Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Ігри з «природою», коли множина її стратегій є нечіткою
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи ПМм-24-1
Єгор ДЗЮБА
(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Ольга МАТВІЄНКО
(посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ПМ ____________ Максим СИДОРОВ
(підпис) (Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри ___________
(підпис)
“_10_” _листопада_ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _Дзюбі Єгору Володимировичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Ігри з «природою», коли множина її стратегій є нечіткою

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель гри з «природою» в нечіткій постановці

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
   1. Аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _10_ листопада 2025 р.

Здобувач ______________________________
(підпис)

Керівник роботи ____________________ доц. Ольга МАТВІЄНКО
(підпис) (посада, Власне ім’я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 78 с., 6 табл., 4 дод., 30 джерел.

АПОСТЕРІОРНИЙ АНАЛІЗ, БАЙЄСОВИЙ ПІДХІД, ІГРИ З ПРИРОДОЮ, КРИТЕРІЙ ВАЛЬДА, КРИТЕРІЙ ГУРВІЦА, КРИТЕРІЙ ЛАПЛАСА, КРИТЕРІЙ СЕВІДЖА, НЕВИЗНАЧЕННІСТЬ, НЕЧІТКІ МНОЖИНИ, РИЗИК, ТЕОРІЯ ІГОР.

Об’єкт дослідження – ігри з «природою», коли множина її стратегій є нечіткою.

Мета роботи – дослідження гри з «природою», коли множина її стратегій нечітка.

Методи дослідження – у роботі використовуються методи теорії ігор для опису задачі гри з «природою» та математичний апарат теорії нечітких множин і нечіткої логіки для моделювання нечітких стратегій природи та знаходження оптимального рішення.

Кваліфікаційну роботу присвячено підвищенню ефективності управлінських рішень в аграрному секторі за умов ризику. Розроблено методичний підхід до вибору оптимальних агротехнічних заходів у ситуації конфлікту із зовнішнім середовищем. Побудовано моделі ігор з «природою», де стратегії вибору культури оцінюються крізь призму потенційних прибутків. Проаналізовано ефективність класичних критеріїв (Вальда, Лапласа, Гурвіца, Севіджа) та економічну доцільність інформаційного забезпечення шляхом моделювання ідеального та неідеального експериментів. Обґрунтовано використання теорії нечітких множин для моделювання прогнозів погоди, що дозволило знайти оптимальне рішення за критерієм максимізації функції належності в умовах невизначеності.

ABSTRACT

Introductory note: 78 pages, 6 tables, 4 appendixes, 30 sources.

APOSTERIORI ANALYSIS, BAYESIAN APPROACH, FUZZY SETS, GAME THEORY, GAMES WITH NATURE, HURWICZ CRITERION, LAPLACE CRITERION, RISK, SAVAGE CRITERION, UNCERTAINTY, WALD CRITERION.

Object of research – games with nature where the set of its strategies is fuzzy.

Purpose of work – study of a game with "nature" when the set of its strategies is fuzzy.

Methods of research – the work uses game theory methods to describe the problem of the game with "nature" and the mathematical apparatus of fuzzy set theory and fuzzy logic to model the fuzzy strategies of nature and find the optimal solution.

The qualification paper is dedicated to enhancing the efficiency of management decisions in the agricultural sector under conditions of risk. A methodological approach to selecting optimal agrotechnical measures in a situation of conflict with the external environment has been developed. Models of games with “nature” have been constructed, in which crop selection strategies are evaluated through the prism of potential profits. The effectiveness of classical criteria (Wald, Laplace, Hurwicz, Savage) and the economic feasibility of information support have been analyzed by modeling perfect and imperfect experiments. The application of fuzzy set theory for modeling weather forecasts has been substantiated, which allowed finding the optimal solution based on the criterion of maximizing the membership function under conditions of uncertainty.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

SD – сорт короткого терміну дозрівання (Short Duration);

MD – сорт середнього терміну дозрівання (Medium Duration);

LD – сорт довгого терміну дозрівання (Long Duration);

EMV – очікувана грошова вартість (Expected Monetary Value);

EPC – очікуваний виграш за умов визначеності (Expected Payoff under Certainty);

EVPI – очікувана вартість досконалої інформації (Expected Value of Perfect Information);

ESV – очікувана вартість вибіркової інформації (Expected Sample Value);

ОПР – особа, що приймає рішення.

ВСТУП

Актуальність теми. Функціонування складних систем у реальному світі відбувається в умовах, які нечасто піддаються опису класичними ймовірнісними методами. Ключовим викликом для математичного моделювання стає обробка інформації, що має нечіткий характер. Інструментом для вирішення задач за таких обставин виступають ігри з «природою» – клас моделей, де одна зі сторін (зовнішнє середовище) діє невизначено, але без злого умислу. Традиційні підходи, що базуються на чітких числах, поступово поступаються місцем концепціям «м’яких обчислень». Особливого поширення набуває інтеграція ігрових методів із теорією нечітких множин. Це дозволяє формалізувати експертні судження та лінгвістичні змінні (наприклад, «сприятлива погода», «високий ризик»), перетворюючи їх на математичні об’єкти – нечіткі числа, що описують як ступінь належності, так і ступінь вагання.

Домінуючим вектором у сучасних дослідженнях є відхід від спрощених лінійних моделей до гібридних систем підтримки прийняття рішень. Наукова спільнота фокусується на проблемі дефазифікації – коректного переведення нечітких даних у скалярні величини для їх подальшого ранжування. Спостерігається активне впровадження теоретико-ігрових моделей з нечіткими параметрами у такі сфери: агробізнес, екологічний моніторинг, стратегічний менеджмент. Важливим напрямком є адаптація класичних критеріїв песимізму та оптимізму до роботи з інтервальними та нечіткими даними.

Актуальність теми зумовлена необхідністю розробки нових методів прийняття рішень, здатних ефективно працювати з нечіткою, неякісною та неповною інформацією, що є характерною рисою сучасних складних систем.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є дослідження гри з «природою», коли множина її стратегій нечітка. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Ігри з природою, коли множина її стратегій є нечіткою»;

– вивчити основні поняття, визначення та формальну постановку задачі гри з «природою», де стратегії природи описуються нечіткою множиною;

– розібрати критерії для знаходження оптимальних стратегій гравця в умовах, коли інформація про стани природи є нечіткою;

– здійснити програмну реалізацію обчислювального експерименту та аналіз результату.

Об'єктом дослідження є ігри з «природою», коли множина її стратегій є нечіткою.

Предметом дослідження є методи розв'язання ігор з «природою», коли множина її стратегій нечітка.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи теорії ігор для опису задачі гри з «природою» та математичний апарат теорії нечітких множин і нечіткої логіки для моделювання нечітких стратегій природи та знаходження оптимального рішення.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 9-ій Міжнародно науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (м. Дніпро, 5-7 листопада 2025 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Ігри з «природою»

Теорія статистичних рішень (її коротко називають теорією рішень) відрізняється від теорії ігор тим, що розглядає невизначеність ситуації без конфліктного забарвлення – ніхто нікому свідомо не протидіє. У задачах теорії статистичних рішень невідомі умови операції залежать не від свідомо діючого «супротивника», а від об'єктивної незацікавленої дійсності, яку в теорії статистичних рішень прийнято називати «природою», «поведінка» якої невідома, але, в усякому разі, не зловмисна. Наприклад, можуть бути заздалегідь невідомі: погода в певному районі, купівельний попит на певний вид продукції, обсяг перевезень, який доведеться виконувати залізниці, становище на ринку FOREX, економічна та фінансова політика держави, реформи в системі оподаткування, курс валюти, інфляція тощо. Відповідні ситуації часто називають «іграми з природою» .

