Конструктивні Методи Розв’язання Одного Класу Крайових Задач для Нелінійних Еліптичних Рівнянь

Володимир Луханін
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
volodymyr.lukhanin@nure.ua

Constructive Methods of Solving One Class of Boundary Value Problems for Nonlinear Elliptic Equations

Volodymyr Lukhanin
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
volodymyr.lukhanin@nure.ua

Анотація **— Робота присвячена розробці конструктивних методів знаходження додатних розв’язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходженню умов, яким мають задовольняти параметри задачі, щоб гарантувалися існування та єдиність розв’язку, а також збіжність відповідного ітераційного процесу.**

Abstract **— The paper is devoted to the development of constructive methods of searching positive solutions of one class of boundary value problems for nonlinear elliptic equations and finding the conditions that the parameters of the problem must satisfy in order to guarantee the existence and uniqueness of the solution as well as the convergence of the corresponding iterative process.**

Ключові слова — функція Гріна; квазіфункція Гріна; двобічні наближення; інваріантний конусний відрізок; угнутість; псевдоугнутість; монотонний оператор; антитонний оператор; гетеротонний оператор

Keywords — Green’s function; Green’s quasifunction; two-sided approximations; invariant conical interval; concavity; pseudoconcavity;, monotone operator, antitone operator, heterotone operator

I. Вступ

У сучасній науці спостерігається велика зацікавленість у процесах, що відбуваються в нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики, найчастіше з параметрами.

У більшості випадків знайти точний розв’язок таких задач практично неможливо, а тому важливу роль відіграють наближені методи розв’язання. Серед них особливе місце займають двобічні обчислювальні методи, які дають зручну апостеріорну оцінку обчислюваної похибки. Обґрунтування та розвиток двобічні методи розв’язання операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах із конусом набули в роботах відомого радянського математика М.О. Красносельського [2] та його учнів [3, 4].

Для розв’язання таких задач у областях складної геометрії, для яких точний вигляд функції Гріна невідомий, академіком НАН України В.Л. Рвачовим розроблено метод квазіфункцій Гріна [5], який разом із застосуванням апарату теорії R-функцій дозволяє звести вихідну задачу до еквівалентного лінійного інтегрального рівняння.

Метою досліджень є розробка конструктивних методів знаходження додатних розв’язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знаходження умов, яким мають задовольняти параметри задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У роботі досліджено можливість побудови двобічних наближень до розв'язків дев'яти крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \qquad (1)$$

$$u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

де $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \lambda) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ – числові параметри.

Нехай $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ є функцією Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω. У класі неперервних функцій задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s}, \qquad (3)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

Вважаємо, що простір $C(\overline{\Omega})$ напівупорядкований конусом K невід'ємних функцій. Тоді інтегральне рівняння (3) розглядаємо як операторне рівняння $u = Tu$, де оператор T визначається наступним чином

$$Tu = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s}, \quad D(T) = K. \qquad (4)$$

Розглянемо задачу Ліувілля-Гельфанда [6]

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \qquad (5)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda > 0 \quad (\lambda = const). \qquad (6)$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{u(\mathbf{s})} d\mathbf{s}. \qquad (7)$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (5), (6) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (9)$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \geq 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 1. Ітераційний процес (8), (9) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (7), якщо параметри λ та β задовольняють умови $\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s} \leq \frac{\beta}{\lambda e^\beta}$, $\beta < 1$. При цьому маємо

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Стосовно задачі, яка зводиться до операторного рівняння $u = T(\lambda, u)$, доводиться наступна теорема, висновки якої можуть бути застосовані й до інших задач вигляду (1), (2).

Теорема 2. Нехай оператор $T(\lambda, u)$ для кожного $\lambda > 0$ є монотонним та угнутим, для кожного $u \in K$ монотонно зростає за λ та задовольняє умову

$$T(t\lambda, u) \leq \frac{1}{t} T(\lambda, u), \quad t \in (0, 1].$$

Нехай u_1 та u_2 – додатні розв'язки рівняння $u = T(\lambda, u)$, що відповідають двом різним значенням λ_1 та λ_2, $\lambda_1 < \lambda_2$. Тоді $u_1 < u_2$.

