного диэлектрика, образованного из двух трехмерных слоев резонансных сферических диэлектрических рассеивателей. Для описанных в статье экспериментальных условий был произведен численный расчет с использованием соотношений (3.18), результаты сопоставления которого с литературными экспериментальными данными приведены на рис. 3.41.

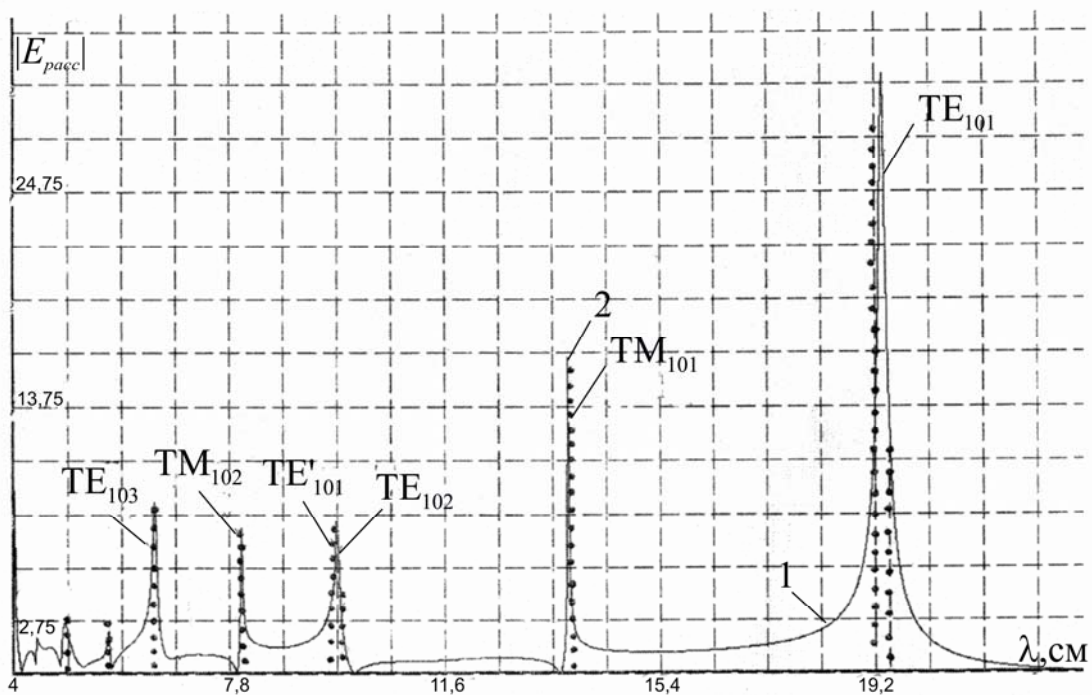


Рис. 3.41. Сопоставление теоретической (1) и экспериментальной (2) дисперсионных зависимостей поля $|E_{расc}|$ от длины рассеиваемой волны λ для кубической решетки, состоящей из двух трехмерных слоев с параметрами: $a_1 = 0,5$ см; $a_2 = 1$ см; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 95$; $\mu_{1,2} = 1$; $d_1 = h_1 = l_1 = 3$ см; $d_2 = h_2 = l_2 = 2$ см; $x = y = z = 0$ см; $(p, s, t)_1 = 0, \pm 1, \pm 2$; $(p, s, t)_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

Представленное на рис. 3.41 сопоставление показывает удовлетворительное соответствие экспериментальных и теоретических дисперсионных зависимостей, что подтверждает адекватность сделанных в данной работе теоретических предположений.

ГЛАВА 4

СЛОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ С ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ, ЗАДАВАЕМОЙ СТРУКТУРАМИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Дифракционные свойства ограниченных кристаллических систем рассеивающих элементов сильно зависят от их внутренней и внешней пространственной организации.

В предыдущих главах внешняя и внутренняя топологическая структура этих систем задавалась натуральным рядом чисел.

В этой главе рассматриваются кристаллические решетки рассеивателей, у которых внутренняя структура задается натуральным рядом чисел, а внешняя – структурами целых (фигурных) чисел, такими как [24, 38, 64]:

- геометрическая прогрессия;
- арифметическая прогрессия;
- числа Ферма (Тартальи);
- пирамидальные (тетраэдрические) числа;
- полигональные числа;
- треугольник чисел Паскаля;
- биномиальные коэффициенты;
- числа Фибоначчи.

С каждой из этих конкретных структур целых чисел здесь связывается своя самостоятельная область, в рамках которой формируются свойственные ей ограниченные кристаллические решетки рассеивателей. Топологическую структуру этих решеток можно задавать, используя одновременно несколько структур чисел. Особое внимание уделяется изучению влияния внешней геометрической формы ограниченного резонансного кристалла на его электродинамические свойства.

Проводится численный анализ рассеяния плоской волны (2.26) на изучаемых кристаллических решетках.

4.1. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой геометрической прогрессией

Опишем систему узлов, пространственное распределение которых подчинено геометрической прогрессии [19, 61].

Представим структуру чисел, определяемую геометрической прогрессией, в виде таблицы чисел 4.1.

Для представленной таблицей 4.1 структуры чисел общий член геометрической прогрессии $a_n = a_1 q_0^{n-1}$ [24] для случая, когда $a_1 = 1$, $q_0 = |s| + 1$, $n = |t| + 1$, где $|s| = 0, 1, 2, 3, \dots$; $|t| = 0, 1, 2, 3, \dots$, запишем в виде

$$a_{|t|+1} = (|s| + 1)^{|t|}. \quad (4.1)$$

Таблица 4.1

Таблица структуры чисел, определяемая геометрической прогрессией

$ t \backslash s $	0	1	2	3	4	5	6	7	–
0	1	1	1	1	1	1	1	1	–
1	1	2 ¹	3 ¹	4 ¹	5 ¹	6 ¹	7 ¹	8 ¹	–
2	1	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²	7 ²	8 ²	–
3	1	2 ³	3 ³	4 ³	5 ³	6 ³	7 ³	8 ³	–
4	1	2 ⁴	3 ⁴	4 ⁴	5 ⁴	6 ⁴	7 ⁴	8 ⁴	–
5	1	2 ⁵	3 ⁵	4 ⁵	5 ⁵	6 ⁵	7 ⁵	8 ⁵	–
6	1	2 ⁶	3 ⁶	4 ⁶	5 ⁶	6 ⁶	7 ⁶	8 ⁶	–
7	1	2 ⁷	3 ⁷	4 ⁷	5 ⁷	6 ⁷	7 ⁷	8 ⁷	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Каждому значению $|s|$ сопоставляется свой столбец таблицы чисел 4.1. Столбцу с $|s|=0$ соответствует последовательность чисел, состоящая из единиц.

Топологическая структура изучаемого типа решеток, их внешняя геометрическая форма, будет задаваться структурой чисел, представленной в таблице 4.1.

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток $c (c \in C)$. Эти подрешетки c порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид [19]

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[(|s| + 1)^{|t|} - 1 \right]), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 &\leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (4.3) и являются функциями координат $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$. Смысл величин, входящих в соотношения (3.1), (3.2), справедлив и для (4.2), (4.3). В представлении (4.2) параметр p является функцией параметров $p = p(s, t)$. Задавая максимальные значения для чисел (s, t) в (4.2), можно влиять на размеры решеток.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивную, объемноцентрированную, гранецентрированную и другие) формируют из C

узлов внутри области (4.3), которую повторит за пределами области (4.3) координатное представление (4.2) в виде пространственной решетки определенного вида.

На рис. 4.1 представлены пространственные распределения узлов решетки (4.2), когда порождающий узел решетки находится в центре области (4.3) для случаев $s = 0, \pm 1; t = 0, \pm 1;$ и $s = 0, \pm 1, \pm 2; t = 0, \pm 1, \pm 2, z > 0;$ $p = p(s, t) > 0.$

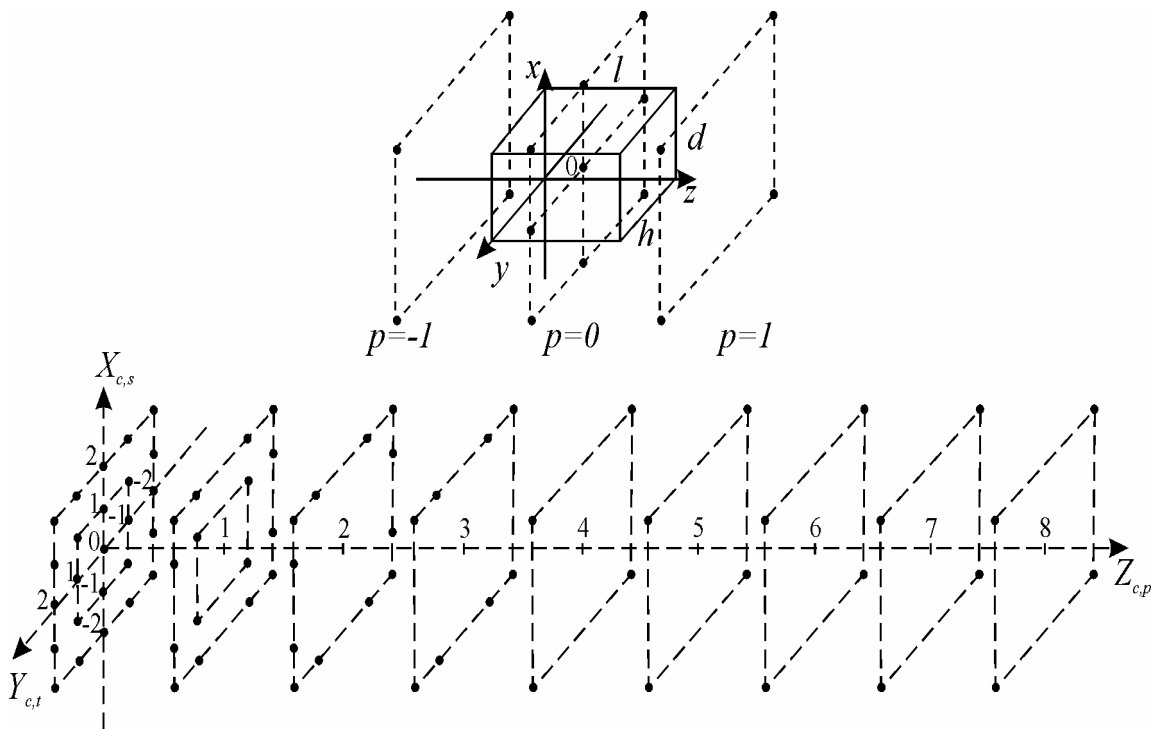


Рис. 4.1. Геометрия задачи и пространственное распределение узлов решеток, задаваемое структурой чисел геометрической прогрессии

Представим структуру чисел табл. 4.1 на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$ (рис. 4.2). Для этого в квадранты рис. 4.2 поместим четыре таблицы 4.1 так, что их вершины и две боковые стороны являются общими, а центральная точка таблицы (рис.4.2) связана с узлом $(p = 0, s = 0, t = 0)$ решетки (4.2).

Тогда каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ можно поставить в соответствие определенное число таблицы (рис.4.2), например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 4^3 , точке $(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 6^4 , а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 5^3 .

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (4.2) для заданной точки $(p = 0, s, t)$ (рис.4.2). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (4.2) и числом таблицы (рис. 4.2) существует связь, определяемая функцией (4.1). Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (4.2), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left((|s| + 1)^{|t|} - 1 \right), \text{ где } |s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$$

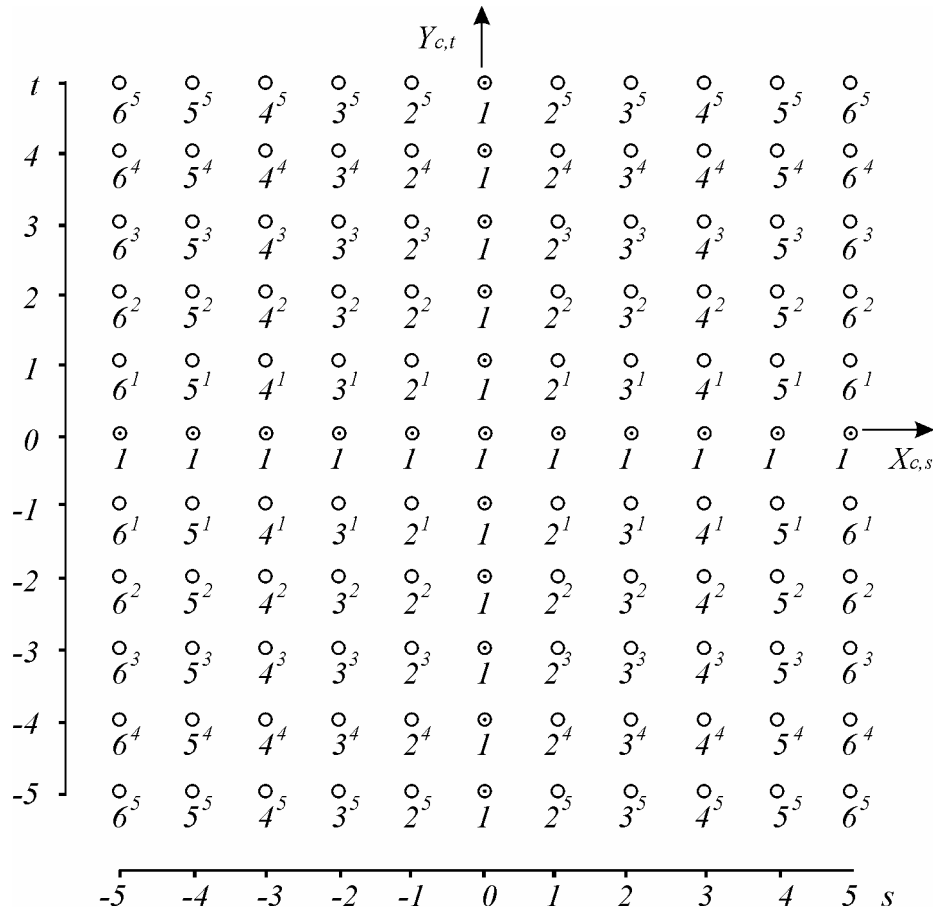


Рис.4.2. Таблица структуры чисел геометрической прогрессии на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$

Если изменять координаты узлов в области (4.3), то положения узлов вне области (4.3) будут также соответствующим образом смещаться, и будет происходить перестройка пространственной конфигурации решетки (4.2).

Расстояние между узлами определим из выражения (3.3), учитывая координатное представление (4.2), связанное с геометрической прогрессией.

Произведя соответствующие сечения пространственного распределения узлов (4.2), можно получить плоские решетки различного вида.

Если в центре области (4.3) находится один порождающий узел решетки, то для сечения, когда $(p, s, t = 1)$, из (4.2) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся ряду натуральных чисел (рис.4.3).

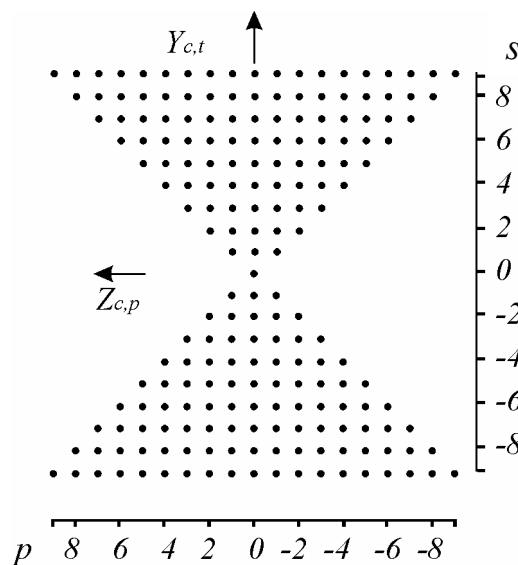


Рис. 4.3. Плоская решетка узлов $(p, s, t = 1)$

Если $(p = 0, s = 0, t)$, то возникает линейная решетка с распределением узлов вдоль оси y (рис. 4.2).

Когда $(p, s = 1, t)$, то получается плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся последовательности чисел $(1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots)$ (рис. 4.4).

Если $(p, s = -4, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся последовательности чисел $(1, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, \dots)$ (рис. 4.2).

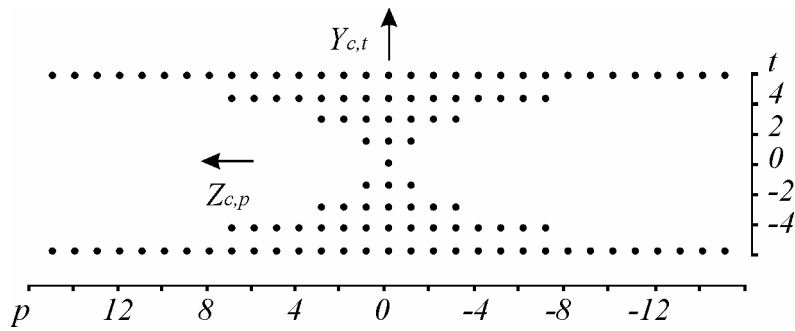


Рис.4.4. Плоская решетка узлов $(p, s = 1, t)$

Используя таблицу чисел (рис. 4.2), можно изучать распределения узлов в виде «цилиндров», «октаэдров», «пирамид», одно- и двуполостных структур (рис. 4.1) с огибающей внешней поверхностью, подчиняющейся геометрической прогрессии. Решение задачи о рассеянии волн для этого случая представлено в [19, 61].

На рис. 4.5 изображены графические зависимости поля $|E_{\text{расс}}|$ (3.18) для одно- (рис. 4.5 а) и двуполостных (рис. 4.5 в) решеток, внутренняя топологическая структура которых задавалась натуральным рядом чисел, а внешняя определялась геометрической прогрессией.

Здесь на рисунках структурный резонанс 2^{cm} соответствует структурному резонансу 2^{cm} кубического кристалла.

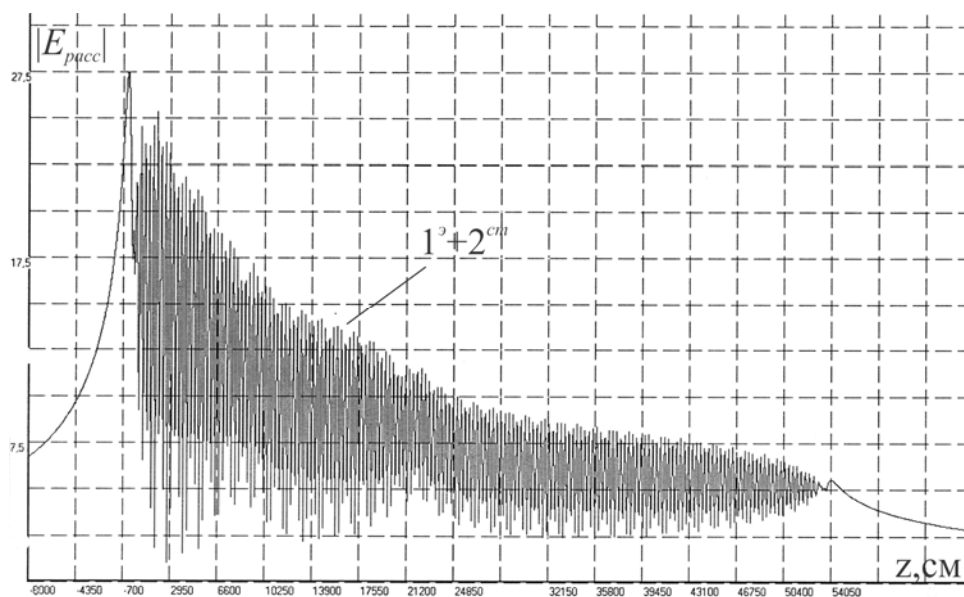


Рис. 4.5 а

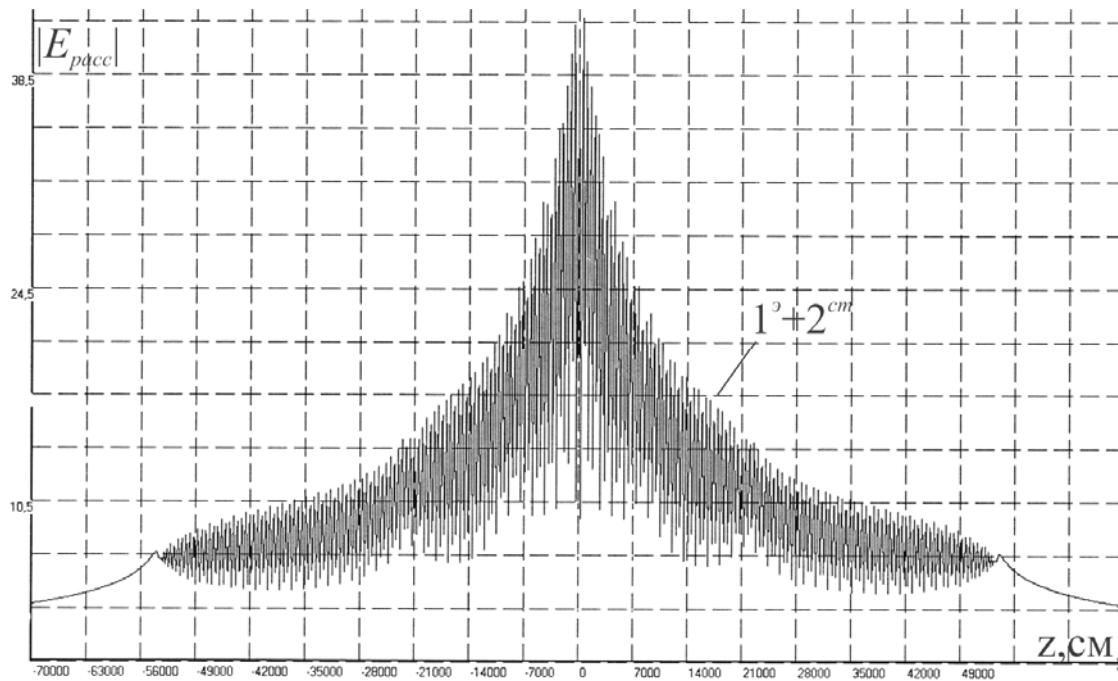


Рис. 4.5 b

Рис. 4.5. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) для одно – (а) и двуполостных – (б) систем сфер с топологической структурой (4.2), (рис. 4.1), когда в них возбужден совмещенный резонанс $(1^p + 2^{cm})$, от изменения координаты z точки наблюдения поля при $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^p = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 5$; $p = p(s, t)$

4.2. Системы двумерных решеток с топологической структурой, задаваемой геометрической прогрессией

Рассмотрим плоские решетки, пространственное распределение узлов которых подчинено геометрической прогрессии [61]. Общий вид члена прогрессии для случая, когда первый член прогрессии $a_1 = 1$, представим в виде

$$a_n = a_1 q_0^{n-1} = (q+1)^{|t|}, \quad (4.4)$$

где знаменатель прогрессии – $q_0 = q+1$; $q = 0, 1, 2, 3, \dots$; $n = |t|+1$; $|t| = 0, 1, 2, 3, \dots$

Представим в декартовой системе координат координатное представление, которое порождает пространственную систему плоских однослойных решеток, в виде

$$\begin{aligned}
 x_{p,s} &= [s - \{(-1)^s - 1\}0.5]d - (-1)^{s-1}x_{p,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[(q+1)^{|t|} - 1]), \\
 y_{p,t} &= [t - \{(-1)^t - 1\}0.5]h - (-1)^{t-1}y_{p,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\
 z_p &= z_0 + l_p = z_0 + pl \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

где $q = 0, 1, 2, 3, \dots$, величины d, h определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h$, а $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$ – координаты узлов, находящихся внутри области (2.2), (рис. 2.1).

Координаты $x_{p,s}, y_{p,t}, z_p$ определяют положение узлов вне пределов области (2.2) и являются функциями значений координат $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$.

Смысл величин, входящих в выражения (2.1), (2.2), справедлив и для координатного представления (4.5). Отличие (2.1) от (4.5) заключается в том, что в (4.5) параметр s зависит от параметра t и является его функцией, а в (2.1) параметры (p, s, t) не зависят друг от друга.

Задавая максимальные значения чисел (p, t) в (4.5), можно влиять на размеры решеток.

На рис. 4.6 представлены системы простых плоских однослойных решеток узлов (4.5), когда порождающий узел решетки находится в центре области (2.2), для случая – $q=1; p=0, 1, 2; t=0, \pm 1, \dots, \pm 5; s = s(q, t)$.

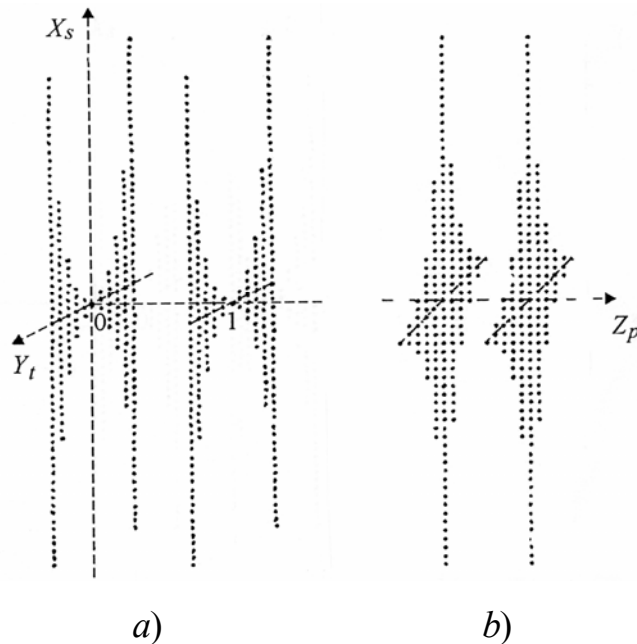


Рис. 4.6. Система простых плоских решеток узлов, заданная геометрической прогрессией, когда $q = 1; p = 0, 1, 2; t = 0, \pm 1, \dots, \pm 5; s = s(q, t)$

На рис. 4.7 представлена система решеток, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2.2), для случаев $q=0, p=0, t=0, \pm 1, \dots, \pm 5$ и $q=1, p=1; q=2, p=2; q=3, p=3; q=4, p=4$ при $t=0, \pm 1, \pm 2$. Случай $q=0, p=0, t=0, \pm 1, \dots, \pm 5$ соответствует линейной решетке узлов.

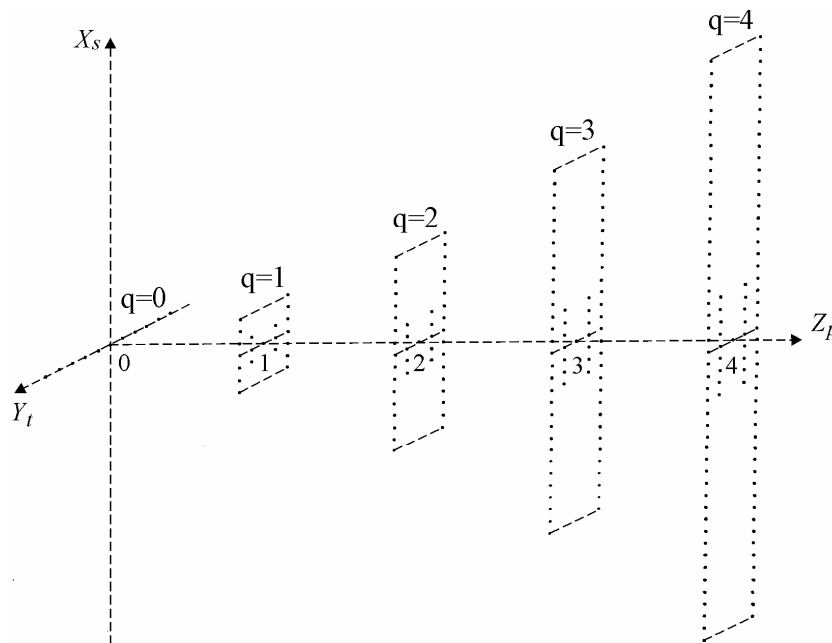


Рис. 4.7. Система плоских решеток узлов, заданная геометрической прогрессией, когда $q = 0, 1, 2, 3, 4; p = 0, 1, 2, 3, 4; t = 0, \pm 1, \pm 2; s = s(q, t)$

Распределение узлов в плоскости решетки вдоль оси x подчинено членам прогрессии. Каждой тройке чисел $(p, s=0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ ставится в соответствие член прогрессии, например, при $q=1$ точке $(p=0, s=0, t=-5)$ – число 32, а точке $(p=2, s=0, t=3)$ – число 8 (рис. 4.6 а).

Если $q = \text{const}$, то можно изучать систему одинаковых плоских решеток в виде двуполостных решеток, представленных на рис. 4.6 а, и в виде «призм», «цилиндров» (рис. 4.6 в) с внешней огибающей поверхностью, задаваемой геометрической прогрессией.

Между тройкой чисел $(p, s=0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ и членами прогрессии существует связь, определяемая функцией (4.4)

$$(q+1)^{|t|}.$$

Тогда числа s , определяющие координаты узлов вдоль оси x (4.5), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm[(q+1)^{|t|} - 1].$$

Если изменять координаты узлов, находящихся в пределах области (2.2), то положения узлов решеток вне области (2.2) будут также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную конфигурацию решеток.

Расстояние между узлами решетки (4.5) определяется соотношением (2.3), в которое входит зависимость от геометрической прогрессии.

Рассеянное поле (2.19) для систем плоских решеток (4.5) находим, решая задачу аналогично решению задачи, представленной в работе [61].

4.3. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой арифметической прогрессией

Рассмотрим конкретную структуру фигурных чисел [38], определяемую таблицей чисел 4.2 и функцией

$$1 + (|s| + 1)|t|, \tag{4.6}$$

где $|s|=0, 1, 2, 3, \dots$; $|t|=0, 1, 2, 3, \dots$. Каждому значению $|s|$ соответствует свой столбец таблицы чисел. Столбцу с $|s|=0$ соответствует натуральный ряд чисел.

Значение выражения $1 + (|s| + 1)|t|$ является произвольным членом арифметической прогрессии $a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \dots$, когда первый член прогрессии равен $a_1=1$, а разность прогрессии принимает значения $d=1, 2, 3, \dots$ ($d = |s| + 1$) [24].

Топологическая структура изучаемого типа решеток, их внешняя форма, будет задаваться структурой чисел, представленной в таблице 4.2 и функцией (4.6).

Таблица 4.2

Таблица структуры чисел, определяемая арифметической прогрессией

$ t \backslash s $	0	1	2	3	4	5	6	7	–
0	1	1	1	1	1	1	1	1	–
1	2	3	4	5	6	7	8	9	–
2	3	5	7	9	11	13	15	17	–
3	4	7	10	13	16	19	22	25	–
4	5	9	13	17	21	25	29	33	–
5	6	11	16	21	26	31	36	41	–
6	7	13	19	25	31	37	43	49	–
7	8	15	22	29	36	43	50	57	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Примечание. В вертикальных столбцах таблицы 4.2 расположены последовательности чисел арифметической прогрессии с первым членом прогрессии равным единице и различными значениями разности арифметической прогрессии, которая с увеличением $|s|$ изменяется на единицу. В горизонтальных строках таблицы 4.2 расположены последовательности чисел арифметической прогрессии с разными значениями первого члена и разности прогрессии, здесь разность прогрессии с изменением $|t|$ изменяется на единицу.

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток c ($c \in C$). Эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид [79]

$$\begin{aligned}
 x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\
 y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\
 z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \lceil |s| + 1 \rceil |t|),
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

где величины d, h, l определяются условиями $x=0, x=d; y=0, y=h; z=0, z=l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (3.2), (рис.3.1).

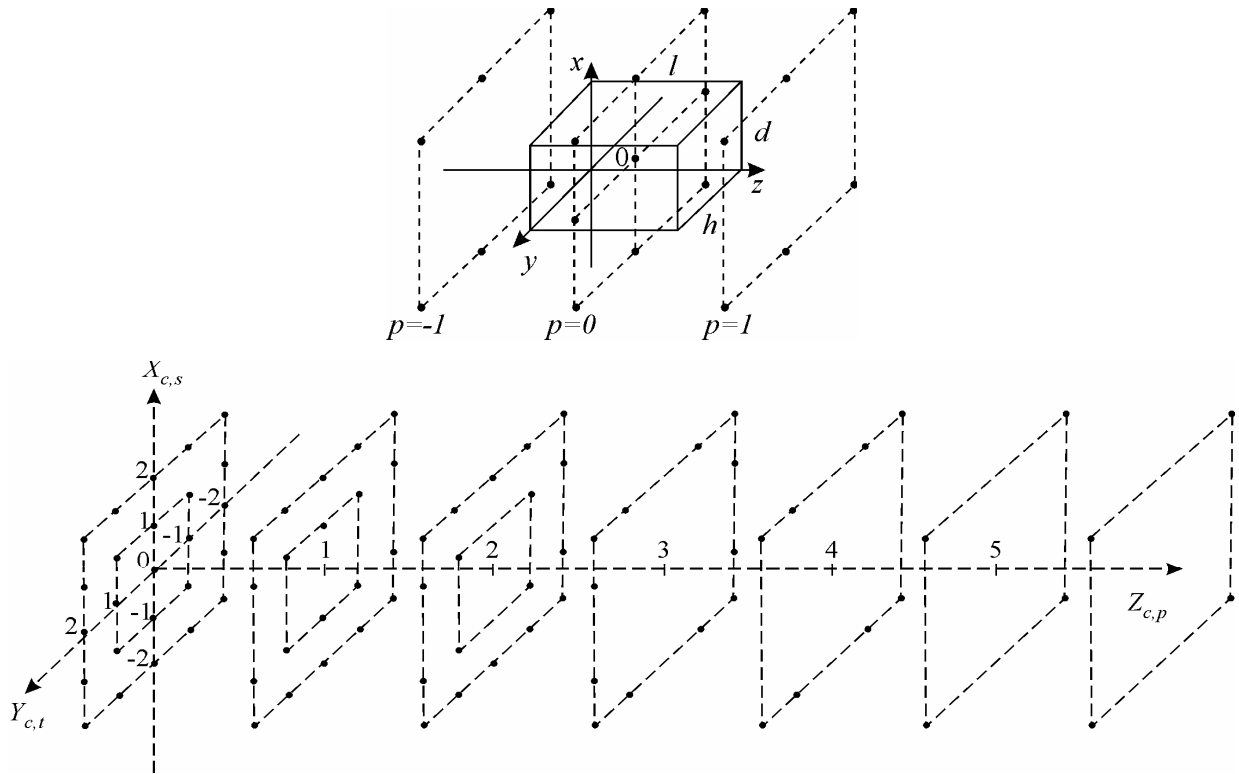


Рис. 4.8. Геометрия задачи и пространственное распределение узлов решеток, задаваемое структурой чисел арифметической прогрессии

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (3.2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$. Величины, входящие в (4.7) и (3.1), (3.2), аналогичны по смыслу. В координатном представлении (4.7) параметр p зависит от параметров s, t и является их функцией $p = p(s, t)$. Задавая максимальные значения для чисел (s, t) в (4.7), можно изменять размеры решеток.

Нужный тип элементарной ячейки решетки формируют из C узлов внутри области (3.2).

На (рис. 4.8) представлены пространственные распределения узлов решетки (4.7), когда порождающий узел решетки находится в центре области (3.2), для случаев: $s = 0, \pm 1; t = 0, \pm 1$ и $s = 0, \pm 1, \pm 2; t = 0, \pm 1, \pm 2; p = p(s, t) > 0$.

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\left[1 + (|s| + 1) |t| \right] - 1 \right), \text{ где } |s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Если изменять координаты узлов в области (3.2), то будет происходить перестройка пространственной конфигурации решетки (4.7).

Расстояние между узлами найдем из (3.3), учитывая соотношения (4.7), связанные с арифметической прогрессией.

Сечение пространственного распределения узлов (4.7) плоскостями позволяет получать плоские решетки со специальным распределением узлов.

Если в центре области (3.2) находится один порождающий узел решетки, то для сечения, когда $(p, s = 0, t)$, из (4.7) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся ряду натуральных чисел (рис. 4.10).

Если $(p, s = 1, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся последовательности чисел $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ (рис. 4.11).

Когда $(p, s = 3, t)$, то получаем плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся последовательности чисел $1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$ (рис. 4.12).

Если $(p = 0, s, t = 0)$, то возникает линейная решетка с распределением узлов вдоль оси x (рис. 4.9).