Відсутність свідомої протидії з боку природи, на перший погляд, спрощує задачу вибору рішення: особі, що приймає рішення (ОПР), в «грі з природою» легше досягти успіху, адже їй ніхто не заважає. Але їй «складніше» обґрунтувати свій вибір. У грі проти свідомого супротивника елемент невизначеності частково знімається тим, що супротивник такий самий, як ОПР, він думає за супротивника тими ж категоріями, приймає за нього рішення на основі однакової логіки та правил. У грі ж «з природою» така концепція не підходить: ніхто не знає, який опір буде чинитися прийнятому рішенню, які, зрештою, правила цієї гри. Недарма кажуть, що природа «сліпа».

Зазначимо, що ігри з «природою» є виродженим випадком антагоністичної гри двох осіб, коли одна сторона (ОПР) має можливість будувати осмислені стратегії поведінки, а друга сторона («природа») позбавлена такої можливості.

Розглянемо такого роду ситуацію. Нехай у сторони A є m можливих стратегій: $A_1, A_2, ..., A_m$; що стосується обстановки, то про неї можна зробити n припущень $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$ – розглянемо їх як «стратегії природи» [2]. Наш виграш a_{ij} при кожній парі стратегій A_i, Π_j заданий матрицею A (табл. 1.1):

Таблиця 1.1 – Матриця виграшів

Π_i / A_i	Π_1	Π_2	…	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Потрібно обрати таку стратегію гравця A (чисту або змішану), яка є більш переважною (вигідною) порівняно з іншими.

Найпростішим випадком вибору рішення в умовах невизначеності є випадок, коли якась зі стратегій гравця A виявляється домінуючою над усіма іншими, – її-то й рекомендується обрати. Але навіть якщо в матриці гри такої стратегії не виявляється, перш ніж приступити до рішення, необхідно видалити завідомо невигідні або дублюючі стратегії гравця A. Що ж стосується стратегій «природи», то тут завідомо невигідні стратегії видаляти не можна, оскільки «природа» свої стратегії не обирає [3].

Надалі будемо вважати, що відношення домінування до сторони A застосовані.

В теорії статистичних рішень (ігор «з природою») видається бажаним ввести такі показники, які б не просто давали виграш у кожній ситуації, а описували б ступінь вдалості застосування конкретної стратегії в конкретній ситуації з урахуванням того, наскільки взагалі ця ситуація є сприятливою для нас. З цією метою в теорії статистичних рішень вводиться важливе поняття «ризику» [4].

Ризиком r_{ij} гравця при використанні стратегії A_i в умовах Π_j називається різниця між виграшом, який він отримав би, якби знав Π_j, і виграшом, який він отримає в тих же умовах, застосовуючи стратегію A_i.

Виразимо ризик r_{ij} через елементи матриці виграшів a_{ij}. Очевидно, що якби гравець знав заздалегідь стан «природи» Π_j, він обрав би ту стратегію, якій відповідає максимальний виграш у даному стовпці (максимум стовпця). Позначимо цей максимум β_j. Тоді згідно з означенням ризик розраховується за наступною формулою:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \tag{1.1}$$

де $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$.

Матриця ризиків $R = \| r_{ij} \|$ дає часто більш наочну картину невизначеної ситуації, ніж матриця виграшів $A = \| a_{ij} \|$.

Щоб зрозуміти значення ризику, розглянемо наступний приклад.

Приклад. Планується операція в заздалегідь неясних умовах, що стосуються, наприклад, ринкової кон'юнктури. Щодо цих умов можна зробити різні припущення: Π_1, Π_2, Π_3, Π_4. Очікуваний прибуток при наших стратегіях (A_i) для різних умов (Π_j) заданий матрицею виграшів $\| a_{ij} \|$ (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Матриця виграшів

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Побудуємо матрицю ризиків $\| r_{ij} \|$.

Розв’язання. Кожний елемент матриці віднімаємо від максимального в даному стовпці значення (у першому стовпці це 4, в решті – 8, 6, 9). Отримуємо матрицю ризиків $\| r_{ij} \|$ (табл. 1.3).

При погляді на цю матрицю стають яснішими деякі риси даної гри «з природою». Так, у матриці виграшів (табл. 1.2) у другому рядку перший і останній елементи були рівні один одному: $a_{21} = a_{24} = 3$.

Таблиця 1.3 – Матриця ризиків $\| r_{ij} \|$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Однак ці виграші зовсім нерівноцінні один одному в сенсі того, наскільки вдало обрано стратегію. При стані «природи» Π_1 ми могли б виграти найбільше 4, тобто при виборі стратегії A_2 виграш становить 3 за 4-бальною шкалою, що дуже навіть непогано, тобто до максимуму не добираємо 1 бал, а от при стані Π_4 максимально можливий виграш становить 9, тобто, обираючи стратегію A_2, ми виграємо 3 за 9-бальною шкалою і не добираємо до максимуму 6 балів, тобто вибір стратегії A_2 дуже поганий. Це відображається елементами матриці ризиків (табл. 1.3): $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$.

Весь комплекс задач, що виникає при дослідженні ігор людини з природою, можна розбити на три групи відповідно до ступеня визначеності інформації, що є в ОПР щодо поведінки середовища (природи):

а) поведінка детермінована;

б) відомий закон розподілу ймовірностей використання можливих стратегій;

в) про можливу поведінку нічого не відомо, крім самого списку стратегій, наявних у природи.

У першому випадку особа, що приймає рішення, точно знає, як поводитиметься середовище, і тому для вибору рішення можна скористатися методами, наприклад, математичного програмування.

Більш цікавими в даному контексті є другий і третій випадки.

Якщо закон розподілу станів середовища апріорі заданий, то при прийнятті рішень керуються або величиною математичного сподівання виграшу ОПР, або ймовірністю того, що цей виграш буде не меншим за задану величину, або, нарешті, величиною виграшу при заданій ймовірності. Оптимальною вважається стратегія ОПР, що дає їй максимальне значення відповідної величини. При розв'язанні таких задач використовуються методи стохастичного програмування.

1.2 Ігри з «природою», коли множина її стратегій нечітка

Розглянемо гру з природою, в якій множина стратегій «природи» є нечіткою [5]. Така гра є окремим випадком гри, розглянутої в попередньому пункті.

Позначимо a_1, a_2, ..., a_n – стратегії ОПР (оперуючої сторони), Y – універсальна множина стратегій «природи», її нечітка множина стратегій задається функцією належності $\mu(y)$, $y \in Y$.

Будемо припускати, що множина Y є скінченною і $Y = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$.

На множині всіх можливих ситуацій

$$(a_i, b_j),\ i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m, \qquad (1.2)$$

задана функція $f(a_i, b_j)$ – виграш ОПР у ситуації (a_i, b_j) (оцінка оперуючою стороною цієї ситуації).

Будемо вважати, що мета ОПР (першого гравця) описується нечіткою множиною мети $\hat{C}$ з функцією належності $\overline{\mu}_{\hat{C}}(u)$, $u \in R^1$.

Якщо $u = f(a_i, b_j)$, то

$$\overline{\mu}_{\hat{C}}(u) = \overline{\mu}_{\hat{C}}(f(a_i, b_j)). \tag{1.3}$$

Позначимо:

$$\mu_{\hat{C}}(a_i, b_j) = \overline{\mu}_{\hat{C}}(f(a_i, b_j)). \tag{1.4}$$

Нечітким рішенням (нечіткою множиною, що формалізує нечітке рішення) $\hat{D}$ будемо вважати перетин нечіткої множини стратегій і нечіткої множини мети.

