УДК 621.396

И. М. ЕФАНОВ, Н. П. ЖУК, канд. физ.-мат. наук,
В. А. ПЕТЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА ВДОЛЬ ПРОВОЛОЧНОГО ВИБРАТОРА В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Определение электромагнитного поля, рассеянного проводящим вибратором в материальной среде, является одной из ключевых задач теории антенн [1]. На основе тензорных функций Грина уравнений Максвелла в слоистых средах [2] получено интегродифференциальное уравнение относительно функции распределения тока в тонких проводниках. Его решение проведено согласно методике усреднения, развитой в работе [3], после чего задача отыскания полей сводится к квадратурам.

Рассмотрим безграничную по $\vec{R} = (\vec{r}, z)$, $\vec{r} = (x, y)$ плоскослоистую среду с материальными параметрами $\varepsilon(z)$, $\mu(z)$, в которую помещено идеально проводящее тело, занимающее область V с границей S. Пусть тело возбуждается заданным полем $\vec{E}_0(\vec{R})$, $\vec{H}_0(\vec{R})$, зависящим от времени как $e^{-i\omega t}$. Тогда полное поле есть сумма первичного и рассеянного: $\vec{E}_0(\vec{R}) + \vec{E}_s(\vec{R})$, $\vec{H}_0(\vec{R}) + \vec{H}_s(\vec{R})$. Краевая задача для последнего формулируется следующим образом [4]:

$$\nabla\times\vec{E}_s(\vec{R}) - ik_0\mu(z)\vec{H}_s(\vec{R}) = 0;\quad \nabla\times\vec{H}_s(\vec{R}) + ik_0\varepsilon(z)\vec{E}_s(\vec{R}) = 0,\quad \vec{R}\in V;$$

$\vec{E}_s(\vec{R}), \vec{H}_s(\vec{R})$ исчезают в бесконечности; (1)

$$\vec{N}(\vec{R})\times\vec{E}_s(\vec{R}) = -\vec{N}(\vec{R})\times\vec{E}_0(\vec{R}),\quad \vec{R}\in S; \tag{2}$$

$k_0 = \omega/c$, $\vec{N}(\vec{R})$ — нормаль к S в точке $\vec{R}$. Граничные условия на поверхностях раздела $z = \mathrm{const}$, где материальные параметры среды изменяются скачкообразно, здесь и далее полагаем включенными в уравнения (1). Считаем также, что среда обладает омическими потерями, возможно, бесконечно малыми.

Пусть тело представляет собой тонкий цилиндр (вибратор) с образующей, параллельной оси z, т. е. $V = \{|\vec{r} - \vec{r}| < a, z_1 < z < z_2\}$, причем $|\varkappa_m a| \ll 1$, $\varkappa_m$ наибольшее по модулю собственное число дискретной части спектра волн слоистой среды. Тогда в рамках тонкопроволочного приближения [1; 4] рассеянное поле ищем в виде

$$\vec{E}_s(\vec{R}) = \frac{4\pi}{ik_0c\varepsilon(z)}\left[\varepsilon(z)\nabla\varepsilon^{-1}(z)\frac{\partial}{\partial z} + k^2(z)\vec{z}_0\right]\int_{z_1}^{z_2}\varepsilon^{-1}(z)H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R})I(z')dz';$$
$$\vec{H}_s(\vec{R}) = \frac{4\pi}{c}\vec{z}_0\times\nabla\int_{z_1}^{z_2}\varepsilon^{-1}(z')H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}')I(z')dz'. \tag{3}$$

Здесь $\vec{R}' = (r', z')$ — радиус-вектор точек на оси вращения цилиндра, а—его радиус, z_1. z_2 — координаты нижнего и верхнего концов соответственно, $k(z) = k_0 [\varepsilon(z) \mu(z)]^{1/2}$ — локальное волновое число, ∇_t — горизонтальная компонента оператора ∇, $\vec{z}_0$ — орт оси z, а $I(z)$ — полный ток, подчиняющийся условиям $I(z_1) = I(z_2) = 0$.

