УДК 510.62

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ В КОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ

В работе [1] была введена конечная алгебра, являющаяся обобщением алгебры конечных предикатов [2]. В алгебре конечных предикатов справедлива теорема о разложении [3] с совершенными дизъюнктивными [4] и конъюнктивными [5] нормальными формами. В этой статье для конечной алгебры формулируется теорема о разложении, вводятся стандартные формы — СДНФ и СКНФ и полная система тождеств. В конечной алгебре, как и в алгебре конечных предикатов, справедлива теорема о разложении в двух вариантах — дизъюнктивном и конъюнктивном.

Теорема о дизъюнктивном разложении. *Любой конечный предикат n-го порядка* $f(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_1})$ *можно представить так:*

$$f(x_{11}, \ldots, x_{1l_1}, x_{1l_1+1}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nl_n}, \ldots, x_{nl_n+1}, \ldots, x_{nm_n}) =$$

$$= \bigvee_{\sigma_{11} \in M_{11}} \cdots \bigvee_{\sigma_{1l_1} \in M_{1l_1}} \cdots \bigvee_{\sigma_{nf} \in M_{nf}} \cdots \bigvee_{\sigma_{nl} \in M_{nl}} x_{11}^{\sigma_{11}} \cdots x_{1l_1}^{\sigma_{1l_1}} \cdots x_{n1}^{\sigma_{n1}} \cdots x_{nl_n}^{\sigma_{nl_n}} \wedge$$

$$\wedge f(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1l_1}, x_{1l_1+1}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, \sigma_{n1}, \ldots \sigma_{nl_n}, x_{nl_n+1}, \ldots, x_{nm_n}). \quad (1)$$

Здесь символы вида $\bigvee\limits_{\sigma \in M}$ означают, что ведется логическое суммирование по всем $\sigma \in M$. Доказательство теоремы о дизъюнктивном разложении не приводим, поскольку оно аналогично доказательству одноименной теоремы в алгебре конечных предикатов [3]. Из теоремы о дизъюнктивном разложении вытекают следующие два следствия.

1. *Любой конечный предикат n-го порядка* $f(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nm_n})$ *может быть представлен в виде*

$$f(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nm_n}) = x_{ij}^{a_{ij1}} f(x_{11}, \ldots, a_{ij1}, \ldots, x_{nm_n}) \vee x_{ij}^{a_{ij2}} f(x_{11}, \ldots, a_{ij2}, \ldots, x_{nm_n}) \vee \cdots \vee x_{ij}^{a_{ijk_{ij}}} f(x_{11}, \ldots, a_{ijk_{ij}}, \ldots, x_{nm_n}). \quad (2)$$

2. *Любой конечный предикат n-го порядка* $f(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_n})$ *может быть представлен в виде*

$$f(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_n}) = \bigvee_{f(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1m_1}, \ldots, \sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nm_n}) = 1} x_{11}^{\sigma_{11}} \cdots x_{1m_1}^{\sigma_{1m_1}} \cdots$$

$$\cdots x_{n1}^{\sigma_{n1}} \cdots x_{nm_n}^{\sigma_{nm_n}}. \quad (3)$$

Тождество (2) получаем из (1), производя разложение только по одной переменной x_{ij}. Тождество (3) получаем, производя разложение предиката f сразу по всем переменным. Запись $f(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1m_1}, \ldots, \sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nm_n})$ под знаком логической суммы в выражении (3) означает, что логическое суммирование ведется только по тем наборам $(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1m_1}, \ldots, \sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nm_n})$, которые обращают предикат f в 1. Формулу, стоящую в правой части тождества (3), назовем совершенной дизъюнктивной нормальной формой предиката f. Если предикат f — тождественно ложный, то, согласно теореме о дизъюнктивном разложении, в правой части тождества (3) нужно ставить 0. Из второго следствия теоремы о дизъюнктивном разложении вытекает полнота конечной алгебры: любой конечный предикат n-го порядка можно записать в виде формулы конечной алгебры.

Пусть A, B, C — произвольные формулы конечной алгебры. В конечной алгебре справедливы следующие тождества:

законы коммутативности $A \vee B = B \vee A$ **(4)**, $AB = BA$ **(5)**;

законы ассоциативности $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ **(6)**, $(AB)C = A(BC)$ **(7)**;

законы дистрибутивности $(A \vee B)C = AC \vee BC$ **(8)**, $AB \vee C = (A \vee C)(B \vee C)$ (9);

законы идемпотентности $A \vee A = A$ **(10)**, $AA = A$ **(11)**;

законы элиминации $A \vee AB = A$ **(12)**, $A(A \vee B) = A$ **(13)**.