Функцію належності нечіткого рішення $\hat{D}$ позначимо $\mu_{\hat{D}}(a_i, b_j)$.

Маємо:

$$\mu_{\hat{D}}(a_i, b_j) = \min\{\mu(b_j), \mu_{\hat{C}}(a_i, b_j)\}. \tag{1.5}$$

Оперуюча сторона (ОПР) прагне до максимізації значення функції належності свого рішення.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

ОПР (Фермер) розглядає можливість посіву одного з трьох сортів сільськогосподарської культури, які відрізняються термінами дозрівання та стійкістю до погодних умов:

– x_1 (SD – Short Duration): сорт короткого терміну дозрівання;

– x_2 (MD – Medium Duration): сорт середнього терміну дозрівання;

– x_3 (LD – Long Duration): сорт довгого терміну дозрівання.

Результат (прибуток) залежить від стану природи (погодних умов) S, який реалізується у майбутньому: малий рівень опадів, середній рівень опадів, великий рівень опадів.

У роботі розглядається комплексна проблема прийняття рішень, що включає два етапи інформаційного забезпечення.

1. Апріорний та апостеріорний аналіз: ОПР має статистичні дані про ймовірність станів погоди. Необхідно оцінити доцільність проведення додаткових досліджень. Для цього розраховується очікувана вартість досконалої інформації (ідеальний експеримент) та очікувана вартість вибіркової інформації (неідеальний експеримент), щоб визначити, чи варто платити за уточнення прогнозу.

2. Аналіз в умовах нечіткості: оскільки точні ймовірності часто невідомі або нестабільні через кліматичні зміни, додатково вводиться експертна інформація у вигляді нечіткої множини станів природи. Замість ймовірностей використовуються функції належності, що відображають ступінь впевненості експерта у настанні тієї чи іншої погоди.

Мета – обрати оптимальну стратегію x^*, яка максимізує очікуваний виграш або гарантований результат, порівнявши рішення, отримані класичними методами (Байєса, аналізу цінності інформації) та методами нечіткої логіки.

Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ – множина стратегій ОПР. Нехай $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ – множина станів природи. Ефективність рішень задається матрицею виграшів $A = \| a_{ij} \|$, де a_{ij} – прибуток при обранні стратегії x_i та настанні стану s_j.

Задача розв'язується у двох постановках залежно від типу вхідної інформації.

1. Ймовірнісна постановка. Задано вектор апріорних ймовірностей станів природи $P(S) = \{p(s_1), p(s_2), p(s_3)\}$, де $\sum p(s_j) = 1$.

Необхідно знайти:

– оптимальну стратегію за критерієм максимізації очікуваної грошової вартості (EMV):

$$x^* = \arg\max_{x_i} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot p(s_j);$$

– очікувану вартість досконалої інформації ($EVPI$) як різницю між прибутком в умовах визначеності (EPC) та максимумом EMV:

$$EVPI = \sum_{j=1}^{3} p(s_j) \cdot \max_i a_{ij} - \max_i EMV(x_i);$$

– очікувану вартість вибіркової інформації ($EVSI$) при проведенні неідеального експерименту, що характеризується умовними ймовірностями $P(S_j \mid y_k)$.

2. Нечітка постановка.

Інформація про погоду задана нечіткою підмножиною $\tilde{S}$ з функцією належності:

$$\mu_{\tilde{S}}(s_j): S \to [0,1].$$

Для знаходження рішення використовується метод прийняття рішень у нечіткому середовищі:

– виконується нормування матриці $A \to \bar{A}$, де $\bar{a}_{ij} \in [0,1]$;

– будується функція належності рішення $\mu_D(x_i)$ як перетин нормованих цілей та обмежень, що накладаються нечіткою природою:

$$\mu_D(x_i) = \min_{j=1}^{n}\left(\max\left(\bar{a}_{ij}, 1 - \mu(s_j)\right)\right).$$

– оптимальною вважається стратегія x^*, що максимізує цей показник:

$$x^* = \arg\max_{x_i} \mu_D(x_i).$$

1.4 Постановка задач дослідження

Отже, метою кваліфікаційної роботи є дослідження гри з «природою», коли множина її стратегій нечітка. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Ігри з природою, коли множина її стратегій є нечіткою»;

– вивчити основні поняття, визначення та формальну постановку задачі гри з «природою», де стратегії природи описуються нечіткою множиною;

– розібрати критерії для знаходження оптимальних стратегій гравця в умовах, коли інформація про стани природи є нечіткою;

– здійснити програмну реалізацію обчислювального експерименту та аналіз результату.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗАННЯ

2.1 Критерії прийняття рішень в іграх з «природою»

При виборі оптимальної стратегії використовується ряд критеріїв.

Максимінний критерій Вальда [6]. При максимінному критерії Вальда оптимальною вважається та стратегія ОПР, яка забезпечує максимум мінімального виграшу:

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} . \qquad (2.1)$$

Цей критерій відображає принцип гарантованого результату, тобто ОПР обирає таку стратегію, яка б максимізувала її виграш у найнесприятливішій ситуації.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа [7]. Критерій мінімаксного ризику Севіджа передбачає, що оптимальною є та стратегія, при якій величина ризику в найгіршому випадку мінімальна. Цей критерій також називається критерієм мінімального ризику. Згідно з критерієм Севіджа ОПР намагається обрати дію, при якій величина ризику приймає найменше значення в найнесприятливішій ситуації, тобто

$$W = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij} . \qquad (2.2)$$

Критерій Севіджа, так само як і критерій Вальда, є критерієм крайнього песимізму.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца [8]. Цей критерій рекомендує при виборі рішення не керуватися ні крайнім песимізмом, ні крайнім оптимізмом. Критерій Гурвіца рекомендує стратегію, яка визначається за формулою:

$$W = \max_{1 \le i \le m} [\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}], \tag{2.3}$$

де $\alpha \in [0,1]$ – ступінь песимізму.

Якщо $\alpha = 1$, отримаємо песимістичний критерій Вальда.

Якщо $\alpha = 0$, то приходимо до максимаксного критерію «крайнього оптимізму».

Вибір конкретного значення параметра визначається, скоріше за все, суб'єктивними факторами: чим небезпечніша ситуація, тим більше треба «підстрахуватися» і тим ближче до одиниці обирається значення α. За відсутності будь-яких явних уподобань цілком логічно обрати $\alpha = 0.5$.

Критерій Лапласа [9]. При невідомих ймовірностях станів «природи» можна припустити, що всі вони рівноймовірні, тобто

$$Q_j = 1/n, \; j = 1,...,n$$

і вибір рішення визначається критерієм Лапласа, при якому ОПР обирає таку стратегію A_i, що

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right). \tag{2.4}$$

Вибір критерію прийняття рішень є найбільш складним і відповідальним етапом. Якщо рекомендації, що випливають із різних критеріїв, збігаються – тим краще, можна сміливо обирати рекомендоване ними рішення. Якщо ці рекомендації суперечать одна одній, аналіз матриці гри «з природою» з точки зору різних критеріїв часто дає краще уявлення про ситуацію, про переваги й недоліки кожного рішення, ніж безпосередній розгляд матриці, особливо високої розмірності.

2.2 Випадок «ідеального» експерименту

При прийнятті рішень в умовах невизначеності істотну допомогу може надати експеримент, мета якого уточнити умови в певній ситуації. Проблема полягає в тому, що проведення експерименту передбачає наявність певних витрат. Доцільність експерименту визначається кореляцією між сумою необхідних витрат на його проведення та величиною очікуваного виграшу [10].