Розглянемо крайову задачу для рівняння Лане-Емдена [1]

$$-\Delta u = u^q \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \qquad (10)$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad q > 0. \qquad (11)$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^q(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}. \qquad (12)$$

Якщо для побудови конусного відрізку $\langle v_0, w_0 \rangle$ покласти $u_1 = v_0 = 0$, то лівий кінець відрізку при використанні схеми послідовних наближень $u_{n+1} = Tu_n$, $n = 1, 2, \ldots$, залишається нерухомим, тому що для $f(u) = u^q$ маємо $f(0) = 0$, тобто замість двобічних наближень отримуємо лише наближення зверху. Ми пропонуємо покласти $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon\omega(\mathbf{x})$, $\varepsilon = const > 0$, а функція $\omega(\mathbf{x})$ визначається наступним чином: $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω, $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$. При цьому функція $\omega(\mathbf{x})$ із вказаними властивостями може бути побудована з використанням конструктивного апарату теорії *R*-функцій для області Ω досить довільної геометрії. Ітераційний процес для задачі (10), (11) будуємо за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, v_{n-1}^q(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{13}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, w_{n-1}^q(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{14}$$

де $v_0 = \varepsilon\omega$, $w_0 = \beta$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 3. Ітераційний процес (13), (14) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (12), якщо параметри q, ε, β задовольняють умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \omega^2(\mathbf{x}) \le \varepsilon^{2(q-1)} \int_{\Omega} \omega^{2q}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}\,,$$

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \beta^{1-q}\,, \quad 0 < q < 1\,.$$

При цьому маємо

$$\varepsilon\omega = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta\,.$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та двома параметрами [10]

$$-\Delta u = \lambda + u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m\,, \tag{15}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\,,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ p > 1\,,\ \lambda > 0\ (\ p,\lambda - const\ ). \tag{16}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda + u^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}\,. \tag{17}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (15), (16) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda + v_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{18}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda + w_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{19}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 4. Ітераційний процес (18), (19) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (17), якщо параметри λ, p, β задовольняють умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda + \beta^p}\,, \quad \lambda > \max\left\{\beta^p (p-1);\ \frac{\beta^p \left(t_* - t_*^p\right)}{1 - t_*}\right\},$$ де

$t_* \in (0,1)$ – корінь рівняння $1 + t^p (p-1) = p\, t^{p-1}$. При цьому маємо

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta\,.$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та трьома параметрами [7]

$$-\Delta u = \lambda u^q + u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m\,, \tag{20}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\,,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ 0 < q < 1 < p\,,\ \lambda > 0\,. \tag{21}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda u^q(\mathbf{s}) + u^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}\,. \tag{22}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (20), (21) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda v_{n-1}^q(\mathbf{s}) + v_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(\lambda w_{n-1}^q(\mathbf{s}) + w_{n-1}^p(\mathbf{s})\right) d\mathbf{s}\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{24}$$

де $v_0 = \varepsilon\omega$, $w_0 = \beta$, $\varepsilon = const > 0$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω, $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 5. Ітераційний процес (23), (24) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (22), якщо параметри λ, $q, p,$ ε, β задовольняють умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \omega^2(\mathbf{x}) \le \varepsilon^{2(q-1)} \int_{\Omega} \left(\lambda \omega^q(\mathbf{s}) + \varepsilon^{p-q} \omega^p(\mathbf{s})\right)^2 d\mathbf{s} \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}\,,$$

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda\beta^q + \beta^p}\,,$$

$$\lambda > \max\left\{\beta^{p-q} \frac{1-p}{q-1}, \beta^{p-q} \frac{t_* - t_*^p}{t_*^q - t_*}\right\},$$

де $t_* \in (0,1)$ – корені рівняння

$$\left(1 - p t^{p-1}\right)\left(t^q - t\right) - \left(q t^{q-1} - 1\right)\left(t - t^p\right) = 0\,.$$

При цьому маємо

$$\varepsilon\omega = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу з експоненціальною нелінійністю та двома параметрами [8]

$$-\Delta u = \lambda\left(e^{u} + e^{\gamma u}\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^{m}, \tag{25}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \lambda > 0,\ \gamma > 0\ (\lambda, \gamma - const). \tag{26}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}. \tag{27}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (25), (26) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{28}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{29}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \ge 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 6. Ітераційний процес (28), (29) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (27), якщо параметри λ, γ, β задовольняють умови

$$e^{\tau\beta} + e^{\gamma\tau\beta} - \tau e^{\beta} - \tau e^{\gamma\beta} > 0 \quad \forall \tau \in (0,1),$$

$$\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)}.$$

При цьому маємо

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу з експоненціальною нелінійністю та трьома параметрами

$$-\Delta u = \lambda \left|\mathbf{x}\right|^{2\alpha} \left(e^{u} + e^{\gamma u}\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^{2}, \tag{30}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \lambda > 0,\ \gamma > 0\ (\lambda, \alpha, \gamma - const). \tag{31}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left|\mathbf{s}\right|^{2\alpha} \left(e^{u(\mathbf{s})} + e^{\gamma u(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}. \tag{32}$$

Задача (30), (31) є більш загальним випадком задачі (25), (26) у просторі $\mathbf{R}^2$.