Скалярный потенциал $H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}')$ согласно (1)—(3) удовлетворяет уравнению

$$[\varepsilon(z) \nabla \cdot \varepsilon^{-1}(z) \nabla + k^2(z)] H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}') = \varepsilon(z) \delta(\vec{R} - \vec{R}') \tag{4}$$

и принципу предельного поглощения. Если область существования поля в среде ограничена сверху или снизу хорошо проводящей плоскостью $z = \text{const} \mp 0$, на которой выполняется граничное условие Леонтовича—Щукина

$$\vec{z}_0 \times \vec{E}(\vec{R}) \pm \zeta \vec{z}_0 \times \vec{z}_0 \vec{H}(\vec{R}) = 0 \tag{5}$$

с постоянным импедансом ζ, на потенциал дополнительно накладываются условия

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \mp i k_0 \varepsilon(z) \zeta\right] H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}') = 0. \tag{6}$$

Уравнение для тока получим, помещая в (3) точку наблюдения на поверхность вибратора, откуда, приняв во внимание лишь z — компоненты полей, имеем

$$\left[\varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(z)\right] \int\limits_{z_1}^{z_2} \varepsilon^{-1}(z) H_\varepsilon(z, z') I(z') dz' =$$

$$= -\frac{i k_0 c}{4\pi} \varepsilon(z) E_{0z}(z), \tag{7}$$

где $\quad E_{0z}(z) = \vec{z}_0 \vec{E}_0(\vec{R});\ H_\varepsilon(z, z') = H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}'),\ \ |\vec{r} - \vec{r}'| = a.$

Приближенное аналитическое решение (7) найдем, когда вибратор целиком расположен в некотором однородном слое, содержащимся в слоистой среде. Проницаемости слоя, следовательно, постоянны и равны ε, μ. В этом случае функция $H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}')$ допускает представление [3]

$$H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}') = -\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\right) / |\vec{R} - \vec{R}'| + H_\varepsilon^{(0)}(\vec{R}, \vec{R}'), \tag{8}$$

в котором последнее слагаемое не имеет особенности при $\vec{R} \to \vec{R}'$.

С учетом (8) интегродифференциальное уравнение (7) после выделения малого параметра преобразуем, следуя работе [3], к виду

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)I(z)=\alpha\left[\frac{ik_0c}{4\pi}\,\varepsilon E_{0z}(z)+F(z|I)\right], \tag{9}$$

где α — логарифмический параметр малости, $\alpha=2\pi/\ln a^{-1}(z_2-z_1)$, $\alpha\ll 1$; $F(z|I)$ — зависящий от продольной координаты функционал тока,

$$F(z|I)=\left(\frac{d^2}{dz}+k^2\right)\int_{z_1}^{z_2}[\varepsilon^{-1}H_\varepsilon(z,z')\,I(z')+g(z,z')\,I(z)]\,dz', \tag{10}$$

$k=k_0(\varepsilon\mu)^{1/2}$, $g(z,z')=1/4\pi[a^2+(z-z')^2]^{1/2}$.

Заменой переменных $I(z)=\mathrm{A}(z)\cos kz+\mathrm{B}(z)\sin kz$ (11)

уравнение (9) сведем к эквивалентной системе в стандартной форме

$$\frac{d\mathrm{A}(z)}{dz}=-\frac{\alpha}{k}\left[\frac{ik_0c}{4\pi}\,\varepsilon E_{0z}(z)+F(z|\,\mathrm{A},\mathrm{B})\right]\sin kz; \tag{12}$$

$$\frac{d\mathrm{B}(z)}{dz}=\frac{\alpha}{k}\left[\frac{ik_0c}{4\pi}\,\varepsilon E_{0z}(z)+F(z|\,\mathrm{A},\mathrm{B})\right]\cos kz,$$

которую подвергнем усреднению согласно методике, предложенной в [3]. В результате с точностью до величин второго порядка малости имеем

$$\frac{d\mathrm{A}(z)}{dz}=-\alpha\left[\frac{ik_0c}{4\pi k}\,\varepsilon E_{0z}(z)+\bar{F}(z|\mathrm{A},\mathrm{B})\right]\sin kz; \tag{13}$$

$$\frac{d\mathrm{B}(z)}{dz}=\alpha\left[\frac{ik_0c}{4\pi k}\,\varepsilon E_{0z}(z)+\bar{F}(z|\,\mathrm{A},\mathrm{B})\right]\cos kz,$$

где $\bar{F}(z|\mathrm{A},\mathrm{B})$ — усредненное значение функционала $F(z|\mathrm{A},\mathrm{B})$,

$$\bar{F}(z|\,\mathrm{A},\mathrm{B})=[\mathrm{A}(z_2)\sin kz_2-\mathrm{B}(z_2)\cos kz_2]\,\varepsilon^{-1}H_\varepsilon(z,z_2)-$$
$$-[\mathrm{A}(z_1)\sin kz_1-\mathrm{B}(z_1)\cos kz_1]\,\varepsilon^{-1}H_\varepsilon(z,z_1). \tag{14}$$

