$\widetilde{t}_k \to \infty$. Обозначим τ_{i_k} моменты, в которые происходят фокусировки на Ω_{i_k}. В каждом $\{\Omega_{i_k}\}$ выделим элементы $\Omega_{i_k,\min}$, $\Omega_{i_k,\max}$, на которых разности $f(M,\tau_{i_k})I(\Omega_{i_k}) - f_0(M)I(\Omega_{i_k})$ принимают наименьшее и наибольшее значения. Очевидно,

$$f(M,\tau_{i_k,\min})I(\Omega_{i_k,\min}) - f_0(M)I(\Omega_{i_k,\min}) < 0,$$
$$f(M,\tau_{i_k,\max})I(\Omega_{i_k,\max}) - f_0(M)I(\Omega_{i_k,\max}) > 0. \quad (4)$$

Из А, Б и (1) следует, что при $k \to \infty$ разности $f(M,\tau_{i_k,\max})I(\Omega_{i_k,\max}) - f(M,\tau_{i_k,\min})I(\Omega_{i_k,\min})$ монотонно убывают и стремятся к нулю. Значит обе разности из (4) при $t \to \infty$ также стремятся к нулю. Отсюда следует, что (3) имеет место.

Для $t_0 < \infty$ предполагается, что: на $[s_0, t_0)$ сосредоточены все возмущения из $(\delta\Pi)_i$ $(i = 1,2,...)$; на любом $[s_0, t'] \subset [s_0, t_0)$ число возмущений предполагается конечным. Остальные предположения о возмущениях остаются прежними. Доказательство того, что процесс Π фокусирует на неподвижную точку $A(\Omega_i)$, проводится так же, как для случая $t_0 = \infty$.

Если τ_i (все или их часть) являются точками σ-фокусировки, то процесс Π σ-фокусирует на $f_0(M)$. Такая фокусировка будет иметь место и в случае, когда условия Б, В выполняются приближенно.

Рассмотрим случай, когда возмущения $(\delta\Pi)_\alpha$ $(\alpha = 1,2,...)$ не приводят к фокусировке на Ω_α. Пусть каждое Ω_α подвергается воздействию возмущений $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ $(i = 1,2,...)$ и любое $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ лишь незначительно изменяет распределения вероятностей на Ω_α. Считаем, что возникающие в результате возмущений $(\delta\Pi)_{\alpha,i}$ распределения $f_{\alpha,i}(M)I(\Omega_\alpha)$ $(i = 1,2,...)$ образуют последовательность, равномерно сходящуюся на Ω_α. Если условие В имеет место, перечисленные требования выполняются для всех Ω_α и распределения на Ω_α, к которым сходятся $f_{\alpha,i}(M)I(\Omega_\alpha)$ $(\alpha = 1,2,...)$, удовлетворяют условиям А, Б, то имеет место (3). Проверка этого утверждения с незначительными изменениями проводится так же, как для случая, когда возмущения $(\delta\Pi)_\alpha$ сразу приводят к фокусировке.

Литература: 1. *Дикарев В.А., Герасин С.Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Доп. НАН України. 2000. №8. С. 90-93. 2. *Дикарев В. А.* Фокусировка распределений марковских процессов. // Доп. НАН України.1999. №11.С.100-103. 3. *Конторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

Поступила в редколлегию 24.07.2002

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: функциональный анализ, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел.: (0572) 33-57-03 (дом.), (0572) 40-94-36 (раб.).

УДК 517.9+532.5

О ПОСТРОЕНИИ СТРУКТУР РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

СИДОРОВ М.В.

Рассматриваются постановки основных краевых задач для функции тока в случае медленного течения вязкой несжимаемой жидкости. Строятся структуры решения указанных задач.

Стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости описывается хорошо известными уравнениями Навье-Стокса [1]:

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{b} \quad (1)$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ – поле скоростей; p – давление; $\mathbf{b}$ – поле объемных сил; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность.

Решение системы (1), (2) сопряжено со значительными трудностями, связанными, в основном, с присутствием в (1) нелинейного члена $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$.