Названия для приведенных тождеств позаимствованы из алгебры логики, где рассматриваются совпадающие с ними по форме законы. Однако в алгебре логики формулы обозначают не конечные предикаты n-го порядка, а булевы функции. Справедливость тождеств легко проверяется перебором всевозможных вариантов значений предикатов A, B, C.

Справедлив, кроме того, ряд тождеств, в которых участвуют логические константы: $A \vee 1 = 1$ **(14)**; $A \cdot 0 = 0$ **(15)**; $A \cdot 1 = A$ **(16)**; $A \vee 0 = A$ **(17)**.

Пусть x_{ij} — j-я по счету переменная i-го порядка и $a_{ij1}, a_{ij2}, \ldots, a_{ijk_{ij}}$ — ее возможные значения. Имеет место следующее тождество:

$$x_{ij}^{a_{ij1}} \vee x_{ij}^{a_{ij2}} \vee x_{ij}^{a_{ij3}} \vee \cdots \vee x_{ij}^{a_{ijk_{ij}}} = 1, \tag{18}$$

которое мы назовем законом истинности i-го порядка для j-й переменной. Действительно, какой бы предикат i-го порядка мы ни подставили вместо переменной x_{ij} из области ее определения $M_{ij} = \{a_{ij1}, a_{ij2}, \ldots, a_{ijk_{ij}}\}$, всегда один из дизъюнктивных членов, а вместе с ним и вся дизъюнкция, обращается в 1.

Пусть a_{ijl} и a_{ijs} — произвольные, но отличающиеся друг от друга $(a_{ijl} \neq a_{ijs})$ предикаты i-го порядка, взятые из области M_{ij}. Имеет место следующее тождество: $x_{ij}^{a_{ijl}} x_{ij}^{a_{ijs}} = 0$ (19), которое мы назовем законом ложности i-го порядка для j-й переменной. Действительно, какой бы предикат i-го порядка из множества M_{ij} мы не подставили вместо x_{ij} в левую часть равенства (19), всегда хотя бы один из конъюнктивных членов обратится в 0, а вместе с ним обратится в 0 и вся левая часть равенства (19).

С абстрактной точки зрения введенная нами конечная алгебра есть дистрибутивная решетка с нулем и единицей. А именно — это множество всех предикатов n-го порядка $f(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_n})$, заданных на множестве $M_{11} \times \ldots \times M_{1m_1} \times \ldots \times M_{n1} \times \times \ldots \times M_{nm_n}$, с определенными на нем бинарными операциями дизъюнкции и конъюнкции, для которых выполняются аксиомы (4) — (17) дистрибутивной решетки с нулем и единицей. Роль нуля в конечной алгебре выполняет тождественно ложный предикат, роль единицы — тождественно истинный предикат n-го порядка. В конечной алгебре сверх этого выполняются еще тождества (18) и (19). Как будет показано ниже, наличие этих тождеств позволяет ввести в конечной алгебре третью, унарную, операцию — отрицание и рассматривать эту алгебру как булеву.

Интересно выяснить вопрос, полна ли система тождеств, введенных нами выше в конечной алгебре. Иными словами, можно ли с помощью этих тождеств доказать тождественность любых двух формул конечной алгебры, обозначающих один и тот же предикат? Мы докажем, что система тождеств (4) ÷ (19) в указанном смысле полна. Эта система тождеств разбивает все множество формул конечной алгебры на классы эквивалентности таким образом, что каждому из этих классов может быть взаимно однозначно сопоставлен свой конечный предикат n-го порядка. Оказывается, что произвольную формулу конечной алгебры можно преобразовать с помощью тождеств (4) ÷ (19) к СДНФ. Сравнивая же между собой СДНФ двух формул, всегда можно (в силу единственности представления любого конечного предиката n-го порядка в виде СДНФ) решить вопрос о тождестве этих формул. Если СДНФ совпадают, то исходные формулы тождественны, если не совпадают, то они соответствуют различным предикатам. Ниже приводится описание алгоритма преобразования произвольной формулы конечной алгебры к СДНФ.

1) Пользуясь тождествами (5), (7) и (8), раскрываем в формуле все скобки. В результате получаем некоторую дизъюнкцию конъюнкций узнаваний предикатов.