Будуємо ітераційний процес для задачі (30), (31) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left|\mathbf{s}\right|^{2\alpha} \left(e^{v_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma v_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{33}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left|\mathbf{s}\right|^{2\alpha} \left(e^{w_{n-1}(\mathbf{s})} + e^{\gamma w_{n-1}(\mathbf{s})}\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{34}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \ge 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 7. Ітераційний процес (33), (34) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (32), якщо параметри λ, γ, α, β задовольняють умови $\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \left|\mathbf{x}\right|^{2\alpha} \max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{\lambda\left(e^{\beta} + e^{\gamma\beta}\right)}$, $\beta \le 1$, $\gamma \le 1$. При цьому маємо

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо лінійну крайову задачу з двома параметрами

$$-\Delta u = a u + b \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^{m}, \tag{35}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ b \ge 0,\ a = const. \tag{36}$$

Еквівалентним інтегральним рівнянням з монотонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(a u(\mathbf{s}) + b\right) d\mathbf{s}. \tag{37}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (35), (36) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(a v_{n-1}(\mathbf{s}) + b\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{38}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})\left(a w_{n-1}(\mathbf{s}) + b\right) d\mathbf{s}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{39}$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, $\beta = const \ge 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 8. Ітераційний процес (38), (39) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (37), якщо параметри a, b, β задовольняють умови $a > 0$, $\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \frac{\beta}{a\beta + b}$. При цьому маємо

$$0 = v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та одним параметром

$$-\Delta u = \frac{1}{u^p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m , \tag{40}$$

$$u > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega ,\; u\big|_{\partial\Omega} = 0 ,\;\; p > 0 . \tag{41}$$

еквівалентним інтегральним рівнянням з антитонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega \frac{G(\mathbf{x},\mathbf{s})}{u^p(\mathbf{s})}\, d\mathbf{s} . \tag{42}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (40), (41) за схемою

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega \frac{G(\mathbf{x},\mathbf{s})}{w_{n-1}^p(\mathbf{s})}\, d\mathbf{s} ,\;\; n = 1,2,\ldots , \tag{43}$$

де $w_0 = \beta$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується виконанням наступної теореми.

Теорема 9. Ітераційний процес (43) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$ рівняння (42), якщо параметри p та β задовольняють умови $\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \le \beta^{1+p}$, $0 < p < 1$. При цьому маємо

$$\begin{gathered} v_0 = w_1 \le w_3 \le \ldots \le w_{2n-1} \le \ldots \le u^* \le \\ \le \ldots \le w_{2n} \le \ldots \le w_2 \le w_0 = \beta . \end{gathered}$$

Розглянемо крайову задачу зі степеневою нелінійністю та чотирма параметрами [9]

$$-\Delta u = a u^{-q} + b u^p \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m , \tag{44}$$

$$u > 0 \;\; \forall \mathbf{x} \in \Omega ,\; u\big|_{\partial\Omega} = 0 ,\; a > 0 ,\; b > 0 ,\; p,q > 0 . \tag{45}$$

еквівалентним інтегральним рівнянням з гетеротонним оператором є

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a u^{-q}(\mathbf{s}) + b u^p(\mathbf{s}) \right) d\mathbf{s} . \tag{46}$$

Будуємо ітераційний процес для задачі (44), (45) за схемою

$$v_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a w_{n-1}^{-q}(\mathbf{s}) + b v_{n-1}^p(\mathbf{s}) \right) d\mathbf{s} ,\;\; n = 1,2,\ldots , \tag{47}$$

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left(a v_{n-1}^{-q}(\mathbf{s}) + b w_{n-1}^p(\mathbf{s}) \right) d\mathbf{s} ,\;\; n = 1,2,\ldots , \tag{48}$$

де $v_0 = \varepsilon$, $w_0 = \beta$, $\varepsilon = const > 0$, $\beta = const > 0$.

Тоді збіжність ітераційного процесу гарантується наступною теоремою.

Теорема 10. Ітераційний процес (47), (48) двобічно збігається за нормою простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного невід'ємного розв'язку $u^* \in \langle v_1, w_0 \rangle$ рівняння (46), якщо параметри a, b, p, q, ε та β задовольняють умови $0 < p < 1$, $0 < q < 1$,

$$\begin{cases} a\beta^{-q} + b\varepsilon^p \ge \varepsilon \left(\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \right)^{-1} , \\ a\varepsilon^{-q} + b\beta^p \le \beta \left(\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \right)^{-1} . \end{cases}$$

При цьому маємо

$$v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w_n \le \ldots \le w_1 \le w_0 = \beta .$$

Також у роботі розглянуто метод квазіфункцій Гріна, розроблений академіком Рвачовим В.Л. для розв'язання крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь. Метод квазіфункцій Гріна з деякою модифікацією застосовано до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь вигляду (1), (2). Це дозволяє замінити задачу (1), (2) еквівалентним їй нелінійним операторним рівнянням

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s} + \int_\Omega K(\mathbf{x},\mathbf{s}) u(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} , \tag{49}$$

при цьому вигляд $G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s})$ та $K(\mathbf{x},\mathbf{s})$ залежить від вимірності простору, якому належить область Ω.