Розглянемо, чи є сенс проводити деякий експеримент ξ для уточнення умов у деякій ситуації.

«Ідеальним» називається експеримент, який призводить до точного знання того стану «природи», що має місце в даній ситуації.

Нехай буде задано:

– матриця виграшів $A = \| a_{ij} \| \left(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\right)$;

– ймовірності $Q_1, \ldots, Q_n$ різних станів «природи» $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$;

– витрати C на проведення експерименту ξ.

Порівняємо середній виграш без проведення експерименту ξ і середній виграш із проведенням цього експерименту.

Якщо експеримент не проводити, то як рішення треба обрати ту стратегію $A^* = A_i$, для якої досягається максимальний середній виграш:

$$\tilde{a} = \max_i \tilde{a}_i = \max_i [Q_1 a_{i1} + \ldots + Q_n a_{in}]. \tag{2.5}$$

Це і буде виграш без проведення експерименту.

Тепер припустимо, що експеримент ξ проведено, і ми з'ясували, який зі станів природи $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ є дійсним.

Якщо це стан Π_1, то ми повинні застосовувати ту стратегію A_i, для якої досягається максимальний виграш при Π_1:

$$\max_i a_{i1} = \beta_1 .$$

При дійсному стані «природи» $П_j$ наш виграш буде дорівнювати максимальному виграшу в j-му стовпці:

$$\max_i a_{ij} = \beta_j .$$

Але наша задача полягає в тому, щоб визначити доцільність проведення експерименту ξ.

Отже, нам не відомо заздалегідь, який зі станів $П_j$ насправді має місце і яким буде наш виграш β_j.

Тому знайдемо математичне сподівання виграшу, перемножуючи значення можливих виграшів на ймовірності Q_j того, що ці виграші матимуть місце, і додаючі результати:

$$Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2 + ... + Q_n\beta_n . \quad (2.6)$$

Далі від цього значення середнього виграшу віднімемо вартість експерименту C й отримаємо середній виграш із застосуванням ідеального експерименту.

$$\tilde{a}_{експ}^{ід} = Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2 + ... + Q_n\beta_n - C . \quad (2.7)$$

Експеримент проводити доцільно, якщо

$$\tilde{a}_{експ}^{ід} > \tilde{a} .$$

Підставимо значення $\tilde{a}^{ід}_{експ}$, $\tilde{a}$ зі співвідношень (2.5), (2.7) в цю умову:

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} Q_j a_{ij} \right\} < \sum_{j=1}^{n} Q_j \beta_j - C. \qquad (2.8)$$

Спростимо це правило.

Перенесемо C в ліву частину, а вираз із «максимумом» – з лівої частини в праву, змінивши знак перед сумою і замінивши «максимум» на «мінімум» $(-\max(f) = \min(-f)$. У результаті умова (2.8) запишеться таким чином:

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} Q_j (\beta_j - a_{ij}) \right\}. \qquad (2.9)$$

Вираз у круглих дужках $(\beta_j - a_{ij})$ являє собою ризик r_{ij}, а сума в правій частині – середній очікуваний ризик:

$$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} Q_j r_{ij}. \qquad (2.10)$$

Таким чином, правило рішення про проведення експерименту набуває такого вигляду.

Експеримент ξ потрібно проводити, якщо витрати на його здійснення менші за мінімальний середній ризик $\overline{r_i}$:

$$C < \max_i \overline{r_i}. \qquad (2.11)$$

В іншому випадку від експерименту слід утриматися і застосувати ту стратегію A^*, для якої досягається мінімум середнього ризику.

2.3 Випадок «неідеального» експерименту

«Неідеальний» експеримент ξ не призводить до точного з'ясування стану «природи» Π_j, а лише дає якісь непрямі відомості на користь тих чи інших станів. Ми можемо припустити, що експеримент ξ призводить до появи однієї з k несумісних подій $B_1,...,B_k$.

Причому ймовірності цих наслідків експерименту залежать від умов, в яких він проводиться: $\Pi_1,...,\Pi_n$. Позначимо умовну ймовірність появи події B_l в умовах Π_j наступним чином: $P(B_l / \Pi_j)$, $\left(j = 1, ..., n;\ l = 1, ..., k\right)$ і будемо вважати, що всі ці умовні ймовірності відомі.

Таким чином, вихідними даними для даної задачі є:

– матриця виграшів $A = \left\|a_{ij}\right\|\left(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n\right)$;

– «апріорні» ймовірності $Q_1,...,Q_n$ різних станів «природи» $\Pi_1,...,\Pi_n$;

– матриця P умовних ймовірностей наслідків B_l в умовах $\Pi_j\,(j = 1,...,n;\ l = 1,...,k)$;

– витрати C на проведення експерименту ξ.

Після здійснення експерименту, що дав наслідок B_l, необхідно переглянути ймовірності умов: стани «природи» $\Pi_1,...,\Pi_n$ будуть характеризуватися не колишніми «апріорними» ймовірностями $Q_1,...,Q_n$, а новими «апостеріорними» ймовірностями $\tilde{Q}_{1l},...,\tilde{Q}_{nl}$, тобто умовними ймовірностями станів $\Pi_1,...,\Pi_n$ за умови, що експеримент дав наслідок B_l. Ці апостеріорні ймовірності розраховуються за формулою Байєса:

$$\tilde{Q}_{jl} = \frac{Q_j P(B_l / \Pi_j)}{\sum_{j=1}^{n} Q_j P(B_l / \Pi_j)}, \quad j = 1,...,n. \tag{2.12}$$

Оскільки апріорні ймовірності станів «природи» $Q_1,...,Q_n$ замінюються новими – апостеріорними $\tilde{Q}_{1l},...,\tilde{Q}_{nl}$, то й оптимальна стратегія A^* в загальному випадку замінюється новою оптимальною стратегією $\tilde{A}_l^*$, обчисленою з урахуванням апостеріорних ймовірностей (за умови події B_l).

Висновки за розділом 2

У другому розділі кваліфікаційної роботи проаналізовано класичні критерії ігор з «природою» (Вальда, Лапласа, Гурвіца, Севіджа) та обґрунтовано доцільність їх комплексного використання для знаходження оптимальної стратегії. Розглянуто концепцію ідеального експерименту, що дозволяє оцінити верхню межу вартості точної інформації про стани природи. Описано методику проведення неідеального експерименту (байєсовий підхід), який дає змогу уточнити апостеріорні ймовірності станів природи на основі додаткових, але неповних даних.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 12.0

Для програмної реалізації розробленої методики прийняття рішень обрано систему комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica 12.0. Це потужне інтегроване середовище для виконання наукових, інженерних та математичних розрахунків, розроблене компанією Wolfram Research.

Вибір саме цієї системи зумовлений специфікою поставленої задачі – необхідністю оперувати багатовимірними масивами даних (платіжними матрицями) та виконувати над ними як алгебраїчні, так і логічні операції (пошук мінімумів, максимумів, середніх значень).

Основою математичної моделі гри з «природою» є платіжна матриця. У мові Wolfram Language матриці реалізовані як списки списків (nested lists), що робить роботу з ними інтуїтивно зрозумілою. Система має вбудовані високоефективні функції для транспонування (Transpose), пошуку екстремумів у рядках та стовпцях (Min, Max), що значно спрощує реалізацію критеріїв Вальда та Севіджа.