Для достаточно медленного движения отношение порядка конвективных сил инерции к порядку сил вязкости мало (т.е. мало число Рейнольдса), и нелинейными членами в (1) можно пренебречь. При этом получаем линеаризованные по Стоксу уравнения вязкой несжимаемой жидкости. Задача определения $\mathbf{v}$ и p в области Ω (*задача Стокса*) имеет вид

$$\nu\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Вопросы существования и единственности решения задачи (3) – (5) изучались в монографии О.А. Ладыженской [2]. В частности, доказано, что существует единственное обобщенное решение задачи (3)-(5) $\mathbf{v} \in \overset{0}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$ и $p \in L^2(\Omega)$.

Достаточно широкий класс течений может быть сведен к двумерным течениям. Итак, рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в конечной области Ω плоскости x_1Ox_2. В развернутом виде уравнения (3), (4) имеют вид

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + b_1, \quad (6)$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + b_2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0\,. \qquad (8)$$

Анализ двумерных течений удобно производить с помощью функции тока $\psi(x_1, x_2)$, вводимой соотношениями

$$v_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,,\;\; v_2=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \qquad (9)$$

(уравнение неразрывности (8) при этом обращается в тождество). Если еще ввести завихренность ζ по формуле

$$\zeta=\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,, \qquad (10)$$

то из (11), (12) можно исключить давление. При этом получим систему

$$\Delta\zeta=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1}-\frac{\partial b_1}{\partial x_2}\right), \qquad (11)$$

$$\Delta\psi=-\zeta\,. \qquad (12)$$

Система (11),(12) уже не содержит давление, однако в общем случае не удается корректно задать граничные условия для завихренности ζ на твердых стенках и при решении прикладных задач эти условия приходится задавать приближенно. Этого можно избежать, если от системы (11), (12) перейти к одному уравнению для функции тока [2]:

$$\Delta^2\psi=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_2}-\frac{\partial b_2}{\partial x_1}\right). \qquad (13)$$

Если поле $\mathbf{b}$ потенциально, т.е. $\mathbf{b}=\nabla B$, то $\frac{\partial b_1}{\partial x_2}=\frac{\partial b_2}{\partial x_1}$ и (13) преобразуется к виду $\Delta^2\psi=0$.

Граничные условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор $\mathbf{v}$. Если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращается нормальная и тангенциальная составляющие скорости (так называемое условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки. На жидких границах должны быть поставлены условия непротекания и скольжения. Это означает, что на границе $\partial\Omega$ области Ω можно задать значение функции тока ψ и ее нормальных производных $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}$ или $\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{n}^2}$. Как видно, мы получаем для функции тока задачу, во многом аналогичную задачам изгиба тонкой упругой пластины, жестко защемленной или свободно опертой на границе. В [3] для задач

$$\Delta^2 u=F,$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\;\; \left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0,$$

и

$$\Delta^2 u=F,$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\;\; \left.\frac{\partial^2 u}{\partial\mathbf{n}^2}\right|_{\partial\Omega}=0,$$

предлагаются структуры решения в виде

$$u=\omega^2\Phi\,, \qquad (14)$$

$$u=\omega\Phi_1-\frac{\omega^2}{2}\left[\Phi_1 D_2\omega+2D_1\Phi_1+\omega\Phi_2\right], \qquad (15)$$

соответственно. Здесь D_k — дифференциальный оператор, действующий по формуле

$$D_k f=\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k f\,; \qquad (16)$$

функция $\omega(x_1, x_2)$ удовлетворяет условиям: $\omega>0$ в Ω, $\omega=0$ на $\partial\Omega$, $|\nabla\omega|=1$ на $\partial\Omega$; Φ, Φ_1, Φ_2 — неопределенные компоненты структуры.

Рассмотрим постановки основных краевых задач для функции тока в случае медленного течения вязкой несжимаемой жидкости и построим их структуры решения.

