ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИОРИТЕТОВ

И. Ф. Огороднейчук, А. Я. Куземин, В. И. Мелешко, В. И. Пономарев

Харьков

Как указывалось ранее [1], существует аналогия между предложенным методом оптимизации сложных систем — покоординатным самообучением на основе выработки статистических приоритетов и стохастическим автоматом с целесообразным поведением [2]. Частная конструкция такого автомата с переменной структурой известна как «автомат-строка» [1]. При построении правил обучения автомата с целесообразным поведением для синтеза сложных систем удобно пользоваться понятиями приоритетов [1, 3].

Цель данного сообщения — доказать целесообразность действий в методе покоординатного самообучения даже при использовании неполноценных приоритетов. На простой линейной модели распределения неполноценных приоритетов выведем меру целесообразности (назовем ее коэффициентом эффективности $K_{эф}$), указывающую на то, во сколько раз увеличивается ожидаемое улучшение критерия качества при использовании приоритетов. Условием целесообразности введения приоритетов является требование $K_{эф} > 1$.

Пусть $Q(x)$ — функционал качества сложной системы; $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — m-мерный вектор варьируемых параметров (факторов).

Если варьировать факторы без приоритетов, то вероятность варьирования i-го фактора составит $p_i = \frac{1}{m}$ $(i = \overline{1, m})$, т. е. все факторы равноправны. Тогда математическое ожидание улучшения критерия по всем факторам запишется в виде

$$M\Delta Q^* = \overline{\Delta Q}^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta_i}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i}{m\sqrt{2\pi}}. \qquad (1)$$

Пусть среднеквадратичные отклонения равномерно заполняют интервал $[\Delta_{min}, \Delta_{max}]$, т. е.

$$\Delta_i = \Delta_{min} + \frac{\Delta_{max} - \Delta_{min}}{m-1}(m-i), \quad i = \overline{1, m}. \qquad (2)$$

Тогда

$$M\Delta Q_i^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Delta_{min} + \frac{\Delta_{max} - \Delta_{min}}{m-1}(m-i)\right), \quad i = \overline{1, m}; \qquad (3)$$

$$M\Delta Q^* = \frac{\Delta_{max} + \Delta_{min}}{2\sqrt{2\pi}}.$$

С приближением к минимуму приращение критерия качества уменьшается (рис. 1). Это явление вытекает из того, что критерий качества, как правило, ограничен снизу (например, стоимость не может быть меньше нуля). Вследствие этого удачное приращение функционала $\overline{\Delta Q}^*$ при увеличении количества оптимизационных шагов n стремится к нулю и при некотором N, как показано на рис. 2, становится равным нулю. Поэтому изменение приращения функционала можно аппроксимировать выражением

$$\overline{\Delta Q}^*(n) = k(N-n)^2, \quad k > 0. \tag{4}$$

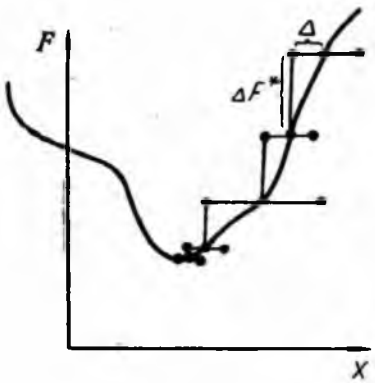


Рис. 1.

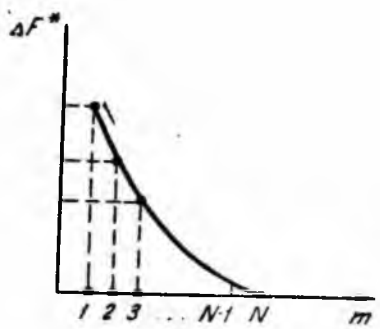


Рис. 2.