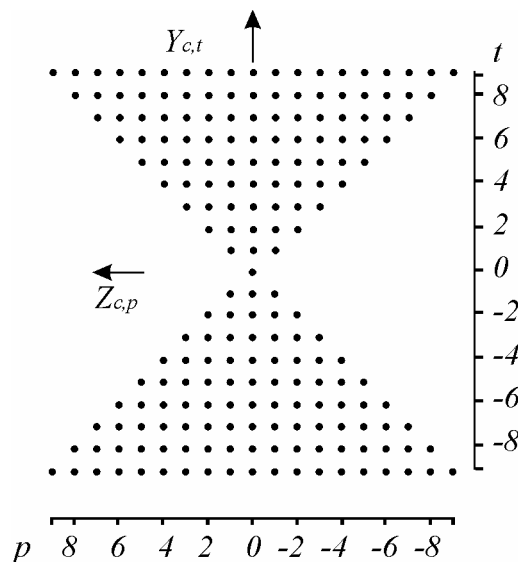


Рис. 4.10. Плоская решетка узлов $(p, s = 0, t)$

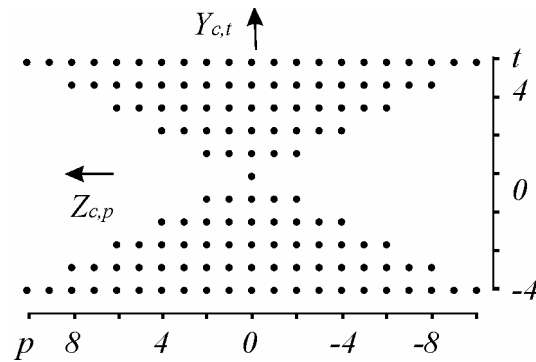


Рис. 4.11. Плоская решетка узлов $(p, s = 1, t)$

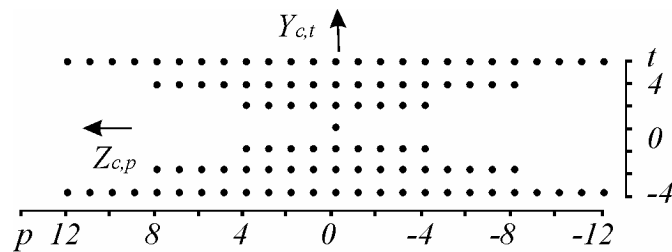


Рис. 4.12. Плоская решетка узлов $(p, s = 3, t)$

На рис. 4.10 - 4.12 центральные узлы плоских однослойных решеток связаны с выделенными точками, лежащими на оси $X_{c,s} > 0$ таблицы чисел, изображенной на рис. 4.9.

На основе таблицы чисел (рис. 4.9) можно строить трехмерные системы сфер с огибающей внешней поверхностью, подчиняющейся арифметической прогрессии.

На рис. 4.14 и рис. 4.16 показано различие в распределении полей $|E_{расc}|$ (3.18) для пространственных систем сфер в виде двуполостной структуры (рис. 4.13) и структуры в виде «октаэдра» (рис. 4.15) для случая возбуждения в них совмещенного резонанса $(1^{\nu} + 2^{cm})$.

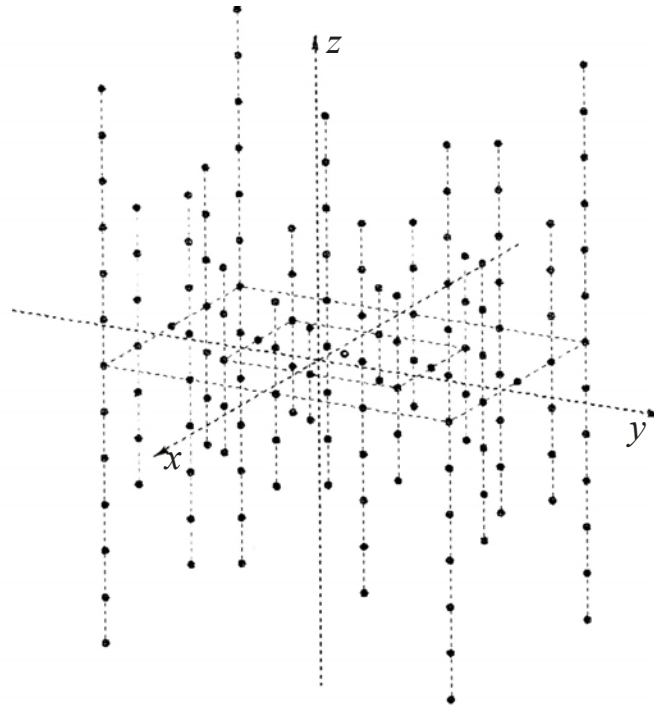


Рис. 4.13. Двуполостная топологическая структура системы узлов, заданная координатным представлением (4.7) и таблицей чисел (арифметическая прогрессия) (рис. 4.9), когда $(s, t) = 0, \pm 1, \pm 2$; $p = p(s, t)$

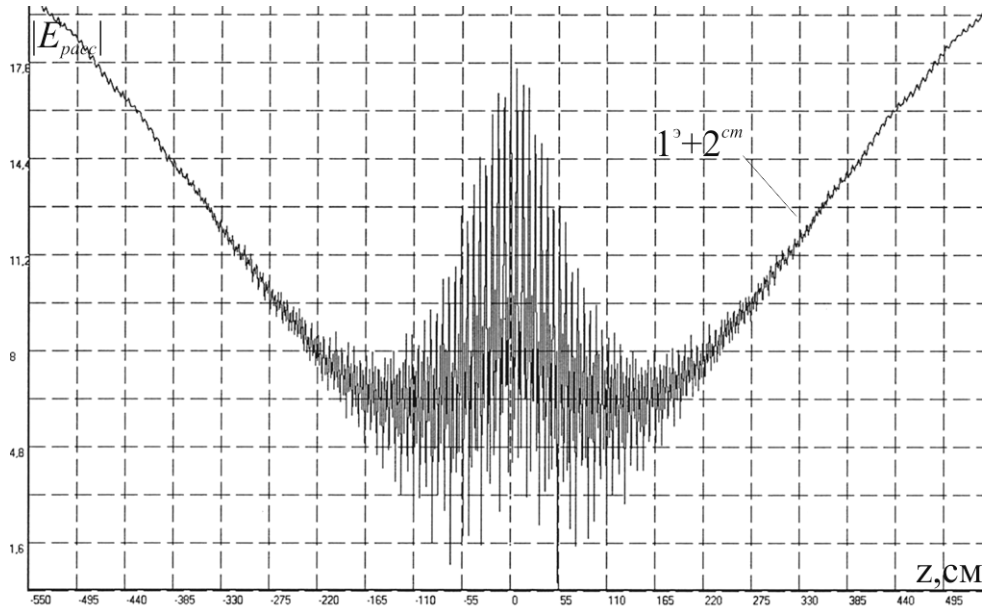


Рис. 4.14. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) двуполостной системы сфер с топологической структурой (4.7), (рис. 4.13), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5 \text{ см}$; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$; $p = p(s, t)$

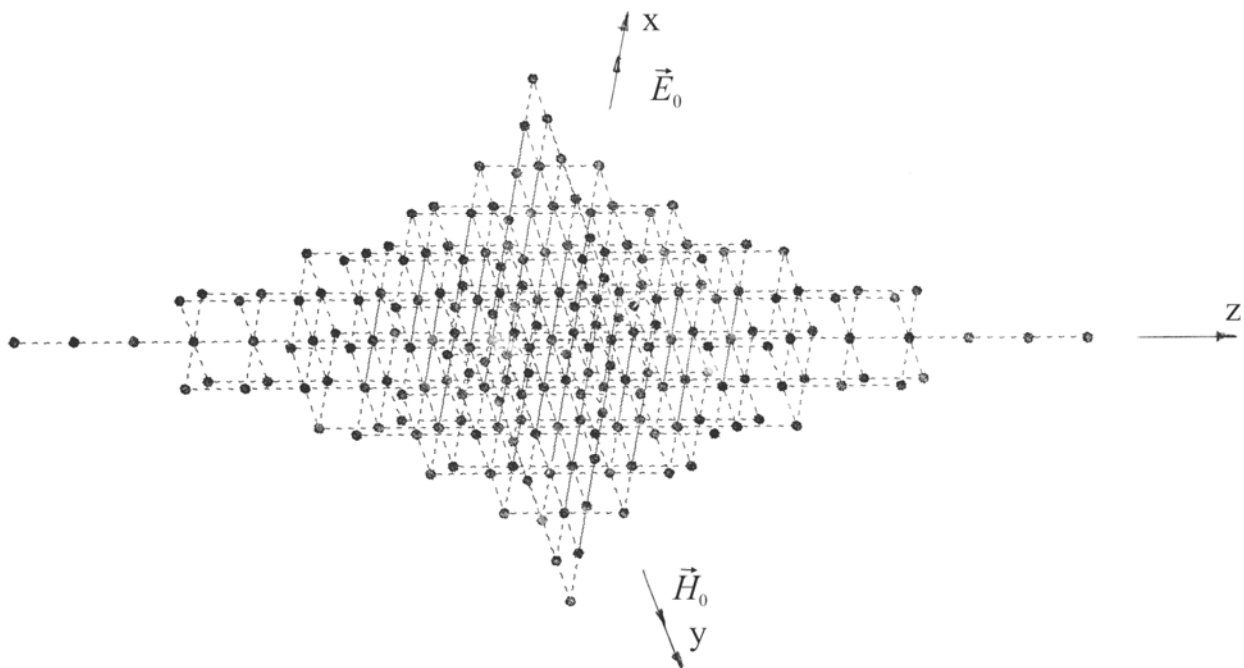


Рис. 4.15. «Октаэдр» с топологической структурой, заданной арифметической прогрессией, когда $(s,t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$; $p = p(s,t)$

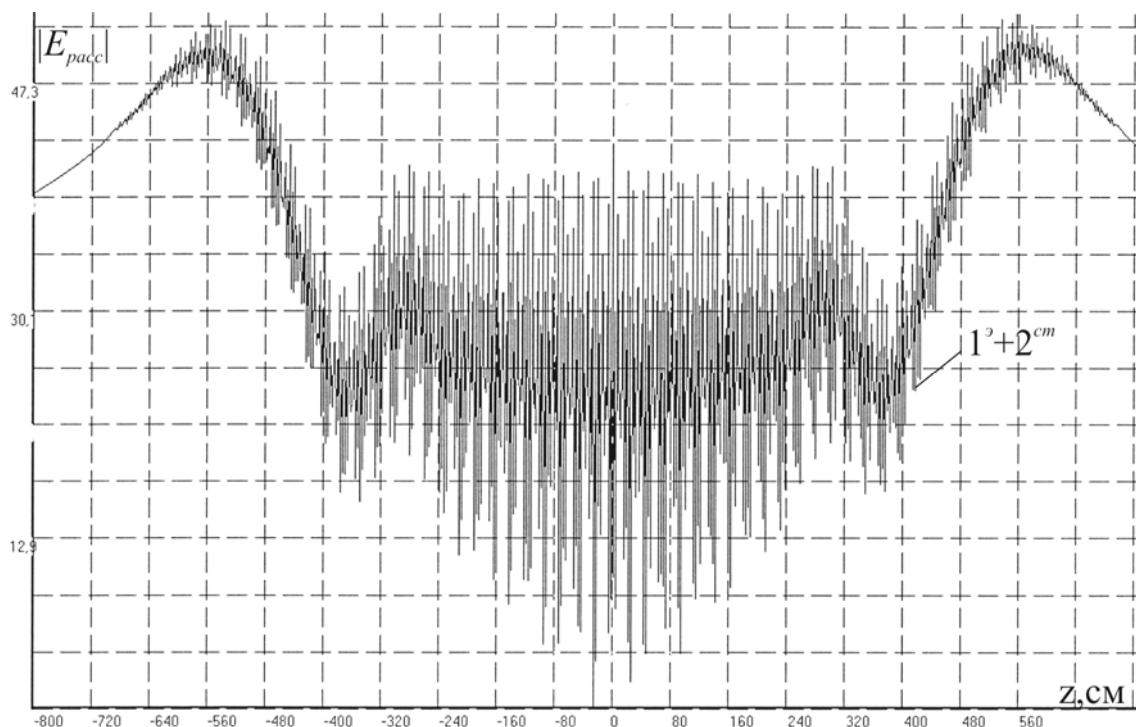


Рис. 4.16. Зависимость поля $|E_{racc}|$ (3.18) по оси z , когда в «октаэдре» (рис. 4.15) возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^3 \text{ cm})$ при $a = 0,5 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $(s,t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$; $p = p(s,t)$

4.4. Системы двумерных решеток с топологической структурой, задаваемой арифметической прогрессией

Опишем плоские решетки [62], распределение узлов которых подчинено арифметической прогрессии

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots,$$

где a_1 – первый член прогрессии, d – ее разность. Общее выражение n -го члена прогрессии для случая, когда $a_1 = 1$, представим как

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + |t|(\psi + 1), \quad (4.8)$$

где $n = |t| + 1, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$; $d = \psi + 1, \psi = 0, 1, 2, 3, \dots$

Рассмотрим в декартовой системе координат порождающее пространственную систему плоских однослойных решеток координатное представление вида (рис. 2.1)

$$\begin{aligned} x_{p,s} &= [s - \{(-1)^s - 1\}0.5]d - (-1)^{s-1}x_{p,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[(\psi + 1)|t|]), \\ y_{p,t} &= [t - \{(-1)^t - 1\}0.5]h - (-1)^{t-1}y_{p,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_p &= z_0 + l_p = z_0 + pl \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\psi = 0, 1, 2, 3, \dots$

Смысл величин, входящих в выражения (2.1), (2.2), справедлив и для соотношений (4.9). Здесь параметр s (4.9) зависит от параметров ψ, t и является их функцией $s = s(\psi, t)$.

Задавая максимальные значения чисел (p, t) в (4.9), можно влиять на размеры решеток.

На рис. 4.17 представлена система плоских однослойных решеток, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2.2), для случая $p=0, \psi=0; p=1, \psi=1; p=2, \psi=2; p=3, \psi=3$ и $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 4$ ($z > 0$). Решетка с $p=0, \psi=0$ подчинена натуральному ряду чисел. Распределение узлов в плоскости

решетки вдоль оси x подчинено членам прогрессии (4.8). Каждой тройке чисел $(p, s=0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ ставится в соответствие член прогрессии, например, точке $(p=0, s=0, t=-3)$ – число 4, а точке $(p=3, s=0, t=4)$ – число 17.

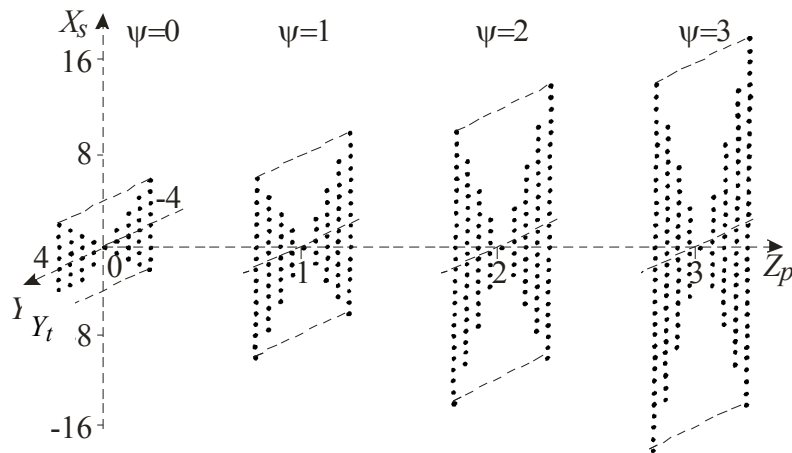


Рис. 4.17. Система плоских решеток узлов, заданная арифметической прогрессией, когда $\psi = 0, 1, 2, 3$; $p = 0, 1, 2, 3$; $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$; $s = s(\psi, t)$

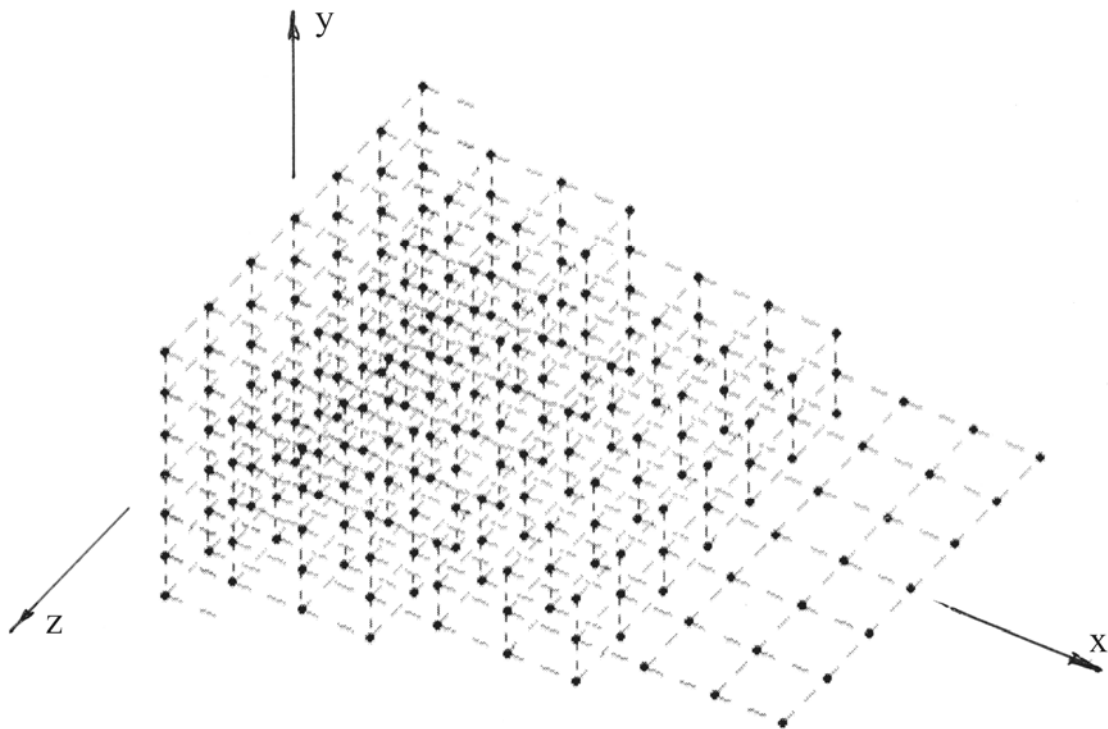


Рис. 4.18 а

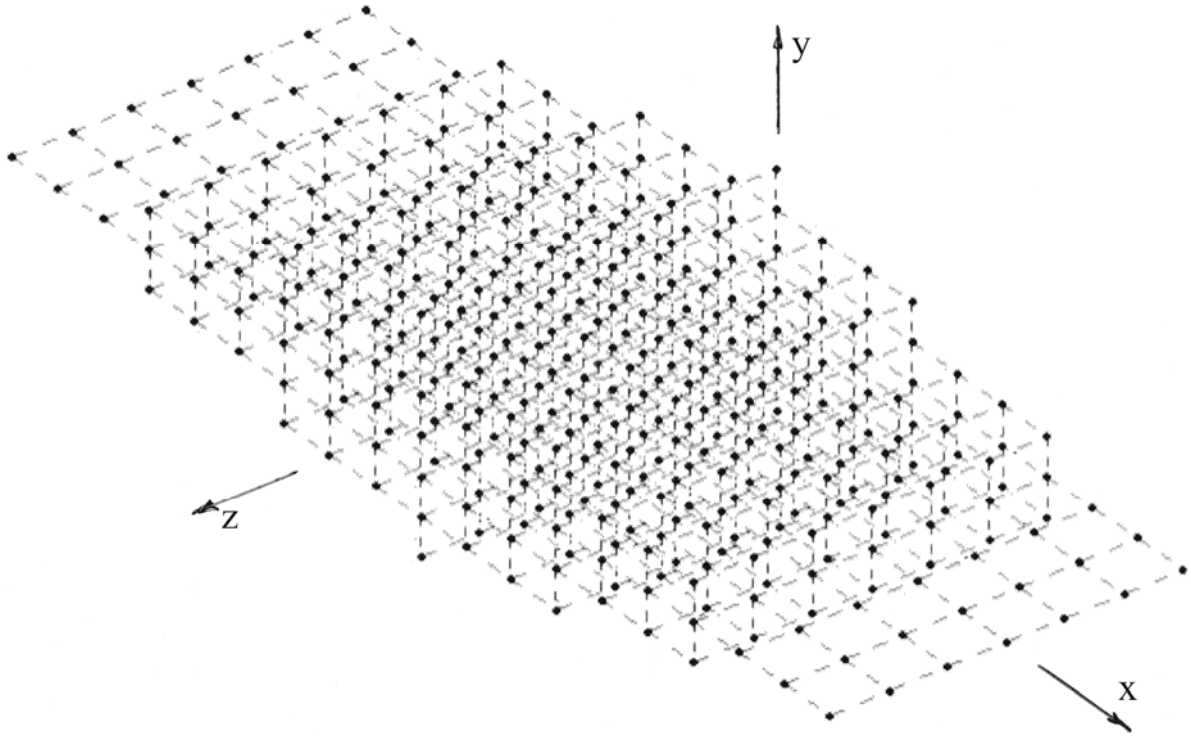


Рис. 4.18 *b*

Рис. 4.18. Система плоских решеток узлов с топологической структурой, задаваемой арифметической прогрессией, когда $\psi = 2$; $(p, t) = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$;
 $s = s(\psi, t)$: *a*) «призма», *b*) «цилиндр»

Если $\psi = \text{const}$, то можно изучать систему одинаковых плоских решеток в виде «призмы», «цилиндра» (рис. 4.18) и конфигураций, представленных на рис. 4.17, огибающая внешняя поверхность которых задается арифметической прогрессией.

Между тройкой чисел $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ и членом прогрессии существует связь, определяемая функцией (4.8)

$$1 + (\psi + 1)|t|.$$

Тогда числа s , определяющие координаты узлов вдоль оси x (4.9), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm[(1 + (\psi + 1)|t|) - 1].$$

Если изменять координаты узлов, находящихся в пределах области (2.2), то в соответствии с координатным представлением (4.9) положения узлов решеток вне области (2.2) будут также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную конфигурацию решеток.

Расстояние между узлами решетки (4.9) определяется выражением (2.3), которое связано с арифметической прогрессией.

Рассеянное поле (2.19) для систем решеток (4.9) находим из решения задачи аналогичной задаче, сформулированной в работе [62].

4.5. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой числами Ферма (Тартальи)

В разделе предложено описание сложной пространственной решетки [80], распределение узлов которой подчинено числам Ферма (Тартальи) – фигурным числам [38].

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток c ($c \in C$). Эти подрешетки c порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} \left(p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[\frac{(|s| + |t|)!}{|s|!|t|!} - 1 \right] \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (3.2), (рис. 3.1). В координатном представлении (4.10) параметр p является функцией параметров $p = p(s, t)$. По смыслу величины, входящие в представление (4.10), аналогичны величинам представления (3.1).

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (3.2). Задавая максимальные значения для чисел (s, t) в (4.10), можно изменять размеры решетки.

Нужный тип элементарной ячейки решетки формируют из C узлов внутри области (3.2), которую повторит за пределами области (3.2) координатное представление (4.10) в виде пространственной решетки определенного вида.

На (рис.4.19) представлены пространственные распределения узлов решетки (4.10), когда порождающий узел решетки находится в центре области (3.2), для случаев: $s = 0, \pm 1; t = 0, \pm 1$ и $s = 0, \pm 1, \pm 2; t = 0, \pm 1, \pm 2; z > 0$.

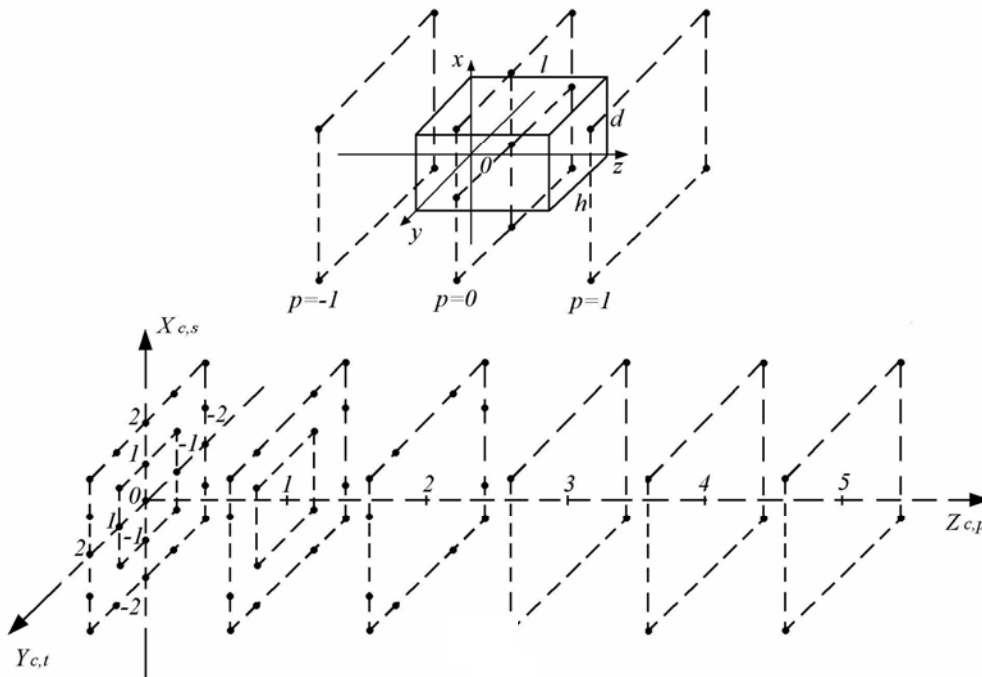


Рис. 4.19. Геометрия задачи и пространственное распределение узлов решеток, задаваемое структурой чисел Ферма (Тартальи)

Представим структуру чисел Ферма (Тартальи) на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$ (рис. 4.20). Для этого в квадранты (рис. 4.20) поместим четыре таблицы чисел Ферма (Тартальи) с общей центральной точкой, соответствующей узлу ($p = 0, s = 0, t = 0$) решетки (4.10). Тогда распределение узлов вдоль оси z можно подчинить таблице чисел Ферма (рис. 4.20). Каждой тройке чисел ($p = 0, s, t$) плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ ставим в соответствие определенное число таблицы Ферма, например, точке ($p = 0, s = -3, t = -3$) соответствует число 20, точке ($p = 0, s = -5, t = 4$) – число 126, а точке ($p = 0, s = 4, t = 3$) – число 35.

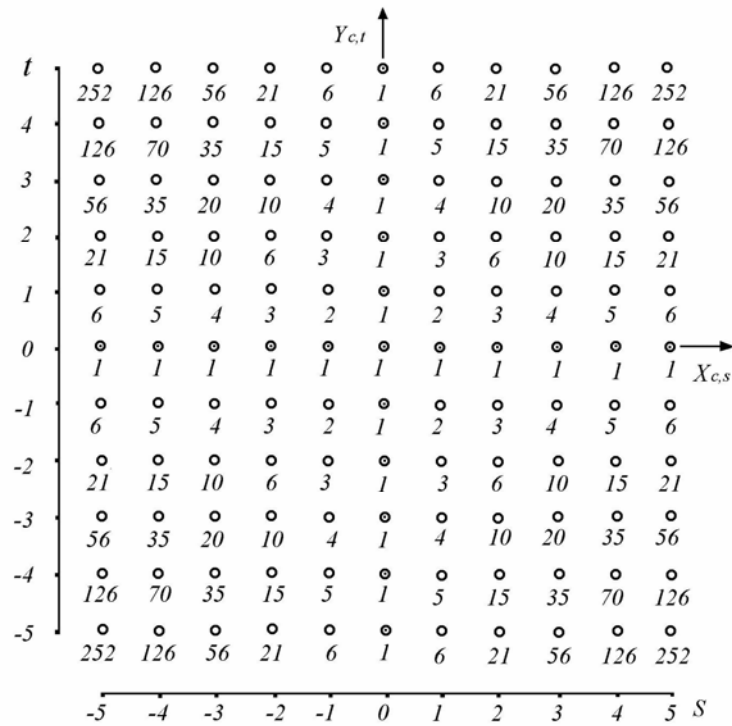


Рис. 4.20. Таблица структуры чисел Ферма (Тартальи) на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (4.10) для заданной точки $(p=0, s, t)$ (рис. 4.19). Между тройкой чисел $(p=0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (4.10) и числом таблицы Ферма существует связь, определяемая функцией [38]

$$\frac{(|s| + |t|)!}{|s|!|t|!}.$$

Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (4.10), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\frac{(|s| + |t|)!}{|s|!|t|!} - 1 \right),$$

где $|s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$

Если изменять координаты узлов в области (3.2), то будет происходить перестройка пространственной конфигурации решетки (4.10).

Здесь расстояние между узлами находят из выражения (3.3), учитывая значения координат узлов из (4.10), которые связаны с числами Ферма

(Тартальи).

На основе таблицы чисел (рис. 4.20) можно изучать распределение узлов в виде «цилиндров», «призм», «пирамид» и «октаэдров».

Когда в центре области (3.2) находится один порождающий узел решетки, то для сечения $(p, s = 1, t)$ из (4.10) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся ряду натуральных чисел (рис.4.21).

Если $(p, s = 2, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным треугольным числам $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ (рис. 4.22) [38].

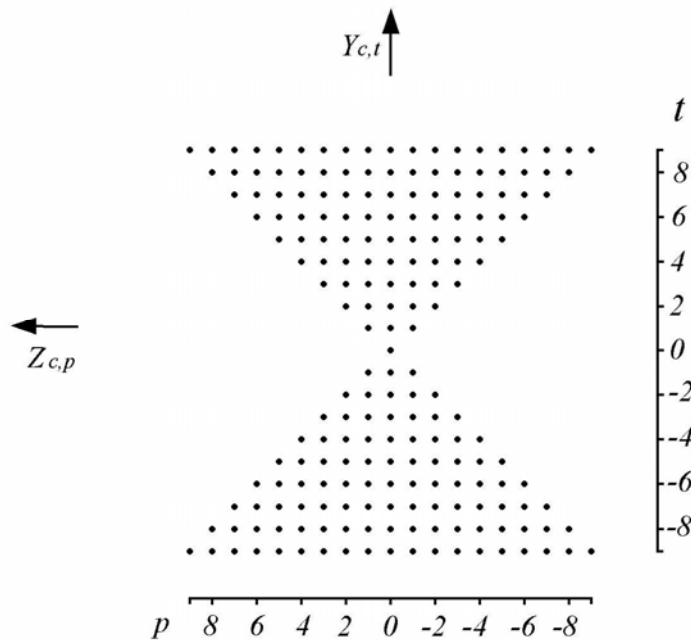


Рис. 4.21. Плоская решетка узлов $(p, s = 1, t)$

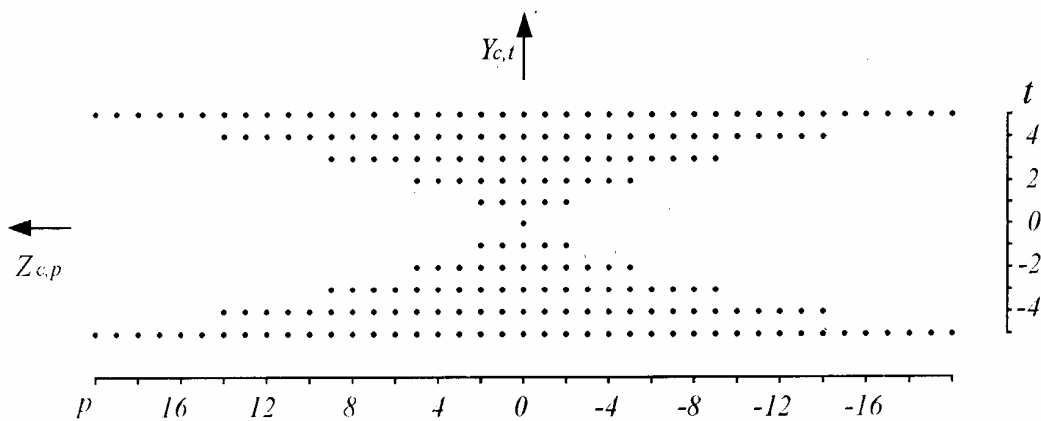


Рис. 4.22. Плоская решетка узлов $(p, s = 2, t)$

Когда $(p, s = 3, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным трехсторонним пирамидальным числам [38] 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... (рис.4.23).

Если $(p, s = 4, t)$, то возникает плоская решетка, подчиняющаяся последовательности чисел 1, 5, 15, 35, 70, 126, ... (рис.4.24).

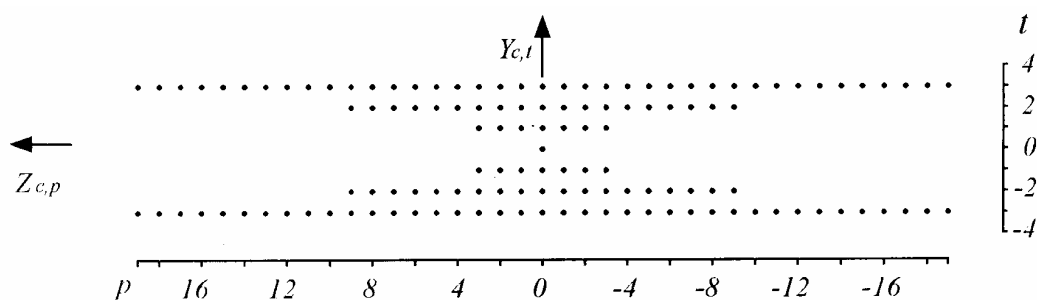


Рис. 4.23. Плоская решетка узлов $(p, s = 3, t)$

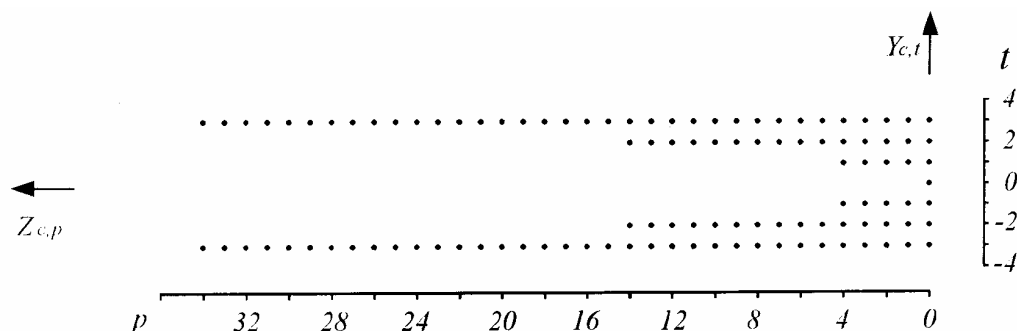


Рис. 4.24. Плоская решетка узлов $(p, s = 4, t)$

Возможны комбинированные пространственно-упорядоченные системы узлов, у которых топологическая структура одновременно подчиняется нескольким структурам чисел. В качестве примера таких структур чисел могут быть структура чисел Ферма (Тартальи), которая изображена ниже слева, и треугольник чисел Паскаля, изображенный справа, для полупространств $z < 0$ и $z > 0$.

1	6	21	56	126	252	1												
1	5	15	35	70	126	1	6											
1	4	10	20	35	56	1	5	15										
1	3	6	10	15	21	1	4	10	20									
1	2	3	4	5	6	1	3	6	10	15								
1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6							
						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Между этими структурами чисел существует частичное соответствие.

На рис. 4.25, 4.27, 4.29, 4.31, 4.33 представлены решетки с топологической структурой, задаваемой числами Ферма (Тартальи), в виде одно- и двуполостных систем узлов, «октаэдра», «пирамиды», «цилиндра».

На рис. 4.26, 4.28, 4.30, 4.32, 4.34 приведены графические зависимости для рассеянных полей внутри этих решеток для случая возбуждения в них совмещенного резонанса $(1^p + 2^{cm})$.