1. Пусть участок $\partial\Omega_1$ границы $\partial\Omega$ области Ω соответствует неподвижной стенке, а участок $\partial\Omega_2=\partial\Omega\setminus\partial\Omega_1$ — твердой стенке, движущейся со скоростью $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})=\left(v_1^*(\mathbf{x}),\; v_2^*(\mathbf{x})\right)$. Тогда функцию тока необходимо подчинить таким граничным условиям:

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=f_0(\mathbf{x}),\;\; \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1}=0\,,\;\; \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2}=g_0(\mathbf{x}), \qquad (17)$$

где $g_0(\mathbf{x})=-\mathbf{v}^*(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}$, а $f_0(\mathbf{x})$ может быть получена интегрированием по $\partial\Omega$ соотношений $\left.\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right|_{\partial\Omega_1}=0$, $\left.\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right|_{\partial\Omega_2}=\mathbf{v}^*(\mathbf{x})\mathbf{n}$. Если $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})\mathbf{n}=0$, то $\psi\big|_{\partial\Omega}=\text{const}$ и можно положить $\psi\big|_{\partial\Omega}=0$. Отметим, что функция $f_0(\mathbf{x})$ должна удовлетворять условию сохранения полного потока: $\int\limits_{\partial\Omega}(\nabla f,\;\boldsymbol{\tau})ds=0$.

Пусть $\omega\big|_{\partial\Omega}=0$, $\omega>0$ в Ω, $\|\nabla\omega\|_{\partial\Omega}=1$,

$$\omega_1\big|_{\partial\Omega_1}=0\,,\; \omega_1>0 \text{ в } \Omega\cup\partial\Omega_2\,,\; \|\nabla\omega_1\|_{\partial\Omega_1}=1\,,$$

$$\omega_2\big|_{\partial\Omega_2}=0\,,\; \omega_2>0 \text{ в } \Omega\cup\partial\Omega_1\,,\; \|\nabla\omega_2\|_{\partial\Omega_2}=1\,.$$

Структуру решения задачи (13), (17) будем искать в виде

$$\psi=\Phi_0+\Phi_1\,, \qquad (18)$$

где Φ_0 учитывает неоднородные условия в (17), а Φ_1 определяется формулой (14). Функцию Φ_0 можно выбрать в виде

$$\Phi_0=f-\omega\left(g+D_1 f\right), \qquad (19)$$

где $f=ECf_0$ — продолжение в область Ω функции f_0, а $g=\frac{\omega_1\tilde{g}}{\omega_1+\omega_2}$, $\tilde{g}(\mathbf{x})=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}v_1^*-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}v_2^*$. Тогда структура решения задачи (13), (17) примет вид

$$\psi=f-\omega\left[\frac{\omega_1\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}v_1^*-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}v_2^*\right)}{\omega_1+\omega_2}+\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]+$$

$$+\omega^2\Phi.$$

2. Пусть, по-прежнему, $\partial\Omega_1$ соответствует неподвижной твердой стенке, но через участок $\partial\Omega_2$ в область Ω втекает (или вытекает) жидкость, причем задана скорость течения $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})$. В любой точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega_2$ можно вычислить изменение функции тока

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(A) + \int_0^{s_\mathbf{x}} \mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}')\mathbf{n}_{\mathbf{x}'}\, ds_{\mathbf{x}'}\,, \qquad (20)$$

где $\psi(A)$ – значение функции тока в точке $A \in \partial\Omega_2$, от которой ведется отсчет длины $s_{\mathbf{x}'}$ дуги к текущей точке $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_2$; $\mathbf{n}_{\mathbf{x}'}$ – единичный вектор внешней нормали. В этом случае необходимо поставить такие краевые условия:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_1} = 0\,,\; \psi\big|_{\partial\Omega_2} = f_0(\mathbf{x}),\; \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad (21)$$

здесь $f_0(\mathbf{x})$ определяется из (20). Структуру решения задачи (13), (21) также будем искать в виде (18), только функцию Φ_0 теперь возьмем в виде

$$\Phi_0 = \tilde{f} + \omega D_1 \tilde{f}\,,$$

где $\tilde{f} = \dfrac{\omega_1 f}{\omega_1 + \omega_2}$. Тогда структуру решения задачи (13), (21) можно записать в виде

$$\psi = \frac{\omega_1 f}{\omega_1 + \omega_2} + \omega D_1\left(\frac{\omega_1 f}{\omega_1 + \omega_2}\right) + \omega^2\Phi\,.$$

3. Предположим, что область Ω ограничена другой жидкостью или газом (покоящимися). В этом случае на границе $\partial\Omega$ следует задать такие условия:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \psi^\circ = \text{const}\,,\; \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{n}^2}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,. \qquad (22)$$

Структуру решения задачи (13),(22) можно получить, учитывая (15), в виде

$$\psi = \psi^\circ + \omega\Phi_1 - \frac{\omega^2}{2}\left[\Phi_1 D_2\omega + 2D_1\Phi_1 + \omega\Phi_2\right].$$

4. Таким образом, в модели вязкой жидкости краевые условии для функции тока ψ в достаточно общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_1} = f_0(\mathbf{x}),\; \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega_1} = g_0(\mathbf{x}), \qquad (23)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_2} = \psi^\circ = \text{const}\,,\; \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{n}^2}\bigg|_{\partial\Omega_2} = 0\,, \qquad (24)$$

где f_0, g_0 – заданные на $\partial\Omega$ функции.