Тогда ожидаемое полное приращение критерия качества для случая оптимизации без применения приоритетов

$$\overline{\Delta Q}_{\text{б пр}} = \sum_{n=1}^{N} \overline{\Delta Q}^*(n) = k\overline{\Delta Q}^* \sum_{n=1}^{N} (N-n)^2 = \frac{kN^3}{6\sqrt{2\pi}}(\Delta_{\max} - \Delta_{\min}). \tag{5}$$

Если оптимизацию проводить с применением приоритетов, становится ясным, что факторам, при варьировании которых ожидаемое улучшение критерия гораздо больше, соответствует большее количество экспериментов, т. е. когда критерий качества имеет большую дисперсию, фактор надо варьировать большее количество раз.

Количество вычислений по каждому фактору можно взять равным

$$l_i = \frac{2N}{m^2}(m-i), \quad i = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Заметим, что общее количество вычислений в этом случае сохраняется $\sum_{i=1}^{m} l_i = N$.

С учетом (6) ожидаемое полное приращение улучшения качества при использовании приоритетов составит

$$\overline{\Delta Q}^*_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{l_i} k\left(N - n - \sum_{j=1}^{i-1} l_j\right)^2 \overline{\Delta Q}^*_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{l} k\left(N - n - \sum_{j=1}^{i-1} l_j\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Delta_{\max} + \frac{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}}{m-1}(m-i)\right) \approx \tag{7}$$

$$\approx \frac{kN^3}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3}\Delta_{\min} + \frac{2}{7}(\Delta_{\max} - \Delta_{\min})\right).$$

Эффективность использования приоритетов будем характеризовать коэффициентом

$$K_{эф} = \frac{\overline{\Delta Q^{*}_{пр}}}{\overline{\Delta Q^{*}_{i\ пр}}} = \frac{\frac{1}{3}\Delta_{min} + \frac{2}{7}(\Delta_{max} - \Delta_{min})}{\frac{1}{6}(\Delta_{max} + \Delta_{min})}, \qquad (8)$$

который показывает, во сколько раз улучшается критерий качества в результате ввода приоритетов.

Проанализировав выражение (8), приходим к следующим выводам.

1. В случае неэквивалентности любых двух факторов, выражающейся в том, что $\Delta_{max} \neq \Delta_{min}$, $K_{эф} > 1$. Иными словами, как только $\Delta_{max} > \Delta_{min}$, из (8) непосредственно следует $K_{эф} > 1$, и тем самым условие целесообразности введения приоритетов выполняется.

2. Введение приоритетов особенно эффективно при существенном различии дисперсий функционала по варьируемым факторам, т. е. при $\Delta_{max} \gg \Delta_{min}$.

3. По мере возрастания сложности системы эффективность применения приоритетов увеличивается.

Замечание. При оценке эффективности применения приоритетов нами не учитывалось следующее обстоятельство: если дисперсии факторов известны, можно заранее отбросить некоторые факторы ввиду их слабого влияния на критерий качества и тем самым значительно уменьшить количество вычислений. Поэтому коэффициент эффективности в действительности будет больше. Рассмотренное выше определение коэффициента эффективности позволяет установить близкие к оптимальным характеристики алгоритма оптимизации — например (6) — и заранее указать целесообразность использования приоритетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ф. Огороднейчук, А. Я. Куземин, В. И. Мелешко, В. И. Пономарев. Методы адаптивной оптимизации при синтезе сложных систем. Сб. «Приборы и системы автоматики», вып. 17. Изд-во ХГУ, 1971.

2. М. Л. Цетлин. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. Изд-во «Наука», М., 1969.

3. И. Ф. Огороднейчук, А. Я. Куземин, В. И. Мелешко, В. И. Пономарев. Оптимизация структур электронных и электрических систем с помощью выработки приоритетов (статья в настоящем сборнике).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Э. А. Дедиков, В. А. Забродский, Ю. Б. Максимов

Харьков

Задачи на экстремум при наличии ограничений на переменные — это большой класс математических задач, широко применяющихся в приложениях за последние десятилетия. К настоящему времени на основе функционального анализа в целом создана математическая теория данных задач. Получены весьма общие результаты, касающиеся существования и единственности экстремума, достаточно полно развиты методы решения, строго сформулированы условия их сходимости.

Однако вычислительный аспект указанных задач, являясь чрезвычайно важной проблемой для приложений, почти совсем не исследован. Поэтому исследователи не располагают численными результатами, с по-