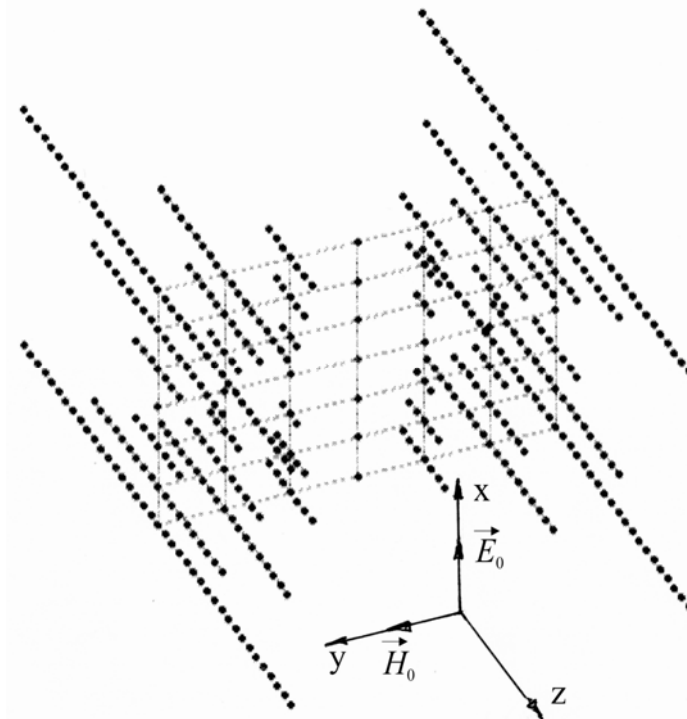


Рис. 4.25. Двуполостная топологическая структура системы узлов, заданная координатным представлением (4.10) и таблицей чисел Ферма (Тартальи) (рис. 4.20), когда $(s, t) = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $p = p(s, t)$

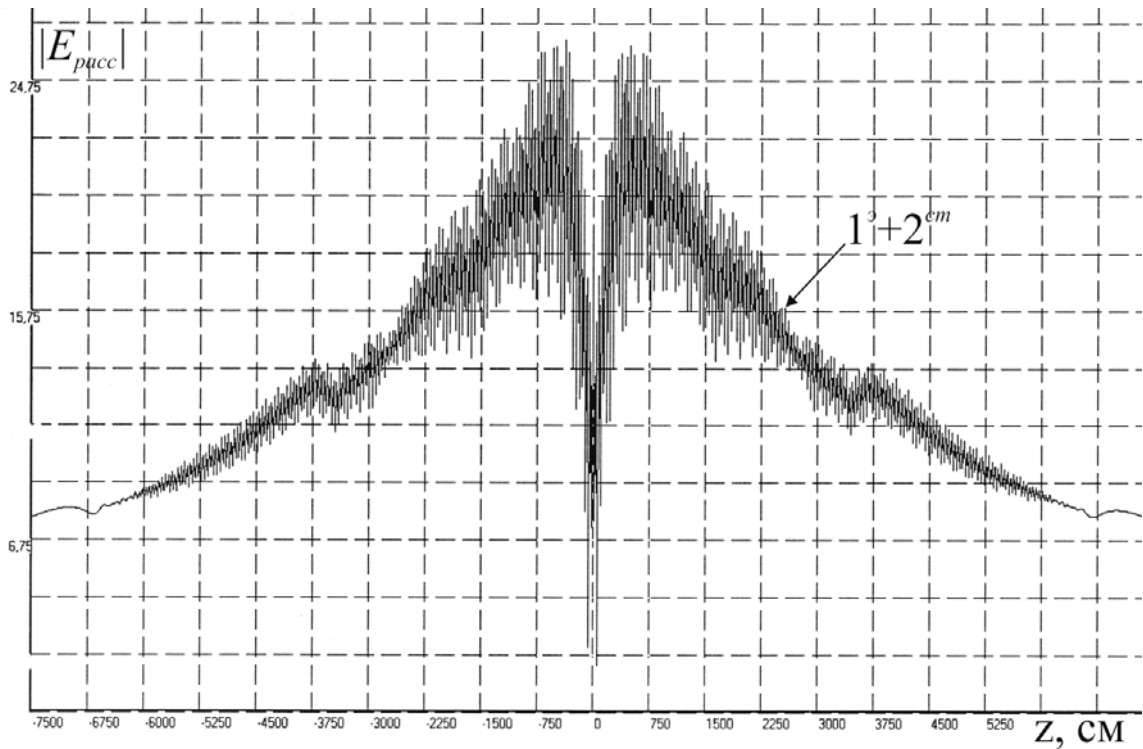


Рис. 4.26. Зависимость поля $|E_{racc}|$ (3.18) системы сфер с топологической структурой (4.10), (рис. 4.25), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{em})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 8$; $p = p(s, t)$

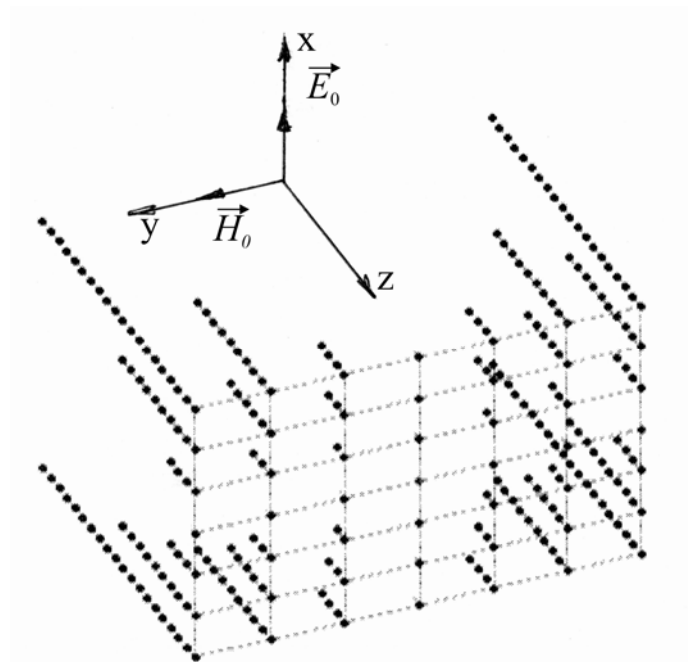


Рис. 4.27. Однополостная топологическая структура системы узлов, заданная координатным представлением (4.10) и таблицей чисел Ферма (Тартальи) (рис. 4.20), когда $(s, t) = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; $p = p(s, t) < 0$

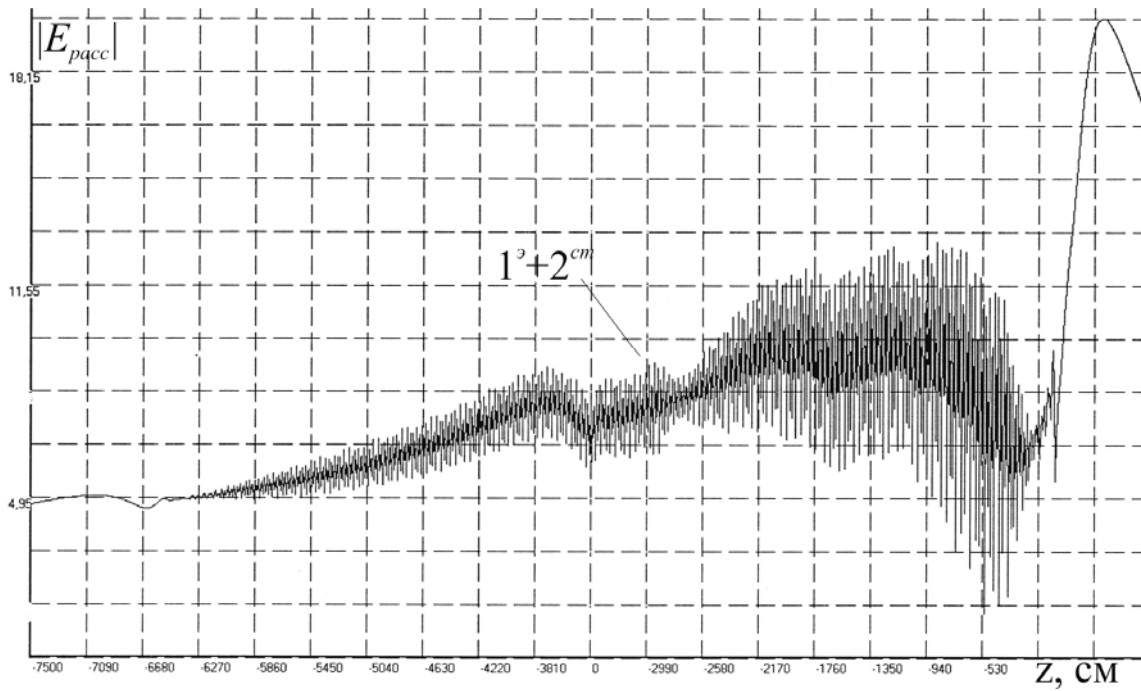


Рис. 4.28. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) системы сфер с топологической структурой (4.10), (рис. 4.27), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 6$; $p = p(s, t) < 0$

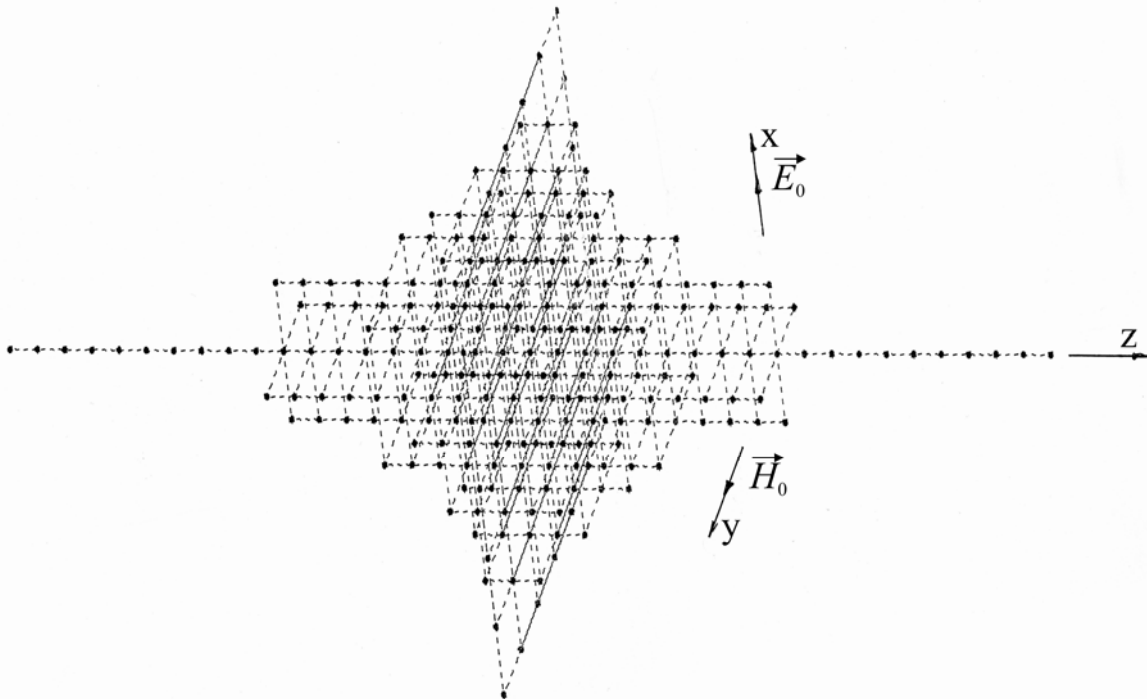


Рис. 4.29. Топологическая структура системы узлов в виде «октаэдра» Ферма, когда $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$; $p = p(s, t)$

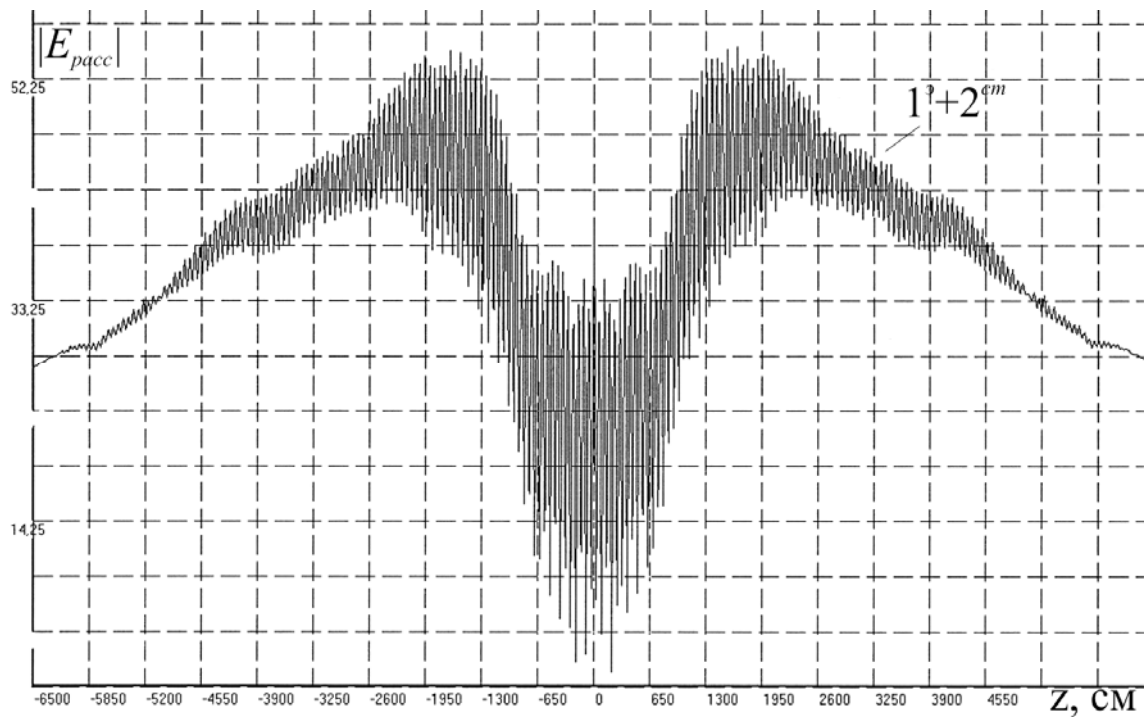


Рис. 4.30. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) в «октаэдре» Ферма (рис. 4.29), когда в нем возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$; $p = p(s, t)$

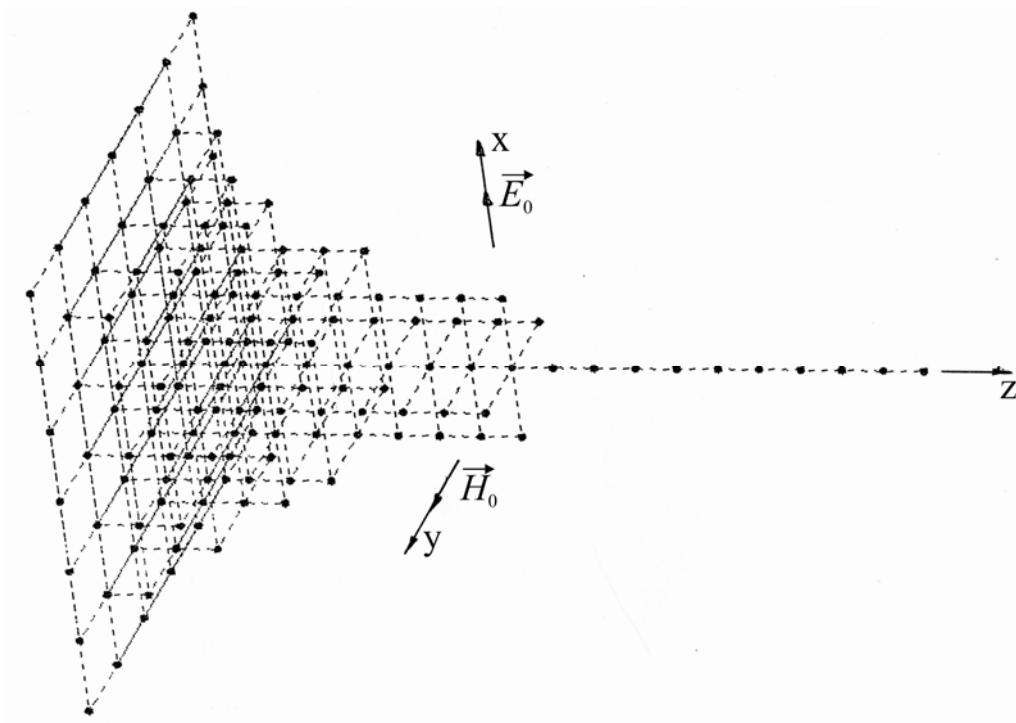


Рис. 4.31. Топологическая структура системы узлов в виде «пирамиды» Ферма, когда $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$; $p = p(s, t) > 0$

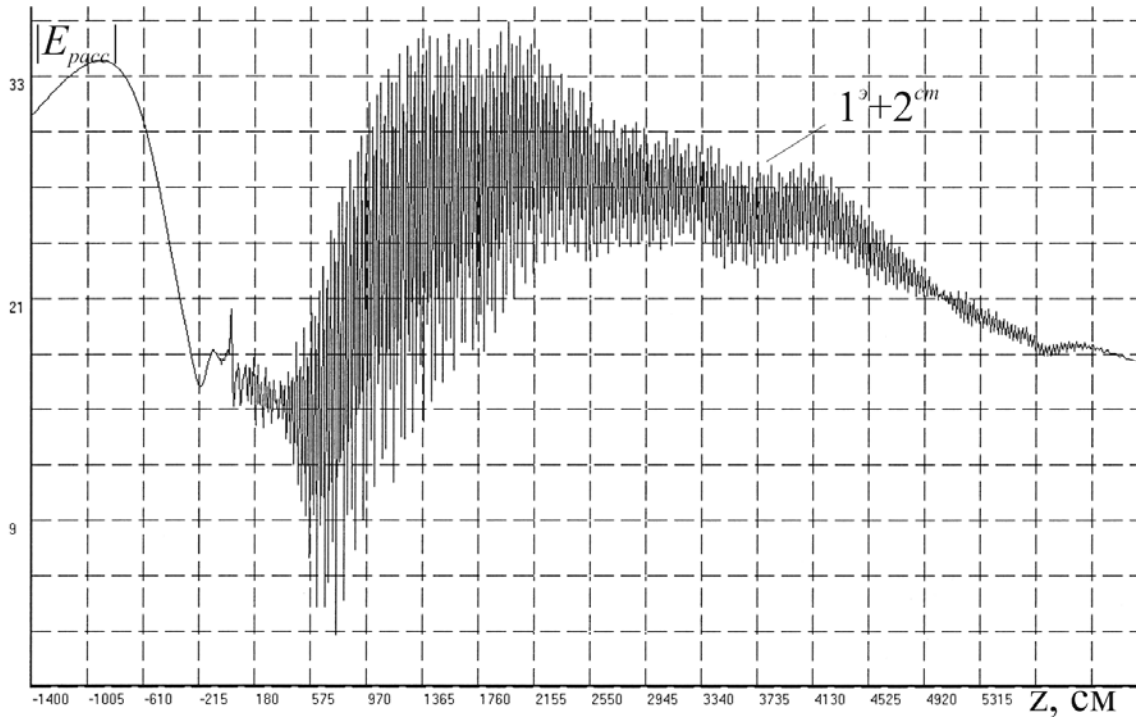


Рис. 4.32. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) в «пирамиде» Ферма (рис. 4.31), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^3)$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$; $p = p(s, t) > 0$

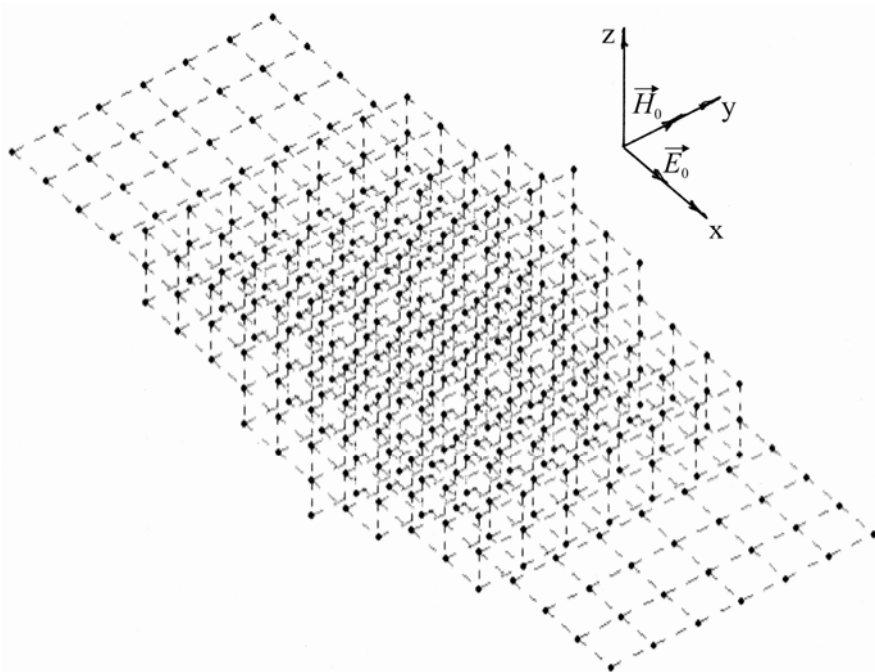


Рис. 4.33. Система плоских решеток узлов в виде «цилиндра» Ферма, когда $(p, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$; $s = s(p)$

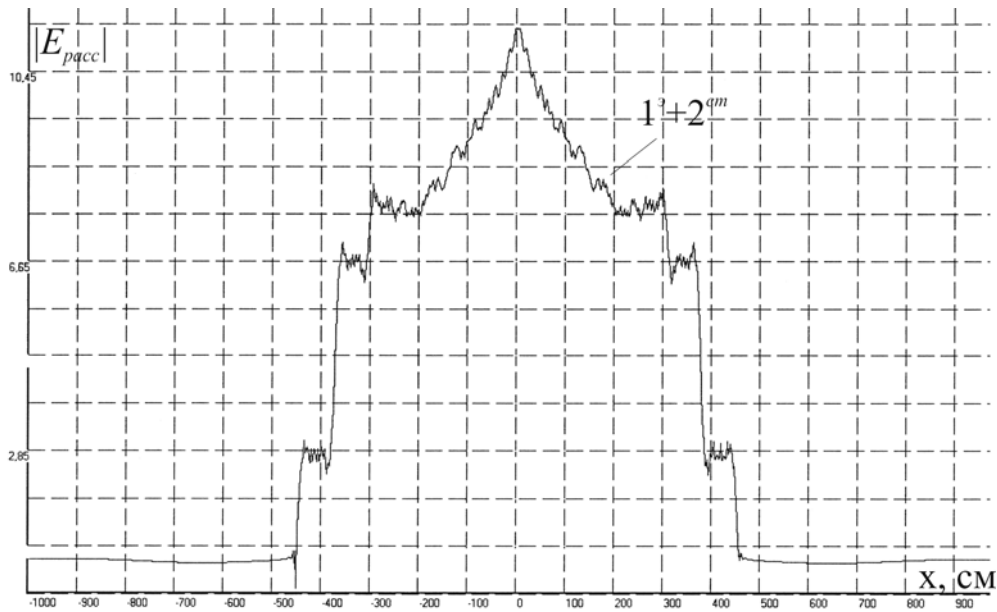


Рис. 4.34. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (2.19) в «цилиндре» Ферма (рис. 4.33), когда в нем возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^3)$, от изменения координаты точки наблюдения поля x при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $y = z = 0$ см; $(p, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$; $s = s(p)$

4.6. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой пирамидальными (тетраэдрическими) числами

В подразделе изложено описание системы узлов [81], пространственное распределение которых подчинено пирамидальным (тетраэдрическим) числам – фигурным числам [38].

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток c ($c \in C$). Эти подрешетки c порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} & (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} & (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} & \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\left(p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)(|t|+2)}{3!} [3 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\} \right),$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (3.2), (рис. 3.1). В представлении (4.11) параметр p является функцией параметров $p = (s, t)$. Величины координатного представления (4.11) аналогичны по смыслу величинам представления (3.1).

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (3.2). Задавая максимальные значения для чисел (s, t) в (4.11), можно рассматривать решетки разных размеров.

Нужный тип элементарной ячейки решетки формируют из C узлов внутри области (3.2).

На рис.4.35 представлено пространственное распределение узлов решетки (4.11), когда порождающий узел решетки находится в центре области (3.2), для случая $s, t = 0, \pm 1; z > 0$.

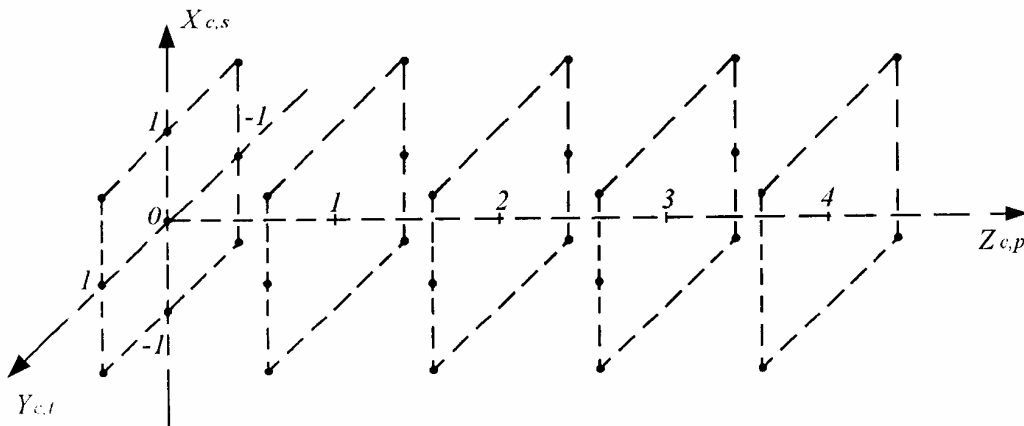


Рис. 4.35. Пространственное распределение узлов решетки, задаваемое структурой пирамидальных (тетраэдрических) чисел

Свяжем с четырьмя квадрантами (рис. 4.36) четыре одинаковые таблицы пирамидальных (тетраэдрических) чисел. Тогда центральной точке таблицы чисел рис. 4.36 будет соответствовать порождающий узел ($p = 0, s = 0, t = 0$) координатного представления (4.11).

Распределение узлов вдоль оси z подчиним таблице пирамидальных

чисел (рис. 4.36). Каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ поставим в соответствие определенное число таблицы (рис. 4.36), например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 50, точке $(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 135, а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 60.

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (4.11) для заданной точки $(p = 0, s, t)$ (рис. 4.36). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (4.11) и числом таблицы пирамидальных (тетраэдрических) чисел существует связь, определяемая функцией [38]

$$\frac{(|t|+1)(|t|+2)}{3!} [3 + (|s|+1)|t|] .$$

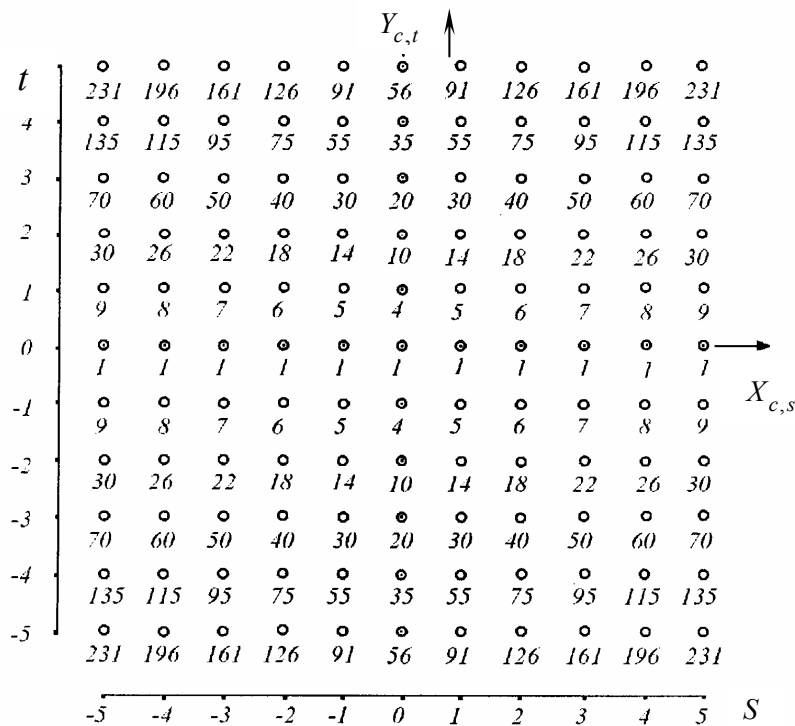


Рис. 4.36. Таблица структуры пирамидальных (тетраэдрических) чисел на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$

Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (4.11), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)(|t|+2)}{3!} [3 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\}, \text{ где } |s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Если изменять координаты узлов в области (3.2), то будет происходить перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки.

Расстояние между узлами определим из выражения (3.3), учитывая соотношения (4.11), которые связаны с пирамидальными числами.

Если в центре области (3.2) находится один порождающий узел решетки, то для сечения, когда $(p, s = 0, t)$, из (4.11) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным трехсторонним пирамидальным числам 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... (рис. 4.37).

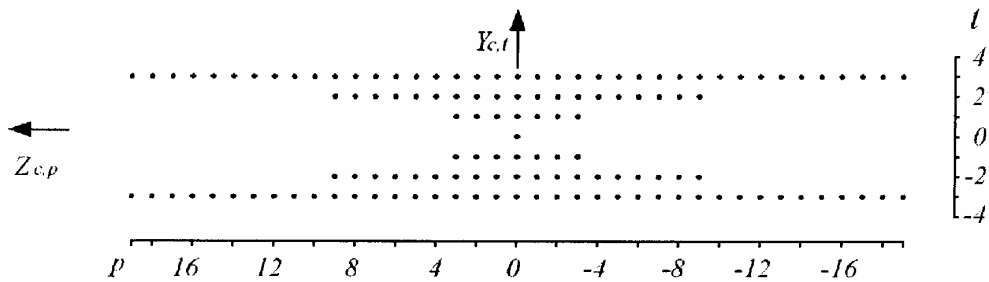


Рис. 4.37. Плоская решетка узлов $(p, s = 0, t)$

Если $(p, s = 1, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным четырехсторонним пирамидальным числам 1, 5, 14, 30, 55, 91, ... (рис.4.38).

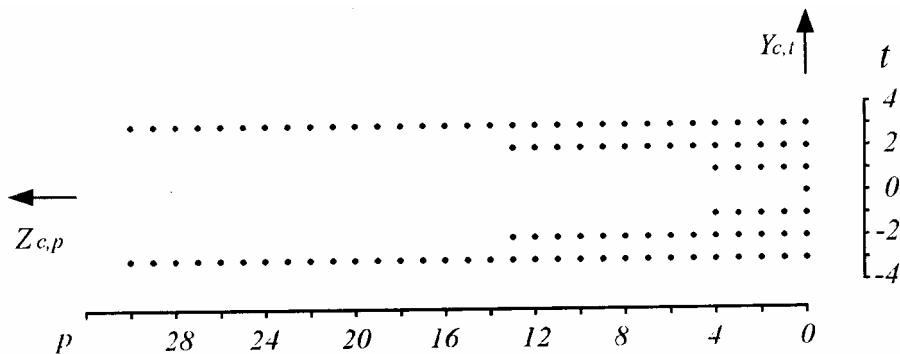


Рис. 4.38. Плоская решетка узлов $(p, s = 1, t)$

Когда $(p, s = 2, t)$, то возникает плоская решетка (рис. 4.39) с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным пятисторонним пирамидальным числам 1, 6, 18, 40, 75, 126, ...

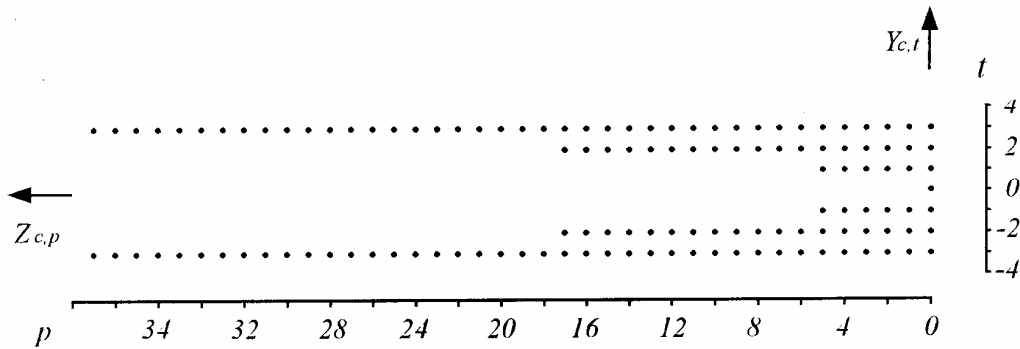


Рис. 4.39. Плоская решетка узлов ($p, s = 2, t$)

Если ($p = 0, s, t = 0,$), то имеем линейную решетку с распределением узлов вдоль направления параллельного оси x (рис. 4.36).

На основе структуры пирамидальных (тетраэдрических) чисел можно формировать ограниченные трехмерные системы сфер с разнообразной внешней геометрической формой. Одна из таких систем и распределение рассеянного поля в ней представлены на рис. 4.40 и рис. 4.41 для случая возбуждения в ней совмещенного резонанса ($1^p + 2^{cm}$).

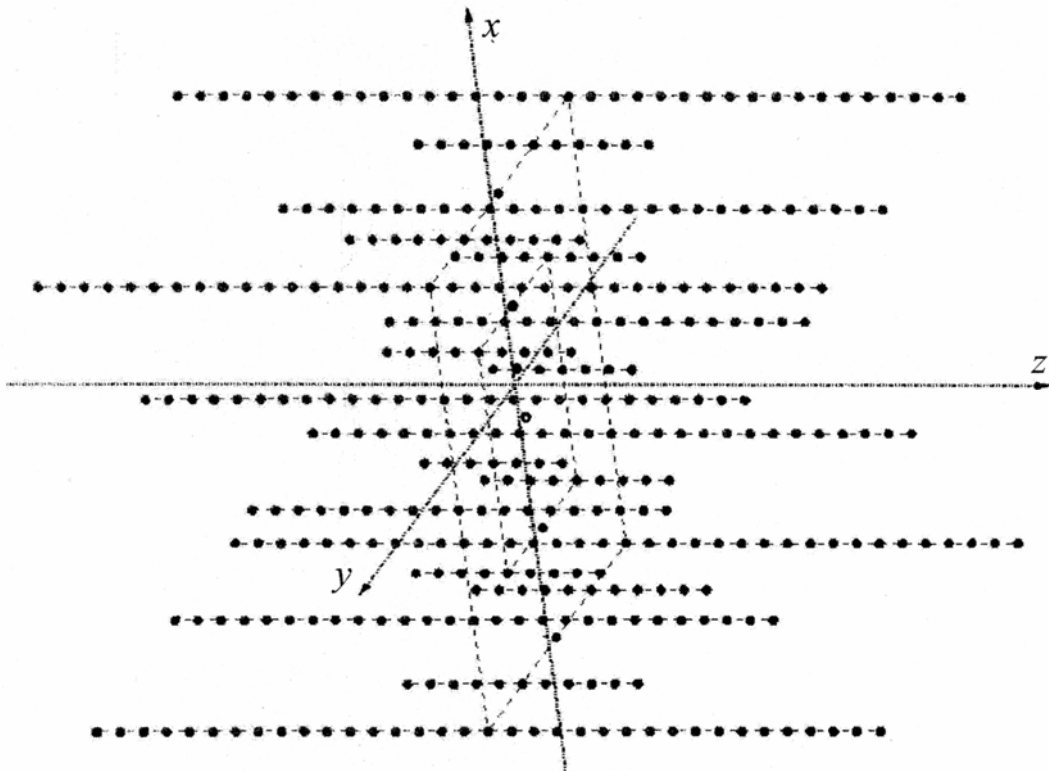


Рис. 4.40. Двуполостная топологическая структура системы узлов, заданная координатным представлением (4.11) и таблицей пирамидальных (тетраэдрических) чисел (рис. 4.36), когда ($s, t = 0, \pm 1, \pm 2$; $p = p(s, t)$)

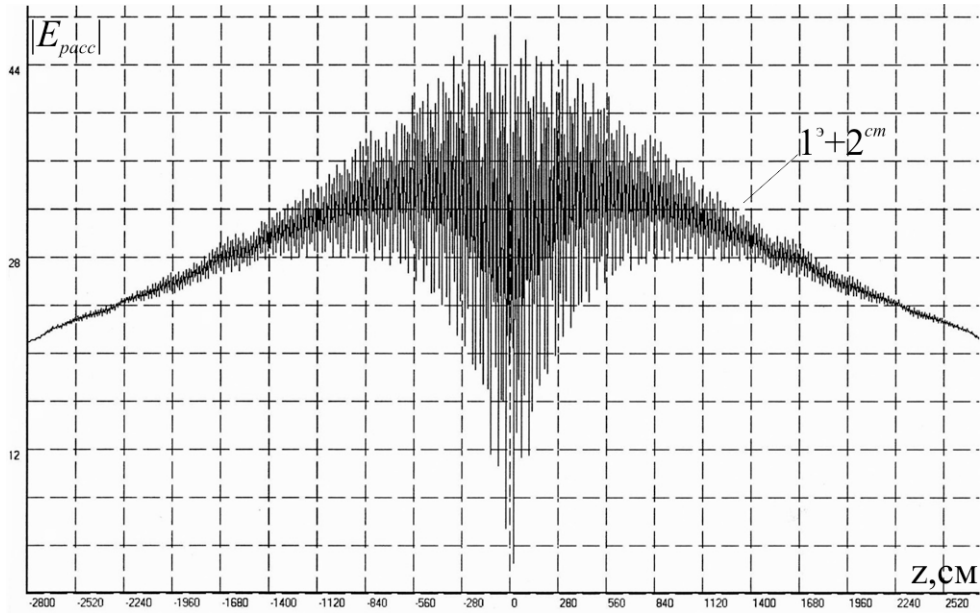


Рис. 4.41. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) системы сфер с топологической структурой (4.11), (рис. 4.40), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5$ см; $\varepsilon_1' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $x = y = 0$ см; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 6$; $p = p(s, t)$

4.7. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой полигональными числами

В подразделе рассматривается описание пространственной решетки [82], распределение узлов которой подчинено полигональным числам – фигурным числам [38].

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток c ($c \in C$). Эти подрешетки c порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} & (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} & (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} & \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\left(p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)}{2!} [2 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\} \right),$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области, (3.2), (рис.3.1). Параметр p является функцией $p = p(s, t)$.