2) Пользуясь тождествами (4) ÷ (7), (10), (11), (15), (17) и (19), производим упрощения в формуле. В результате получаем некоторую дизъюнктивную нормальную форму. Дизъюнктивной нормальной формой мы называем любую дизъюнкцию произвольного числа различных элементарных конъюнкций. Элементарной конъюнкцией назовем любую конъюнкцию узнаваний различных предикатных переменных, взятых с произвольными фик-

сированными показателями. В конъюнкцию могут входить узнавания предикатов различного порядка.

3) Пользуясь тождествами (16) и (18), во все конъюнкции вводим недостающие переменные.

4) Пользуясь тождествами (4)—(8) и (10), снова раскрываем скобки и производим упрощения. В результате получаем искомую СДНФ.

Введем в конечной алгебре операцию отрицания. Отрицанием конечного предиката n-го порядка $f(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n})$ назовем предикат $g(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n}) = \overline{f}(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n})$, принимающий значение 0 для всех тех наборов значений аргументов $(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n})$, при которых $f(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n})=1$, и принимающий значение 1 для всех наборов значений аргументов, при которых $f(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n})=0$.

В случае $k_{ij} \geqslant 2 (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m_n)$ можно определить операцию отрицания аксиоматически, задав ее следующими тождествами: $\overline{A \vee B} = \overline{A}\,\overline{B}$ (20); $\overline{AB} = \overline{A} \vee \overline{B}$ (21);

$$\overline{x_{ij}^{a_{ijt}}} = x_{ij}^{a_{ij1}} \vee x_{ij}^{a_{ij2}} \vee \cdots \vee x_{ij}^{a_{ij(t-1)}} \vee x_{ij}^{a_{ij(t+1)}} \vee \cdots \vee x_{ij}^{a_{ijk_{ij}}}. \quad (22)$$

Здесь A и B — произвольные формулы конечной алгебры; x_{ij} — j-я по счету переменная i-го порядка; a_{ijt} — произвольный предикат i-го порядка из множества M_{ij}; индекс t принимает значения от 1 до k_{ij}. Тождества (20) и (21) совпадают по форме с известными в алгебре логики законами де Моргана, которые, однако, применяются теперь не к булевым переменным, а к переменным предикатам n-го порядка. Тождества (22) назовем законами отрицания. Заметим, что при $k_{ij}=1$ законы отрицания теряют смысл, в этом случае $\overline{x^{a_{ij1}}}=0$.

Любая формула с отрицаниями может быть преобразована с помощью зависимостей (20)—(22) в тождественную ей формулу без отрицаний. Действительно, применяя многократно законы де Моргана, мы всегда сможем все знаки отрицания, стоящие над формулой или ее частями, опустить непосредственно на узнавания предикатов или на 0 и 1. Затем, пользуясь тождеством (22) и тождествами $\overline{0}=1$, $\overline{1}=0$, и вовсе исключаем отрицания из формулы. С помощью тождеств (20)—(22), совместно с перечисленными выше основными тождествами конечной алгебры (4)—(19), можно решить вопрос о тождественности двух любых формул со знаками отрицания. Для этого сначала исключаем из формул знаки отрицания, а затем приводим формулы к СДНФ. Отсюда следует, что система тождеств (20)—(22) полна, она совместно с тождествами (4)—(19) аксиоматически определяет все свойства операции отрицания.

В ряде случаев процесс исключения знаков отрицания из формул существенно упрощается, если использовать следующие тождества:

$$x_{ij}^{\sigma_{ijs}} x_{ij}^{\sigma_{ijt}} = x_{ij}^{\sigma_{ijs}} \quad (23); \quad x_{ij}^{\sigma_{ijs}} (\overline{x_{ij}^{\sigma_{ijt}}} \vee A) = x_{ij}^{\sigma_{ijs}} \quad (24).$$

Тождества справедливы при условии, что $\sigma_{ijs} \neq \sigma_{ijt}$. Предикаты σ_{ijs} и σ_{ijt} взяты из множества M_{ij}. Буквой A обозначена произвольная формула конечной алгебры порядка не ниже $i+1$. Тождество (23) назовем законом поглощения отрицания, тождество (24) — обобщенным законом поглощения отрицания.

Для операции отрицания предиката n-го порядка также справедливы тождества: закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}} = A$ **(25)**; закон исключенного третьего $A \vee \overline{A} = 1$ **(26)**; закон противоречия $A\overline{A} = 0$ **(27)**.

Итак, видим, что в конечной алгебре, наряду с операциями дизъюнкции и конъюнкции, существует операция отрицания со всеми свойствами, которыми наделяет ее булева алгебра.