Mathematica підтримує функціональний стиль програмування, який дозволяє записувати складні алгоритми обробки даних у компактному вигляді. На відміну від класичних мов програмування (C++, Python), які працюють переважно з наближеними числовими типами, Mathematica здатна виконувати символьні обчислення та працювати з числами довільної точності. Це дозволяє уникнути помилок округлення на проміжних етапах розрахунків, що є критично важливим для отримання точних значень критеріїв ефективності.

Обрана версія системи (12.0) характеризується стабільністю та наявністю розширених можливостей для оптимізації та візуалізації даних. Вбудовані алгоритми оптимізації дозволяють швидко знаходити розв'язки навіть для задач великої розмірності, що забезпечує масштабованість розробленої методики.

Використання Wolfram Mathematica 12.0 дозволяє зосередитися на математичній суті задачі та логіці прийняття рішень, мінімізуючи витрати часу на технічну реалізацію алгоритмів обробки даних.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання «аграрне підприємство»

У кваліфікаційній роботі розглядається чотири алгоритми розв'язання задачі, а саме: апріорний аналіз, ідеальний експеримент, неідеальний експеримент та алгоритм розв'язання задачі з нечіткими вхідними даними. Розглянемо кожен випадок окремо.

1. Апріорний аналіз.

Для вибору оптимальної стратегії аграрного підприємства в умовах невизначеності, коли відсутня будь-яка додаткова інформація про ймовірності станів природи, застосовується окремий алгоритм обробки платіжної матриці.

На вході задається платіжна матриця (матриця виграшів) A розмірністю $m \times n$, де:

– m – кількість альтернативних стратегій;

– n – кількість станів природи, елемент матриці a_{ij} – це числове значення ефективності (прибутку).

Алгоритм реалізує стратегію обережного песиміста. Для кожного рядка i матриці A знаходиться мінімальне значення:

$$w_i = \min{}_j (a_{ij}),\ i = 1 \ldots m. \tag{3.1}$$

З отриманого списку мінімумів обирається максимальне значення:

$$W = \max{}_i (w_i). \tag{3.2}$$

Визначається індекс стратегії, якій відповідає значення W.

Далі алгоритм базується на принципі недостатнього обґрунтування (всі стани вважаються рівноймовірними). Для кожного рядка i обчислюється середнє арифметичне значення виграшу:

$$l_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{3.3}$$

Знаходиться максимум серед середніх значень:

$$L = \max_i(l_i), \tag{3.4}$$

після чого визначається оптимальна стратегія за цим показником.

Наступним кроком алгоритму є пошук компромісу між крайнім оптимізмом і песимізмом. Тобто, задається коефіцієнт оптимізму α ($\alpha = 0.5$). Для кожного рядка i розраховується показник Гурвіца як зважена сума найкращого та найгіршого результатів:

$$h_i = \alpha \cdot \max_j(a_{ij}) + (1-\alpha) \cdot \min_j(a_{ij}). \tag{3.5}$$

Далі обирається стратегія з максимальним показником $H = \max_i(h_i)$.

Останнім етапом алгоритму буде мінімізація можливих втрат (жалю) від помилкового рішення. Для кожного стовпця j (стану природи) знаходиться максимально можливий виграш:

$$M_j = \max_i(a_{ij}),\ j = 1\ldots n. \tag{3.6}$$

Будується матриця ризиків (жалю) R, елементи якої розраховуються як різниця між максимумом стовпця і поточним елементом:

$$r_{ij} = M_j - a_{ij}. \qquad (3.7)$$

Для кожного рядка матриці ризиків знаходиться максимальний ризик:

$$s_i = \max_j (r_{ij}). \qquad (3.8)$$

Після цього, з отриманих значень обирається мінімальне (найменший з можливих максимальних ризиків):

$$S = \min_i (s_i). \qquad (3.9)$$

У результаті апріорного алгоритму, формується підсумкова таблиця, де для кожної стратегії наведено значення за всіма критеріями. Проводиться порівняльний аналіз: стратегія, яка є оптимальною за більшістю критеріїв (або за всіма, як у випадку домінування), рекомендується до використання.

2. Ідеальний експеримент.

Алгоритм дозволяє розрахувати, наскільки зросте очікуваний прибуток, якщо ОПР, матиме абсолютно точний прогноз щодо станів природи.

На відміну від критеріїв невизначеності (Вальда, Севіджа), тут вводиться припущення про стохастичну природу середовища.

Задається вектор апріорних ймовірностей станів природи

$$P(S) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, \qquad (3.10)$$

де p_j – ймовірність настання j-го стану погоди.

Далі розраховується базовий показник ефективності, якого можна досягти спираючись лише на статистику.

Для кожної стратегії $P(S) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ обчислюється математичне сподівання виграшу:

$$EMV(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j . \qquad (3.11)$$

Знаходиться максимальне значення серед очікуваних виграшів:

$$EMV^* = \max_i \{EMV(x_i)\}, \qquad (3.12)$$

це значення є початком для оцінки цінності інформації.

Наступним кроком є моделювання гіпотетичної ситуації, коли ОПР заздалегідь точно знає, який стан природи s_j реалізується.

Для кожного стовпця j матриці виграшів знаходиться максимально можливий результат:

$$M_j = \max_i (a_{ij}). \qquad (3.13)$$

Розраховується середньозважене значення цих максимумів:

$$EPC = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot p_j . \qquad (3.14)$$

Величина EPC показує середній прибуток, який можна було б отримати з точним прогнозом.

В кінці алгоритму, визначається цінність знання про майбутній стан природи. Обчислюється різниця між виграшом з ідеальною інформацією та найкращим виграшом без неї:

$$EVPI = EPC - EMV^* . \qquad (3.15)$$

Отримана величина $EVPI$ порівнюється з ринковою вартістю проведення досліджень $C_{research}$:

– якщо $C_{research} < EVPI$, то проведення досліджень є економічно виправданим;

– якщо $C_{research} \geq EVPI$, то від купівлі інформації слід відмовитися, оскільки її вартість перевищує потенційний приріст прибутку.

3. Неідеальний експеримент (байєсовий підхід).

ОПР має доступ до джерела інформації (метеорологічного прогнозу), яке не дає 100% гарантії, а має певну статистичну похибку. Алгоритм оцінює економічну доцільності використання такого джерела та коригування стратегії залежно від отриманого прогнозу.

Вводиться характеристика прогностичної системи – матриця умовних ймовірностей:

$$P(Y \mid S) = \| P(y_k \mid s_j) \|_{n \times n}, \tag{3.16}$$

де y_k – прогноз (сигнал), який видає система;

s_j – реальний стан природи;

$P(y_k \mid s_j)$ – ймовірність того, що система видає прогноз y_k, якщо насправді настане стан s_j.

На основі апріорних ймовірностей $P(s_j)$ та матриці надійності визначається повна ймовірність отримання кожного варіанту прогнозу y_k:

$$P(y_k) = \sum_{j=1}^{n} P(y_k \mid s_j) \cdot P(s_j). \tag{3.17}$$

Це дозволяє нам оцінити, як часто ми будемо отримувати той чи інший сигнал.

Далі використовується формула Байєса для оновлення знань про стани природи після отримання конкретного прогнозу y_k:

$$P(s_j \mid y_k) = \frac{P(y_k \mid s_j) \cdot P(s_j)}{P(y_k)}. \tag{3.18}$$

У результаті формується матриця апостеріорних ймовірностей, яка показує довіру до прогнозу.