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (3.2). Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (4.12), можно изменять размеры решеток.

Нужный тип элементарной ячейки решетки формируют из C узлов внутри области (3.2).

На рис. 4.42 представлено пространственное распределение узлов решетки (4.12), когда порождающий узел решетки находится в центре области (3.2), для случая $s, t = 0, \pm 1$.

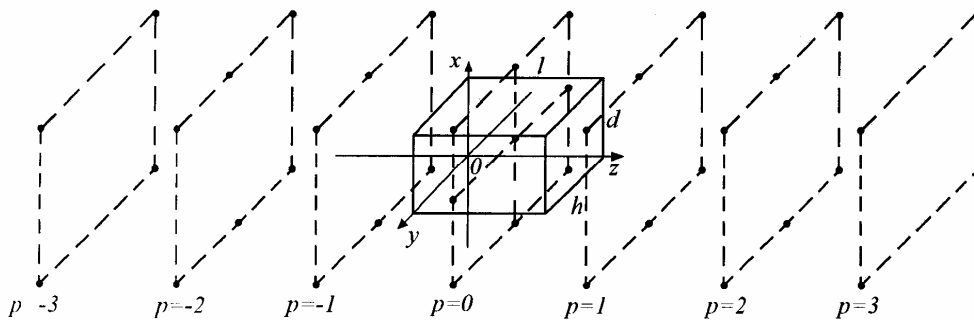


Рис. 4.42. Геометрия задачи и пространственное распределение узлов решетки, задаваемое структурой полигональных чисел

Сформируем таблицу полигональных чисел на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$ (рис. 4.43).

Представим таблицу чисел (рис. 4.43) как состоящую из четырех одинаковых таблиц полигональных чисел, которые совмещены так, что некоторые ограничивающие их строки и столбцы у них общие. Центральная точка таблицы соответствует узлу $(p = 0, s = 0, t = 0)$ решетки (4.12).

Распределение сфер вдоль оси z можно подчинить таблице полигональных чисел (рис.4.43). Каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ ставится в соответствие определенное число таблицы (рис. 4.43): например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 28, точке

$(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 65, а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 34.

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (4.12) для заданной точки $(p = 0, s, t)$ (рис.4.43). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (4.12) и числом таблицы полигональных чисел существует связь, определяемая функцией, которую представим в виде [38]

$$\frac{(|t|+1)}{2!} [2 + (|s|+1)|t|] .$$

Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (4.12), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)}{2!} [2 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\}, \text{ где } |s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$$

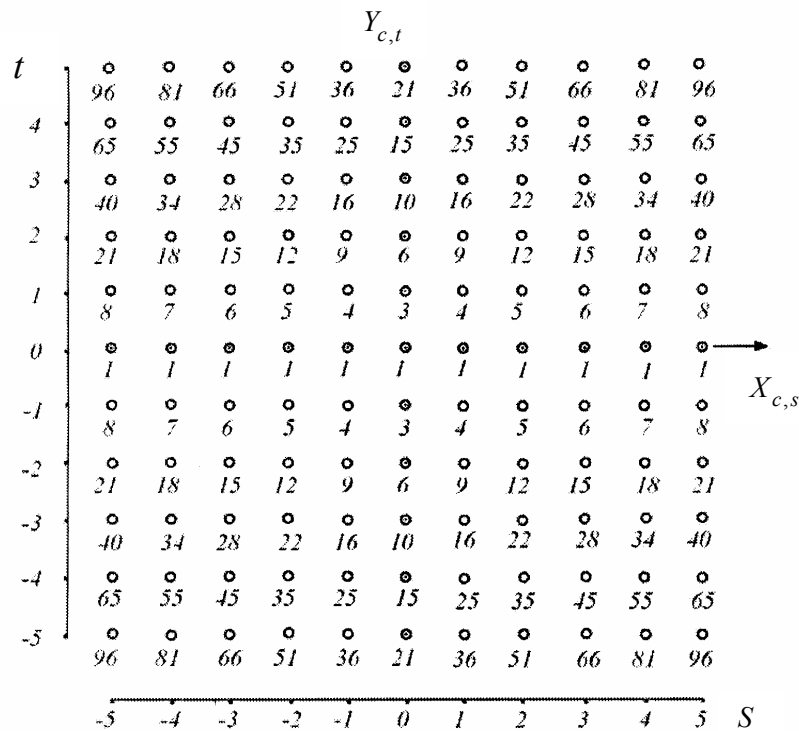


Рис. 4.43. Таблица структуры полигональных чисел на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$

Если изменять координаты узлов в области (3.2), то положения узлов вне области (3.2) будут также соответствующим образом смещаться, и будет происходить формирование пространственной конфигурации решетки.

Расстояние между узлами определим из выражения (3.3), учитывая координатное представление (4.12), связанное с полигональными числами.

Если в центре области (3.2) находится один порождающий узел решетки, то для сечения, когда $(p, s = 0, t)$, из (4.12) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным треугольным числам 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... (рис. 4.44) [38].

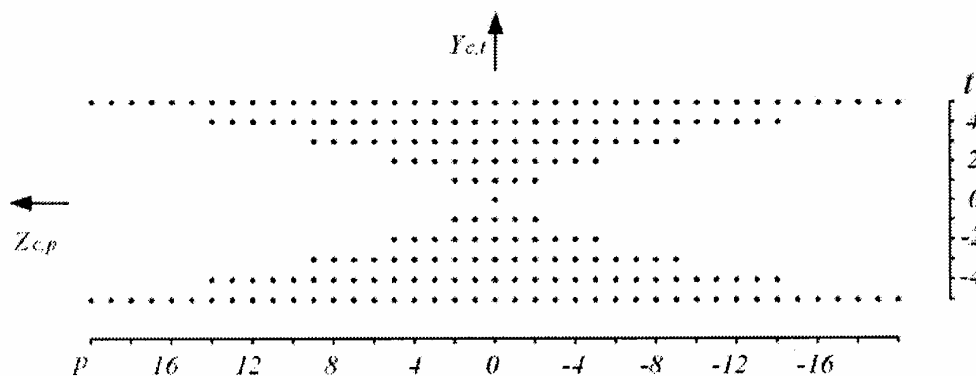


Рис. 4.44. Плоская решетка узлов $(p, s = 0, t)$

Если $(p, s = 1, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным четырехугольным числам 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... (рис. 4.45).

Когда $(p, s = 2, t)$, то получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным пятиугольным числам 1, 5, 12, 22, 35, 51, ... (рис. 4.46).

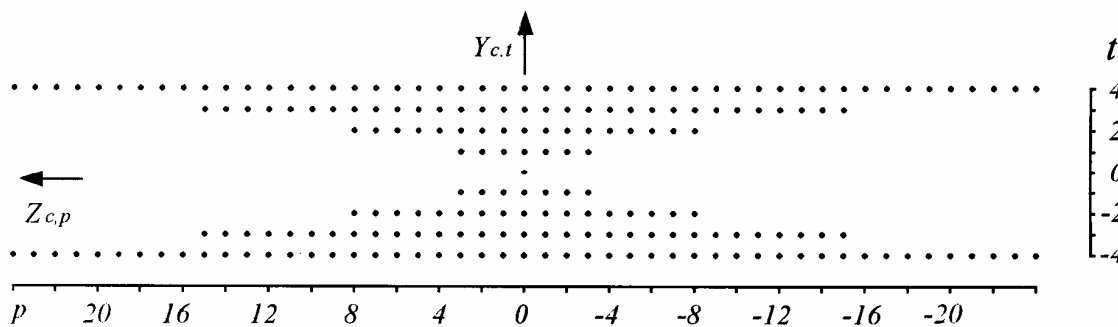


Рис. 4.45. Плоская решетка узлов $(p, s = 1, t)$

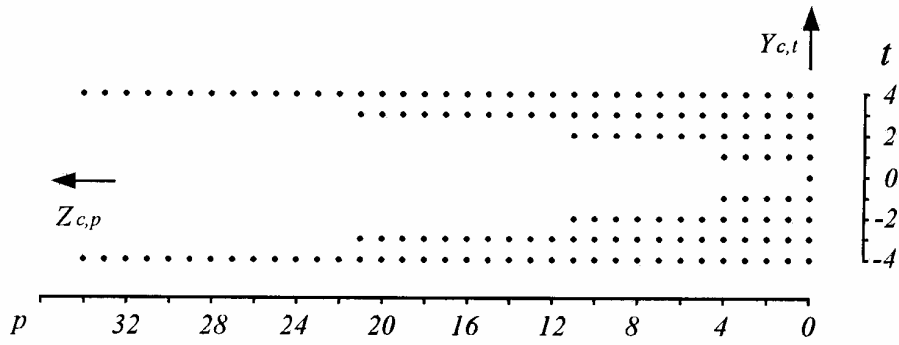


Рис. 4.46. Плоская решетка узлов ($p, s = 2, t$)

Если ($p = 0, s, t = 0$), то получаем линейную решетку ориентированную вдоль направления параллельного оси x (рис. 4.43).

На рис. 4.47, 4.49 изображены решетки с топологической структурой, задаваемой структурой полигональных чисел, в виде двуполостной системы узлов и «призмы».

На рис. 4.48 и рис. 4.50 приведены графические зависимости для рассеянных полей внутри этих решеток для случая возбуждения в них совмещенных резонансов ($1^p + 2^{cm}$) и ($1^{m,\varphi} + 2^{cm}$).

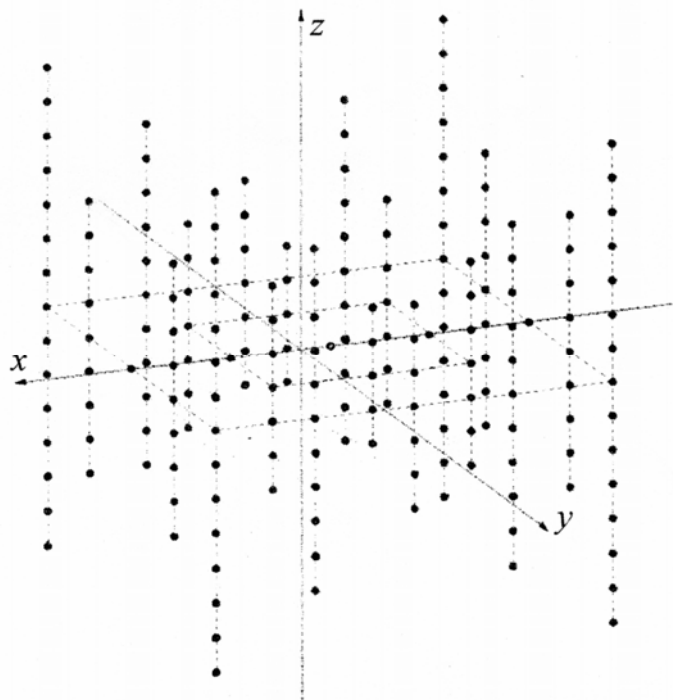


Рис. 4.47. Двуполостная топологическая структура системы узлов, заданная координатным представлением (4.12) и таблицей полигональных чисел (рис. 4.43), когда $(s, t) = 0, \pm 1, \pm 2$; $p = p(s, t)$

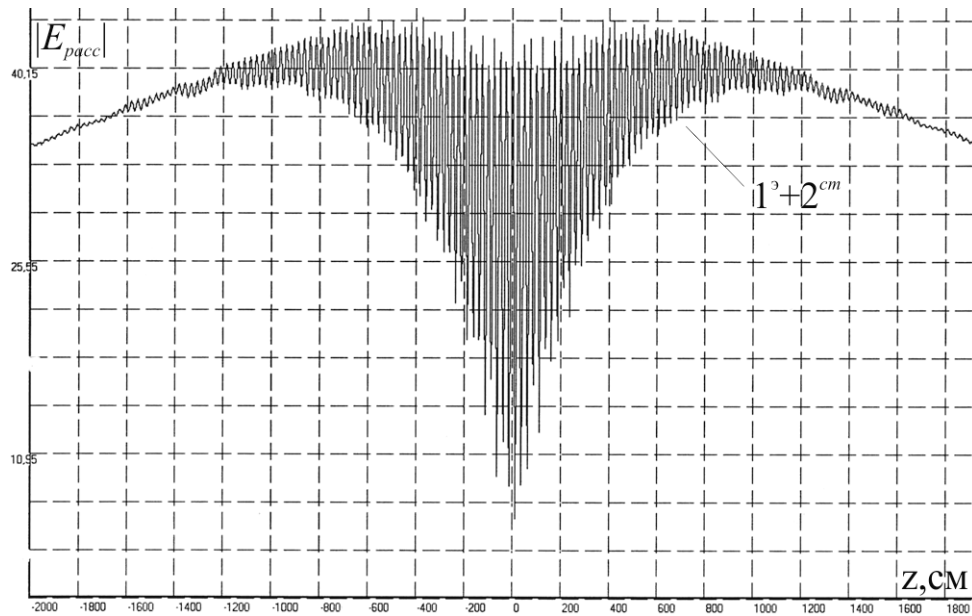


Рис. 4.48. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (3.18) для двуполостной системы сфер с топологической структурой (4.12), (рис. 4.47), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля z при $a = 0,5 \text{ см}$; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875 \text{ см}$; $x = y = 0 \text{ см}$; $(s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 8$; $p = p(s, t)$

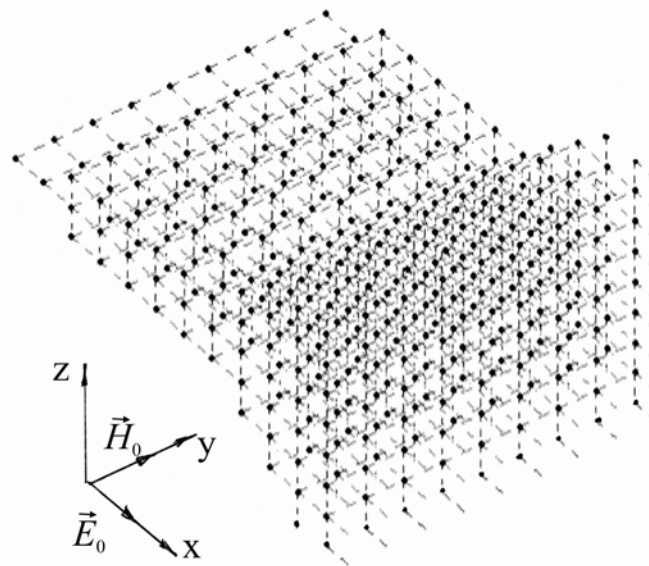


Рис. 4.49. Система плоских решеток узлов в виде «призмы» с огибающей внешней поверхностью, задаваемой структурой полигональных чисел (рис. 4.43), когда $(p, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$; $s = s(p)$

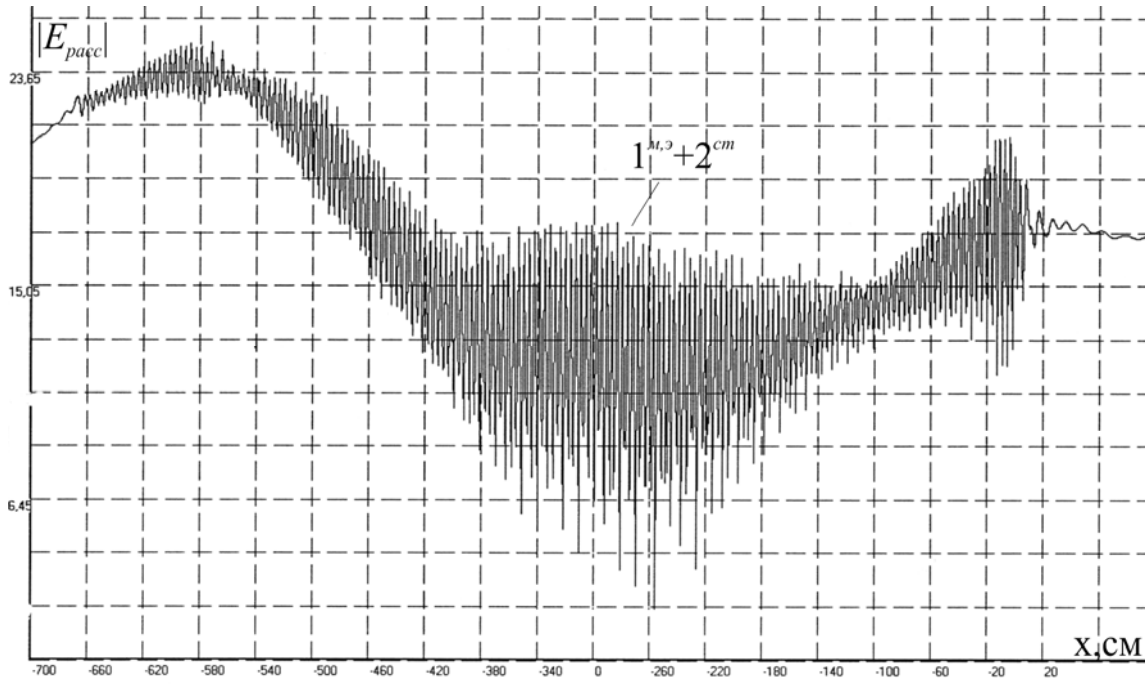


Рис. 4.50. Зависимость поля $|E_{pacc}|$ (2.19) системы сфер в виде «призмы» (рис. 4.49), когда в ней возбужден совмещенный резонанс $(1^{m,3} + 2^{cm})$, от изменения координаты точки наблюдения поля x при $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $\lambda_p^{m,3} = d = h = l = 7,41$ см; $x = y = 0$ см; $(p, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$; $s = s(p)$

4.8. Сложные трехмерные решетки с топологической структурой, задаваемой треугольником чисел Паскаля

Целью изложения является описание решетки [83], пространственное распределение узлов которой подчинено треугольнику чисел Паскаля [24].

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток c ($c \in C$), эти подрешетки c порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} \quad (s = \pm[j - |t|]), \\
 y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j), \\
 z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} \quad \left(p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[\frac{j!}{(j-|t|)!|t|!} - 1 \right] \right),
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

где значения p, s, t зависят от номера строк $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ треугольника чисел Паскаля, величины d, h, l определяются условиями $x=0, x=d; y=0, y=h; z=0, z=l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (3.2), (рис. 3.1). Здесь параметры p, s, t являются функциями $s = s(j, t); t = t(j); p = p(j, t)$.

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (3.2). Задавая максимальное значение для номера j строки треугольника чисел Паскаля в (4.13), можно изменять конфигурацию решеток.

Нужный тип элементарной ячейки решетки формируют из C узлов внутри области (3.2), которую повторит за пределами области (3.2) координатное представление (4.13) в виде пространственной решетки определенного вида.

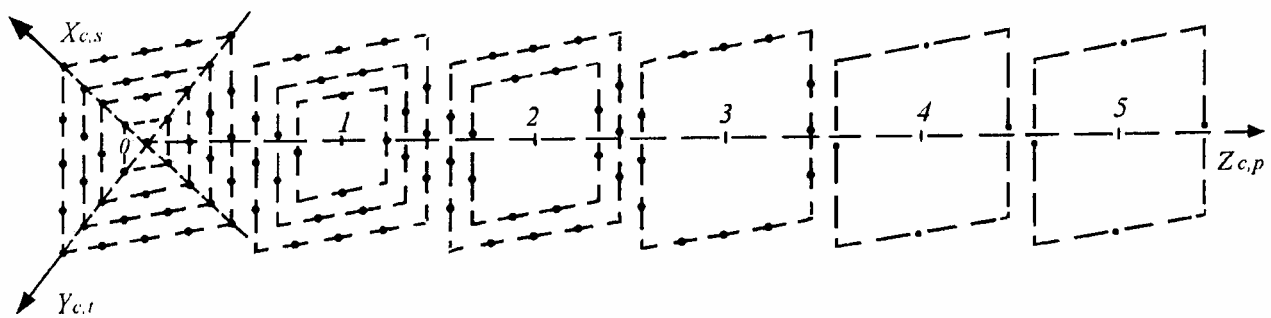


Рис. 4.51. Пространственное распределение узлов решетки, определяемое треугольником чисел Паскаля

На рис. 4.51 представлено пространственное распределение узлов решетки (4.13), когда порождающий узел решетки находится в центре области (3.2), для случая $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $z > 0$.

В квадранты рисунка 4.52 поместим четыре одинаковых треугольника чисел Паскаля так, что их вершины – строки с номером $j = 0$ и боковые стороны треугольников чисел совпадают и являются общими, здесь $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Тогда распределение сфер вдоль оси z можно подчинить треугольнику чисел Паскаля (рис. 4.52) и каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ поставить в соответствие определенное число треугольника Паскаля, например, точке $(p = 0, s = -3, t = -2)$ соответствует число 10, точке

$(p = 0, s = -2, t = 2)$ – число 6, а точке $(p = 0, s = 4, t = 1)$ – число 5.

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (4.13) для заданной точки $(p = 0, s, t)$ (рис. 4.52). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (4.13) и числом треугольника Паскаля существует связь, определяемая функцией

$$\frac{j!}{(j - |t|)!|t|!},$$

которая является биномиальным коэффициентом [24].

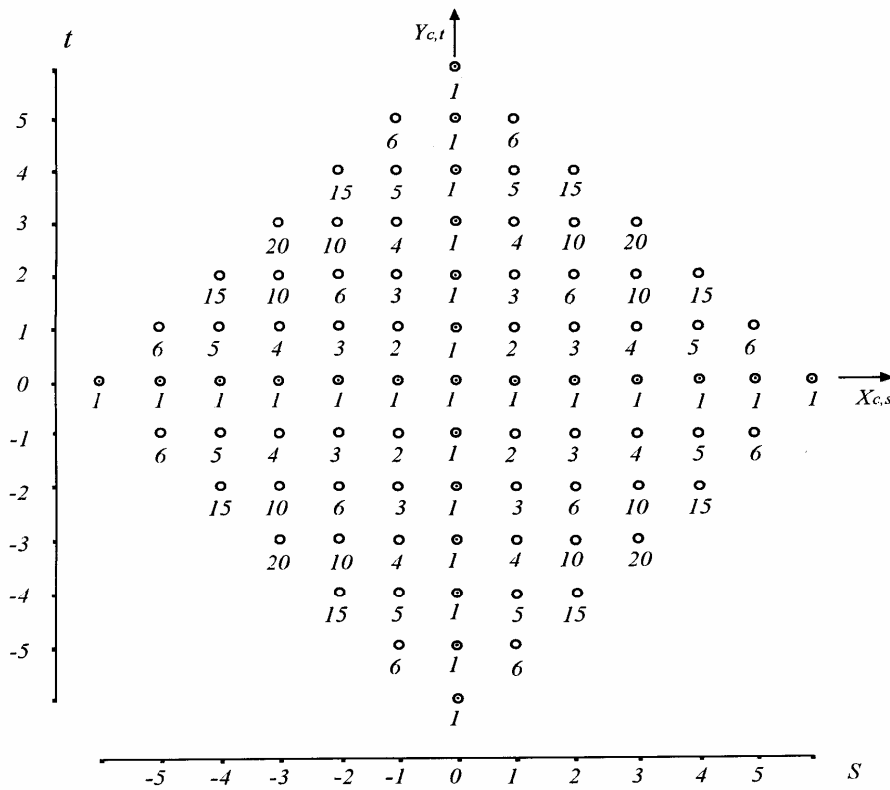


Рис. 4.52. Структура треугольника чисел Паскаля на плоскости $X_{c,s}, Y_{c,t}$

Отсюда числа p , определяющие координаты сфер вдоль оси z (4.13), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\frac{j!}{(j - |t|)!|t|!} - 1 \right), \quad \text{где } j = 0, 1, 2, 3, \dots; |t| = 0, 1, 2, 3, \dots, j.$$

Если изменять координаты узлов в области (3.2), то положения узлов вне области (3.2) также соответствующим образом смещаются и происходит

перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки (рис. 4.53).

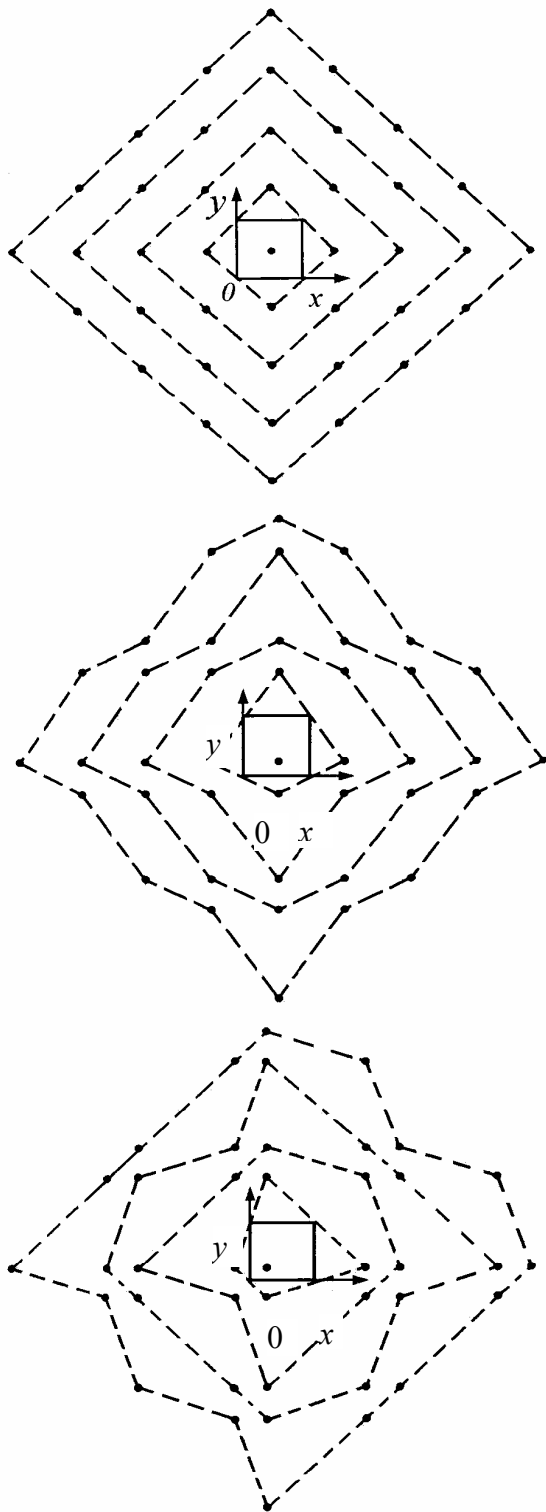


Рис. 4.53. Перестройка конфигурации узлов решетки

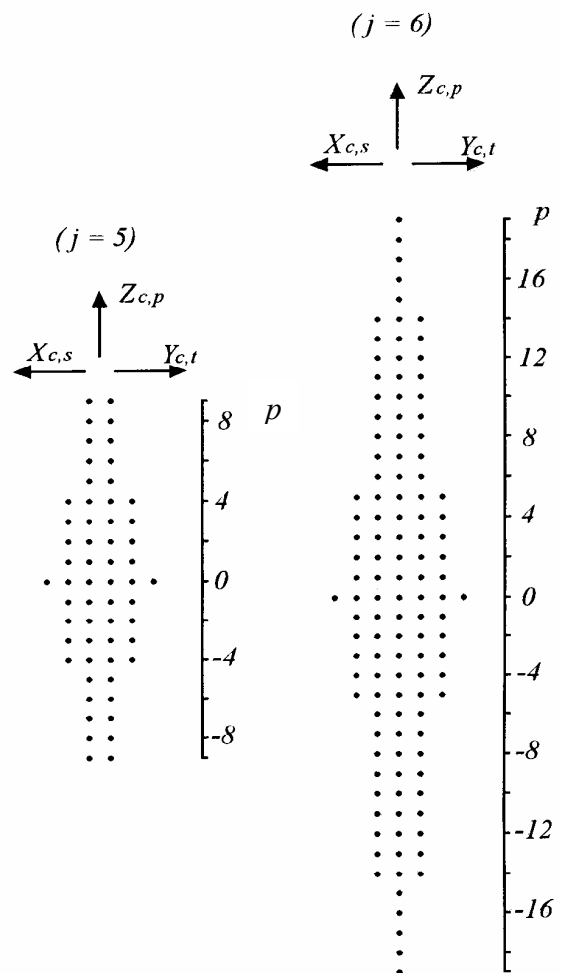


Рис. 4.54. Биномиальные плоские решетки узлов, когда номер строки треугольника Паскаля $j = 5; 6$

Расстояние между узлами найдем из выражения (3.3), учитывая значения координат узлов, определяемых координатным представлением (4.13), связанным с треугольником чисел Паскаля.

На основе таблицы чисел (рис. 4.52) можно изучать распределение узлов в виде «цилиндров», «призм», «пирамид» и «октаэдров».

Если в центре области (3.2) находится один порождающий узел решетки, то для сечения, когда $j = 5$ и $j = 6$ из (4.13), получим плоские решетки с расположением узлов вдоль оси z , подчиняющимся биномиальным коэффициентам (рис. 4.54).

Структура плоских решеток (рис. 4.54) типична для решеток со значениями номера j строк треугольника чисел Паскаля, отличающимся на единицу.

4.9. Системы двумерных решеток с топологической структурой, задаваемой биномиальными коэффициентами

Изложим описание структуры плоских решеток, пространственное распределение узлов которых подчинено биномиальным коэффициентам [63].

Биномиальные коэффициенты $C_j^{|t|}$ появляются в разложении бинома для показателя j

$$(a + b)^j = \sum_{|t|=0}^j C_j^{|t|} a^{j-|t|} b^{|t|} = C_j^0 a^j b^0 + C_j^1 a^{j-1} b^1 + \dots + C_j^j a^0 b^j, \quad (4.14)$$

где $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, $|t| = 0, 1, 2, 3, \dots$. Коэффициенты $C_j^{|t|}$ при одинаковых степенях a и b слева и справа в выражении (4.14) равны. Для всех целых неотрицательных чисел j , $|t|$ функция $C_j^{|t|}$ имеет вид

$$C_j^{|t|} = \frac{j!}{|t|!(j-|t|)!} \quad \text{для } 0 \leq |t| \leq j.$$

Рассмотрим в декартовой системе координат порождающее пространственную систему простых плоских однослойных решеток координатное представление вида (рис. 2.1)

$$\begin{aligned}
 x_{p,s} &= [s - \{(-1)^s - 1\}0.5]d - (-1)^{s-1} x_{p,s=0} \left(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[\frac{j!}{(j-|t|)! |t|!} - 1 \right] \right), \\
 y_{p,t} &= [t - \{(-1)^t - 1\}0.5]h - (-1)^{t-1} y_{p,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j), \\
 z_p &= z_0 + l_p = z_0 + pl \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

Смысл величин, содержащихся в (4.15), аналогичен смыслу аналогичных величин выражений (2.1), (2.2). В координатном представлении (4.15) параметры s, t зависят от параметров j, t и являются их функциями $s = s(j, t)$, $t = t(j)$.

Задавая максимальные значения чисел (j, p) в (4.15), можно изменить размеры решеток. Биномиальные коэффициенты определяют число узлов вдоль оси x (4.15) для заданной точки $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$.

На рис. 4.55 представлена система простых плоских однослойных решеток, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2.2), для случая $p = 1, 2, 3$ и с распределением узлов вдоль оси x , подчиняющимся биномиальным коэффициентам, когда $j = 6$. Каждой тройке чисел $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ ставится в соответствие определенное значение биномиального коэффициента, например, точке $(p = 1, s = 0, t = 4)$ – число 15, а точке $(p = 3, s = 0, t = -3)$ – число 20.

Здесь огибающая внешняя поверхность системы плоских решеток (рис. 4.55) определяется биномиальными коэффициентами.

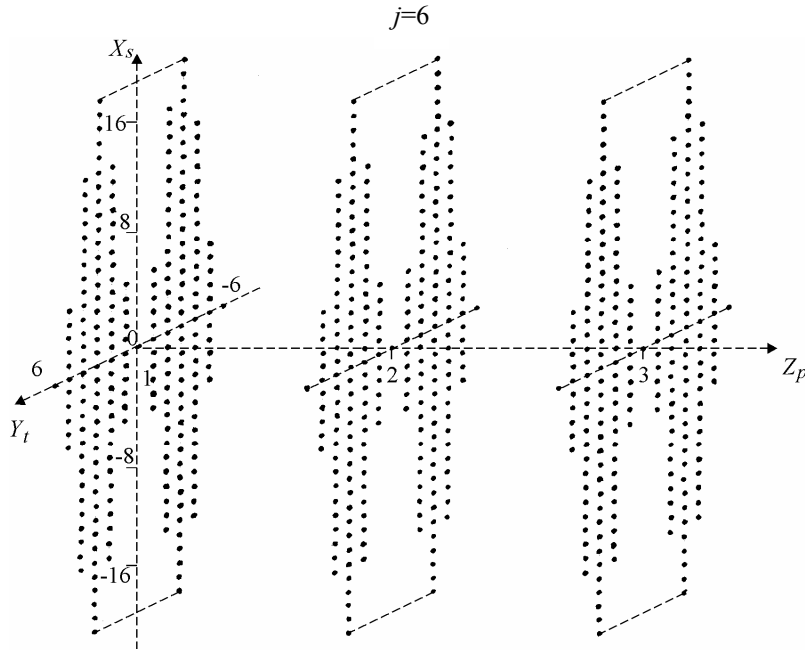


Рис. 4.55. Система биномиальных плоских решеток узлов, когда $j = 6$; $p = 1, 2, 3$; $t = t(j)$; $s = s(j, t)$

На рис. 4.56 представлен случай, когда $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и порождающий узел решетки находится в центре области (2.2).

Между тройкой чисел $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ и биномиальными коэффициентами существует связь, определяемая функцией

$$\frac{j!}{(j - |t|)! |t|!}.$$

Тогда числа s , определяющие координаты узлов вдоль оси x (4.15), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \left[\frac{j!}{(j - |t|)! |t|!} - 1 \right].$$

Если изменять координаты узлов, находящихся в пределах области (2.2), то в соответствии с координатным представлением (4.15) положения узлов решеток вне области (2.2) будут также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную конфигурацию решеток.

Расстояние между узлами решетки (4.15) определяется соотношением (2.3), в которое входит зависимость от биномиальных коэффициентов.

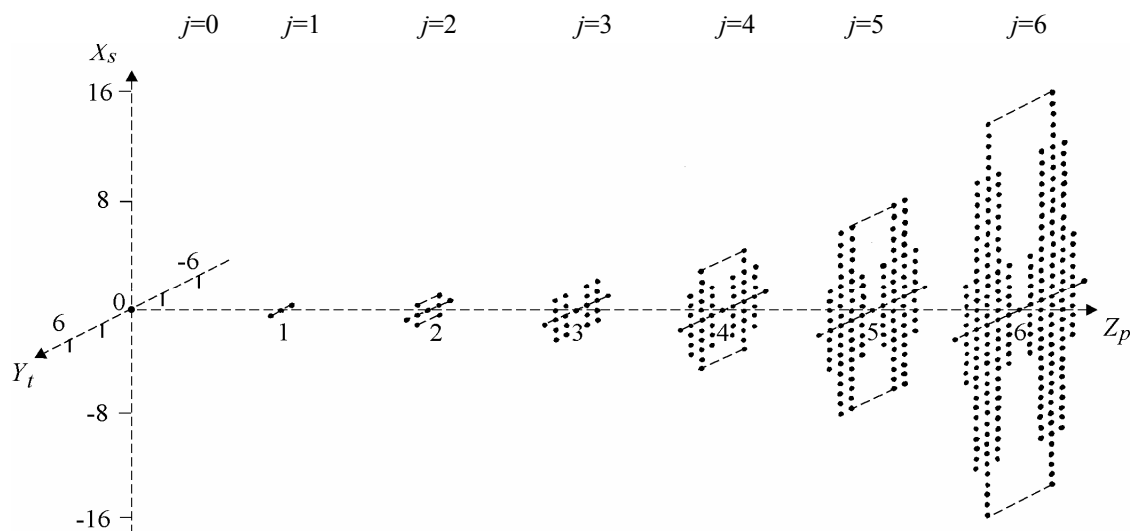


Рис. 4.56. Система биномиальных плоских решеток узлов, когда $(j, p) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $t = t(j)$; $s = s(j, t)$

Рассеянное поле (2.19) для систем решеток (4.15) находят аналогично решению задачи, представленной в работе [63].

На рис. 4.57 представлено численное исследование поля $|E_{расc}|$ (2.19) внутри и вне «цилиндра», состоящего из системы плоских решеток (рис. 4.55). В «цилиндре» возбужден совмещенный электрический резонанс рассеяния $(1^э + 2^{cm})$.