Построим структуру решения задачи (13), (23), (24). В соответствии с (14), (15) общие структуры, учитывающие на $\partial\Omega_i$ краевые условия (23), (24), имеют соответственно вид:

$$\psi_1 = f - \omega_1\left(g + D_1^{(1)} f\right) + \omega_1^2\Phi_1 = B_1(f, g, \omega_1, \Phi_1),$$

$$\psi_2 = \psi^\circ + \omega_2\Phi_2 - \frac{\omega_2^2}{2}\left[\Phi_2 D_2^{(2)}\omega_2 + 2D_1^{(2)}\Phi_2 + \omega_2\Phi_3\right] = B_2\left(\psi^\circ, \omega_2, \Phi_2, \Phi_3\right),$$

здесь $f = ECf_0$, $g = ECg_0$, $D_k^{(l)}\nu = \left(\sum_{i=1}^{2}\dfrac{\partial\omega_l}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^k \nu$.

Тогда общую структуру решения задачи (13), (23), (24), используя обобщенную формулу Эрмита, можно записать в виде

$$\psi = \frac{\dfrac{B_1}{\omega_1^2} + \dfrac{B_2}{\omega_2^3}}{\dfrac{1}{\omega_1^2} + \dfrac{1}{\omega_2^3}} = \frac{\omega_2^3 B_1 + \omega_1^2 B_2}{\omega_2^3 + \omega_1^2}\,. \qquad (25)$$

Как видно, структура (25) содержит три неопределенные компоненты Φ_1, Φ_2, Φ_3. Попробуем упростить ее. Рассмотрим числитель выражения (25):

$$\omega_2^3 B_1 + \omega_1^2 B_2 = \omega_2^3\left[f - \omega_1\left(g + D_1^{(1)} f\right) + \omega_1^2\Phi_1\right] + \omega_1^2\left[\psi^\circ + \omega_2\Phi_2 - \frac{\omega_2^2}{2}\left(\Phi_2 D_2^{(2)}\omega_2 + 2D_1^{(2)}\Phi_2 + \omega_2\Phi_3\right)\right].$$

Последнее слагаемое, очевидно, можно включить в слагаемое $\omega_1^2\omega_2^3\Phi_1$. Таким образом, получим

$$\psi = \frac{1}{\omega_2^3 + \omega_1^2}\left\{\omega_2^3\left[f - \omega_1\left(g + D_1^{(1)} f\right)\right] + \omega_1^2\psi^\circ + \omega_1^2\omega_2^3\Phi' + \omega_1^2\omega_2\Phi_2 - \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2}\left[\Phi_2 D_2^{(2)}\omega_2 + 2D_1^{(2)}\Phi_2\right]\right\}, \qquad (26)$$

где $\Phi' = \Phi_1 - \dfrac{1}{2}\Phi_3$. В отличие от (25) структура (26) содержит уже не три, а две неопределенные компоненты.

Недостатком структур (25) и (26) является то, что в точках стыка граничных условий (т.е. когда одновременно ω_1 и ω_2 обращаются в нуль) знаменатель обращается в нуль. В этих особых точках структуру необходимо доопределить раскрывая неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Далее можно аппроксимировать неопределенные компоненты с помощью какого-либо приближенного аналитического метода (например, метода Галеркина) и получить опять же в аналитическом виде другие характеристики вязкого потока: поле скоростей по формулам (9) и давление, решив соответствующую задачу Неймана для уравнения Пуассона.

Литература: 1. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736с. 2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. 3. *Рвачев В.Л.*, *Курпа Л.В.* R-функции в задачах теории пластин. К.: Наук. думка, 1987. 176 с.

Поступила в редколлегию 24.07.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Сидоров Максим Викторович, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.