Моделюється реакція ОПР на кожен можливий сигнал системи. Для кожного фіксованого прогнозу y_k. Перераховується очікуваний виграш для всіх стратегій x_i з використанням апостеріорних ймовірностей:

$$E(x_i \mid y_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot P(s_j \mid y_k). \tag{3.19}$$

Обирається стратегія $x^*(y_k)$, яка максимізує цей показник:

$$x^*(y_k) = \arg\max_i \{E(x_i \mid y_k)\}. \tag{3.20}$$

Визначається загальна ефективність використання даної прогностичної системи як середньозважений виграш за всіма можливими прогнозами:

$$ESV = \sum_{k=1}^{n} P(y_k) \cdot E(x^*(y_k)). \tag{3.21}$$

Останнім кроком алгоритму є оцінка цінності та ефективності неідеальної інформації. Розраховується вартість неідеальної інформації:

$$EVSI = ESV - EMV^*, \tag{3.22}$$

де EMV^* – максимальний виграш без прогнозу.

Розраховується відносна ефективність прогнозу (η) у порівнянні з ідеальним:

$$\eta = \frac{EVSI}{EVPI} \cdot 100\% . \tag{3.23}$$

Далі порівнюється розрахована цінність $EVSI$ з реальною вартістю послуг прогнозування $C_{forecast}$:

– якщо $EVSI > C_{forecast}$, то використання даної прогностичної системи є доцільним;

– якщо $EVSI \le C_{forecast}$, то від купівлі прогнозу слід відмовитися і використовувати базову стратегію (апріорний аналіз).

4. Нечіткі множини.

Алгоритм розв’язання задачі в умовах нечіткої інформації про погодні умови складається з наступних етапів:

– формування множини стратегій ОПР (X);

– визначення множини станів природи (S);

– введення платіжної матриці (A), формується матриця $A = \| a_{ij} \|$, де елемент a_{ij} відображає прогнозований прибуток підприємства при виборі стратегії x_i та реалізації стану s_j;

– задання нечіткої інформації (μ), вводиться вектор функції належності $\mu = [\mu(s_1), \mu(s_2), \mu(s_3)]$, де кожне значення $\mu(s_j) \in [0,1]$ відображає експертну оцінку ступеня можливості настання відповідного погодного стану.

Нормуємо платіжну матрицю. Оскільки прибуток вимірюється в грошових одиницях, а функція належності – у частках одиниці, необхідно привести матрицю виграшів до безрозмірного вигляду. Для кожного елемента a_{ij} виконується перетворення:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - \min(A)}{\max(A) - \min(A)},$$

де $\min(A)$ та $\max(A)$ – мінімальний та максимальний елементи всієї матриці відповідно.

Результатом є матриця $\bar{A}$, елементи якої належать діапазону $[0,1]$.

Розраховується вектор неможливості станів природи, який характеризує ризик настання несприятливої події:

$$\nu(s_j) = 1 - \mu(s_j),\ j = 1,\ldots,n.$$

Для кожної стратегії x_i обчислюється оцінка ефективності $\mu_D(x_i)$ за принципом гарантованого результату:

$$\mu_D(x_i) = \min_j\Big(\max\big(\bar{a}_{ij}, \nu(s_j)\big)\Big).$$

Ця операція визначає найгірший можливий результат для стратегії, скоригований на ступінь можливості цього результату.

Знаходиться стратегія x^*, якій відповідає максимальне значення функції належності рішення:

$$x^* = \arg\max_{x_i} \mu_D(x_i).$$

Для перевірки стійкості отриманого рішення та проведення порівняльного аналізу застосовуються класичні критерії (3.1), (3.3), (3.5), (3.9).

Порівнюється оптимальна стратегія, отримана нечітким методом зі стратегіями, рекомендованими класичними критеріями.

Формується остаточний висновок щодо вибору сорту (SD, MD, LD), спираючись на те, що нечіткий метод найбільш повно враховує доступну апріорну інформацію про прогноз погоди.

3.3 Опис програми

Як і алгоритм розв’язання, розіб’ємо опис програми на чотири окремих пункти, де буде описано кожен код для окремого випадку [11].

1. Опис програми апріорного аналізу.

Програма виконує обробку матриці ефективності, розраховує показники для чотирьох критеріїв (Вальда, Лапласа, Гурвіца, Севіджа), визначає переможців за кожним критерієм та формує таблицю.

Задається вхідна платіжна матриця A, розмірністю 9×3. Елементами матриці є дійсні числа, що відповідають показникам прибутку. Формується масив текстових міток strategies. У програмі реалізовано розрахунок за всіма критеріями.

Використовується функція Map[Min, A], яка застосовує операцію пошуку мінімуму до кожного рядка матриці. Результат зберігається у векторі minRows.

Функція Max[minRows] знаходить максимальне значення серед отриманих мінімумів (waldVal).

За допомогою функції Position визначається індекс стратегії, що відповідає значенню waldVal.

Далі йде блок розрахунку критерію Лапласа. Реалізовано підхід, що передбачає рівноймовірність станів природи, а функція Map[Mean, A] обчислює середнє арифметичне для кожного рядка матриці (avgRows). Останнім кроком є визначення максимумів середніх значень (laplaceVal) та відповідних індексів стратегії.

Наступник кроком є розрахунку критерію Гурвіца. Задається параметр alpha = 0.5. Для розрахунку застосовується конструкція з використанням чистої функції: (alpha * Max[#] + (1 - alpha) * Min[#]) &. Цей вираз застосовується до кожного рядка матриці. Результат зберігається у векторі hurwiczRows, після чого знаходиться максимум (hurwiczVal).

Останнім виступає критерій Севіджа. Знаходяться максимуми по стовпцях. Для цього матриця транспонується (Transpose[A]), до отриманих списків застосовується функція Max. Результат у вигляді вектора maxCols. Формується матриця ризиків riskMatrix. Використовується функція Table, яка для кожного елемента a_{ij} обчислює різницю maxCols[[j]] - A[[i, j]]. Для кожного рядка матриці ризиків знаходиться максимальний елемент (maxRiskRows). Знаходиться мінімум серед максимальних ризиків (savageVal) за допомогою функції Min.

Як результат програмної реалізації, формується підсумкова таблиця, яка об’єднує назви стратегій та розраховані значення за всіма критеріями. До таблиці створено допоміжну функцію Best[val_, target_, type_], яка порівнює поточне значення з оптимальним. Якщо значення збігаються, функція повертає форматований текст, що дозволяє візуально виділити переможця в таблиці.

2. Опис програми ідеального експерименту.

Програма розраховує очікуваний виграш в умовах ризику (EMV), очікуваний виграш в умовах визначеності (EPC) та вартість ідеальної інформації (EVPI), а також формує рекомендацію щодо економічної доцільності проведення подальших досліджень.

У коді використовується та ж сама матриця виграшів payoffMatrix. Задається вектор апріорних ймовірностей станів природи probs = {0.3, 0.4, 0.3}. Ці значення відображають статистичну частоту появи посухи, нормальних опадів та злив відповідно. Реалізовано блок валідації даних. Конструкція If[Total[probs] != 1, ...] перевіряє, чи дорівнює сума ймовірностей одиниці. У разі помилки виконання коду переривається функцією Abort[].

Опишемо, як відбуваються розрахунки, почнемо з очікуваного виграшу без інформації. Використовується матрична операція скалярного добутку матриці на вектор ймовірностей: payoffMatrix . probs. Це дозволяє одним рядком коду обчислити математичне сподівання виграшу для всіх 9 стратегій. Функція Max знаходить найбільше значення серед очікуваних виграшів maxEMV, а функція Position визначає індекс найкращої стратегії bestStrategyIdx.