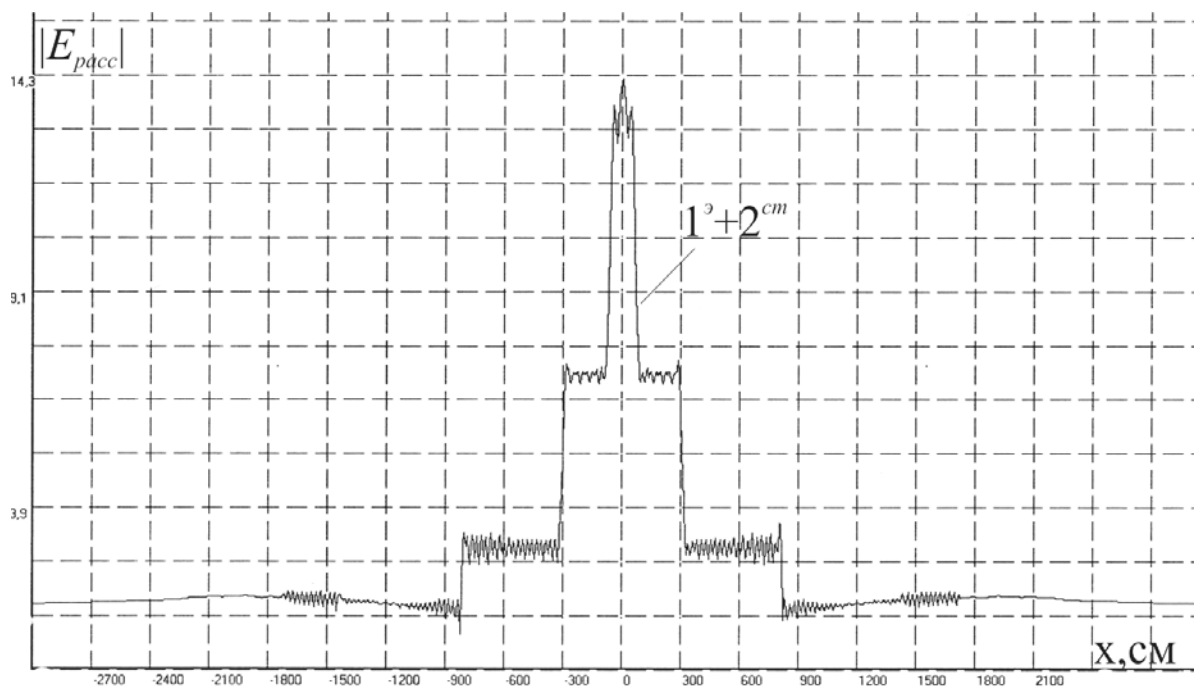


Рис. 4.57 а

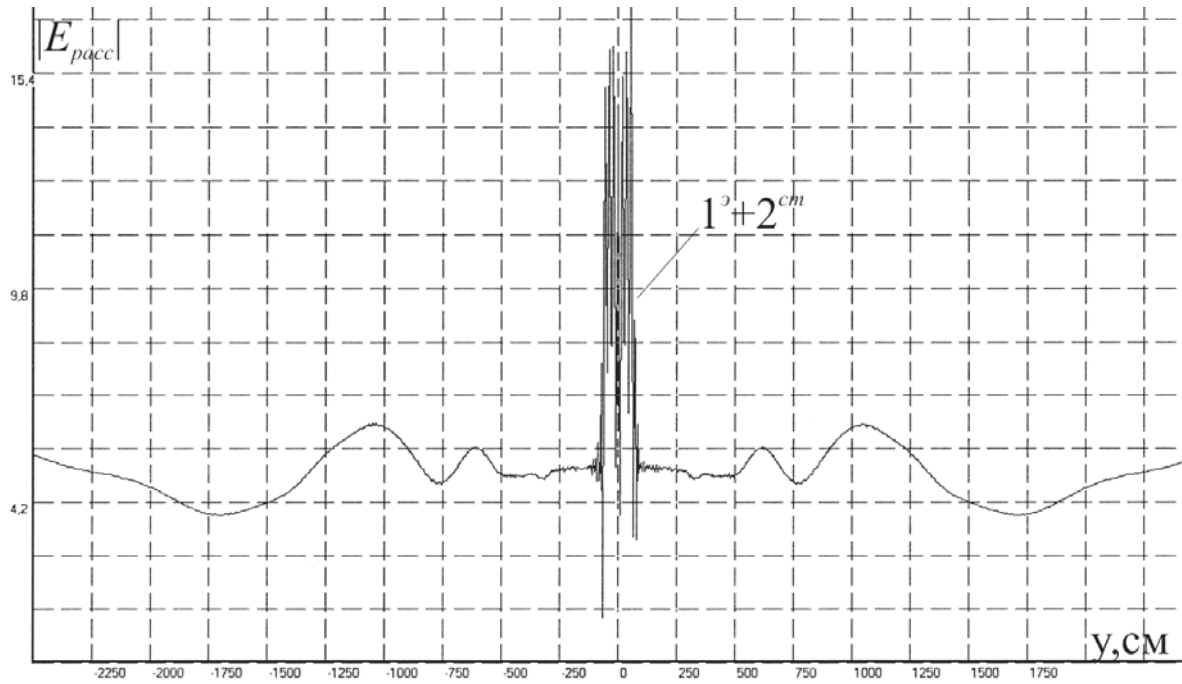


Рис. 4.57 б

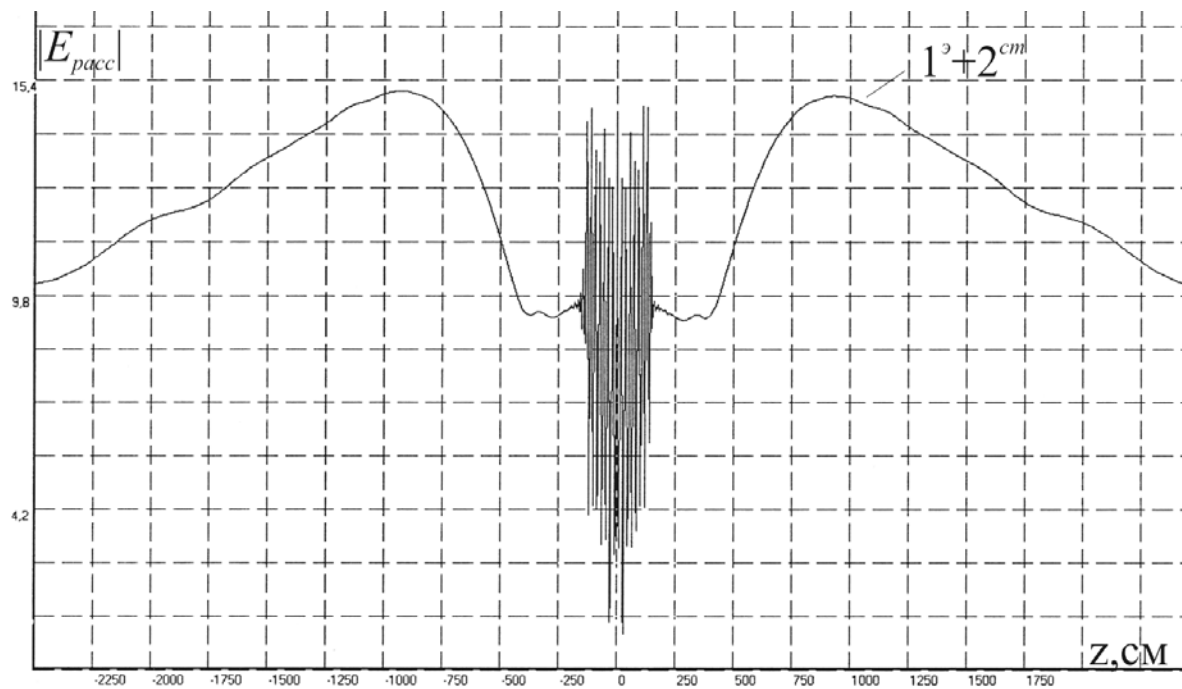


Рис. 4.57 с

Рис. 4.57. Зависимость поля $|E_{racc}|$ (2.19) «цилиндра» (рис. 4.55) с огибающей поверхностью, подчиненной биномиальным коэффициентам строки треугольника Паскаля с номером $j=10$ (рис. 4.52), от изменения координат x, y, z точки наблюдения поля при $a=0,5$ см; $\epsilon'=95$; $\mu'=1$; $\lambda_p^3 = d = h = l = 6,875$ см; $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ см; $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$; $s = s(t)$

Изменяя номер j строк треугольника Паскаля (рис. 4.52), можно менять топологическую структуру систем плоских решеток, а значит влиять на их рассеивающие свойства внутри и вне «цилиндра».

4.10. Системы двумерных решеток с топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи

Крупнейший математик эпохи средневековья Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи написал в 1202 году трактат «Liber abaci», в котором приведен числовой ряд 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, Этот ряд в честь автора назвали рядом Фибоначчи, а его члены – числами Фибоначчи. Математик Бине вывел формулу

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad (4.16)$$

с помощью которой любое число Фибоначчи можно определить непосредственно как некоторую функцию его натурального номера $n=1, 2, 3 \dots$ [64]. Отношение чисел Фибоначчи с номерами $n+1$ и n имеет значение «золотого сечения» $\sim 1,618$.

Опишем структуру плоской решетки, пространственное распределение узлов которой подчинено числовому ряду Фибоначчи [65, 66].

Рассмотрим в декартовой системе координат порождающее пространственную систему простых плоских однослойных решеток координатное представление вида

$$\begin{aligned} x_{p,s} &= [s - \{(-1)^s - 1\}0.5]d - (-1)^{s-1} x_{p,s=0} \left(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{|t|+1} - \beta^{|t|+1}) - 1 \right] \right), \\ y_{p,t} &= [t - \{(-1)^t - 1\}0.5]h - (-1)^{t-1} y_{p,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_p &= z_0 + l_p = z_0 + pl \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, $|t| + 1 = n$; величины d, h определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h$, а $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$ – координаты порождающих решетку узлов и находящихся внутри области (2.2), (рис. 2.1).

По смыслу величины выражений (4.17) аналогичны величинам соотношений (2.1), (2.2). Параметр s в (4.17) зависит от параметра t и является его функцией $s = s(t)$.

Задавая максимальные значения чисел (p, t) в (4.17), можно рассматривать конечные решетки разной конфигурации. Числа Фибоначчи определяют число узлов вдоль оси x (4.17) для заданной точки $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$.

На рис. 4.58 представлена система простых плоских однослойных двуполостных (а) и ромбовидных (б) решеток, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2.2), для случая $p = 1, 2$ и с распределением узлов вдоль оси x , подчиняющимся числам Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Каждой тройке чисел $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ ставится в соответствие определенное число Фибоначчи, например, точке $(p = 1, s = 0, t = -4)$ – число 5, а точке $(p = 2, s = 0, t = 7)$ – число 21. На основе конфигураций, представленных на рис. 4.58, можно изучать системы плоских решеток в виде «призмы» и «цилиндра» (рис. 4.62). У этих систем плоских решеток (рис. 4.58; 4.62) огибающая внешняя поверхность подчинена «золотому сечению» (золотой пропорции) [24].

Между тройкой чисел $(p, s = 0, t)$ плоскости $y_{p,t}, z_p$ и числом Фибоначчи существует связь, определяемая функцией (4.16)

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{|t|+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{|t|+1} \right].$$

Отсюда числа s , определяющие координаты узлов вдоль оси x (4.17), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{|t|+1} - \beta^{|t|+1}) - 1 \right], \quad \text{где } |t|=0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

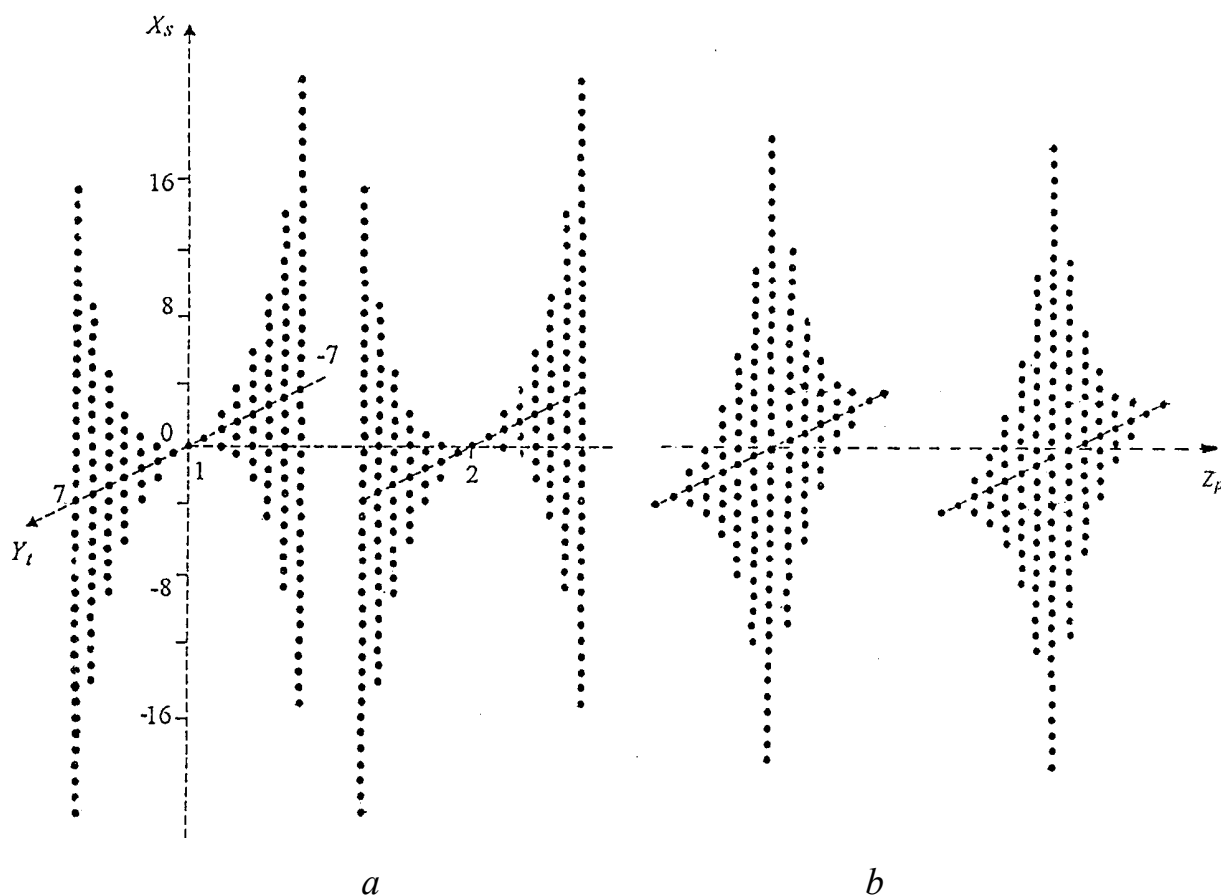


Рис. 4.58. Системы плоских решеток узлов Фибоначчи, когда $p = 1, 2$;
 $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$; $s = s(t)$

Если изменять координаты узлов, находящихся в пределах области (2.2), то положения узлов решеток вне области (2.2) будут также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную конфигурацию решеток.

Расстояние между узлами решетки (4.17) определяется выражением (2.3), связанным с числовым рядом Фибоначчи.

Рассеянное поле (2.19) для системы решеток (4.17) находят аналогично решению задачи, представленной в работе [65].

На рис.4.59, 4.60, 4.61 для двуполостной структуры сфер (рис. 4.58 *a*) численно рассмотрено распределение поля $|E_{расc}|$ внутри структуры для случаев,

когда в структуре сфер возбуждены совмещенные резонансы $(1^M + 2^{cm})$, $(1^{\vartheta} + 2^{cm})$ и $(1^{M,\vartheta} + 2^{cm})$.

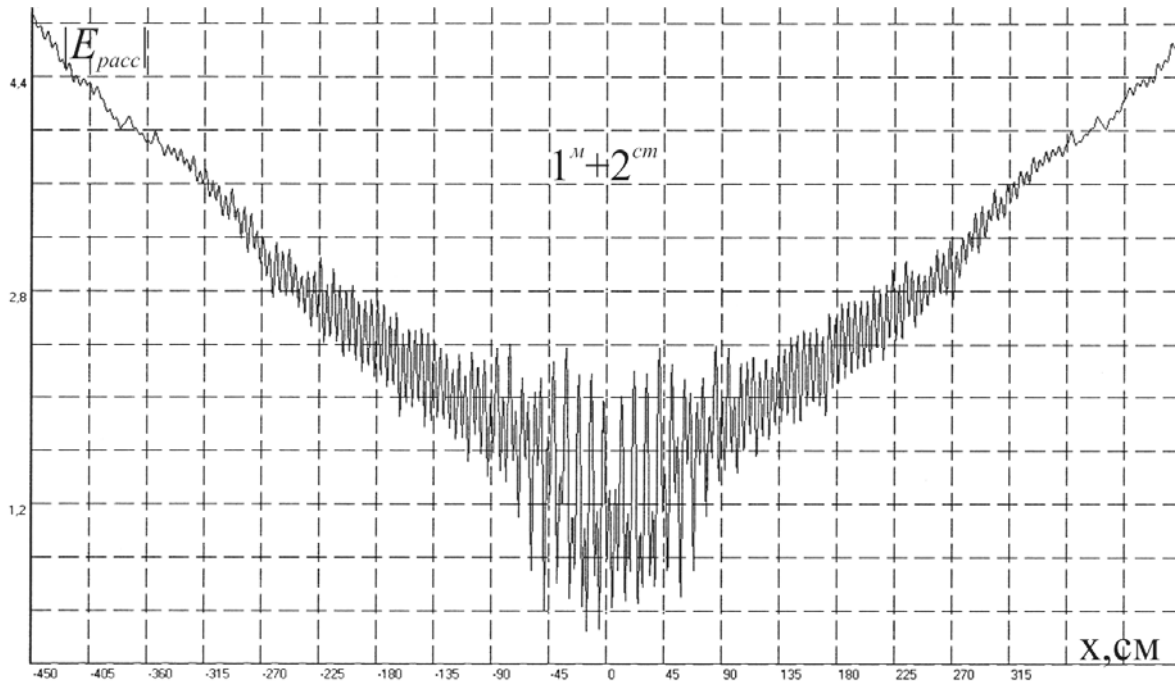


Рис. 4.59 а

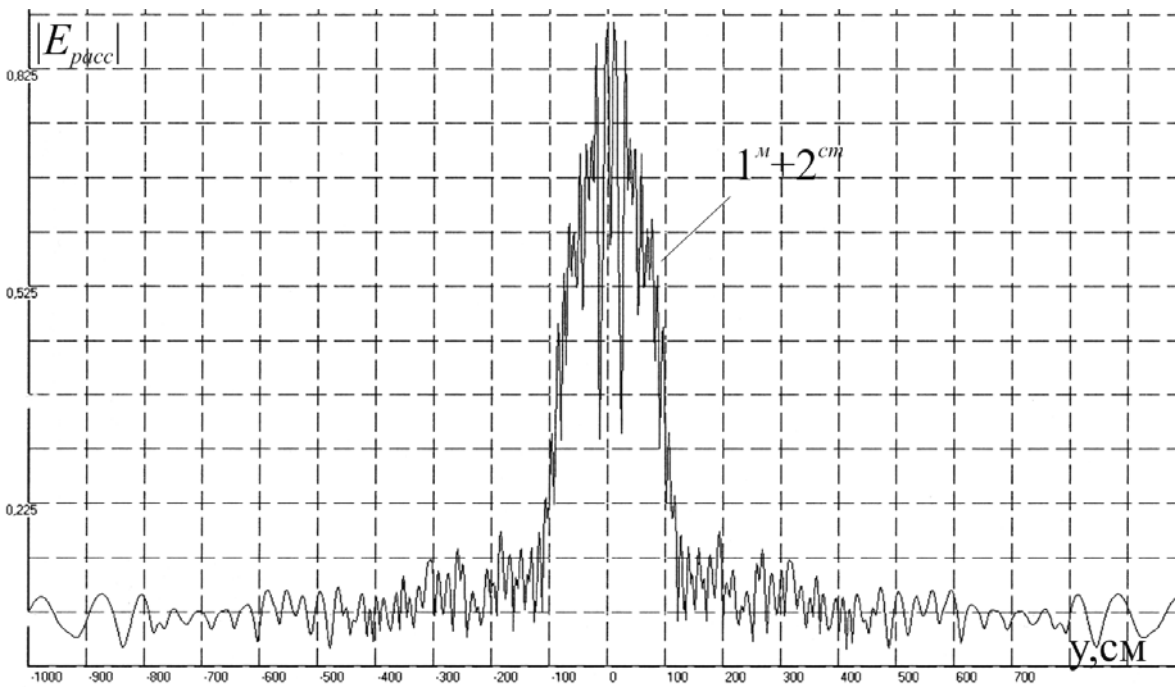


Рис. 4.59 б

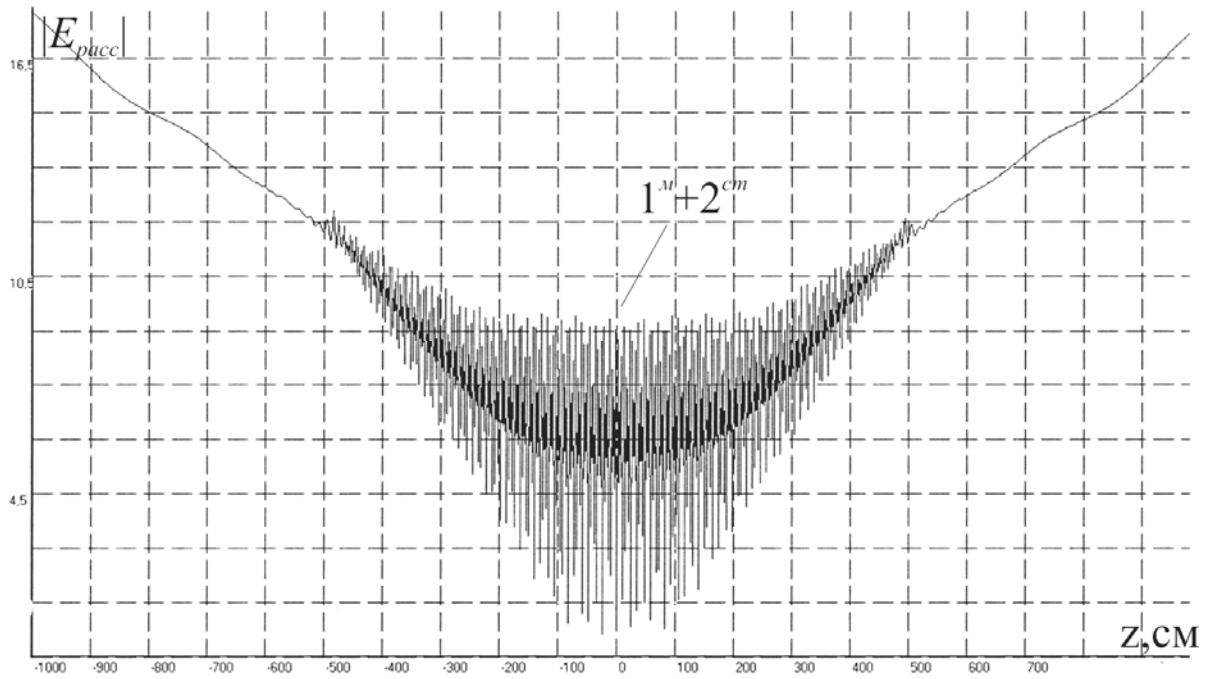


Рис. 4.59 с

Рис. 4.59. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) системы плоских двуполостных решеток (4.17), (рис. 4.58 а) с внешней топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи, когда $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^m = d = h = l = 9,66$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = z_{p=0} = 4,83$ см; $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$ см; $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 9$; $s = s(t)$, от изменения:

- а) координаты точки наблюдения поля x , $y = z = 0$ см,
- б) координаты точки наблюдения поля y , $x = z = 0$ см,
- с) координаты точки наблюдения поля z , $x = y = 0$ см

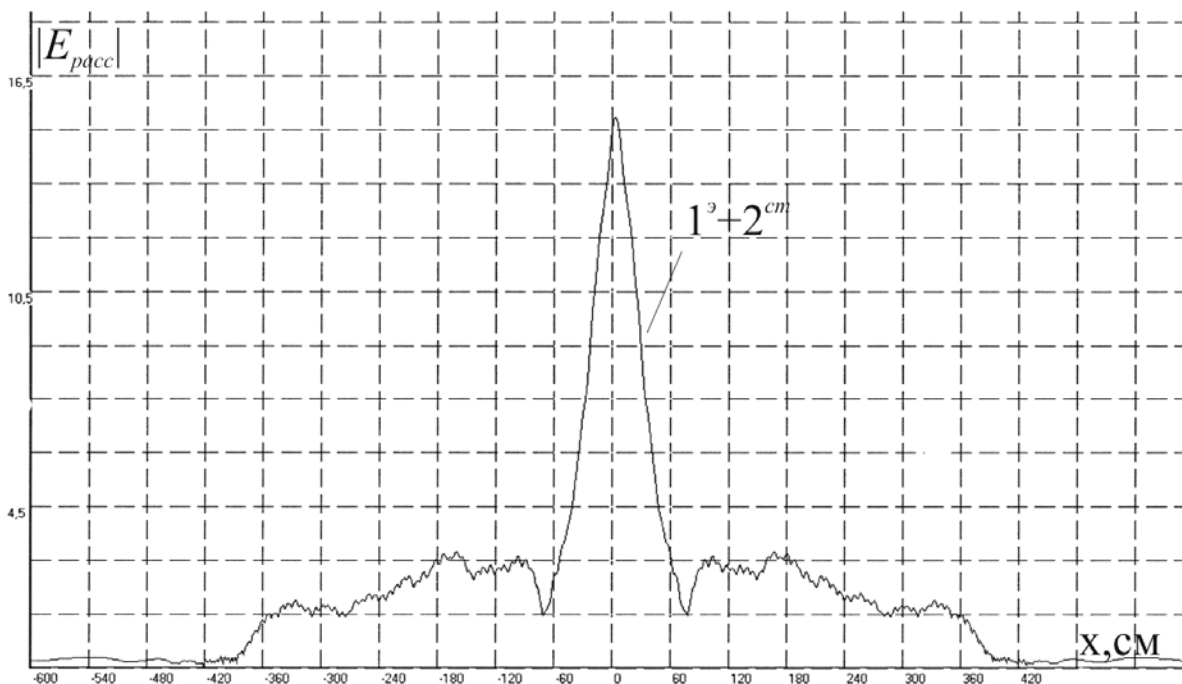


Рис. 4.60 а

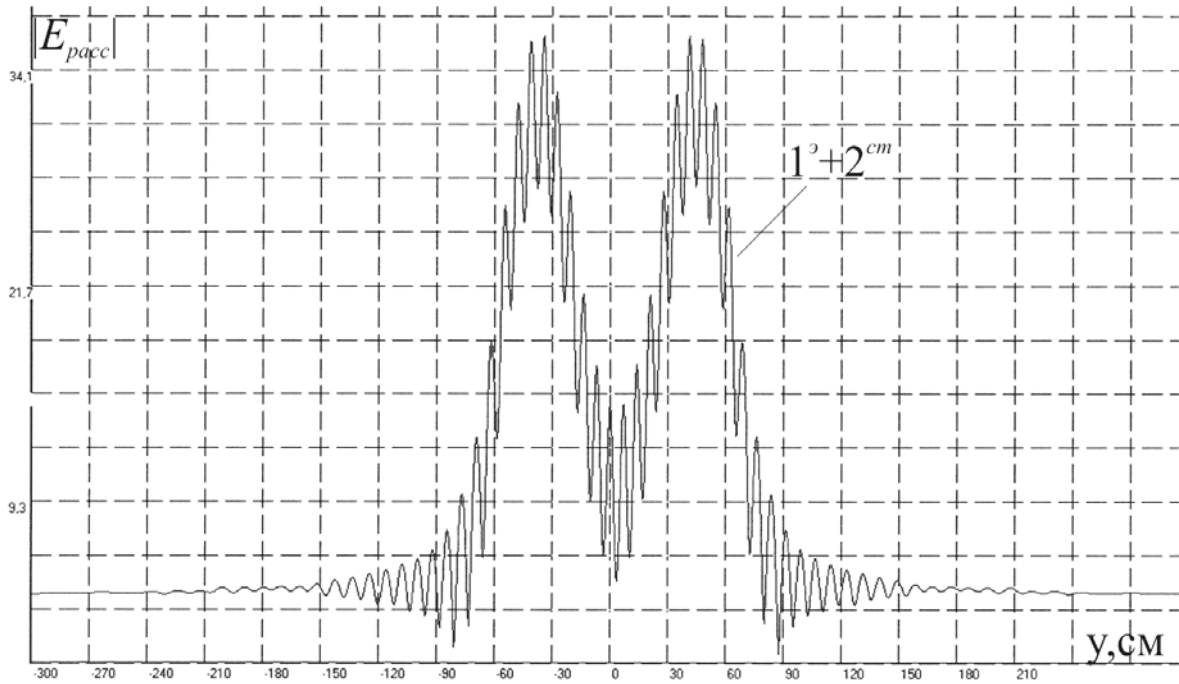


Рис. 4.60 б

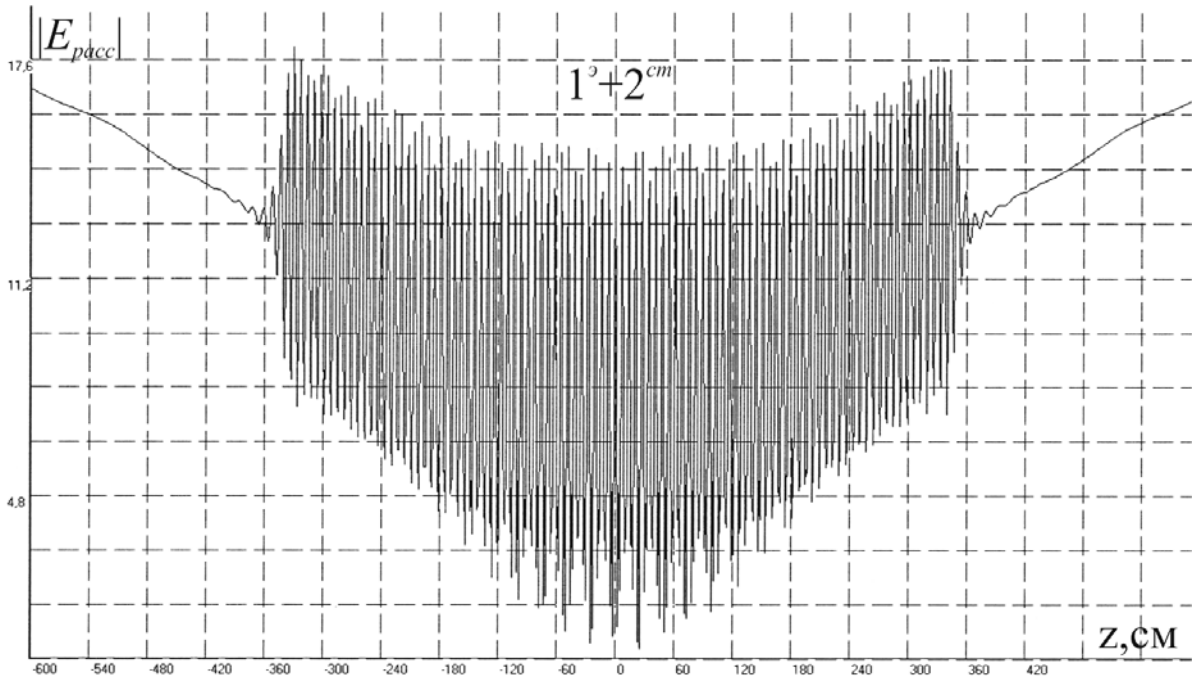


Рис. 4.60 с

Рис. 4.60. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) системы плоских двуполостных решеток (4.17), (рис. 4.58 а) с внешней топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи), когда $a = 0,5$ см; $\epsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $\lambda_p^o = d = h = l = 6,88$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = z_{p=0} = 3,44$ см; $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$ см; $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 9$; $s = s(t)$, от изменения:

- а) координаты точки наблюдения поля x , $y = z = 0$ см,
- б) координаты точки наблюдения поля y , $x = z = 0$ см,
- с) координаты точки наблюдения поля z , $x = y = 0$ см

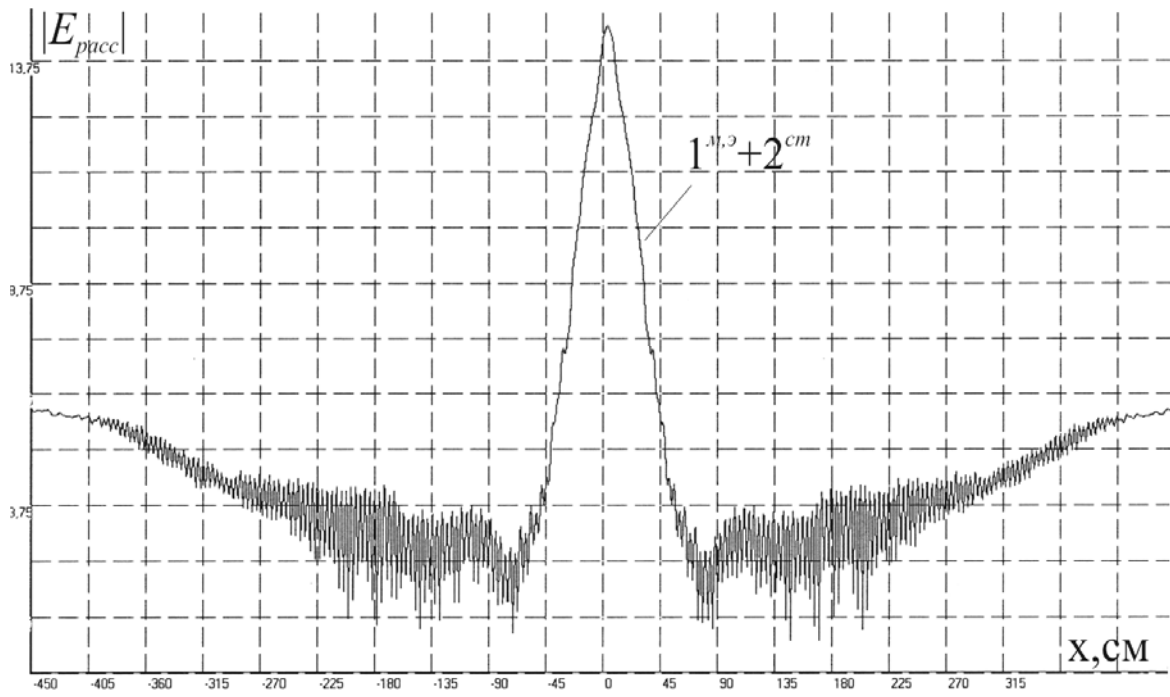


Рис. 4.61 а

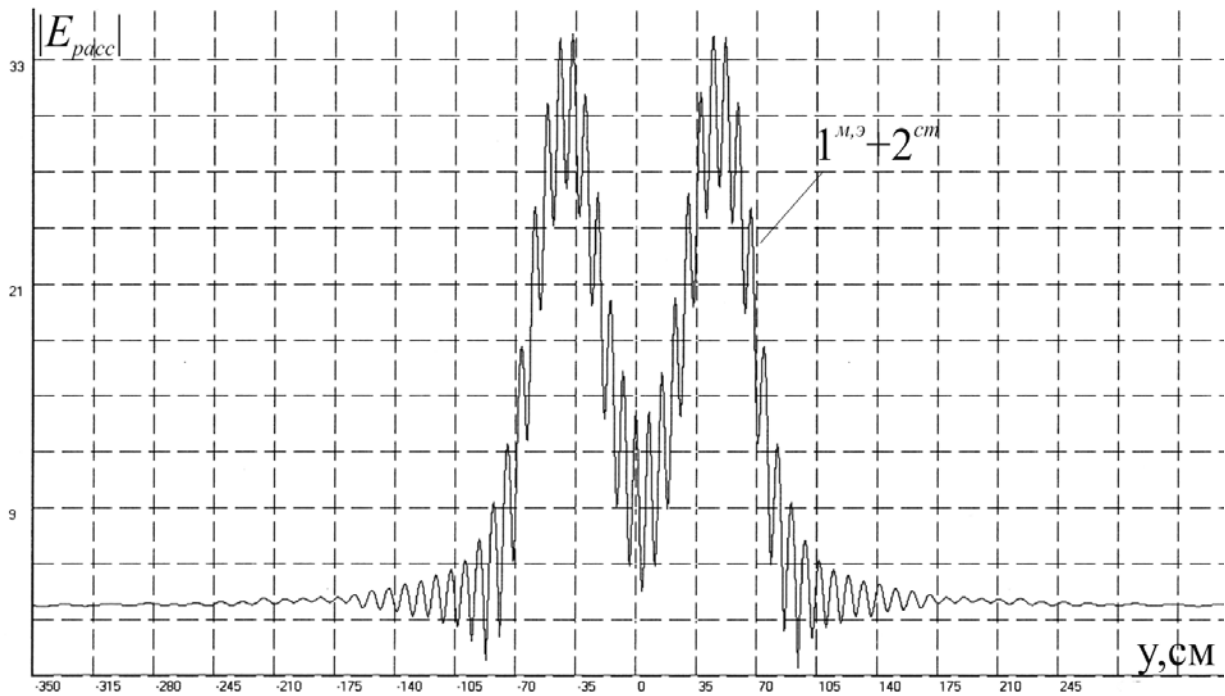


Рис. 4.61 б

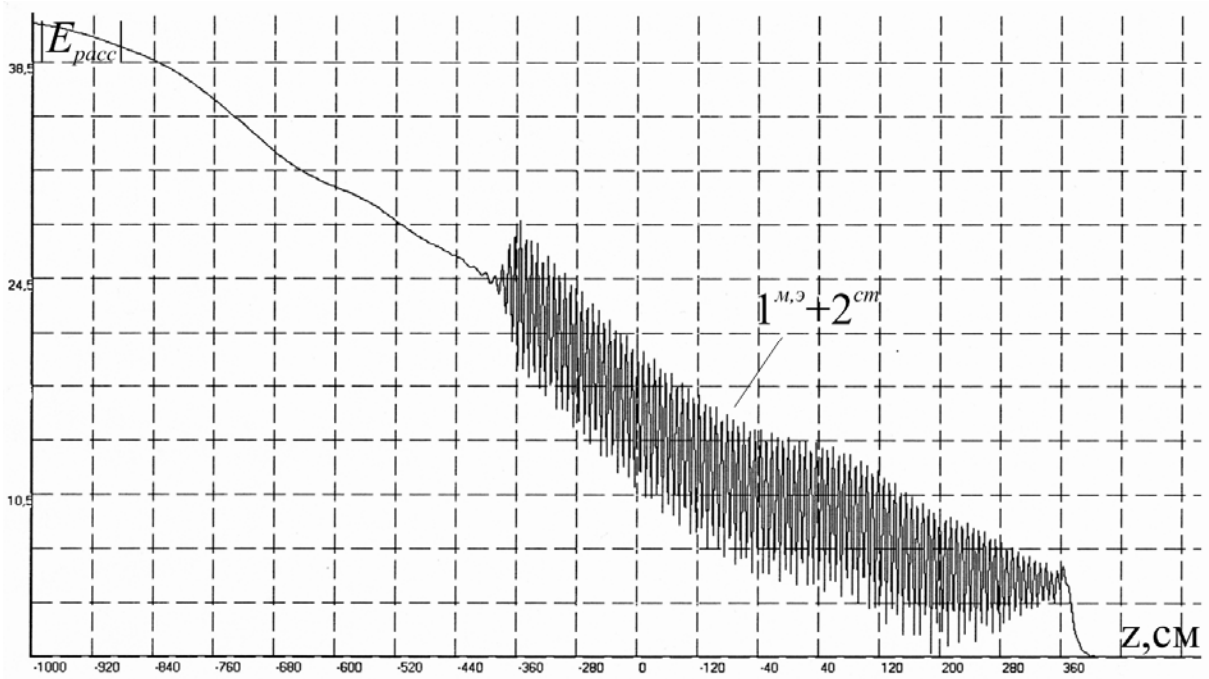


Рис. 4.61 с

Рис. 4.61. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) системы плоских двуполостных решеток (4.17), (рис. 4.58 а) с внешней топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи, когда $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$; $\lambda_p^{M, \varnothing} = d = h = l = 7,41$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = z_{p=0} = 3,705$ см; $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$ см; $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 9$; $s = s(t)$, от изменения:

- а) координаты точки наблюдения поля x , $y = z = 0$ см,
- б) координаты точки наблюдения поля y , $x = z = 0$ см,
- с) координаты точки наблюдения поля z , $x = y = 0$ см

На рис. 4.61 с рассматриваемая волна движется из области $z > 0$.

