

ВОЛНОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОБМОТКИ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

Э. Г. Дендер

Киев

Изучение влияния асинхронных электродвигателей на распространение сигналов информации по шахтной силовой сети неразрывно связано с исследованием волновых процессов в обмотках электрических машин.

Цель настоящей работы — изучить физическую природу волновых явлений в обмотках электрических машин, что можно условно разделить на следующие пункты.

1. Выявление главных факторов, определяющих свойства обмотки в период пробега волны.

2. Составление схемы замещения электромашиной обмотки;

3. На основании полученной схемы замещения составление дифференциального уравнения, описывающего распределение напряжения (тока) вдоль обмотки;

4. Решением этого уравнения нахождение напряжения (тока) в функции длины обмотки (или частоты) и времени, а также волновых параметров обмотки.

Многочисленные экспериментальные данные показали, что волновые процессы во вращающихся машинах имеют характер бегущих волн. При этом распределение волн зависит от следующих параметров обмотки, распространенных по ее длине:

- а) омического сопротивления проводов;
- б) собственной индуктивности катушки и взаимной индуктивности между ними;
- в) емкости относительно корпуса;
- г) продольной емкости между витками;
- д) проводимости изоляции на землю;
- е) взаимная индуктивность и емкость между отдельными фазами;
- ж) электромагнитных и электростатических связей между статором и ротором;
- з) потерь на вихревые токи и гистерезис при проникновении магнитного потока в сталь.

Существует ряд менее значительных факторов.

Совершенно очевидно, что учет всех этих факторов вызвал бы неоправданные усложнения. Вот почему необходимо выяснить наиболее существенные из них с тем, чтобы пренебречь менее существенными.

Ротор оказывает незначительное влияние на волновые процессы, так как вихревые токи, возникающие в его поверхностном слое, не пропускают магнитный поток вглубь ротора, оказывая экранирующее действие.

Емкость относительно корпуса оказывает значительное влияние на волновые процессы, причем с увеличением частоты эта роль возрастает.

Авторы ряда работ, посвященных исследованиям волновых процессов в обмотках, пренебрегали проводимостью изоляции на землю. Но такое

утверждение может быть бесспорным только для двигателей, работающих в условиях сухой атмосферы. Для тех двигателей, которые работают во влажной среде (например, шахтные электродвигатели) проводимость изоляции может колебаться в широких пределах, причем этот фактор имеет большое значение на протекание волновых явлений. Для подтверждения этой мысли на рис. 1 приведены частотные зависимости входных сопротивлений для двух двигателей типа КОФ-22-4, один из которых проработал в шахтных условиях около трех месяцев, а другой — новый. Ухудшение в процессе эксплуатации изоляции первого двигателя привело к изменению входных (а, следовательно, и волнового) сопротивлений.

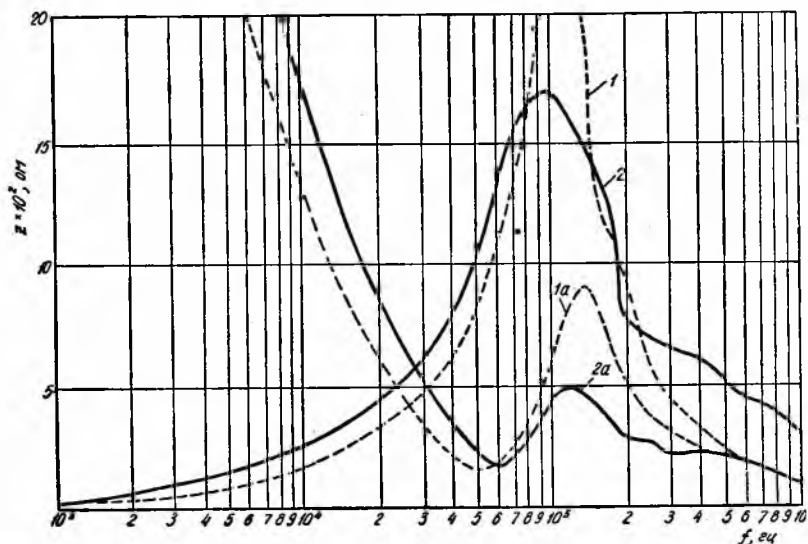


Рис. 1. Сравнительные характеристики частотных зависимостей входных сопротивлений для двух асинхронных электродвигателей:

1, 1а — кривые, снятые для нового электродвигателя; 2, 2а — кривые, снятые для электродвигателя, работающего в условиях влажной атмосферы.

Междувитковая (продольная) емкость — это емкость между соседними катушками одной фазы. По величине продольная емкость значительно ниже емкости относительно корпуса, но при высоких частотах с этим фактором необходимо считаться.