Решая уравнения (13) относительно $\mathrm{A}(z)$, $B(z)$ и подставляя их в (11), находим общее асимптотическое выражение для тока в тонком проводнике любой длины при произвольном возбуждении

$$I(z)=\mathrm{A}(z_1)\cos kz+\mathrm{B}(z_1)\sin kz+\alpha\int_{z_1}^{z}\left[\frac{ik_0c}{4\pi k}\,\varepsilon E_{0z}(z')+\bar{F}(z'|\,\mathrm{A},\mathrm{B})\right]\times$$
$$\times\sin k(z-z')\,dz'. \tag{15}$$

После определения аддитивных постоянных, отбрасывая величины $0(\alpha^2)$, получаем искомую формулу для функции распределения тока вдоль проволочного вибратора в плоскослоистой среде

$$I(z) = -\alpha \frac{ik_0 c\varepsilon/4\pi k}{\sin k(z_2 - z_1) + \alpha W_\varepsilon(z_1, z_2)} \Big[\sin k(z - z_2) \int\limits_{z_1}^{z} E_{0z}(z') \times$$

$$\times \sin k(z_1 - z')dz' + \sin k(z - z_1) \int\limits_{z}^{z_2} E_{0z}(z') \sin k(z_2 - z')\, dz' \Big], \qquad (16)$$

$$W_\varepsilon(z_1 z_2) = \varepsilon^{-1} \int\limits_{z_1}^{z_2} [H_\varepsilon(z, z_1) \sin k(z_2 - z) + H_\varepsilon(z, z_2) \sin k(z - z_1)]\, dz. \qquad (17)$$

Рассмотрим практически важную модель среды — однородный слой толщиной $2b$ в однородном пространстве

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_e \\ \varepsilon_i, \end{cases} \quad \mu(z) = \begin{cases} \mu_e \\ \mu_i, \end{cases} \quad k(z) = \begin{cases} k_e & |z| > b \\ k_i, & |z| < b. \end{cases} \qquad (18)$$

В этом случае скалярный потенциал находится в виде разложения по собственным функциям [2, 5]

$$H_\varepsilon(\vec{R}, \vec{R}') = \frac{1}{4i} \sum_{p=e,0} \Big[\sum_{\kappa} H_0^{(1)}(\varkappa_k |\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{\psi_{\varepsilon p}(z, \lambda_k)\, \psi_{\varepsilon p}(z', \lambda_\kappa)}{N_{\varepsilon p}^2(\lambda_\kappa)} +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} d\lambda H_0^{(1)}(\varkappa |\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{\psi_{\varepsilon p}(z, \lambda)\, \psi_{\varepsilon p}(z', \lambda)}{N_{\varepsilon p}^2(\lambda)} \Big]. \qquad (19)$$

Суммирование по индексу p учитывает вклад четных (e) и нечетных (о) по z собственных волн. Соответственно этим значениям p под знаком $\sum\limits_{\kappa}$ проводится суммирование по всем корням λ_κ дисперсионного уравнения

$$i\varepsilon_i \gamma_e(\lambda) \cos b\gamma_i(\lambda) + \varepsilon_e \gamma_i(\lambda) \sin b\gamma_i(\lambda) = 0 \qquad (20)$$

или

$$i\varepsilon_i \gamma_e(\lambda) \sin b\gamma_i(\lambda) - \varepsilon_e \gamma_i(\lambda) \cos b\gamma_i(\lambda) = 0, \qquad (21)$$

расположенным на правильном листе римановой поверхности функции $\gamma_e(\lambda)$, $\mathrm{Im}\,\gamma_e(\lambda) \geqslant 0$. Контур Γ совпадает с верхним краем разреза по линии $\mathrm{Im}\,\gamma_e(\lambda) = 0$, $\arg \gamma_e(\lambda) = 0$ и обходится в направлении от $\lambda = -k_e^2$ к бесконечности. В приведенных соотношениях $\varkappa = \sqrt{-\lambda}$ ($\mathrm{Im}\,\varkappa \geqslant 0$), $\gamma_i(\lambda) = \sqrt{\lambda + k_i^2}$, $\gamma_e(\lambda) = \sqrt{\lambda + k_e^2}$, а $\varkappa_k$, γ_{ik}, γ_{ek} — те же величины, взятые при $\lambda = \lambda_\kappa$.