Проведено численное исследование поля $|E_{pacc}|$ для систем плоских решеток, представленных на рис. 4.62 (4.17) – «призма» и «цилиндр» Фибоначчи [65, 66]. Для этих пространственных структур сфер внутренняя топологическая структура задается натуральным рядом чисел, а внешняя – числовым рядом Фибоначчи. Здесь огибающая их внешняя поверхность подчинена «золотому сечению».

На рис. 4.63, 4.64 представлено распределение поля $|E_{pacc}|$ по осям x, y, z «призмы» и «цилиндра» Фибоначчи (рис. 4.62), когда в них возбуждены совмещенные резонансы $(1^M + 2^{cm})$ и $(1^{M, \varnothing} + 2^{cm})$.

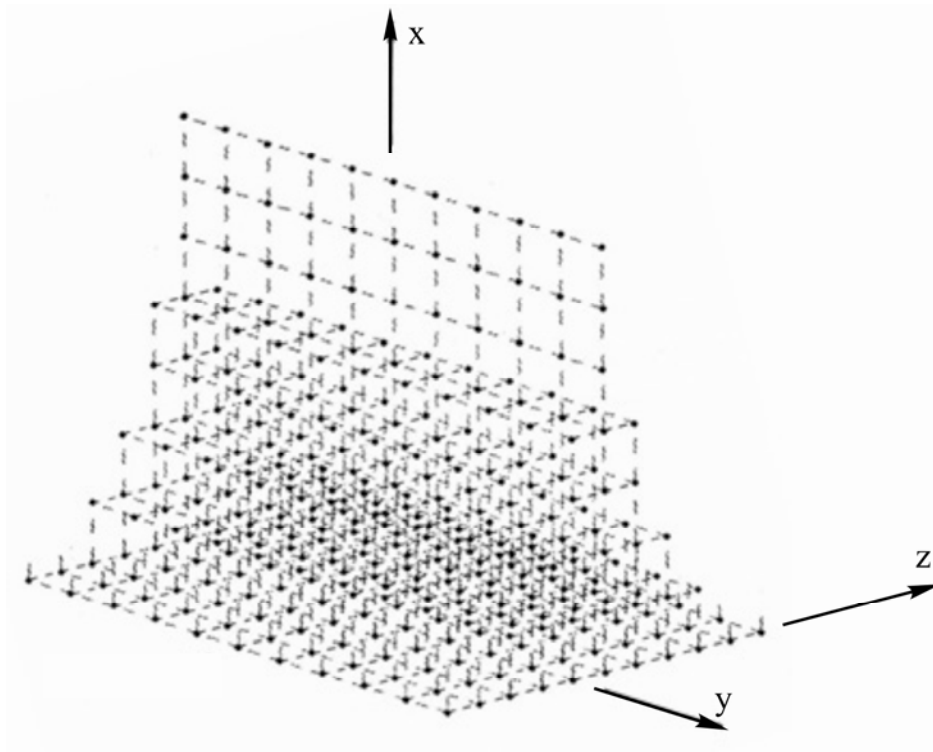


Рис. 4.62 а

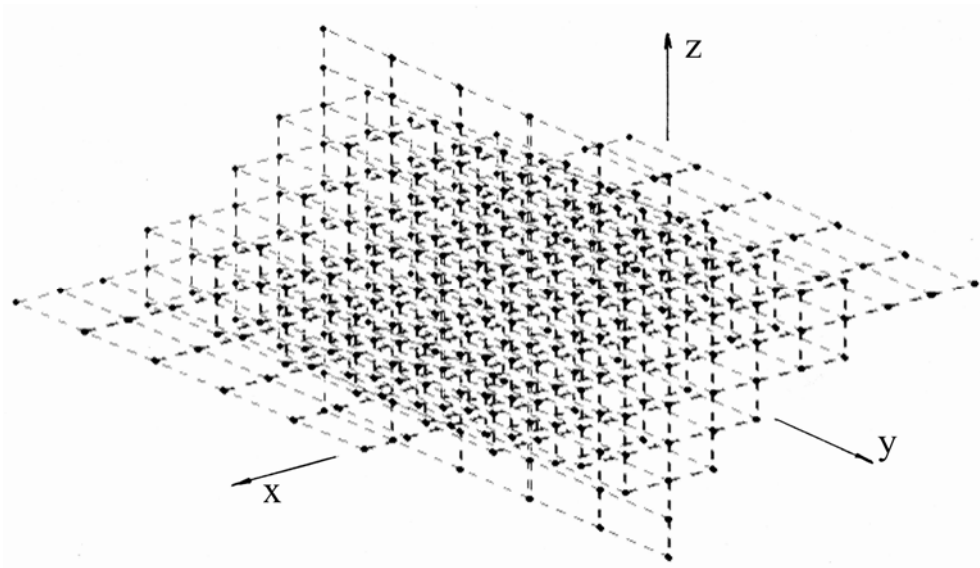


Рис. 4.62 б

Рис. 4.62. Системы плоских решеток узлов в виде «призмы» (а) и «цилиндра» (б) Фибоначчи, когда $(p, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 5$; $s = s(p)$

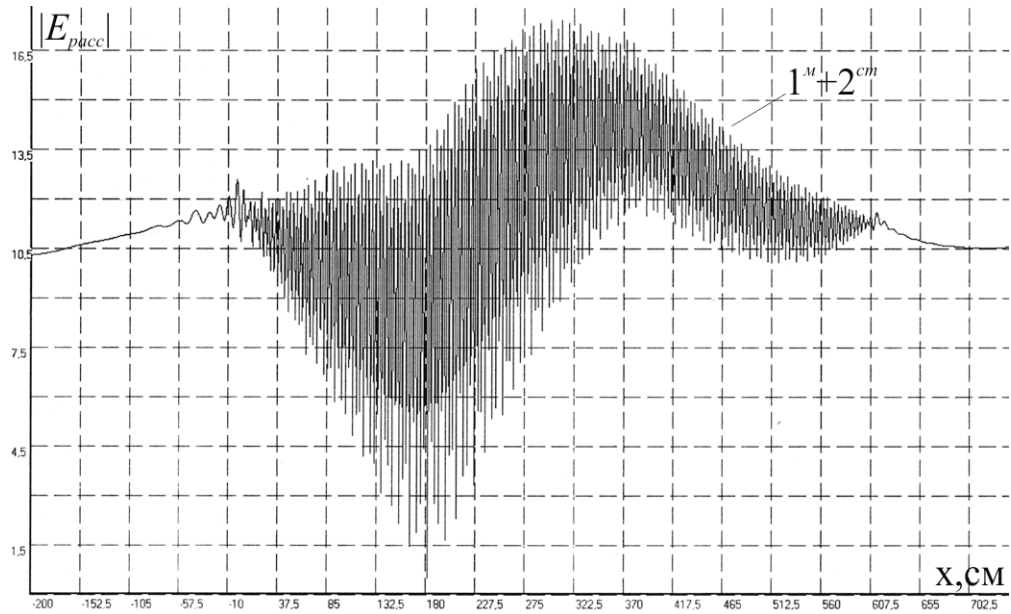


Рис. 4.63 а

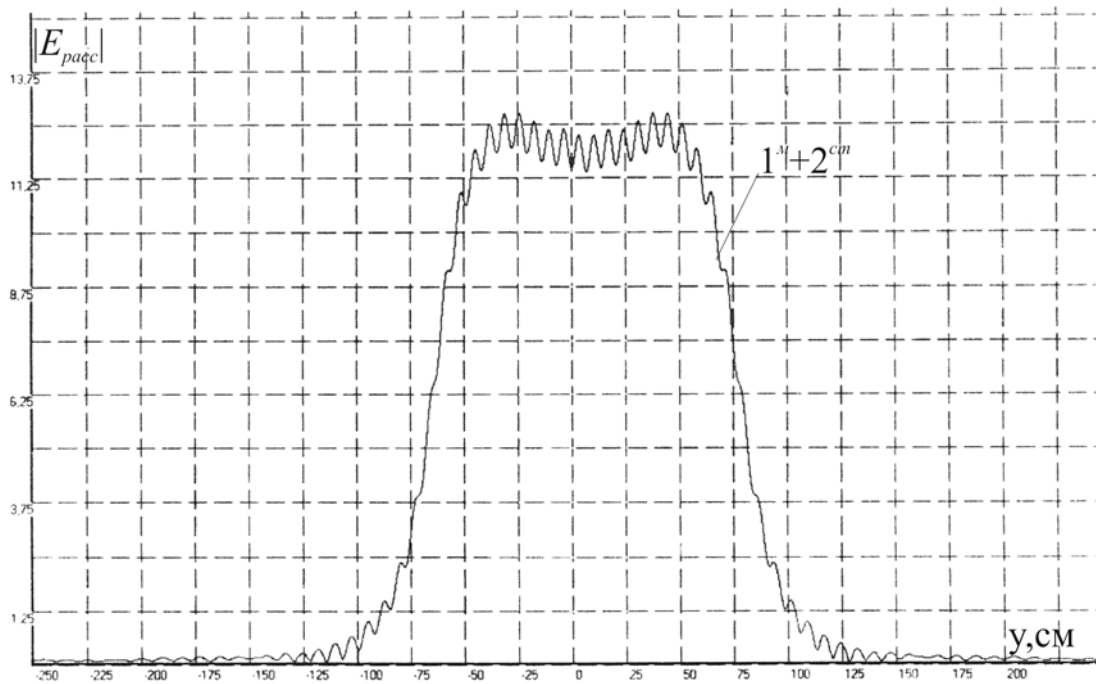


Рис. 4.63 б

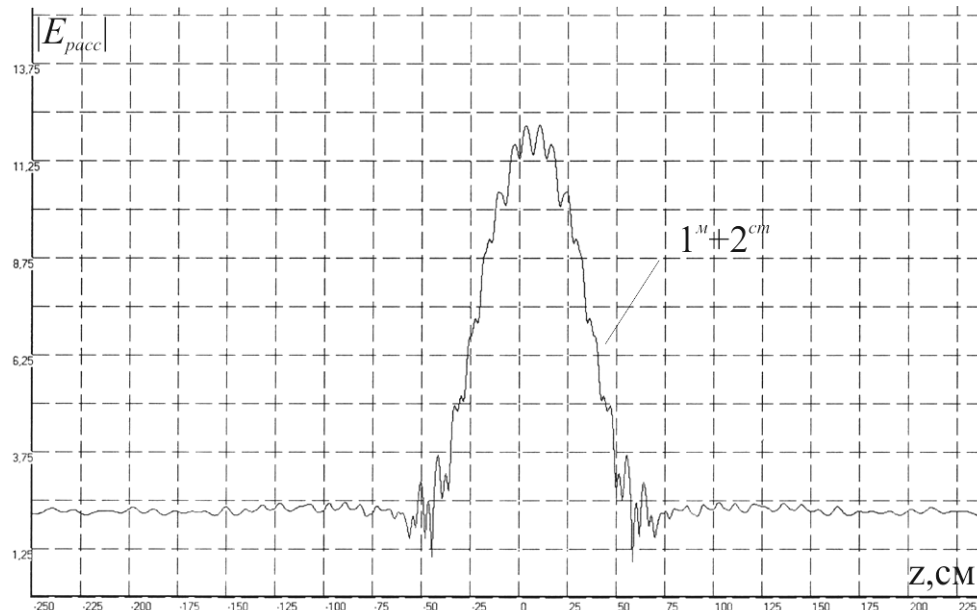


Рис. 4.63 с

Рис. 4.63. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19) системы плоских решеток в виде «призмы» (рис. 4.68 а) с внешней топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи, когда $a=0,356$ см; $\varepsilon'=95$; $\mu'=1$; $\lambda_p^M = d = h = l = 6,875$ см;

$$y_{s=0} = y_{t=0} = z_{p=0} = 3,4375 \text{ см}; \quad (p,t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 10; \quad s = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{|p_0 - |p|+1} - \beta^{|p_0 - |p|+1} \right) - 1 \right],$$

$s = s(p)$; где $\alpha = 1/2(1 + \sqrt{5})$, $\beta = 1/2(1 - \sqrt{5})$, от изменения:

- а) координаты точки наблюдения поля x , $y = z = 0$ см,
- б) координаты точки наблюдения поля y , $x = z = 0$ см,
- с) координаты точки наблюдения поля z , $x = y = 0$ см

Из анализа графических зависимостей, приведенных на рис. 4.59, 4.60, 4.61, 4.63, 4.64 следует, что на основе одной и той же структуры чисел – числового ряда Фибоначчи можно формировать системы плоских решеток с особыми рассеивающими свойствами. Изменяя параметры этих систем, можно регулировать модовый состав рассеянного поля и изменять их частотные свойства, что позволяет использовать эти системы в различного рода многочастотных системах по управлению полем излучения электромагнитных излучателей.

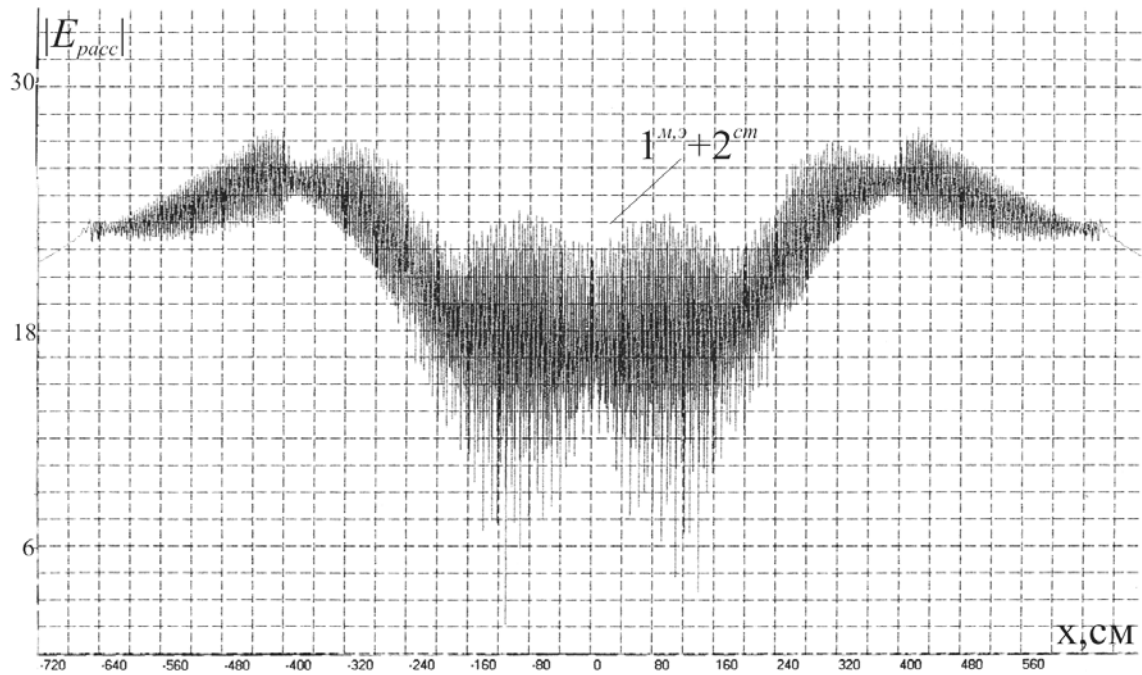


Рис. 4.64 а

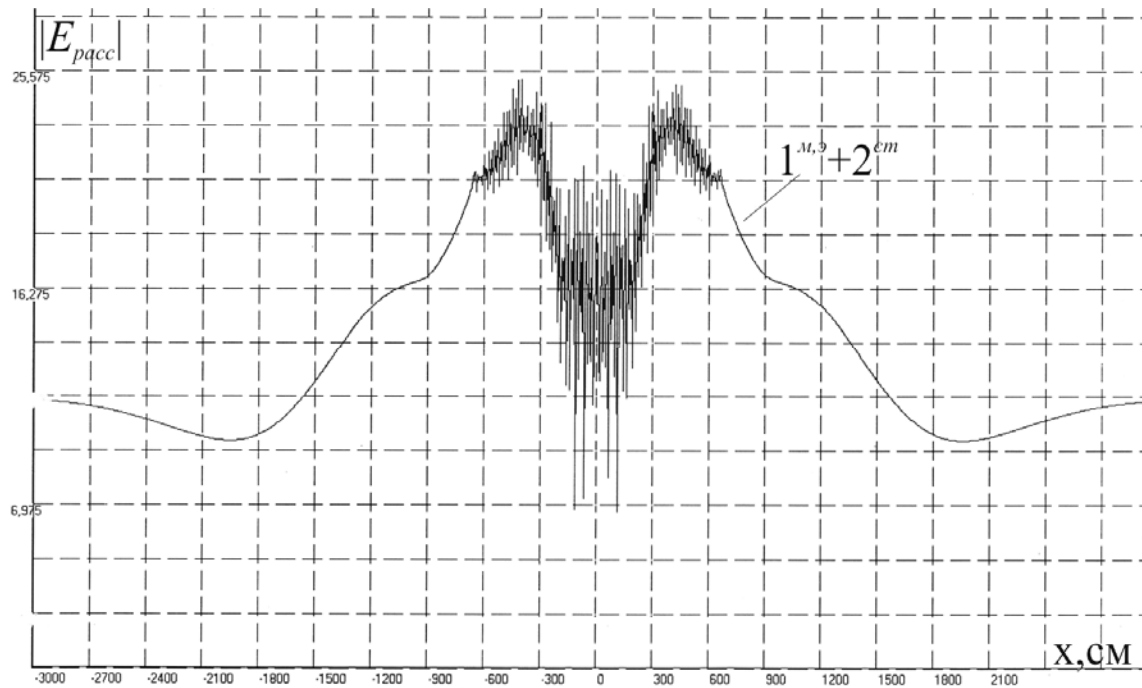


Рис. 4.64 б

Рис. 4.64. Зависимости поля $|E_{pacc}|$ (2.19), (4.17) системы плоских решеток в виде «цилиндра» (рис. 4.62 б) с внешней топологической структурой, задаваемой числовым рядом Фибоначчи (рис. 4.58 б, 4.62 б), когда $a = 0,5$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,746$; $\lambda_p^{M,3} = d = h = l = 7,407$ см; $x_{s=0} = y_{t=0} = z_{p=0} = 3,703$ см; $p = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$ см; $t = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$; $s = s(p)$ от изменения координаты точки наблюдения поля x ($y = z = 0$ см) внутри кристалла (а) и вне кристалла (б)

Проведенные в данной главе аналитические и численные исследования позволяют сделать вывод, что вид внешней геометрической формы у резонансного ограниченного дискретного кристалла сильно влияет на его рассеивающие свойства, на особенности электромагнитного взаимодействия сфер кристалла, на поведение структурных (*ст*) и внутренних резонансов кристалла во внутренней его области и в районе ограничивающей кристалл внешней поверхности.

Предложенный здесь способ задания внешней геометрической формы у ограниченных кристаллов может быть полезен при разработке различных резонансных дифракционных устройств, что может быть актуально для рентгеновской радиотехники, рентгеновской оптики кристаллов, нанотехнологий и разработки методов моделирования электромагнитных явлений в кристаллических решетках реальных кристаллов.

ГЛАВА 5. РЕЗОНАНСНЫЙ КУБИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ ИЗ МАЛЫХ СФЕР ВО ВНЕШНЕЙ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассеивающие свойства ограниченного резонансного кристалла сильно зависят от электродинамических свойств внешней среды. Изменяя параметры внешней среды можно влиять на структуру рассеянного поля вне и внутри кристалла. В данной главе представлены некоторые результаты проведенных численных исследований, таких как изучение:

- взаимодействия вырожденного кристалла с диэлектрической и магнитной средами;
- поведения кристалла из пустотных сфер с заполнением различными веществами во внешней среде с большим значением проницаемостей ϵ'_0 и μ'_0 ;
- взаимодействия кристалла с диамагнитной внешней средой;
- влияния скачка проницаемостей внешней среды $\epsilon'_0 = \mu'_0 = \pm 1$ на рассеивающие свойства вырожденного кристалла;
- возможности разработки радиофизических методов моделирования электромагнитных резонансных явлений в реальных кристаллах.

5.1. Вырожденный резонансный кубический кристалл во внешней диэлектрической и магнитной среде, снятие вырождения

В разделе представлены некоторые результаты изучения влияния внешней диэлектрической и магнитной сред на рассеивающие свойства вырожденного резонансного кубического кристалла с возбужденным в нем совмещенным резонансом $(m, \vartheta + 2^{cm})$. Результаты такого влияния представлены на рис.5.1; 5.2. На рис. 5.1 изображена дисперсионная зависимость для компоненты структурной функции Φ_{yy}^{ϑ} (3.24) вырожденного резонансного кристалла, помещенного во внешнюю магнитную среду [88], а на рис. 5.2 представлены дисперсионные зависимости $|E_{\text{расс}}|$ (3.18) для кристалла,

находящегося в вакууме – случай *a*) и во внешней диэлектрической и магнитной средах – случаи *b*) и *c*).

В результате влияния внешней среды кривая с совмещенным резонансом $(1^{m,\varepsilon} + 2^{cm})$ расщепляется на три несовмещенных резонанса для каждого случая – для *b*) на резонансы $(2_m, 2_\varepsilon, 2_{cm})$, а для *c*) на $(3_\varepsilon, 3_m, 3_{cm})$. Максимум отщепленного резонанса (*m*) по амплитуде больше максимума отщепленного резонанса (*э*), что связано с более высокой добротностью внутреннего резонанса сферы (*m*) по сравнению с внутренним резонансом сферы (*э*). Расщепление кривой для случая *a*) на три несовмещенных резонанса (*m, э, cm*) для случаев *b*) и *c*) под влиянием внешней среды можно назвать эффектом снятия вырождения.

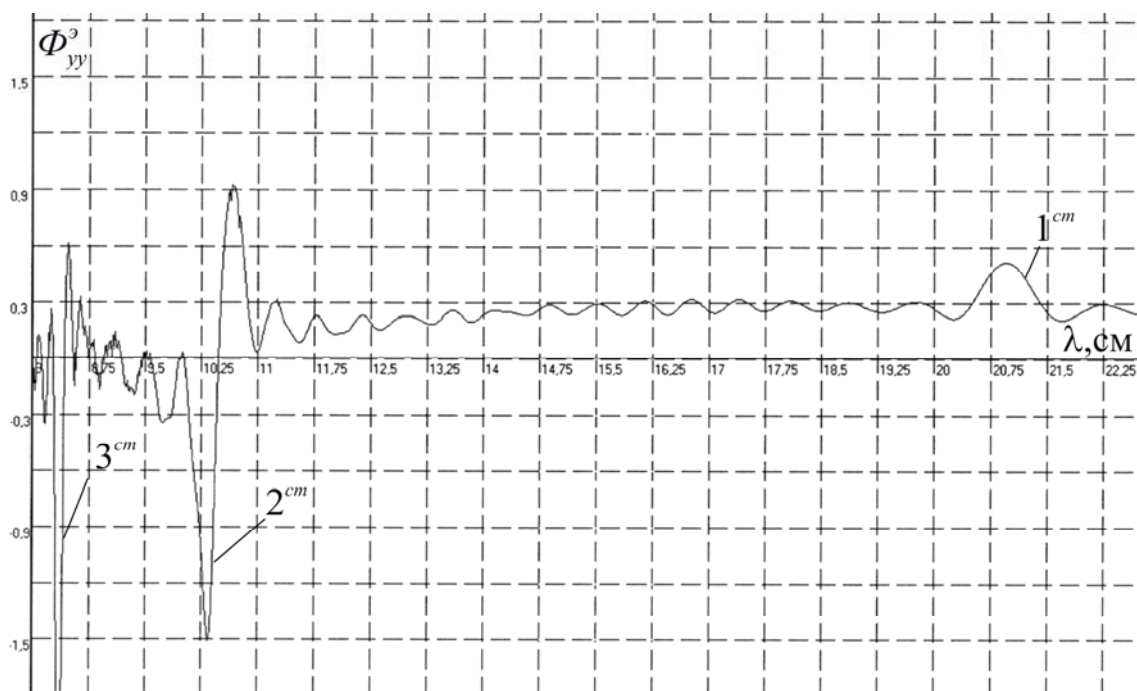


Рис. 5.1. Дисперсионная зависимость компоненты $\Phi_{yy}^3(\lambda)$ структурной функции (3.24) для вырожденного резонансного кубического кристалла, находящегося во внешней магнитной среде, когда $a = 0,5 \text{ см}$; $x = y = z = 0 \text{ см}$; $\varepsilon' = \mu' = 9,75$; $\varepsilon_0' = 1$; $\mu_0' = 2$; $(d, h, l) = 7,41 \text{ см}$; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$

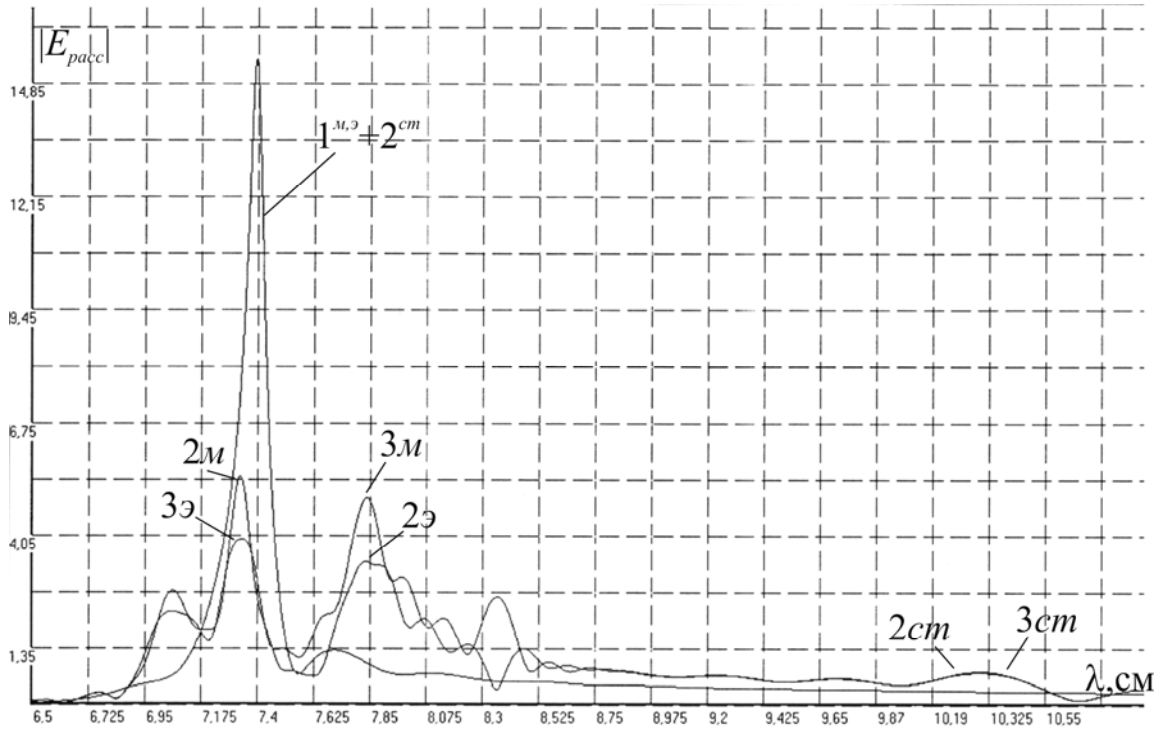


Рис. 5.2. Дисперсионные зависимости $|E_{расс}|$ (3.18) от изменения длины рассеиваемой волны λ , когда $a = 0,5$ см; $x = y = z = 0$ см; $\epsilon' = \mu' = 9,75$; $(d, h, l) = 7,41$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ для случаев:

- a) $\epsilon'_0 = \mu'_0 = 1$ – резонанс $(1^{m,э} + 2^{cm})$,
- b) $\epsilon'_0 = 2; \mu'_0 = 1$ – резонансы $(2m, 2э, 2cm)$,
- c) $\epsilon'_0 = 1; \mu'_0 = 2$ – резонансы $(3э, 3m, 3cm)$

5.2. Резонансный кубический кристалл из малых пустотных сфер с материальным заполнением во внешней магнитоэлектрической среде с большим значением проницаемостей ϵ'_0 и μ'_0

Если в континуальных однородных и изотропных магнитоэлектрических средах с большим значением проницаемостей ϵ'_0 и μ'_0 создавать пространственно-упорядоченные структуры из пустотных сфер, которые можно заполнять различными веществами, то можно получать эти структуры с регулируемыми резонансными свойствами [84]. В качестве внешних сред можно использовать, например, керамические среды на основе TiO_2 , $CaTiO_2$, жидкости в твердом фазовом состоянии и другие.

В данном разделе представлены результаты изучения рассеивающих свойств в ограниченной резонансной кубической решетке пустотных сфер с возбужденным в решетке брэгговским структурным (решеточным) резонансом 2^{cm} (3.26), которая находится во внешней магнитоэлектрической среде для случая, когда $a/\lambda' \ll 1$; $a/\lambda_g \ll 1$; $d, h, l/\lambda_g \sim 1$, где a – радиус пустотных сфер; λ', λ_g – длины рассеиваемой волны внутри и вне пустотных сфер; d, h, l – постоянные решетки.

На рис. 5.3 *a, b* изображены зависимости $|E_{pacc}|$ (3.18) от изменения координаты точки наблюдения z внутри кристалла при заполнении сфер диэлектрическим материалом.

Показано, что изменяя значения проницаемостей ϵ' , μ' материала заполнения пустотных сфер кристалла можно управлять его резонансными рассеивающими свойствами во внешних средах с большим значением проницаемостей ϵ'_0 и μ'_0 .

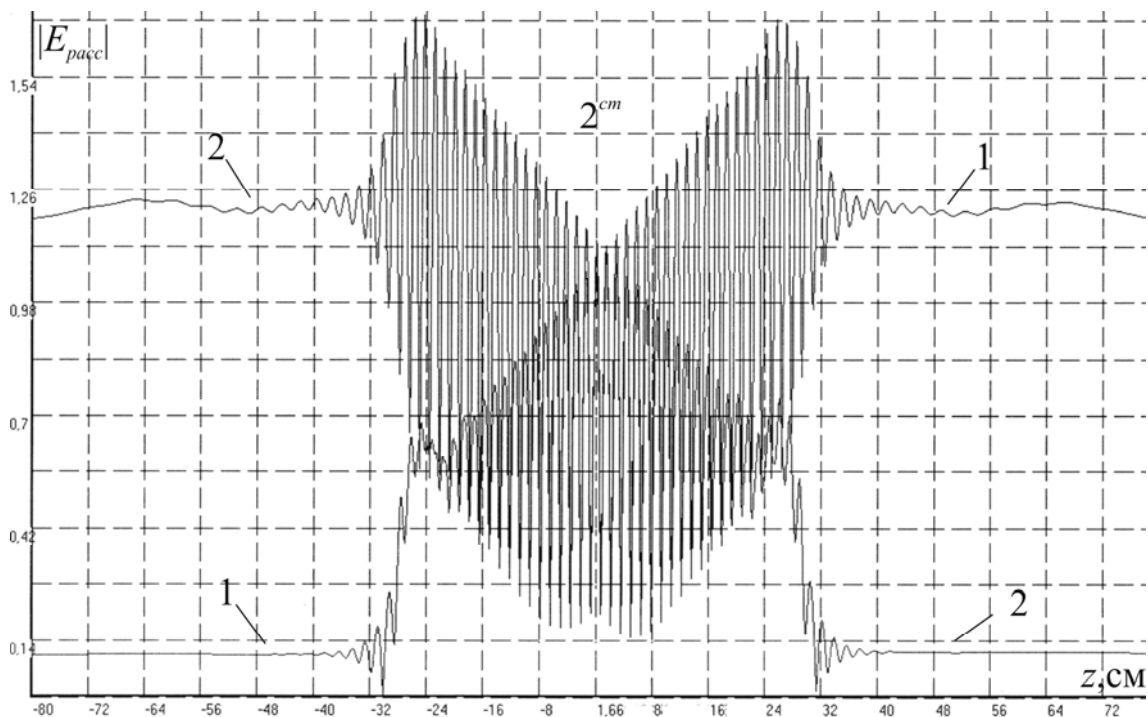


Рис. 5.3 *a*

На Рис. 5.3 *a* рассеиваемая плоская волна (2.26) движется из области $z < 0$.