Рассмотрим вопрос о собственной и взаимной индуктивности. Очевидно, что индуктивность рассеяния значительно меньше индуктивности паза. Таким образом, индуктивность обмотки определяется, в основном, потоком в стали. Проводники одного паза имеют сильную электромагнитную связь, причем все витки охватываются, примерно, одним и тем же потоком. Поэтому для витков одного паза

$$L \approx M,$$

где M — взаимная индуктивность между витками.

Таким образом, взаимоиндуктивность для витков, лежащих в пределах одной катушки, имеет большое значение.

Взаимная индуктивность между катушками за счет магнитной связи через сталь практически исключается, так как быстропеременный магнитный поток в стали очень сильно затухает. Существует только магнитное сцепление через воздух — в лобовых частях и расточке статора.

Из вышесказанного следует:

- а) магнитной связью различных фаз можно пренебречь;
- б) магнитной связью между катушками разных групп, входящих в состав одной фазы, пренебрегать нельзя;
- в) магнитная связь между катушками одной группы через воздух играет существенную роль и должна приниматься во внимание.

Будем пользоваться так называемой эффективной индуктивностью $L_{эф}$, т. е. такой, которая была бы эквивалентна общему потокоцеплению всей обмотки.

Активное сопротивление обмотки определяется потерями в стали. При протекании волны тока последний, вследствие быстрого нарастания, будет неравномерно распределен по сечению паза и провода. Таким образом, поверхностный эффект приводит к увеличению активного сопротивления и уменьшению внутренней индуктивности, но последним пренебрегаем.

Учитывая факторы, оказывающие наиболее существенное влияние на протекание волновых процессов в обмотке, приходим к схеме замещения электромашиной обмотки, изображенной на рис. 2.

Для элемента такой обмотки действительны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(i + i_R + i_k)}{\partial x} &= -C \frac{\partial U}{\partial t} - GU, \\ i_k &= -K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}, \\ i_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= -L \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Дифференцируя и преобразовывая уравнения (1), получим дифференциальное уравнение для напряжения

$$K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - C \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - G \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Пусть на вход обмотки подан единичный импульс. Тогда по истечении определенного времени переходными процессами можно было бы пренебречь, существовало бы так называемое квазистационарное состояние. Уравнение квазистационарного состояния можно записать, приняв в полученном уравнении производные по времени равным нулю:

$$\frac{\partial^2 U_{ks}}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Определим граничные условия для уравнения (2). При этом решение будем искать для двух случаев:

- а) система «фаза—фаза»;

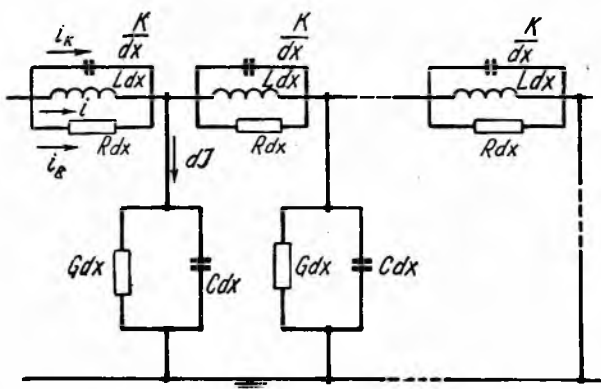


Рис. 2. Схема замещения обмотки асинхронного электродвигателя.

б) система «фаза—земля».

Для случая а):

при

$$x = 0, \quad U = 1;$$

$x = l, \quad U = 0$, где l — длина обмотки.

При этом

$$U_{ks} = Ax + B,$$

где A и B — постоянные интегрирования. Находя постоянные интегрирования из начальных условий, получим

$$U_{ks} = 1 - \frac{x}{l}. \quad (4)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$U = U_1 \sin \Pi x f(t), \quad (5)$$

где Π — постоянная интегрирования;

$f(t)$ — функция, которую необходимо определить.

Подставим (5) в уравнение (2):

$$\begin{aligned} -KU_1\Pi^2 \sin \Pi x f''(t) - \frac{\Pi^2}{R} U_1 \sin \Pi x f'(t) - \frac{U_1}{L} \Pi^2 \sin \Pi x f(t) - \\ - CU_1 \sin \Pi x f''(t) - GU \sin \Pi x f'(t) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя $g = \frac{1}{R}$ и $\Gamma = \frac{1}{L}$, получим

$$f''(t)[K\Pi^2 + C] + f'(t)[\Pi^2 g + G] + \Gamma \Pi^2 f(t) = 0. \quad (6)$$

Запишем решение уравнения (6) в виде

$$f(t) = C_1 e^{r_1 t} - C_2 e^{-r_2 t}.$$

Для определения r_1 и r_2 составим характеристическое уравнение

$$(K\Pi^2 + C)r^2 + (\Pi^2 g + G)r + \Gamma \Pi^2 = 0.$$

Определим постоянные интегрирования r_1 и r_2 :

$$r_1 = \frac{-(\Pi^2 g + G) + \sqrt{(\Pi^2 g + G)^2 - 4\Gamma \Pi^2 (K\Pi^2 + C)}}{2(K\Pi^2 + C)}, \quad (7)$$

$$r_2 = \frac{-(\Pi^2 g + G) - \sqrt{(\Pi^2 g + G)^2 - 4\Gamma \Pi^2 (K\Pi^2 + C)}}{2(K\Pi^2 + C)}. \quad (8)$$