Поэтому конечную алгебру можно рассматривать как разновидность булевой алгебры. Основным множеством в ней служит система всех конечных предикатов n-го порядка $f(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}, \cdots, x_{n1}, \cdots, x_{nm_n})$, заданных на множестве

$$M_{11} \times \cdots \times M_{1m_1} \times \times \cdots \times M_{n1} \times \cdots \times M_{nm_n}.$$

Роль нуля выполняет тождественно ложный предикат, роль единицы —тождественно истинный предикат, в роли базисных операций выступают дизъюнкция, конъюнкция и отрицание. Заметим, что введение операции отрицания в конечной алгебре не расширяет ее выразительных возможностей. Конечная алгебра полна и без операции отрицания. Таким образом, введением операции отрицания достигается лишь консервативное расширение конечной алгебры.

Сформулируем теорему о конъюнктивном разложении. *Любой конечный предикат n-го порядка $f(x_{11}, \ldots, x_{1m}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_n})$ может быть представлен в виде*

$$f(x_{11}, \cdots, x_{1l_1}, x_{1l_1+1}, \cdots, x_{1m_1}, \cdots, x_{n1}, \cdots, x_{nl_n}, x_{nl_n+1}, \cdots, x_{nm_n}) = \bigwedge_{\sigma_{11} \in M_{11}} \cdots \bigwedge_{\sigma_{1l_1} \in M_{1l_1}} \cdots \bigwedge_{\sigma_{n1} \in M_{n1}} \cdots \bigwedge_{\sigma_{nl_n} \in M_{nl_n}} (\overline{x_{11}^{\sigma_{11}}} \vee \cdots \vee \overline{x_{1l_1}^{\sigma_{1l_1}}} \vee \cdots \vee \overline{x_{n1}^{\sigma_{n1}}} \overline{x_{nl_n}^{\sigma_{nl_n}}} \vee f(\sigma_{11}, \cdots, \sigma_{1l_1}, x_{1l_1+1}, \cdots, x_{1m}, \cdots, \sigma_{n1}, \cdots, \sigma_{nl_n}, x_{nl_n+1}, \cdots, x_{nm_n}). \quad (28)$$

Здесь символы $\bigwedge\limits_{\sigma \in M}$ означают, что ведется логическое перемножение по всем $\sigma \in M$. Из теоремы о конъюнктивном разложении вытекают следующие два следствия.

1. *Любой конечный предикат n-го порядка* $f(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nm_n})$ *может быть представлен в виде*

$$f(x_{11},\cdots,x_{ij},\cdots,x_{nm_n}) = (\overline{x_{ij}^{a_{ij1}}} \vee f(x_{11},\cdots,a_{ij1},\cdots,x_{nm_n})) \wedge (\overline{x_{ij}^{a_{ij2}}} \vee$$
$$\vee f(x_{11},\cdots,a_{ij2},\cdots,x_{nm_n}))\cdots(\overline{x_{ij}^{a_{ijk_{ij}}}} \vee f(x_{11},\cdots,a_{ijk_{ij}},\cdots,x_{nm_n})). \tag{29}$$

2. *Любой конечный предикат n-го порядка* $f(x_{11}, \ldots, x_{1m}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm_n})$ *может быть представлен в виде*

$$f(x_{11},\cdots,x_{1m},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nm_n}) = \bigwedge_{f(\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1m_1},\ldots,\sigma_{n1},\ldots,\sigma_{nm_n})=0} (\overline{x_{11}^{\sigma_{11}}} \vee\cdots\vee \overline{x_{1m_1}^{\sigma_{1m_1}}} \vee$$
$$\cdots \vee \overline{x_{n1}^{\sigma_{n1}}} \wedge \cdots \wedge \overline{x_{nm_n}^{\sigma_{nm_n}}}). \tag{30}$$

Тождество (29) получаем из (28), производя разложение предиката f только по одной переменной x_{ij}, тождество (30) получаем разложением предиката f сразу по всем переменным. Запись $f(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1m_1}, \ldots, \sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nm_n}) = 0$ под знаком логического произведения в выражении (30) означает, что логическое перемножение ведется только по тем наборам $(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1m_1}, \ldots, \sigma_{n1}, \ldots, \sigma_{nm_n})$, которые обращают предикат f в 0. Представление предиката f в виде формулы, получаемой в результате исключения из правой части тождества (30) знаков отрицания с помощью законов отрицания, назовем совершенной конъюнктивной нормальной формой предиката f.