Нехай $\omega = 0$ є рівняння межі $\partial\Omega$, тобто $\omega(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Позначимо $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$, $\Delta_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2}$, $\mathbf{s} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$. Тоді, якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, то

$$G_{\text{кв}}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln\frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}) \right) ,$$

$$\zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{2} \ln\left(r^2 + 4\,\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s}) \right) ,\;\; K(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbf{s}} \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}) ,$$

якщо $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, то

$$G_{кв}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \zeta(\mathbf{x},\mathbf{s})\right),$$

$$\zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \left(r^2 + 4\,\omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{s})\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad K(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{4\pi}\Delta_{\mathbf{s}}\zeta(\mathbf{x},\mathbf{s}).$$

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (49) використовуємо метод послідовних наближень, що приводить до послідовності лінійних інтегральних рівнянь

$$u_n(\mathbf{x}) - \int_\Omega K(\mathbf{x},\mathbf{s})\, u_n(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} = \int_\Omega G_{кв}(\mathbf{x},\mathbf{s})\, f(\mathbf{s}, u_{n-1}(\mathbf{s}), \lambda)\, d\mathbf{s}, \quad (50)$$

де покладено $u_1(\mathbf{x}) = const$, $n = 2,3,\ldots$.

Кожне з рівнянь (50) може бути розв'язане за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. В цьому випадку ми отримаємо послідовність наближених розв'язків

$$u_{n,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_{n,i}\phi_i(\mathbf{x}), \quad (51)$$

при цьому $u_{1,k}(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x})$, $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{k}$ – координатна послідовність, $c_{n,i}$ ($i = \overline{1,k}$, $n = 2,3,\ldots$) – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{k} c_{n,i}\left[\int_\Omega \phi_i(\mathbf{x})\,\phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int_\Omega\int_\Omega K(\mathbf{x},\mathbf{s})\,\phi_i(\mathbf{s})\,\phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{s}\,d\mathbf{x}\right] =$$
$$= \int_\Omega\int_\Omega G_{кв}(\mathbf{x},\mathbf{s})\, f(\mathbf{s}, u_{n-1,k}(\mathbf{s}), \lambda)\,\phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{s}\,d\mathbf{x}, \quad j = \overline{1,k}, \; n = 2,3,\ldots.$$

III. Висновки

В роботі розроблено конструктивні методи знаходження додатних розв'язків одного класу крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь та знайдено умови, яким мають задовольняти параметри задачі, щоб гарантувалася двобічна збіжність відповідного ітераційного процесу.

Розглянуті методи можуть бути використані для відшукання розв'язків прикладних задач, математичними моделями яких є крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь.

Література References

[1] Е.И. Галахов, "Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения", *Математические заметки*, т. 78, № 2, С. 202–211, 2005.

[2] М.А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа, М.: Физматгиз, 1962.

[3] В.И. Опойцев, Т.А. Хуродзе, Нелинейные операторы в пространствах с конусом, Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1984.

[4] В.И. Опойцев, "Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов", *Труды Моск. матем. общества*, т. 36, С. 237–273, 1978.

[5] В.Л. Рвачев, Теория R-функций и некоторые ее приложения, К.: Наук. думка, 1982.

[6] Д.А. Франк-Каменецкий, Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике, Долгопрудный: Интеллект, 2008.

[7] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, "Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems", *Journal of Functional Analysis*, vol. 122, no. 2, pp. 519–543, 1994.

[8] S. Baraket, D. Ye, "Singular limit solutions for two-dimensional elliptic problems with exponentially dominated nonlinearity", *Chinese Annals of Mathematics. Series B*, vol. 22, no. 03, pp. 287–296, 2001.

[9] J. Shi, M. Yao, "Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity", *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2005, no. 04, pp. 1–11, 2005.

[10] P. Zhao, C. Zhong, J. Zhu, "Positive Solutions for a Nonhomogeneous Semilinear Elliptic Problem with Supercritical Exponent", *J. Mathematical Analysis and Application*, vol. 254, pp. 335–347, 2001.