Перепишем решение уравнения (2) в виде

$$U = U_1 \sin \Pi x (C_1 e^{r_1 t} - C_2 e^{-r_2 t}). \quad (9)$$

Определим постоянную интегрирования Π из следующих граничных условий:

а) для системы «фаза — фаза»:

$$\begin{aligned} U(0, t) &= 0, \\ U(l, t) &= 0, \\ U(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Физически условие (10) означает, что свободные колебания в начале и в конце обмотки отсутствуют.

Используя условия (9), находим

$$\sin \Pi l = 0, \quad \Pi = \frac{K\pi}{l}; \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$C_1 = C_2 = C.$$

Обозначая $U_1 C = A_\Pi$, решение (9) запишем следующим образом:

$$U = A_\Pi \sin \Pi \cdot x (e^{r_1 t} + e^{-r_2 t}). \quad (11)$$

В любой момент времени напряжение можно определить как сумму напряжений свободных колебаний и установившегося режима

$$U = U_\Pi + U_{ks}. \quad (12)$$

Для системы «фаза—фаза» получим

$$U_{\phi-\phi} = 1 - \frac{x}{l} + A_\Pi \sin \Pi x (e^{r_1 t} + e^{-r_2 t}).$$

Соответственно для системы «фаза—земля»

$$U_{\phi-3} = 1 + A'_\Pi \cdot \sin \Pi x (e^{r_1 t} + e^{-r_2 t}).$$

Для определения A найдем первоначальное распределение напряжения в обмотке. Очевидно, что при импульсе напряжения в силу индуктивности обмотки ток в катушке мгновенно появиться не может.

Поэтому, обмотка ведет себя как конденсатор с некоторой входной емкостью C_v . Время, пока напряжение распределится по емкостям обмотки, значительно меньше времени переходного процесса, поэтому существует уравнение

$$U_0 = U(x, 0).$$

Это уравнение может быть получено, если в схеме замещения на рис. 2 учитывать только емкости

$$\left(U_0 + \frac{dU_0}{dx} dx \right) C dx + \left(-\frac{dU_0}{dx} dx - \frac{d^2 U_0}{dx^2} dx^2 \right) \frac{K}{dx} + \frac{dU_0}{dx} dx \frac{K}{dx} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d^2 U_0}{dx^2} = \frac{C}{K} U_0. \quad (13)$$

Для системы «фаза—фаза» граничные условия уравнения (13) следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad U &= 1, \\ x = l, \quad U &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае решение уравнения (13) примет вид

$$U_0 = \frac{\operatorname{sh} \gamma (l-x)}{\operatorname{sh} \gamma l}, \quad (14)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{K}}.$$

В случае системы «фаза—земля» имеем граничные условия

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad U_0 &= 1; \\ x = l, \quad \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$U_0 = \frac{\operatorname{ch} \gamma (l-x)}{\operatorname{ch} \gamma l}. \quad (15)$$

В итоге для системы «фаза — фаза» для $t = 0$ получим

$$U_{\phi-\phi} = 1 - \frac{x}{l} + 2A \sin \frac{K\pi}{l} x = \frac{\operatorname{sh} \gamma(l-x)}{\operatorname{sh} \gamma l},$$

или

$$2A \sin \frac{K\pi}{l} x = \frac{\operatorname{sh} \gamma(l-x)}{\operatorname{sh} \gamma l} - \left(1 - \frac{x}{l}\right) = f(x). \quad (16)$$

Умножим обе части уравнения (16) на выражение $\sin \frac{a\pi}{l} x$ (где a — целое число) и проинтегрируем от 0 до l

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{a\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0 & \text{для } a \neq k \\ \frac{l}{2} & \text{для } a = k, \end{cases} \quad (17)$$

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx}{l}.$$

Подставляя (16) в (17), получим

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \frac{\gamma^2 l^2}{(n \cdot \pi)^2 + \gamma^2 l^2}.$$

Окончательное решение для системы «фаза — фаза»:

$$U_{\phi-\phi} = 1 - \frac{x}{l} - \sum_n \frac{1}{n\pi} \frac{\gamma^2 l^2}{(n\pi)^2 + \gamma^2 l^2} \sin \frac{n\pi}{l} x (e^{r_1 t} + e^{-r_2 t}), \quad (18)$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$

Для системы «фаза — земля», в результате аналогичных преобразований, получим

$$U_{\phi-z} = 1 - (e^{r_1 t} + e^{-r_2 t}) \sum_n \frac{\gamma^2 l^2}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \gamma^2 l^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2l} x}{n\pi}, \quad (19)$$

где $n = 1, 3, 5 \dots$

Решения (18) и (19) уравнения (2) представлены в виде бесконечного ряда и поэтому не могут быть использованы для определения волновых параметров обмотки.