Собственные функции дискретной и непрерывной частей спектра

$$\psi_{\varepsilon e}(z, \lambda_\kappa) = \begin{cases} e^{i\gamma_{e\kappa}(|z| - b)}, \\ \dfrac{\cos \gamma_{i\kappa} z}{\cos \gamma_{i\kappa} b}, \end{cases} \quad \psi_{\varepsilon 0}(z, \lambda_\kappa) = \begin{cases} \mathrm{sgn}\, z e^{i\gamma_{e\kappa}(|z| - b)}, & |z| > b; \\ \dfrac{\sin \gamma_{i\kappa} z}{\sin \gamma_{i\kappa} b}, & |z| < b; \end{cases} \qquad (22)$$

$$\psi_{\varepsilon e}(z,\lambda)=\begin{cases}\cos\gamma_e(|z|-b)-\dfrac{\varepsilon_e\gamma_i}{\varepsilon_i\gamma_e}\operatorname{tg}\gamma_i b\sin\gamma_e(|z|-b), & |z|>b;\\ \dfrac{\cos\gamma_i z}{\cos\gamma_i b}, & |z|<b;\end{cases}\tag{23}$$

$$\psi_{\varepsilon 0}(z,\lambda)=\begin{cases}\operatorname{sgn} z\,[\cos\gamma_e(|z|-b)+\dfrac{\varepsilon_e\gamma_i}{\varepsilon_i\gamma_e}\operatorname{ctg}\gamma_i b\sin\gamma_e(|z|-b), & |z|>b;\\ \dfrac{\sin\gamma_i z}{\sin\gamma_i b}, & |z|<b,\end{cases}$$

а их нормировочные коэффициенты

$$N^2_{\varepsilon p}(\lambda_к)=[ib\gamma_{eк}(\gamma^2_{iк}-\nu^2\gamma^2_{eк})-\nu(k_i^2-k_e^2)]/i\varepsilon_i\gamma_{eк}\gamma^2_{iк},\tag{24}$$

$$N^2_{\varepsilon e}(\lambda)=2\pi\,[\gamma_i^2\operatorname{tg}^2\gamma_i b+\nu^2\gamma_e^2]/\varepsilon_i\nu\gamma_e;$$

$$N^2_{\varepsilon 0}(\lambda)=2\pi\,[\gamma_i^2\operatorname{ctg}^2\gamma_i b+\nu^2\gamma_e^2]/\varepsilon_i\nu\gamma_e,\quad \nu=\varepsilon_i/\varepsilon_e.$$

С учетом этого формула (17) после интегрирования приобретает вид

$$W_\varepsilon(z_1,z_2)=\frac{1}{4i\varepsilon}\sum_{p=e0}\Big[\sum_к H_0^{(1)}(\varkappa_к a)\,L_p(z_1,z_2,\lambda_к)+\int_\Gamma d\lambda H_0^{(1)}(\varkappa a)\times$$

$$\times L_p(z_1,z_2,\lambda)\Big],\tag{25}$$

где $L_p(z_1,z_2,\lambda)=[\psi_{\varepsilon p}(z_1\lambda)\Phi_p(z_2,z_1,\lambda)+\psi_{\varepsilon p}(z_2,\lambda)\Phi_p(z_1,z_2,\lambda)]/N^2_{\varepsilon p}(\lambda)$. (26)
Для вибратора, расположенного в области $|z|>b$ $(\varepsilon=\varepsilon_e,\ \mu=\mu_e,$ $k=k_e,\ \gamma=\gamma_e)$ функции слоя $L_{e,0}(z_1,z_2,\lambda_к)$, получающиеся из (26) заменой λ на $\lambda_к$, совпадают по виду при $z>0$, поскольку согласно (22)

$$\Phi_{e,0}(z_2z_1,\lambda_к)=\frac{ke^{i\gamma_к(z_2-b)}-[k\cos k(z_2-z_1)+i\gamma_к\sin k(z_2-z_1)]\,e^{i\gamma_к(z_1-b)}}{k^2-\gamma_к^2},$$

$$\Phi_{e,0}(z_1,z_2,\lambda_к)=\frac{ke^{i\gamma_к(z_1-b)}-[(k\cos k(z_2-z_1)-i\gamma_к\sin k(z_2-z_1)]e^{i\gamma_к(z_2-b)}}{k^2-\gamma_к^2}.\tag{27}$$