Переходимо до очікуваного виграшу з ідеальною інформацією. Моделюється ситуація наявності точного прогнозу. Для цього необхідно знайти найкращу стратегію для кожного окремого стану природи. Використовується комбінація функцій Max /@ Transpose[payoffMatrix]. Команда Transpose змінює місцями рядки та стовпці, а Max /@ застосовує пошук максимуму до кожного стовпця. Результат зберігається у векторі maxInCols. Загальний очікуваний виграш epcValue обчислюється як скалярний добуток вектора максимумів на вектор ймовірностей.

Останнім розрахунковим блоком виступає розрахунок вартості інформації. Виконується арифметична операція віднімання базового виграшу від ідеального: evpiValue = epcValue - maxEMV. Отримана величина показує чистий приріст прибутку від усунення невизначеності.

Результатом коду є таблиця. Окремо виводиться пояснення розрахунку EPC, де показано внесок кожного стану природи у загальний результат. Значення EVPI виділяється червоним кольором та жирним шрифтом. У кінці коду реалізовано умовну логічну конструкцію If[evpiValue > 0, ...], яка автоматично генерує текстовий висновок: якщо EVPI > 0, система рекомендує розглянути можливість проведення експерименту, якщо EVPI = 0 – повідомляє про відсутність ризиків.

3. Опис програми неідеального експерименту.

Програма виконує переоцінку ймовірностей станів природи на основі матриці надійності прогнозу, визначає оптимальні стратегії для кожного варіанту прогнозу та розраховує вартість неідеальної інформації (EVSI).

До стандартних вхідних даних (матриця виграшів payoffMatrix, апріорні ймовірності priorProbs), вводиться матриця надійності reliabilityMatrix розмірністю 3×3. Рядки матриці відповідають реальним станам погоди S_1, S_2, S_3, а стовпці – прогнозам Y_1, Y_2, Y_3. Елемент $P(y_k \mid s_j)$ задає ймовірність того, що система видає прогноз y_k, якщо насправді має місце стан s_j.

Створюється матриця jointProbs, де кожен елемент є добутком умовної ймовірності прогнозу на апріорну ймовірність стану: reliabilityMatrix[[j, k]] * priorProbs[[j]]. Функція Total підсумовує сумісні ймовірності по стовпцях, формуючи вектор predProbs – ймовірність отримання кожного типу прогнозу. Реалізовано формулу Байєса. Кожен елемент сумісної ймовірності ділиться на повну ймовірність відповідного прогнозу. Результат зберігається у матриці posteriorProbs, яка потім транспонується для зручності подальшої ітерації.

Реалізовано ітераційний цикл Do, який проходить по кожному можливому прогнозу ($k = 1\ldots3$). У тілі циклу для поточного прогнозу витягується вектор апостеріорних ймовірностей currentProbs. Виконується перерахунок очікуваних виграшів стратегій на основі нових ймовірностей (payoffMatrix . currentProbs). Визначається стратегія з максимальним виграшом для даного прогнозу, і ці дані заносяться у списки bestStrategiesCond та maxCondPayoffs.

Переходимо до очікуваного виграшу з неідеальною інформацією. Розраховується скалярний добуток вектора максимальних умовних виграшів на вектор ймовірностей прогнозів (maxCondPayoffs . predProbs). Обчислюється цінність неідеальної інформації evsiValue = esvValue - baseEMV. Визначається відносна ефективність прогнозу efficiency як відношення EVSI до EVPI у відсотках.

У кінці коду формується та виводиться таблиця апостеріорних ймовірностей postTable, яка наочно демонструє, як змінюється впевненість у станах погоди після отримання прогнозу. Генерується підсумковий фінансовий звіт, де порівнюються показники EMV, ESV та EVSI. Програма містить логічний блок If, який виводить текстову рекомендацію щодо доцільності купівлі прогнозу залежно від його розрахованої ефективності.

4. Опис програми нечітких множин.

Програма реалізує алгоритм прийняття рішень в умовах невизначеності, коли інформація про стани природи подана у вигляді нечіткої множини.

Основна мета модуля – знаходження оптимальної стратегії на основі максимізації функції належності рішення, а також порівняння отриманого результату з класичними критеріями.

Задаються списки назв стратегій strategies та станів природи states. Вводиться платіжна матриця payoffMatrix, що містить дані про прибутковість культур. Ключовою відмінністю від попередніх програм є введення вектора функцій належності mu = {0.3, 1.0, 0.7}, який відображає ступінь можливості реалізації кожного погодного стану за оцінками експертів.

Програма виконує нормування платіжної матриці для переведення грошових одиниць у безрозмірну шкалу [0, 1]. Для цього обчислюються мінімальний (minA) та максимальний (maxA) елементи матриці, а також розмах варіації R. Нормована матриця normMatrix формується шляхом застосування лінійного перетворення до кожного елемента вихідної матриці.

Основний розрахунковий блок реалізовано через користувацьку функцію CalculateFuzzyScore[row_]. Вона приймає рядок нормованої матриці та обчислює оцінку ефективності стратегії.

Всередині функції створюється вектор неможливості станів notMu як доповнення до одиниці вектора mu.

Далі для кожного елемента рядка обирається максимальне значення між нормованим виграшом та ступенем неможливості стану, після чого з отриманого списку обирається мінімальне значення. Застосування цієї функції до всіх рядків матриці реалізовано через команду Map.

Окремий блок коду відповідає за перевірку стійкості рішення класичними методами, такими як критерій Вальда (Map[Min, ...]), критерій Лапласа (Mean), критерій Гурвіца (alpha = 0.5) та критерій Севіджа (regretMatrix).

Результати роботи програми виводятся у вигляді звіту. Використовується функція TableForm для відображення нормованої матриці та матриці жалю.

Оптимальна стратегія визначається автоматично за допомогою функції FirstPosition, яка знаходить індекс максимального елемента у списку оцінок fuzzyScores.

Висновки за розділом 3

У третьому розділі було обґрунтовано вибір системи комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 12.0 як інструментарію дослідження та здійснено програмну реалізацію методики прийняття рішень. Розроблено комплекс алгоритмів, що охоплює три рівні аналізу: апріорний вибір стратегії за критеріями Вальда, Лапласа, Гурвіца та Севіджа, оцінку вартості ідеальної інформації (EVPI), моделювання неідеального експерименту з використанням байєсового підходу та умови прийняття рішень в умовах невизначеності, коли інформація про стани природи подана у вигляді нечіткої множини. Створена програма забезпечує автоматизацію складних матричних та ймовірнісних розрахунків та гарантує високу точність обчислень.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для апріорного аналізу

Розглядається задача прийняття рішень аграрним підприємством в умовах невизначеності погодних умов. За ОПР у нас виступає Фермер. Множина стратегій (A)**:** 9 альтернатив, що є комбінаціями трьох культур (Crop A, Crop B, Crop C) та трьох термінів дозрівання (SD – короткий, MD – середній, LD – довгий). Множина станів природи (S): 3 стани, що характеризують рівень опадів (S_1 – низький, S_2 – середній, S_3 – високий). Мета роботи обрати оптимальну стратегію посіву, яка максимізує прибуток та мінімізує ризики, базуючись на заданій матриці виграшів. Почнемо обчислювальний експеримент.