Представим решение уравнения (2) в виде

$$U = U e^{j\omega t} e^{j\alpha x}, \quad (20)$$

где ω — временная угловая скорость;

α — пространственная угловая скорость.

Смысл такого решения заключается в том, что процессы в обмотке рассматриваются как в виде стоячих, так и бегущих волн.

Так как $\frac{\omega}{\alpha} = -v$, то (20) можно представить в виде

$$U = U e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)}. \quad (21)$$

Представим решение (21) в уравнение (2):

$$K \frac{\omega^4}{v^2} - \frac{j}{R} \frac{\omega^3}{v^2} - \frac{\omega^2}{Lv^2} + C\omega^2 - j\omega G = 0, \quad (22)$$

или

$$K \frac{\omega^3}{v^2} - \frac{j}{R} \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega}{Lv^2} + C\omega - jG = 0.$$

Выделим в (22) вещественную часть

$$K \frac{\omega^3}{v^2} - \frac{\omega}{Lv^2} + C\omega = 0. \quad (23)$$

Решая (23) относительно v , получим

$$v = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{K\omega^3}{C}}. \quad (24)$$

Здесь знак «+» относится к скорости падающей, а знак «—» отраженной волны.

Определим Z_c , пользуясь соотношением

$$Z_c = \frac{U}{i_{\text{общ}}} \Big|_{x=0},$$

где

$$i_{\text{общ}} = i + i_R + i_k.$$

Пользуясь первым уравнением из системы (I), получим

$$i_{\text{общ}} = CUe^{j\omega t} + GU \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} v,$$

откуда

$$Z_c = \frac{1}{vC - jG \frac{v}{\omega}}. \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в показательной форме, получим

$$Z_c = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1-LK\omega^3}{LC} (\omega^2 C^2 + G^2)}} e^{j \arctg \frac{G}{\omega C}}. \quad (26)$$

Величину Z_c в выражении (26) следует называть не волновым, а «характеристическим» сопротивлением. Так принято в теории связи называть сопротивление фронту волны, когда в цепи имеется не только падающая волна (т. е., когда волна еще не совершила полного пробега по всей длине обмотки), но и напряжение в обмотке рассматривается как совокупность прямых и отраженных волн.

На практике часто появляется необходимость пользоваться именно волновым сопротивлением, т. е. сопротивлением фронту волны для случая, когда в цепи отсутствуют отраженные волны.

Представим соотношение между общим током в продольном элементе схемы замещения и напряжению в операторной форме. Преобразовывая уравнения (I), приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= pI \frac{RL}{R + pL + p^2 KLR} \\ -\frac{dI}{dx} &= U(G + pC) \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — оператор, заменивший символ дифференцирования по времени.

Исключая из системы (27) I и его производную, получим уравнение

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \gamma^2 U, \quad (28)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{p(G + pC)RL}{R + pL + p^2 KLR}}.$$

Интегрируя уравнение (28) и учитывая, что на оси вещественных частот $p = j\omega$, находим выражения для волнового сопротивления и постоянной распространения:

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega LR}{(G + j\omega C)(R + j\omega L)}}; \quad (29)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{j\omega LR(G + j\omega C)}{R + j\omega L}}. \quad (30)$$

В выражения (29) и (30) принято допущение $K \ll C$, что имеет место при частотах, не превышающих 10^6 гц.

Соответственно для входных сопротивлений имеем:

а) система «фаза — фаза»

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega LR}{(G + j\omega C)(R + j\omega L)}} \operatorname{th} \gamma l; \quad (31)$$

б) система «фаза — земля»

$$Z_\infty = \sqrt{\frac{j\omega LR}{(G + j\omega C)(R + j\omega L)}} \frac{1}{\operatorname{th} \gamma l}. \quad (32)$$

Необходимо сделать оговорку, что волновые параметры обмотки, выраженные соотношениями (24), (26), (29), (30), (31) и (32) соответствуют предположению, что обмотка асинхронного электродвигателя является однородной линией, т. е. что первичные и вторичные параметры обмотки постоянны.

Между тем, результаты экспериментов показывают, что первичные параметры периодически изменяются вдоль обмотки. Следовательно, вторичные параметры являются функцией частоты.

Таким образом, при исследованиях, требующих особой точности, необходимо рассматривать обмотку как неоднородную линию.