Функции, соответствующие (23), представим следующим образом:

$$\Phi_p(z_2,z_1,\lambda)=\psi_e(z_2,z_1\lambda)+C_p\psi_0(z_2,z_1,\lambda);\qquad C_p=\frac{\varepsilon_e\gamma_i}{\varepsilon_i\gamma_e}\begin{cases}-\operatorname{tg}\gamma_i b, & p=e;\\ \operatorname{ctg}\gamma_i b, & p=0,\end{cases}$$
$$\Phi_p(z_1,z_2,\lambda)=\psi_e(z_1,z_2,\lambda)+C_p\psi_0(z_1,z_2,\lambda),\tag{28}$$

где

$$\psi_e(z_2,z_1,\lambda)=\frac{\begin{aligned}&k\cos\gamma(z_2-b)-k\cos k(z_2-z_1)\cos\gamma(z_1-b)+\\&+\gamma\sin k(z_2-z_1)\sin\gamma(z_1-b)\end{aligned}}{k^2-\gamma^2},$$

$$\psi_0(z_2, z_1 \lambda) = \frac{k \sin\gamma(z_2 - b) - k\cos k(z_2 - z_1)\sin\gamma(z_1 - b) - \gamma\sin k(z_2 - z_1)\cos\gamma(z_1 - b)}{k^2 - \gamma^2}, \quad (29)$$

$$\psi_e(z_1, z_2, \lambda) = \frac{k\cos\gamma(z_1 - b) - k\cos k(z_2 - z_1)\cos\gamma(z_2 - b) - \gamma\sin k(z_2 - z_1)\sin\gamma(z_2 - b)}{k^2 - \gamma^2},$$

$$\psi_0(z_1, z_2 \lambda) = \frac{k\sin\gamma(z_1 - b) - k\cos k(z_2 - z_1)\sin\gamma(z_2 - b) + \gamma\sin k(z_2 - z_1)\cos\gamma(z_2 - b)}{k^2 - \gamma^2}.$$

Для вибратора, помещенного в область $|z| < b$ ($\varepsilon = \varepsilon_i, \mu = \mu_i, k = k_i, \gamma = \gamma_i$), собственные волны обеих частей спектра одинаковым образом зависят от z, поэтому функции слоя определяются выражениями (29), в которых необходимо формально заменить $\lambda \leftrightarrow \lambda_к$, $b = 0$,

$$\Phi_e(\lambda \leftrightarrow \lambda_к) = \frac{\psi_e(b = 0)}{\cos\gamma b}, \quad \Phi_0(\lambda \leftrightarrow \lambda_к) = \frac{\psi_0(b = 0)}{\sin\gamma b}. \quad (30)$$

Если в горизонтальной плоскости ($z = 0$) расположена идеально проводящая граница, то при $z > 0$ в (19) следует положить $p = e$, $N^2_{\varepsilon p}(\lambda) \Rightarrow N^2_{\varepsilon p}(\lambda)/2$.

Таким образом, чтобы вычислить ток, остается в (16) задать стороннее поле, зависящее от конкретного способа возбуждения вибратора в той или иной электродинамической структуре.

Список литературы: 1. *Кинг Р., Смит Г.* Антенны в материальных средах. — М.: Мир, 1984. — 824 с. 2. *Богомолов Н. М., Жук Н. П., Третьяков О. А.* Интегральные уравнения электродинамики в плоскослоистой среде. — Х., 1983.— 41 с. (Препринт АН УССР. Ин-т радиофизики и электрон: № 223). 3. *Горобец Н. Н., Петленко В. А., Хижняк Н. А.* Метод усреднения в задачах электродинамики//Сб. науч.-метод. ст. по прикл. электродинамике.— М.: Высш. шк.— 1983. — Вып. 6. — С. 84—110. 4. *Вычислительные* методы в электродинамике/ Под ред. Р. Миттры.— М.: Мир, 1977. — 485 с. 5. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. —М.: Наука, 1969. — 191 с.

Поступила в редколлегию 08.01.86

УДК 621.372

Н. А. КОРОБЧЕНКО

ВНУТРЕННЯЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕРЕЗОНАНСНОЙ НАКЛОННОЙ ЩЕЛИ НА УЗКОЙ СТЕНКЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

Электрические свойства щелевых излучателей, расположенных на широкой стенке прямоугольного волновода, изучены достаточно подробно. Например, решена задача возбуждения прямоугольного волновода произвольно ориентированной нерезонансной щелью в его широкой стенке и определена ее внутренняя проводимость [1]. Последняя необходима при исследовании свойств матрицы рассеяния и при расчете волноводно-щелевых антенн [2].