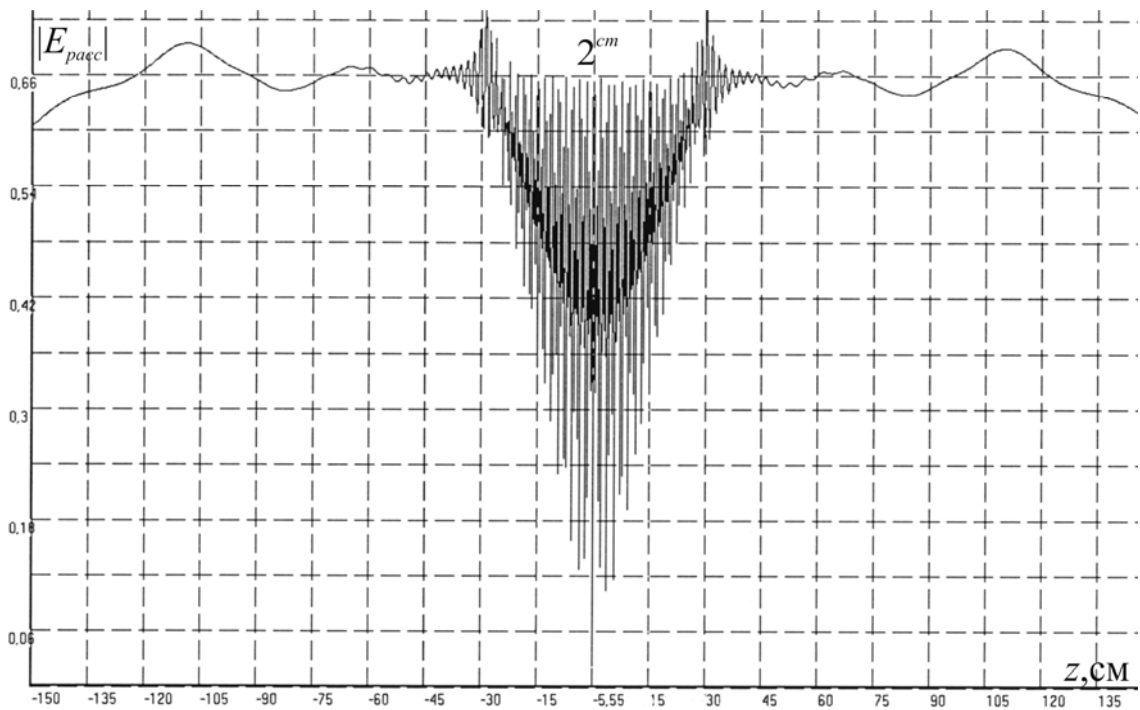


Рис. 5.3 б

Рис. 5.3, б. Зависимости $|E_{pacc}|$ (3.18) резонансного кубического кристалла из пустотных сфер с наполнением, находящегося во внешней магнитодиэлектрической среде с проницаемостями $\epsilon'_0 = 5; \mu'_0 = 9,8$, когда $a = 0,15$ см; $(d, h, l) = 1,43$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ см; $x = y = 0$ см; от изменения значения координаты z точки наблюдения полей для случая заполнения сфер диэлектриком с проницаемостями:

- а) кривая 1 – $\epsilon' = \mu' = 1; \lambda' = 10$ см; кривая 2 – $\epsilon' = 16; \mu' = 1; \lambda' = 2,5$ см,
- б) $\epsilon' = 5; \mu' = 1; \lambda' = 4,47$ см

5.3. Резонансный кубический кристалл во внешней диамагнитной среде, «эффект Мейснера»

В разделе представлены результаты изучения рассеивающих свойств ограниченного резонансного диэлектрического кубического кристалла, помещенного во внешнюю диамагнитную среду со значением проницаемостей $\epsilon'_0 = 1; \mu'_0 \approx 0$.

На рис. 5.4 качественно сопоставлены кривые дисперсионных зависимостей для резонансного кубического кристалла, в котором возбужден совмещенный резонанс $(1^3 + 2^{cm})$, при нахождении его во внешней среде со значением

проницаемостей $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = 1$ (кривая 1) и в среде с проницаемостями $\varepsilon'_0 = 1; \mu'_0 \approx 0$ (кривая 2). Резонансный максимум второй кривой этого рисунка сместился в сторону больших длин волн, а ее острота сильно возросла, что говорит об увеличении добротности резонансного кристалла в диамагнитной среде.

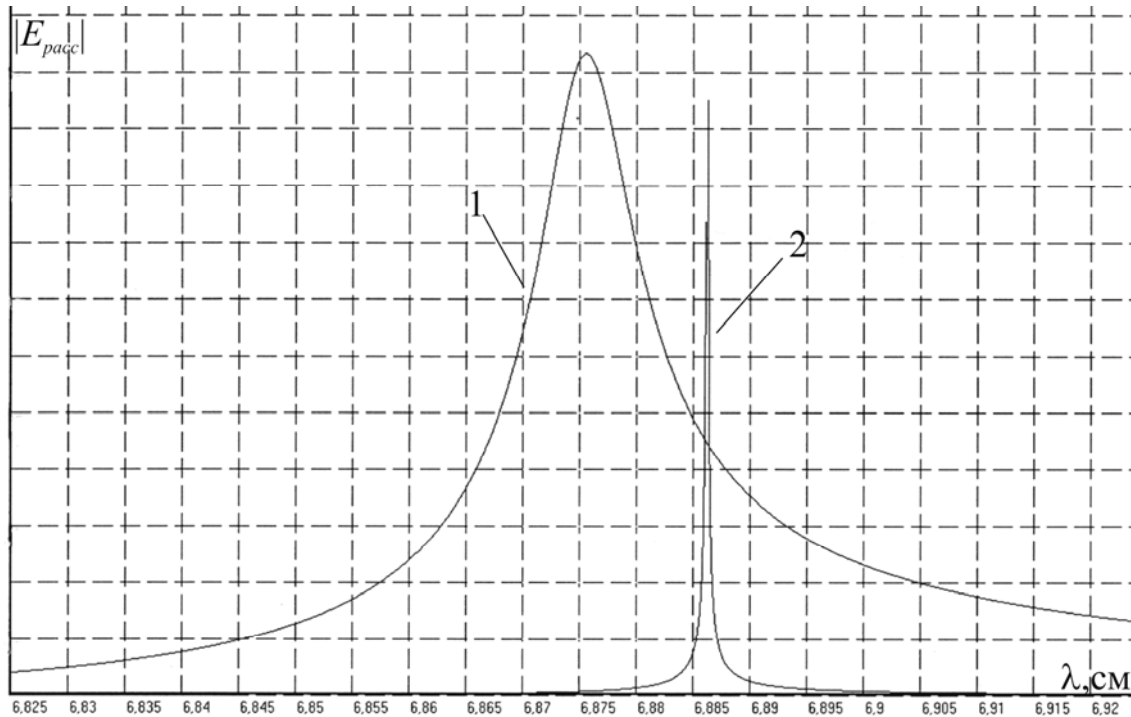


Рис. 5.4. Дисперсионные зависимости $|E_{racc}|$ от длины λ рассеиваемой волны для резонансного кубического кристалла, находящегося во внешних средах со значениями проницаемостей – $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = 1$ (кривая 1) и $\varepsilon'_0 = 1; \mu'_0 \approx 0$ (кривая 2), когда $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95; \mu' = 1; (d, h, l) = 6,886$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ см; $x = y = z = 0$ см

На рис. 5.5 *a, b, c, d* представлены зависимости для полей (3.18), (1.4) от изменения координаты z точки наблюдения полей внутри резонансного диэлектрического кубического кристалла, когда кристалл находится во внешней диамагнитной среде. Из графиков (рис. 5 *a; 5 c*) следует, что внутреннее рассеянное магнитное поле резонансного кубического кристалла под влиянием внешней диамагнитной среды вытесняется из центральной части объема кристалла и имеет максимальное значение на гранях и ребрах кристалла. Рассеянное внутреннее электрическое поле кристалла мало по

сравнению с рассеянным внутренним магнитным полем и распределено по объему кристалла относительно равномерно.

Это явление вытеснения рассеянного внутреннего магнитного поля в резонансном кристалле напоминает эффект Мейснера, связанный с вытеснением внешнего магнитного поля при переходе образца металла в сверхпроводящее состояние, в котором сверхпроводник формально обладает нулевой магнитной проницаемостью ($\mu' = 0$) и является идеальным диамагнетиком.

В связи с этим явление вытеснения рассеянного магнитного поля из центральной части объема конечного резонансного кристалла, находящегося во внешней диамагнитной среде, можно рассматривать как подобное эффекту Мейснера.

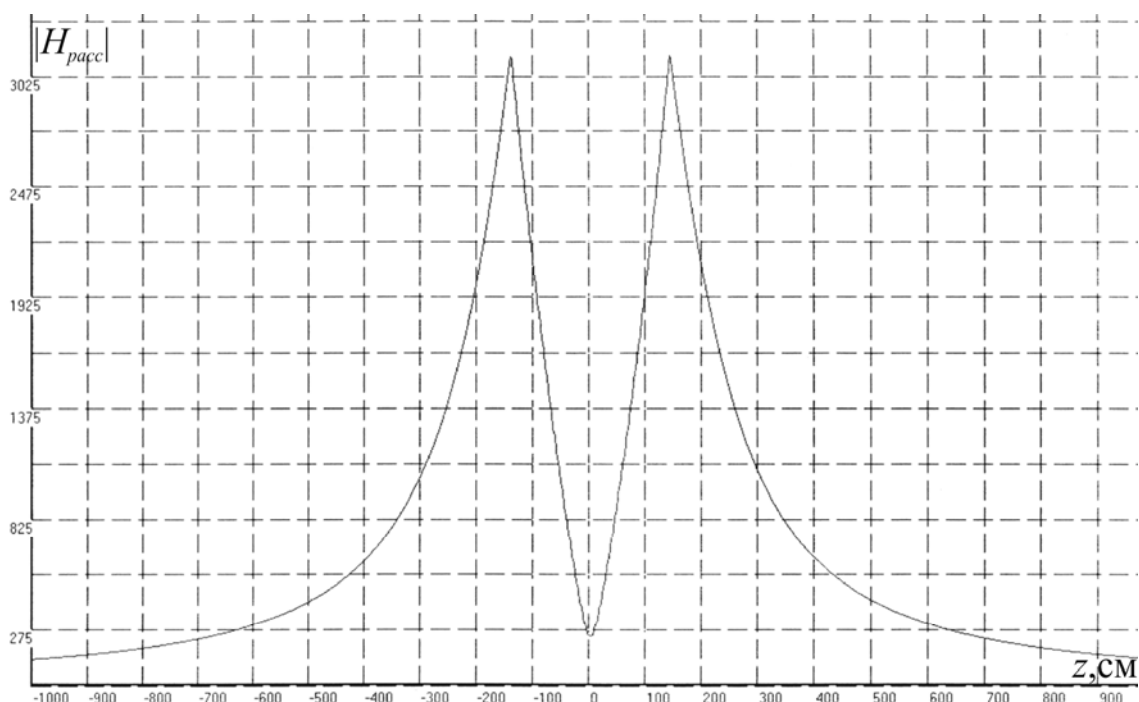


Рис. 5.5 а

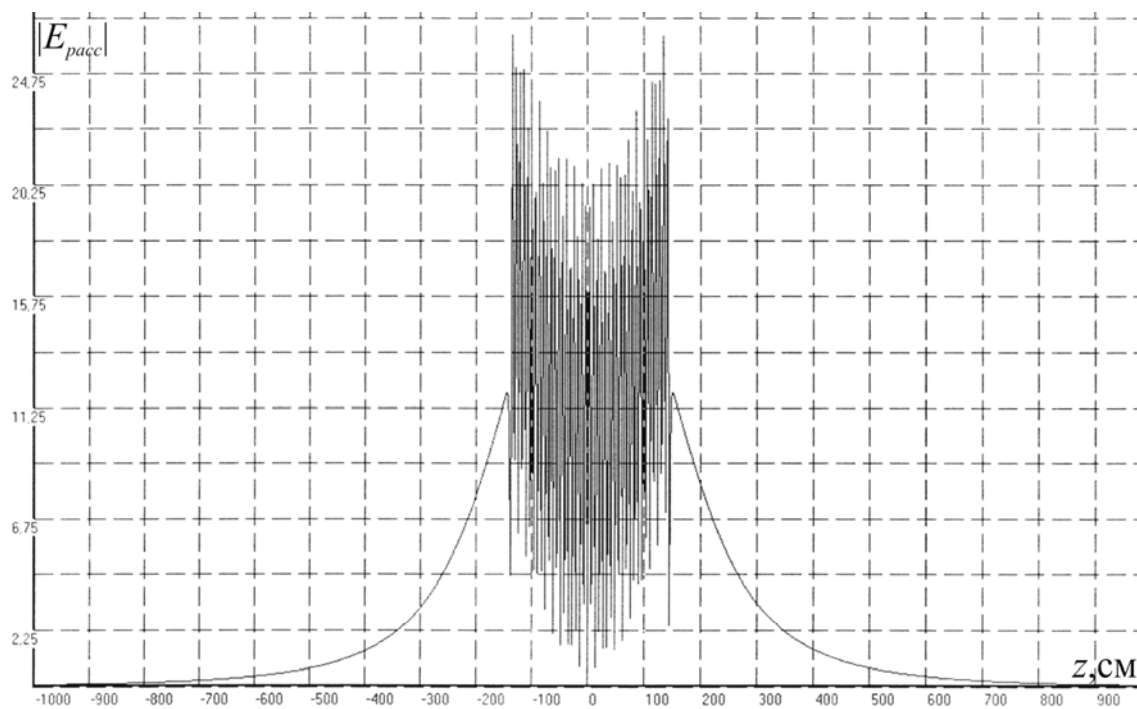


Рис. 5.5 b

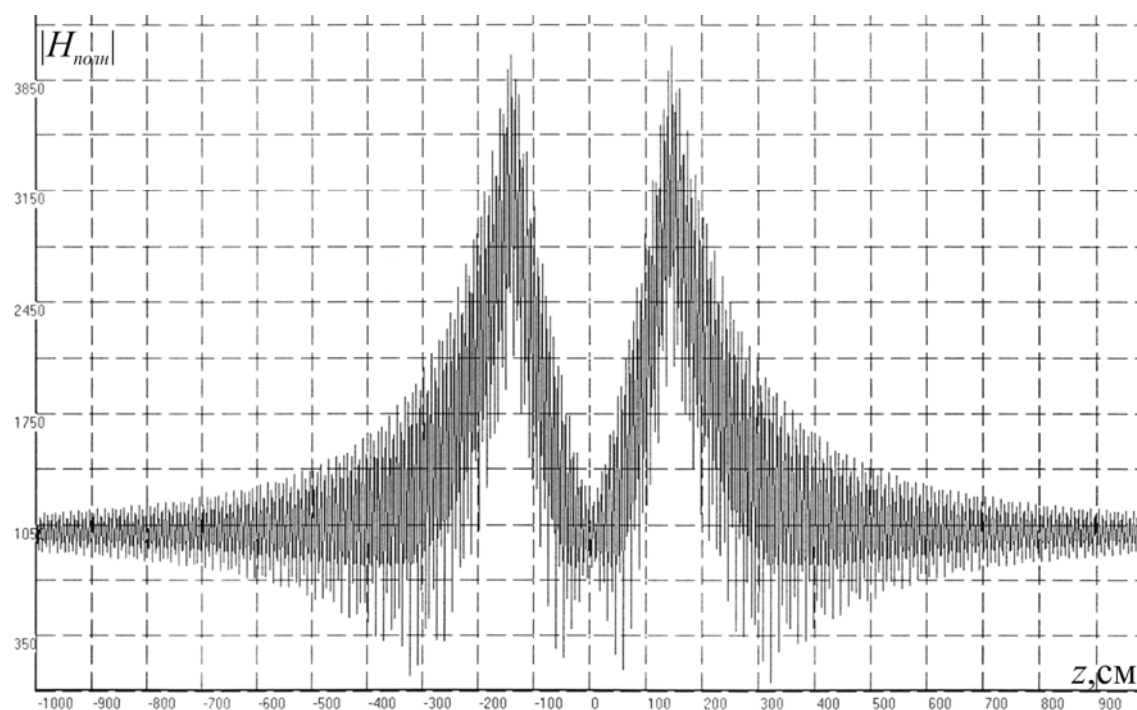


Рис. 5.5 c

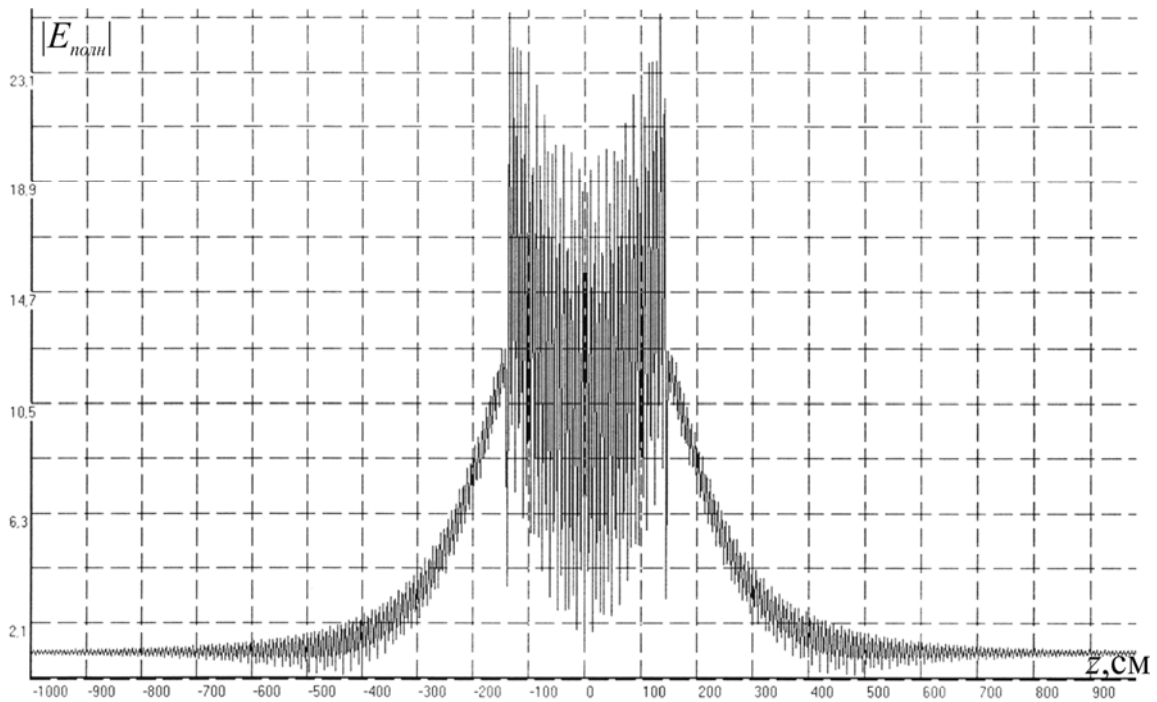


Рис. 5.5 d

Рис. 5.5 a, b, c, d. Зависимости модуля полей (3.18) и (1.4) от изменения значения координаты z точки наблюдения поле, когда $a = 0,5$ см; $\varepsilon' = 95$; $\mu' = 1$; $(d, h, l) = 6,886$ см; $\lambda_p = 6,886$ см; $(p, s, t) = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ см; $x = y = 0$ см; $\varepsilon'_0 = 1$; $\mu'_0 \approx 0$

5.4. Влияние скачка проницаемостей внешней среды $\varepsilon_0 = \mu_0 = \pm 1$ на рассеивающие свойства резонансного вырожденного кубического кристалла

Обращают внимание работы [68, 71, 85], в которых рассматриваются необычные свойства веществ с одновременно отрицательным значением проницаемостей ε и μ . Представляется интересным изучение рассеивающих свойств резонансного кристалла из магнитодиэлектрических сфер, помещенного в среды с одновременно положительными или отрицательными значениями диэлектрической ε'_0 и магнитной μ'_0 проницаемостями. В данном разделе исследуются свойства кристалла, когда в нем возбужден вырожденный резонанс $(cm+m+\varepsilon)$, возникающий при совмещении (суперпозиции) структурного (cm) (решеточного) резонанса кристалла с внутренними, также совмещенными, резонансами сфер магнитного (m) и электрического (ε) типов.

Изучается случай эквивалентный рентгеновской оптике кристаллов, когда $a/\lambda \ll 1$; $a/\lambda_g \sim 1$; $d, h, l/\lambda' \sim 1$, где a – радиус сфер; λ', λ_g – длины рассеиваемой волны вне и внутри сфер; d, h, l – постоянные ортогональной решетки. Для сред с проницаемостями $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = \pm 1$ исследовалась многомодовая ($d, h, l \sim 2\lambda_p^{m+\varepsilon}$) структура резонансного (p) поля внутри и вне кубической решетки в зонах Френеля и Фраунгофера.

Рассматривается эффект снятия вырождения резонансного кристалла [86, 87, 91].

Проведен численный анализ выражений (3.18) и (1.4) для резонансного вырожденного кубического кристалла, результаты которого изображены на рис. 5.6-5.9. В кристалле число сфер – $N = 64000$; радиус сфер – $a = 0,5$ см; проницаемости сфер – $\varepsilon' = \mu' = 9,75$; постоянные решетки – $d = h = l = 2\lambda_p^{m+\varepsilon} = 14,82$ см (рис. 5.6 а) и $d = h = l = 2\lambda_p^{m+\varepsilon} = 12,52$ см (рис. 5.6 б).

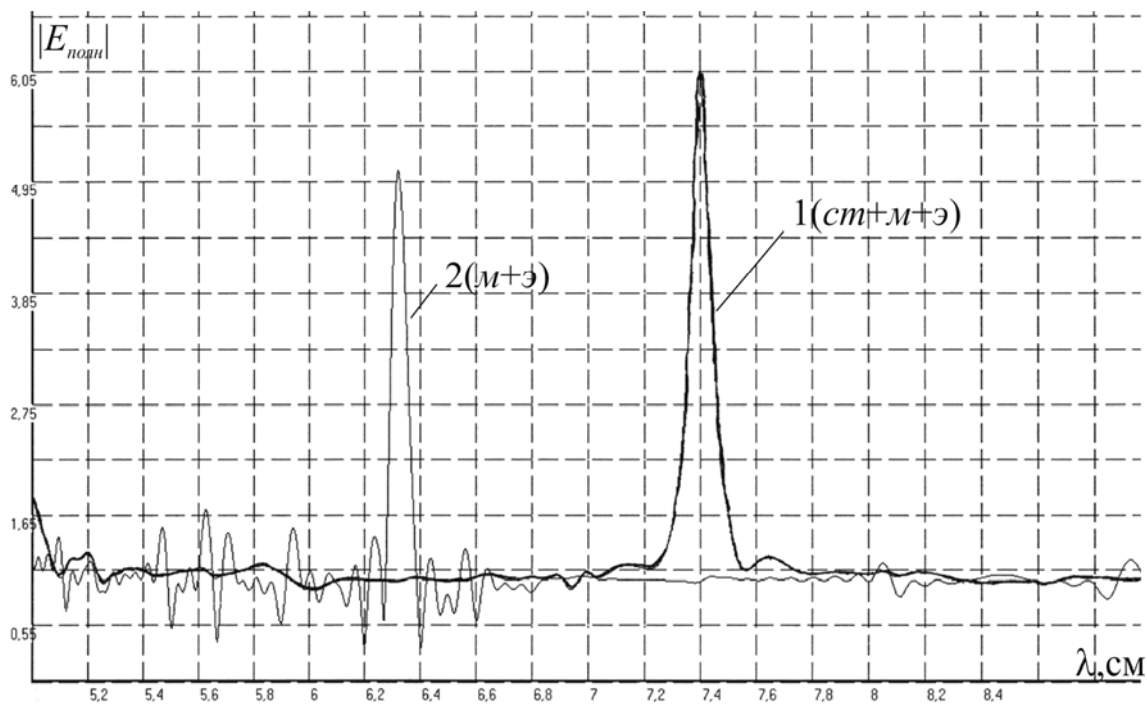


Рис. 5.6 а

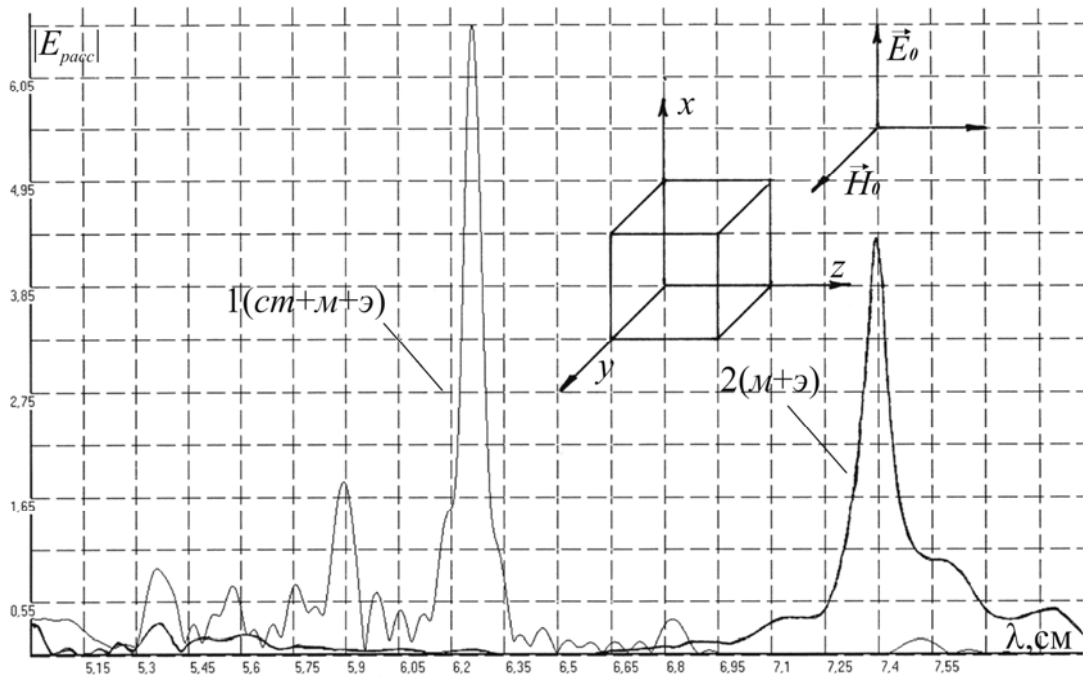


Рис. 5.6 b

Рис. 5.6 a, b. Дисперсионные зависимости полного (a) и рассеянного (b) полей в средах $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = \pm 1$

На рис. 5.6 a и рис. 5.6 b представлены зависимости модуля полей (1.4) и (3.18) от длины рассеиваемой волны λ для резонансных вырожденных кристаллов в среде с $\varepsilon_0 = \mu_0 = +1$ (кривая 1, рис. 5.6 a) и в среде с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = -1$ (кривая 1, рис. 5.6 b). И для тех же кристаллов рассмотрены аналогичные зависимости, когда параметры среды изменились и стали $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = -1$ (кривая 2, рис. 5.6 a) и $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = +1$ (кривая 2, рис. 5.6 b). Здесь резонансы решеток и сфер не совмещены.

На рис. 5.7 и 5.8 изображены зависимости модуля поля (1.4) и (3.8) от изменения координат x , y и z для случая направления распространения рассеиваемой волны (\vec{E}_0, \vec{H}_0) вдоль оси z (рис. 5.6 b), внутри и вне вырожденного кристалла в средах с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = +1$ (рис. 5.7) и $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = -1$ (рис. 5.8). Поле внутри кристалла на этих рисунках изображено в районе нулевых значений координат x , y .

На рис. 5.7 c и рис. 5.8 c в зоне Френеля присутствует затухающая составляющая многомодового рассеянного поля, а кривая 1 относится к кристаллам с внутренней полостью [74, 76].

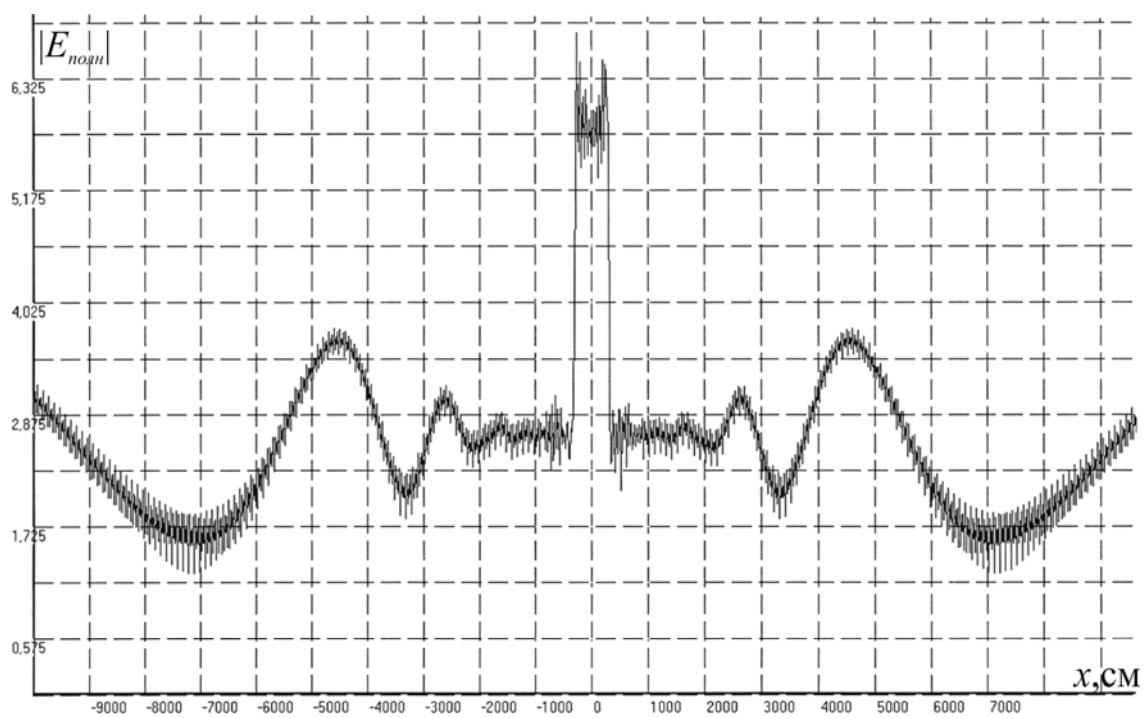


Рис. 5.7 а

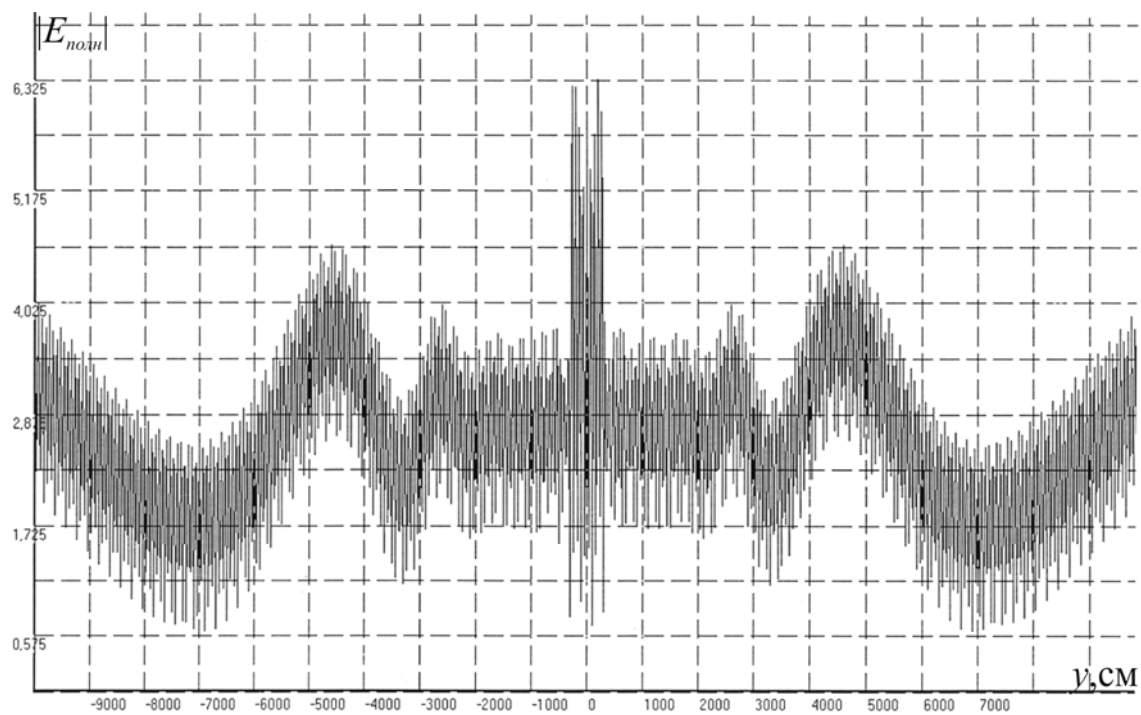


Рис. 5.7 б

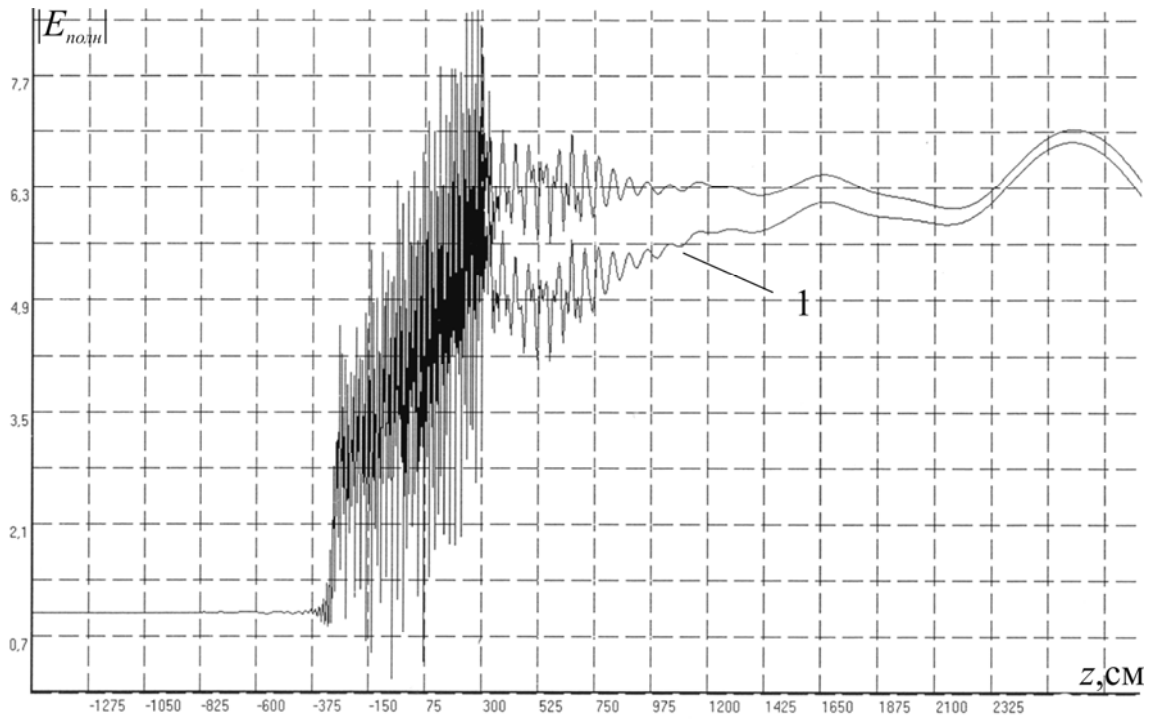


Рис. 5.7 с

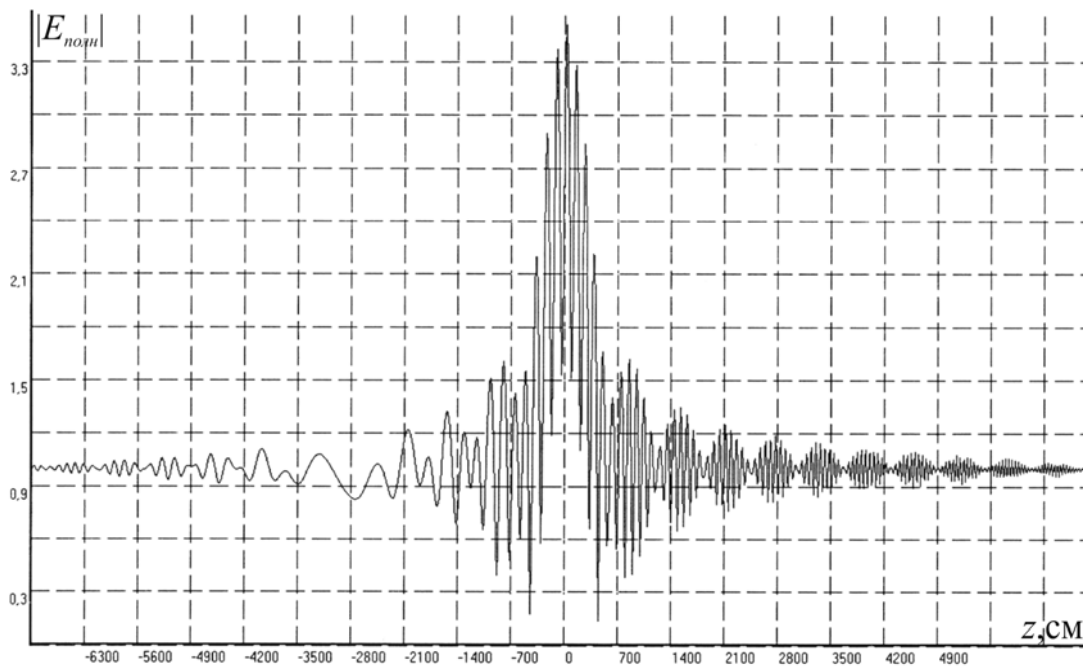


Рис. 5.7 d

Рис. 5.7 a, b, c, d. Полное поле в среде с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = +1$

На рис. 5.7 d и рис. 5.8 d представлены зависимости модуля полей (1.4) и (3.18) от изменения координаты z для боковой области кристалла по оси y (рис. 5.6 b) в зоне Фраунгофера в средах с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = +1$ (рис. 5.7 d) и $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = -1$ (рис. 5.8 d).