Используя операцию импликации предикатов n-го порядка $A \supset B = \bar{A} \vee B$ **(31)**, тождество (28) можно записать без знаков отрицания:

$$f(x_{11},\cdots,x_{1l_1};\ x_{1l_1+1},\cdots,x_{1m_1},\cdots,x_{n_1},\cdots,x_{nl_n}, x_{nl_n+1},\cdots,x_{nm_n}) =$$
$$= \bigwedge_{\sigma_{11}\in M_{11}} \cdots \bigwedge_{\sigma_{1l_1}\in M_{1l_1}} \cdots \bigwedge_{\sigma_{n1}\in M_{n1}} \cdots \bigwedge_{\sigma_{nl_n}\in M_{nl_n}} (x_{11}^{\sigma_{11}}\cdots x_{1l_1}^{\sigma_{1l_1}}\cdots x_{n1}^{\sigma_{n1}}\cdots$$
$$x_{nl_n}^{\sigma_{nl_n}} \supset f(\sigma_{11},\cdots,\sigma_{1l_1},\cdots,x_{1l_2},\cdots,x_{1m_1},\cdots,\sigma_{n1},\cdots,\sigma_{nl_n}, \tag{32}$$
$$x_{nl_n+1}, \ldots, x_{nm_n}).$$

В соответствии с этим первое и второе следствия теоремы о конъюнктивном разложении запишутся в виде

$$f(x_{11},\cdots,x_{ij},\cdots,x_{nm_n}) = (x_{ij}^{a_{ij1}} \supset f(x_{11},\cdots,a_{ij1},\cdots,x_{nm_n}))(x_{ij}^{a_{ij2}} \supset f(x_{11},$$
$$\cdots,a_{ij2},\cdots,x_{nm_n}))\cdots(x_{ij}^{a_{ijk_{ij}}} \supset f(x_{11},\cdots,a_{ijk_{ij}},\cdots,x_{nm_n})). \tag{33}$$

$$f(x_{11},\cdots,x_{1m_1},\cdots, x_{n1},\cdots, x_{nm_n}) = \bigwedge_{f(\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1m_1},\ldots,\sigma_{n1},\ldots,\sigma_{nm_n})=0} (x_{11}^{\sigma_{11}}\cdots$$
$$x_{1m_1}^{\sigma_{1m_1}}\cdots x_{n1}^{\sigma_{n1}}\cdots x_{nm_n}^{\sigma_{nm_n}} \supset 0). \tag{34}$$

Последнее тождество показывает, что любой конечный предикат может быть представлен в виде суперпозиции операций конъюнкции и импликации, действующих на всевозможные узнавания предикатов различных порядков и на тождественно ложный предикат 0. Вместе с тем, при $k_{ij} \geqslant 2$ предикат 0 можно выразить в виде конъюнкции некоторых узнаваний предикатов, например следующим образом:

$$x_{ij}^{a_{ij1}} x_{ij}^{a_{ij2}} = 0.$$

В результате мы приходим к еще одной конечной алгебре. Ее базис составляют операции конъюнкции и импликации и всевозможные узнавания предикатов различных порядков вплоть до n-го. Чтобы иметь возможность различать обе введенные алгебры друг от друга, первую назовем дизъюнктивной конечной алгеброй, а вторую — импликативной. Кроме двух найденных, существует множество других конечных алгебр. В частности, любой набор операций, удовлетворяющий условиям теоремы Поста, вместе со всевозможными узнаваниями букв можно принять в качестве базиса полной конечной алгебры. В роли полной системы элементарных операций также подходит любая система операций, через которые выражаются операции конъюнкции и дизъюнкции или операции конъюнкции и импликации. По-видимому, существуют и другие базисы, задающие конечные алгебры. Еще предстоит сформулировать критерий полноты для алгебр конечных предикатов.

Дизъюнктивная алгебра представляется нам весьма удобным языком для записи конечных предикатов n-го порядка. Ее удобство состоит в том, что на языке дизъюнктивной алгебры кратко и изящно записываются законы истинности и ложности. Эти законы в конечной алгебре играют особую роль. По существу они представляют собой требования, выполнение которых необходимо и достаточно для корректного введения переменных на конечных множествах. Закон истинности задает область изменения переменной, законы ложности обеспечивают попарное различие всех элементов множества, на котором задана переменная. В любой другой алгебре законы истинности и ложности будут записываться в виде гораздо более громоздких выражений. Дизъюнктивную алгебру будем называть просто конечной алгеброй.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре конечных предикатов произвольного порядка. — АСУ и приборы автоматики, 1983, вып. 67, с. 9—13. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О теории интеллекта. — Проблемы бионики, 1979, вып. 22, с. 3—11. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре конечных предикатов. — АСУ и приборы автоматики, 1979, вып. 50, с. 14—20. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об универсальной алгебре