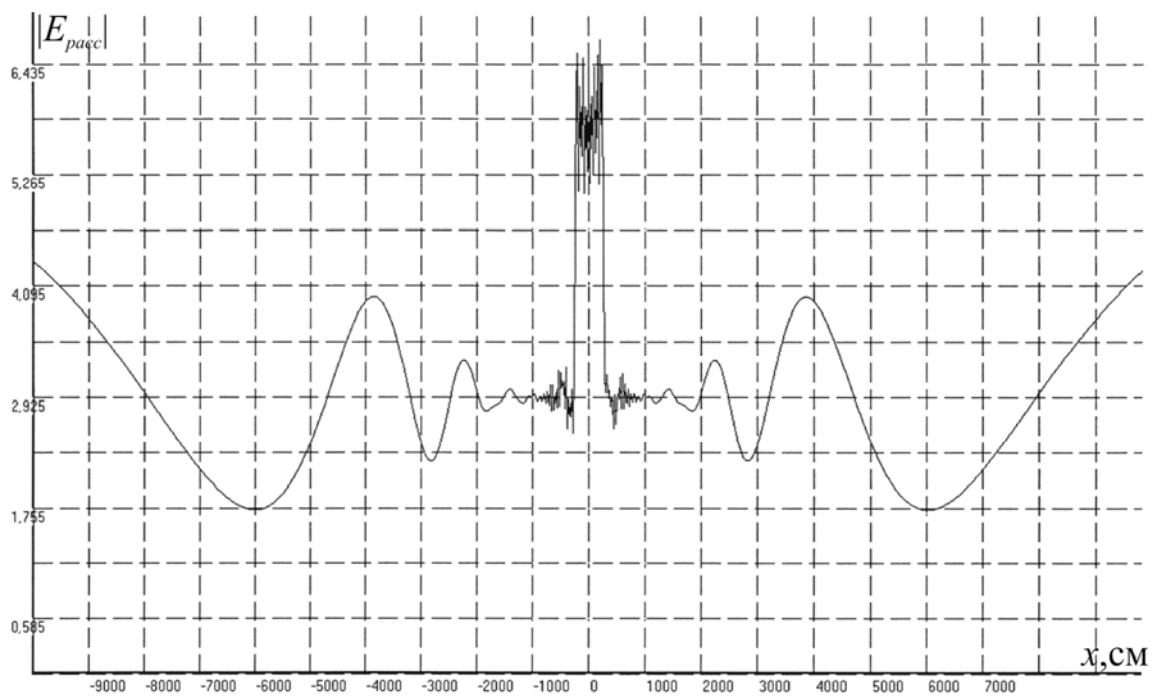


Рис. 5.8 а

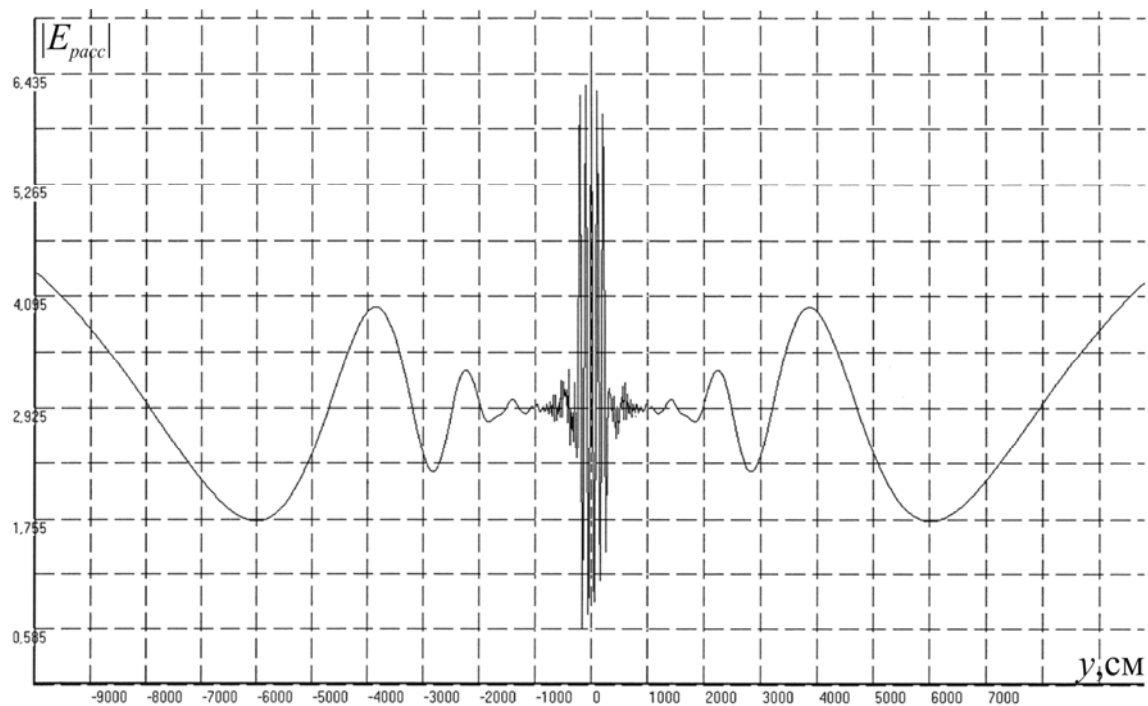


Рис. 5.8 б

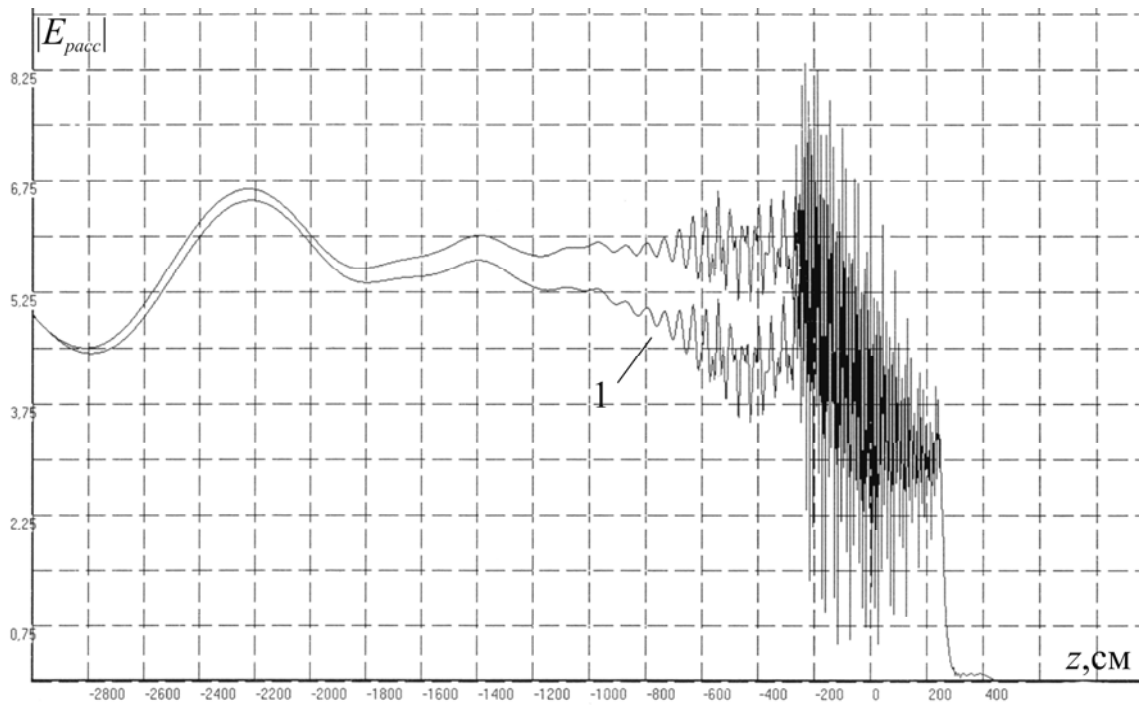


Рис. 5.8 с

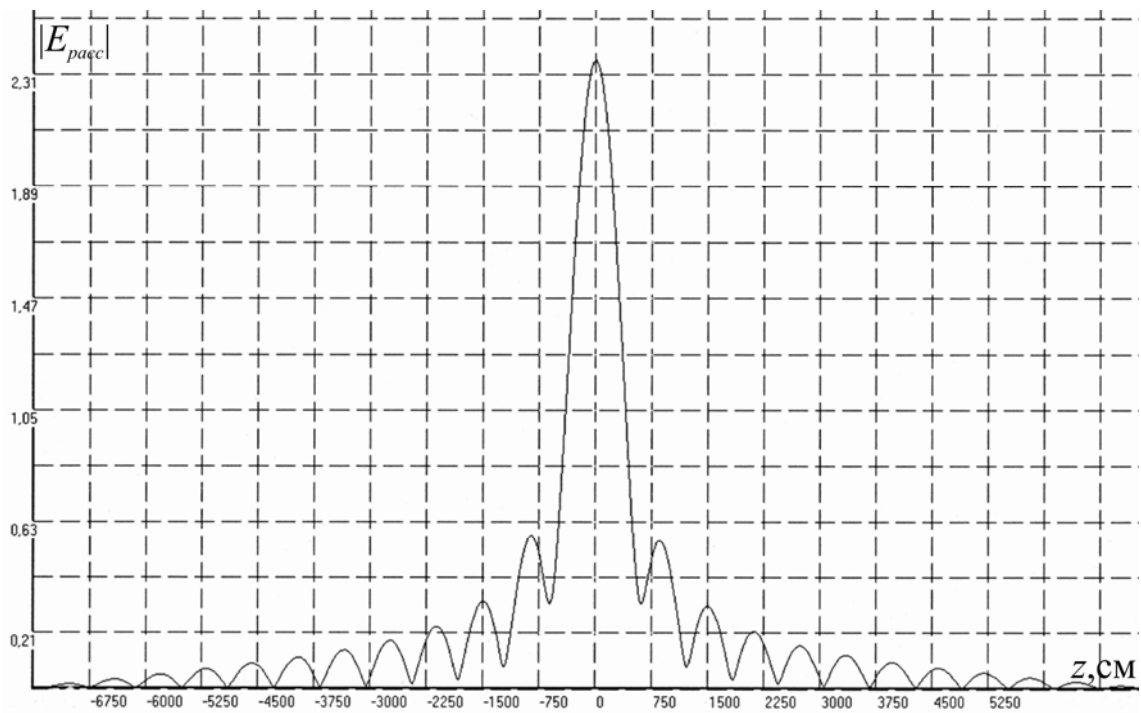


Рис. 5.8 d

Рис. 5.8 a, b, c, d. Рассеянное поле в среде с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = -1$

В резонансном вырожденном кристалле при изменении параметров ε'_0 и μ'_0 внешней среды возможно возникновение эффекта снятия вырождения, в

результате которого совмещение резонансов кристалла ($ст+м+э$) нарушается. В качестве примера этот эффект рассматривается на рис. 5.9, где изображено, связанное с этим эффектом, расщепление резонансных кривых и появление несовмещенных резонансов ($ст$), ($м$), ($э$) (рис. 5.9 *a*) и ($м$), ($э$) (рис. 5.9 *b*).

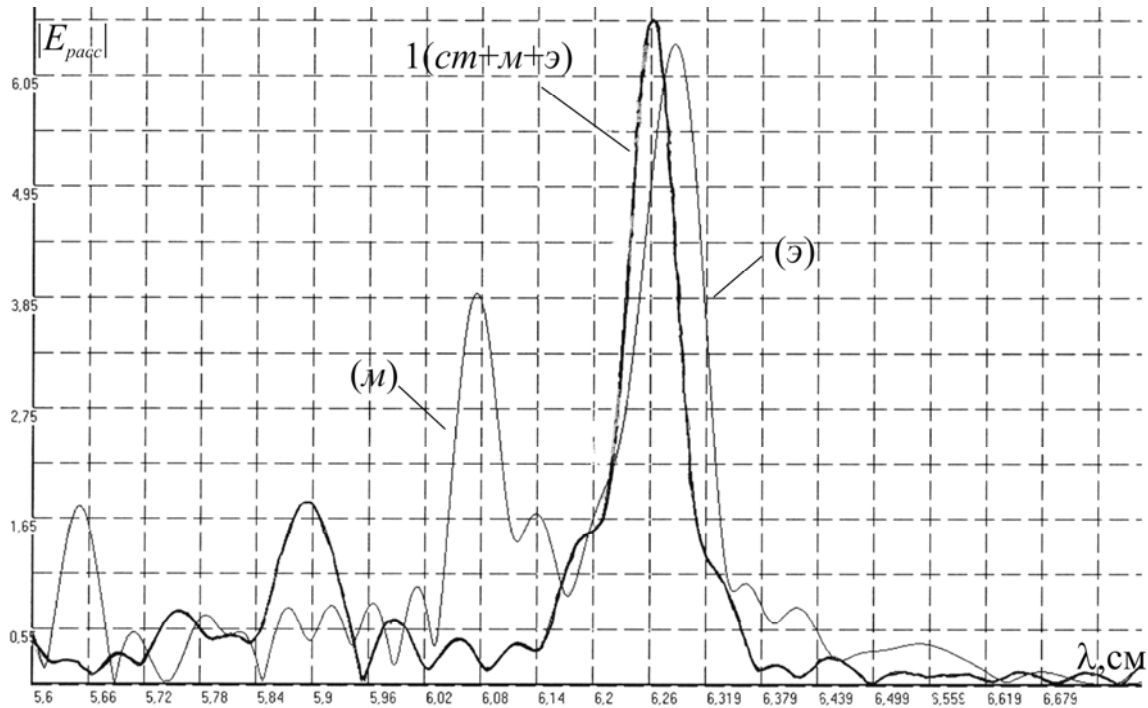


Рис. 5.9 *a*

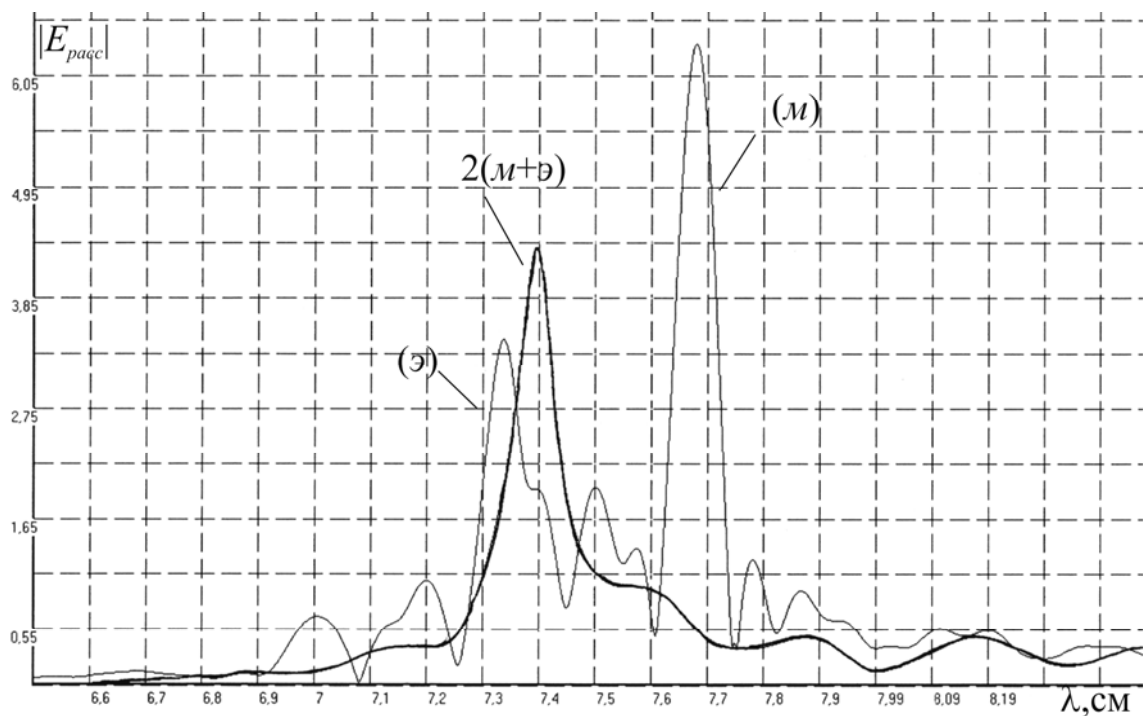


Рис. 5.9 *b*

Рис. 5.9 *a, b*. Снятие вырождения резонансного кубического кристалла под влиянием внешней среды

В случае расщепления резонансной кривой 1 ($cm+m+\varepsilon$) (рис. 5.6 *b*) параметры внешней среды имеют значение $\varepsilon'_0 = -1$; $\mu'_0 = -1,71$, а для случая кривой 2 ($m + \varepsilon$) (рис. 5.6 *b*) они принимают значение $\varepsilon'_0 = +1$; $\mu'_0 = +1,71$.

Структурный резонанс (cm) кривой 1 ($cm+m+\varepsilon$) (рис. 5.9 *a*) при снятии вырождения сместился в область длины волны $\lambda_p^{cm} = 8,2$ см и поэтому не представлен на рис. 5.9 *a*, так как находится за пределами этого рисунка.

Из численного анализа следует, что резонансный вырожденный кубический кристалл в средах с одновременно положительными или отрицательными проницаемостями $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = \pm 1$ обладает разными электродинамическими свойствами. В среде с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = -1$ кристалл характеризуется выраженными отражающими особенностями. Он может играть роль отражающего зеркала и резонатора с сильным внутренним полем. Формируя узлы и пучности на гранях кристалла, можно управлять рассеивающими свойствами кристалла. В среде с $\varepsilon'_0 = \mu'_0 = +1$ для кристалла характерно явление резонансного прохождения рассеиваемой волны, что можно использовать при создании неотражающих устройств.

Изменяя характеристики внешней среды и сфер кристалла, можно создавать резонансные метаструктуры с необычными электродинамическими свойствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии представлен замкнутый аналитико-численный расчетный метод исследования электромагнитных явлений в упорядоченных многочастичных ограниченных резонансных структурах из малых резонансных магнитодиэлектрических сфер.

Проведенное на его основе исследование говорит о том, что полученные результаты могут найти применение не только при создании новых видов метаматериалов, в том числе и наноматериалов с резонансными свойствами, но и для разработки методов радиофизического моделирования электромагнитных резонансных явлений, которые могут происходить в кристаллических решетках реальных кристаллов.

Особое значение может иметь разработка методов моделирования влияния на реальный кристалл резонансных дефектов, формы огибающей его поверхности, свойств внешней среды, особенно, в случае создания различного рода резонансных нанокристаллов.

Приведенные в монографии графические зависимости для рассеянных электромагнитных полей справедливы не только для ограниченных резонансных макрокристаллов, но они справедливы и для ограниченных микро- и нанокристаллов при тех же значениях электродинамических параметров материала сфер и внешней среды, если значения численных данных для графических зависимостей, таких как длина волны λ , радиусы сфер a , постоянные кристаллической решетки (d, h, l) , координаты центров сфер (x_0, y_0, z_0) и точек наблюдения рассеянного поля (x, y, z) , домножить на соответствующий переводной метрический микро- или нанокоэффициент, здесь соответственно $- 10^{-4}$ или $- 10^{-7}$.

Напомним, что по оси ординат графиков отложены относительные величины рассеянных полей для случая, когда модули амплитуд электрического и магнитного полей рассеиваемой плоской волны выбраны равными единице.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука, 1982. – 623 с.
2. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. / Дж.А. Стрэттон; под ред. проф. С.М. Рытова. – М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
3. Mie G. Beitrage zur Optik tauben Medien speziell kolloidaler Metallosungen / G. Mie G. // Ann. d. Phys. – 1908. – № 25. – S. 377-445.
4. Debye P. Der Lichtuck auf Kugeln von belicbigem Material / P. Debye // Ann. d. Phys. – 1909. – N 30. – S. 57-136.
5. Gans R. Uber die Form ultramikroskopischer goldteilchen / R. Gans // Ann. d. Phys. – 1912. – N37. – S. 881-900.
6. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде / К.С. Шифрин – М. – Л.: Гостехиздат техн.-теор. лит., 1951. – 288 с.
7. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами / Г. Ван де Хюлст; под ред. В.В. Соболева. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 536 с.
8. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами / Д. Дейрменджан; под ред. К.Я. Кондратьева. – М.: Мир, 1971. – 165 с.
9. Ломоносов М.И. Дифракция плоской электромагнитной волны на сфере с магнитной анизотропией / М.И. Ломоносов, К.П. Черкасова, Н.А. Хижняк // Изв. вузов. Радиофизика. – 1977. – Т.20, №6. – С.913-923.
10. Лысенко О.Е. Рассеяние электромагнитных волн на анизотропном эллипсоиде с точностью до величин $(a/\lambda)^2$ включительно / О.Е. Лысенко, Н.А. Хижняк // Изв. вузов. Радиофизика. – 1968. – Т. 11, № 4. – С. 559 – 566.
11. Нерух А.Г. Резонансные свойства пульсирующего диэлектрического шара / А.Г. Нерух, Н.А. Хижняк // Журн. техн. физики. – 1974. – Т.44, № 2. – С.257-262.

12. Александрова А.А. Рассеяние МГД волн на малом шаре с меняющейся во времени геометрией / А.А. Александрова, Н.А. Хижняк // Укр. физ. журн. 1990. – Т.35, № 6. – С. 864-870.

13. Левин Л. Современная теория волноводов / Л. Левин – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 216 с.

14. Хижняк Н.А. Искусственные анизотропные диэлектрики / Н.А. Хижняк // Журн. техн. физики. – 1957. – Т.27, № 9. – С. 2006-2013.

15. Хижняк Н.А. Искусственные анизотропные диэлектрики / Н.А. Хижняк // Журн. техн. физики. – 1957. – Т.27, № 9.– С. 2014-2027.

16. Хижняк Н.А. Искусственные анизотропные диэлектрики / Н.А. Хижняк // Журн. техн. физики. – 1957. – Т.27, № 9.– С. 2028-2038.

17. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики / Н.А. Хижняк – Киев: Наукова думка, 1986. – 280с.

18. Хижняк Н.А. Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред // Журн. техн. физики / Н.А. Хижняк – 1958. – Т. 28, №7. – С. 1592 – 1609.

19. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн на специальных пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т.8, №4. – С.383-392.

Kozar A.I. Electromagnetic Wave Scattering with Special Spatial Lattices of Magnetodielectric Spheres / A.I. Kozar // Telecommunication and Radio Engineering. – New York, N.Y. (USA): Begell House Inc. – 2004. – Vol. 61, No.9. – P. 734-749.

20. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн на сложных пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 124. – С.24-35.

21. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток резонансных магнитодиэлектрических сфер /

А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 130. – С.42-53.

22. Козарь А.И. Резонансная плоская решетка резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения (4). – 2004. – №4. – С. 89-92.

23. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн на двух резонансных магнитодиэлектрических сферах / А.И. Козарь // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №4. – С.4-6.

24. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – М.: Наука, 1986. – С.134.

25. Gastine M. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres / M. Gastine, L. Gourtois, J.L. Dormann // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. – 1967. – № 12. – P. 696-706.

26. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн в волноводе с однородными магнитодиэлектрическими сферами / А.И. Козарь // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2002. – Т.7. – Спецвыпуск. – С.183-189.

Kozar A.I. Electromagnetic Wave Scattering in a Waveguide Containing Homogeneous Magnetodielectric Spheres / A.I. Kozar // Telecommunication and Radio Engineering. – New York, N.Y. (USA): Begell House Inc.– 2003. –Vol. 60, No.7-9. – P. 11-22).

27. Украинец Н.И. Диэлектрический резонансный эллипсоид в рупорном излучателе / Н.И. Украинец // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2002. – Т.7, Спец. вып. – С. 204-207.

28. Козарь А.И. Температурные измерения больших значений диэлектрической проницаемости / А.И. Козарь // Радиотехника: Республ. межвед. науч.-техн. сб. – 1978. – Вып. 44. – С. 97-99.

29. Козарь А.И. Измерение диэлектрической проницаемости диэлектриков при постоянной температуре / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 1978. – Вып. 44. – С.93-97.
30. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн на резонансной однородной магнитодиэлектрической сфере с плоским металлическим экраном / А.И. Козарь // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №3. – С.4-6.
31. Козарь А.И. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе / А.И. Козарь, Н.А. Хижняк // Укр. физ. журн. – 1970. – Т.15, №5. –С. 847-849.
32. Козарь А.И. К вопросу о точном измерении больших значений диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков / А.И. Козарь, Н.А. Хижняк // Радиотехника: Респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1970. – Вып. 14. – С. 118-128.
33. Козарь А.И. Внутреннее поле резонансной диэлектрической неоднородности в волноводе / А.И. Козарь, Н.А. Хижняк // Радиотехника: Республ. межвед. науч.-техн. сб. – 1973. – Вып. 27. – С.152-161.
34. Козарь А.И. Резонансное рассеяние электромагнитных волн на диэлектрической сфере в волноводе / А.И. Козарь, Н.А. Хижняк // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1975. – Т. 18, №1. – С. 29-35.
35. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с резонансными магнитодиэлектрическими сферами / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 125. – С.78-86.
36. Prijmenko S.D. Resonance scattering of the H_{11} wave by a dielectrical sphere in the circular waveguide / S.D. Prijmenko, L.A. Bondarenko, N.A. Khizhnyak, A.I. Kozar // IEEE 8th International Crimean conference “Microwave and telecommunication technology”. Sevastopol State Technical University, Crimea, Ukraine. 14-17 September. 1998. – Vol.1. – P.271-272.
37. Козарь А.И. Прямоугольный электромагнитный резонатор с резонансными магнитодиэлектрическими сферами / А.И. Козарь // Вісник Харк. нац. ун-ту. Радіофізика та електроніка. – 2002. – Вип. 1, №554. – С. 199-205.

38. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.М. Рыжик – М. – Л.: ОГИЗ, 1948. – С. 248-251.

39. Козарь А.И. Построение структурных функций электромагнитного взаимодействия системы многих резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2004. – Т.9, № 1. – С. 200-210.

Kozar A.I. Structural Function Development for Electromagnetic Interactions in the System of Multiple Resonant Magnetodielectric Spheres / A.I. Kozar // Telecommunication and Radio Engineering. – New York, N.Y. (USA): Begell House Inc.– 2005. –Vol. 63, No.7. – P. 589-605.

40. Козарь А.И. Построение структурных функций электромагнитного взаимодействия для волноводов, содержащих резонансные магнитодиэлектрические сферы / А.И. Козарь // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т.9, №2. – С.172-182.

41. Козарь А.И. Построение структурных функций электромагнитного взаимодействия для резонатора с резонансными магнитоди-электрическими сферами / А.И. Козарь // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2004. – Т.9, № 2. – С.361-371.

Kozar A.I. Structure Functions of Electromagnetic Field Coupling in a Cavity Filled by Resonance-Size Magnetodielectric Spheres / A.I. Kozar // Telecommunication and Radio Engineering. – New York, N.Y. (USA): Begell House Inc.– 2004. –Vol. 61, No.5. – P. 363-381.

42. Kozar A.I. Structural functions of electromagnetic coupling of the magnetodielectric sphere resonance grating / A.I. Kozar // IEEE 16th International Crimean Conference „Microwave and Telecommunication Technology”. Sevastopol, Crimea, Ukraine. September 11-15, 2006. – Vol.2. – P.621-622.

43. Шестопапов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн / В.П. Шестопапов – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 400 с.

44. Шестопалов В.П. Дифракция волн на решетках / В.П. Шестопалов, Л.Н. Литвиненко, С.А. Масалов, В.Г. Сологуб – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – 278 с.
45. Шестопалов В.П. Динамическая теория решеток / В.П. Шестопалов, Ю.К. Сиренко – Киев: Наукова думка, 1989. – 214 с.
46. Шестопалов В.П. Морсовские критические точки / В.П. Шестопалов – Киев: Наук. думка, 1992. – 238 с.
47. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон – М.: Мир, 1969. – 608 с.
48. Ваганов Р.Б. Основы теории дифракции / Р.Б. Ваганов, Б.З. Кацеленбаум – М.: Наука, 1982. – 272 с.
49. Литвиненко Л.Н. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах / Л.Н. Литвиненко, С.Л. Просвирнин – Киев: Наук. думка, 1984. – 239 с.
50. Сухаревский О.И. Рассеяние электромагнитных волн воздушными и наземными радиолокационными объектами / О.И. Сухаревский, В.А. Василец, С.В. Кукобко и др. // Под ред. О.И. Сухаревского. – Харьков: ХУПС, 2009. – 468 с., ил.
51. Пенкин Ю.М. Возбуждение электромагнитных волн в объемах с координатными границами / Ю.М. Пенкин, В.А. Катрич. – Харьков: Факт, 2003. – 231 с.
52. Khizhnyak N.A. The scattering of electromagnetic waves by a periodic magnetodielectric layer / N.A. Khizhnyak, N.V. Ryazantseva, V.V. Yachin // Journal of electromagnetic waves and applications. – 1996. – V.10. – №5. – P. 731-739.
53. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель – М.: Наука, 1978. – 792 с.
54. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских – М.: Наука, 1973. – 343 с.

55. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн линейной решеткой резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – №2. – С.4-9.

56. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн плоской решеткой резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2004. – Вып. 136. – С.7-15.

57. Kozar' A.I. Scattering of electromagnetic fields on complex spatial lattices of magnetodielectric spheres / A.I. Kozar' // IEEE Proceedings IVth International Conference on "Antenna theory and techniques"/ Sevastopol. Ukraine. September 9-12. 2003. – Vol.1. – P.145-148.

58. Козарь А.И. Квazистационарное приближение в задаче рассеяния электромагнитных волн резонансной решеткой магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // XI International scientific Kravchuk conference. Kyiv, Ukraine, 18-20 May, 2006. – P.136.

59. Kozar A.I. Rezonant grating of magnetodielectric spheres / A.I. Kozar // IEEE Proceedings 5th International Conference on "Antenna theory and techniques" / Kyiv. Ukraine. May 24-27. 2005. – P.433-436.

60. Kozar A.I. Rezonance degenerate plane lattice of magnetodielectric spheres with a hole / A.I. Kozar // IEEE Proceeding 6th International Conference on "Antenna theory and techniques"/ Sevastopol. Ukraine. September 17-21, 2007. – P. 119-121.

61. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток резонансных магнитодиэлектрических сфер с топологической структурой, задаваемой геометрической прогрессией / А.И. Козарь // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – №4. – С.7-11.

62. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток резонансных магнитодиэлектрических сфер с анизотропной топологической структурой, задаваемой арифметической прогрессией / А.И. Козарь // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – №1. – С. 4-8.

63. Козарь А.И. Биноминальные коэффициенты и рассеяние электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Вісник Харк. нац. ун-ту. Радіофізика та електроніка. – 2004. – Вип.1, – №622. – С.44-49.
64. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев – М.: Наука, 1978. – 141с.
65. Козарь А.И. Числовой ряд Фибоначчи и рассеяние электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2003. – Вып. 135. – С. 68-74.
66. Козарь А.И. Числовой ряд Фибоначчи и резонансные решетки из магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // XII International scientific Kravchuk conference. Kyiv, Ukraine, 15-16 May, 2008. – P.196.
67. Борн М. Динамическая теория кристаллических решеток / М. Борн, Кунь Хуан – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 488 с.
68. Holloway C.L. A double negative (DNG) composite medium composed of magnetodielectric spherical particles embedded in a matrix / C.L. Holloway, E.F. Kuester, J. Baker-Jarvis, P. Kabos // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 2003. – Vol.51, N10. – P.2596-2603.
69. Waterman P.C. Electromagnetic scattering by periodic arrays of particles / P.C. Waterman, N.E. Pedersen // J. Appl. Phys. – 1986. – Vol.59. – P. 2609-2618.
70. Sarychev A.K. Electrodynamics of metal-dielectric composites and electromagnetic crystals / A.K. Sarychev, R.C. McPhedran, V.M. Shalaev // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 62. – P. 8531-8539.
71. Alu A. Single-Negative, Double-Negative, and Low-Index Metamaterials and their Electromagnetic Applications / A. Alu, N. Engheta, A. Erentok, R.W. Ziolkovski // IEEE Antennas and Propagat. Mag. – 2007. – Vol. 49, No 1. – P. 23-36.
72. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens / J.B. Pendry // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 3966-3969.

73. Козарь А.И. Резонансная кубическая решетка магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // VIII Международная конференция „Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы”. Ульяновск, УлГУ, Россия, 26-30 июня, 2006. – С.233.

74. Kozar A.I. The action of defects on scattering properties of the resonant magnetodielectric spherical crystal / A.I. Kozar // IEEE 18th International Crimean Conference „Microwave and Telecommunication Technology”. Sevastopol, Crimea, Ukraine. September 8-12, 2008. – Vol. 2. – P. 560-561.

75. Козарь А.И. Резонансный кристалл с кубической объемноцентрированной решеткой магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // X Международная конференция «Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы». Ульяновск, УлГУ, Россия, 25-28 августа, 2008. – С. 215.

76. Козарь А.И. Резонансный вырожденный кристалл из магнитодиэлектрических сфер с дефектом / А.И. Козарь // IX Международная конференция „Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы”. Ульяновск, УлГУ, Россия, 24-30 сентября, 2007. – С.201.

77. Козарь А.И. Резонансные среды на основе решеток магнитодиэлектрических рассеивателей / А.И. Козарь // Первая международная научная конференция „Глобальные информационные системы. Проблемы и тенденции развития”. Туапсе-Харьков. 3-6 октября, 2006. – С.515-516.

78. Козарь А.И. Резонансные кристаллические метаматериалы на основе кубической объемноцентрированной решетки магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // III-й Международный Радиоэлектрический Форум „Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития” (МРФ-2008). Харьков, Украина, 22-24 октября, 2008. – Т.3. – С. 201-204.

79. Козарь А.И. Фигурные числа (арифметическая прогрессия) и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2003. –Т.8, №2. – С. 206-212.

Kozar A.I. Figurate Numbers (Arithmetic Progression) and Electromagnetic Wave Scattering on Spatial Lattices of Resonant Magnetodielectric Spheres / A.I. Kozar // Telecommunication and Radio Engineering. – New York, N.Y. (USA): Begell House Inc.– 2003. –Vol. 59, No. 7-9. – P. 22-32.

80. Козарь А.И. Числа Ферма (Тартальи) и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2003. – Вып. 131. – С.60-70.

81. Козарь А.И. Пирамидальные числа и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2003. – Вып. 132. – С. 31-40.

82. Козарь А.И. Полигональные числа и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 129. – С. 5-13.

83. Козарь А.И. Треугольник чисел Паскаля и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер / А.И. Козарь // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 127. – С. 67-76.

84. Kozar A.I. Rezonance cubic lattice made of spherical air-filled bubbles located in magnetodielectric medium / A.I. Kozar // IEEE 20th International Crimean Conference «Microwave and Telecommunication Technology». Sevastopol, Crimea, Ukraine. September 13-17, 2010. – P. 737-738.

85. Vesalago V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ / V.G. Vesalago // Soviet Physics Uspekhi. Vol. 10, No. 4. – P. 509-514.

86. Kozar A.I. Rezonance degenerate cubic crystal made of spheres located in a magnetodielectric medium / A.I. Kozar // IEEE 20th International Crimean Conference

«Microwave and Telecommunication Technology». Sevastopol, Crimea, Ukraine. September 12-16, 2011. – P.719-720.

87. Козарь А.И. Влияние скачка электродинамических свойств внешней среды на рассеивающие особенности резонансных кристаллических магнитодиэлектрических структур / А.И. Козарь // IV-й Международный Радиоэлектронный Форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития (МРФ, ИИСТ-2011). Харьков, Украина, 18-21 октября 2011, – Т.1. – С. 331-334.

88. Kozar A.I. Structural functions of electromagnetic coupling of the magnetodielectric sphere resonances crystal / A.I. Kozar // IEEE 22th International Crimean Conference «Microwave and Telecommunication Technology». Sevastopol, Crimea, Ukraine. September 10-14, 2012. – P.91-592.

89. Kozar A.I. Electromagnetic lattice «invisibility» of the resonance cubic crystal made of magnetodielectric spheres / A.I. Kozar // IEEE International Conference on Antenna Theory and Techniques. Odessa, Ukraine. September 16-20, 2013. – P. 199-201.

90. Kozar A.I. Electromagnetic lattice «invisibility» of the resonance crystal made of magnetodielectric spheres / A.I. Kozar // IEEE 23th International Crimean Conference «Microwave and Telecommunication Technology». Sevastopol, Crimea, Ukraine. September 8-13, 2013. – P. 776-777.

91. Kozar A.I. Resonant Degenerate Crystal Made of Spheres Located in Magnetodielectric Medium / A.I. Kozar // International Journal of Electromagnetics and Applications. Vol. 3, No 2, 2013, pp. 15-19.

doi: 10.5923/j.ijea.20130302.02

Научное издание

КОЗАРЬ Анатолий Иванович

РЕЗОНАНСНЫЕ МЕТАКРИСТАЛЛЫ
ИЗ МАЛЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Монография

Подп. в печать 17.06.14. Формат 60x84 1/8. Способ печати – ризография.
Усл. печ. листов 20,46. Тираж 300 экз. Зак. №1/17.

ФЛП Андреев К.В.
Харьков, просп. Ленина, 14