Необхідно обрати оптимальну стратегію посіву A_i з множини альтернатив $X = \{A_1, \ldots, A_9\}$ в умовах невизначеності станів природи $S = \{S_1, S_2, S_3\}$. Відома матриця виграшів (ефективності) A, елементи якої a_{ij} характеризують прибуток при виборі i-ї стратегії та реалізації j-го стану погоди.

$$A = \begin{pmatrix} 7.48 & 4.02 & 6.65 \\ 1.35 & 1.25 & 2.35 \\ 5.17 & 2.72 & 1.00 \\ 5.75 & 2.70 & 5.85 \\ 1.08 & 1.14 & 1.81 \\ 4.33 & 2.33 & 1.00 \\ 6.86 & 2.70 & 6.68 \\ 1.09 & 1.12 & 2.05 \\ 4.94 & 2.97 & 1.00 \end{pmatrix},$$

де A_1: Crop A-SD;

A_2: Crop A-MD;

A_3: Crop A-LD;

A_4: Crop B-SD;

A_5: Crop B-MD;

A_6: Crop B-LD;

A_7: Crop C-SD;

A_8: Crop C-MD;

A_9: Crop C-LD.

Починаємо з розрахунку за критерієм Вальда. Критерій орієнтує ОПР на крайній песимізм. Ми припускаємо, що природа реалізує найгірший стан для кожної нашої дії. Необхідно максимізувати гарантований мінімальний виграш:

$$W = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right).$$

Знайдемо мінімальний елемент у кожному рядку $\min_j a_{ij}$:

$$A_1 = \min(7.48; 4.02; 6.65) = 4.02,$$

$$A_2 = \min(1.35; 1.25; 2.35) = 1.25,$$

$$A_3 = \min(5.17; 2.72; 1.00) = 1.00,$$

$$A_4 = \min(5.75; 2.70; 5.85) = 2.70,$$

$$A_5 = \min(1.08; 1.14; 1.81) = 1.08,$$

$$A_6 = \min(4.33; 2.33; 1.00) = 1.00,$$

$$A_7 = \min(6.86; 2.70; 6.68) = 2.70,$$

$$A_8 = \min(1.09; 1.12; 2.05) = 1.09,$$

$$A_9 = \min(4.94; 2.97; 1.00) = 1.00.$$

Обираємо максимум серед мінімумів:

$$W = \max(4.02; 1.25; 1.00; 2.70; 1.08; 1.00; 2.70; 1.09; 1.00) = 4.02\,.$$

Отже, за критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_1 (Crop A-SD).

Переходимо до розрахунку за критерієм Лапласа.

За відсутності інформації про ймовірності станів природи, вони вважаються рівноймовірними $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Обирається стратегія з найбільшим середнім арифметичним виграшом:

$$L = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Зробимо розрахунок середніх значень за даною формулою:

$$A_1 = \frac{7.48 + 4.02 + 6.65}{3} = \frac{18.15}{3} = 6.05\,,$$

$$A_2 = \frac{1.35 + 1.25 + 2.35}{3} = \frac{4.95}{3} = 1.65\,,$$

$$A_3 = \frac{5.17 + 2.72 + 1.00}{3} = \frac{8.89}{3} \approx 2.96\,,$$

$$A_4 = \frac{5.75 + 2.70 + 5.85}{3} = \frac{14.30}{3} \approx 4.77\,,$$

$$A_5 = \frac{1.08 + 1.14 + 1.81}{3} = \frac{4.03}{3} \approx 1.34\,,$$

$$A_6 = \frac{4.33 + 2.33 + 1.00}{3} = \frac{7.66}{3} \approx 2.55\,,$$

$$A_7 = \frac{6.86 + 2.70 + 6.68}{3} = \frac{16.24}{3} \approx 5.41\,,$$

$$A_8 = \frac{1.09 + 1.12 + 2.05}{3} = \frac{4.26}{3} = 1.42\,,$$

$$A_9 = \frac{4.94 + 2.97 + 1.00}{3} = \frac{8.91}{3} = 2.97.$$

Зі зроблених розрахунків, знаходимо максимум:

$$L = \max(6.05; 1.65; 2.96; 4.77; 1.34; 2.55; 5.41; 1.42; 2.97) = 6.05.$$

Тобто, за критерієм Лапласа оптимальною є стратегія A_1 (Crop A-SD).

Рухаємось далі, тепер зробимо розрахунок за критерієм Гурвіца.

Критерій дозволяє врахувати схильність ОПР до ризику через коефіцієнт оптимізму α. Приймемо $\alpha = 0.5$:

$$H = \max_i \left(\alpha \cdot \max_j a_{ij} + (1-\alpha) \cdot \min_j a_{ij}\right),$$

при $\alpha = 0.5$:

$$H_i = 0.5 \cdot (\max_j a_{ij} + \min_j a_{ij}).$$

Робимо розрахунок за цією формулою.

$$A_1 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_2 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_3 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_4 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_5 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_6 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_7 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_8 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75,$$

$$A_9 = 0.5 \cdot (7.48 + 4.02) = 0.5 \cdot 11.50 = 5.75.$$

З цих значень знаходимо максимум:

$$H = \max(5.75; 1.80; 3.085; 4.275; 1.445; 2.665; 4.78; 1.57; 2.97) = 5.75.$$

Як висновок, за критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія A_1 (Crop A-SD).

Переходимо до останнього критерія Севіджа.

Критерій мінімізує жаль – величину втраченої вигоди порівняно з найкращим рішенням для даного стану природи.

Визначимо максимальні елементи по стовпцях $M_j = \max_i a_{ij}$:

– для стовпця 1 (S_1): $M_1 = 7.48$ (у рядку A_1)

– для стовпця 2 (S_2): $M_2 = 4.02$ (у рядку A_1)

– для стовпця 3 (S_3): $M_3 = 6.68$ (у рядку A_7)

Побудуємо матрицю ризиків R:

$$R = \begin{pmatrix} 7.48-7.48 & 4.02-4.02 & 6.68-6.65 \\ 7.48-1.35 & 4.02-1.25 & 6.68-2.35 \\ 7.48-5.17 & 4.02-2.72 & 6.68-1.00 \\ 7.48-5.75 & 4.02-2.70 & 6.68-5.85 \\ 7.48-1.08 & 4.02-1.14 & 6.68-1.81 \\ 7.48-4.33 & 4.02-2.33 & 6.68-1.00 \\ 7.48-6.86 & 4.02-2.70 & 6.68-6.68 \\ 7.48-1.09 & 4.02-1.12 & 6.68-2.05 \\ 7.48-4.94 & 4.02-2.97 & 6.68-1.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.03 \\ 6.13 & 2.77 & 4.33 \\ 2.31 & 1.30 & 5.68 \\ 1.73 & 1.32 & 0.83 \\ 6.40 & 2.88 & 4.87 \\ 3.15 & 1.69 & 5.68 \\ 0.62 & 1.32 & 0 \\ 6.39 & 2.90 & 4.63 \\ 2.54 & 1.05 & 5.68 \end{pmatrix}.$$

З цієї матриці, виведемо максимальний ризик для кожного рядка:

$$A_1 = \max(0; 0; 0.03) = 0.03,$$

$$A_2 = \max(6.13; 2.77; 4.33) = 6.13,$$

$$A_3 = \max(2.31; 1.30; 5.68) = 5.68,$$

$$A_4 = \max(1.73; 1.32; 0.83) = 1.73,$$

$$A_5 = \max(6.40; 2.88; 4.87) = 6.40,$$

$$A_6 = \max(3.15; 1.69; 5.68) = 5.68,$$

$$A_7 = \max(0.62; 1.32; 0) = 1.32,$$

$$A_8 = \max(6.39; 2.90; 4.63) = 6.39,$$

$$A_9 = \max(2.54; 1.05; 5.68) = 5.68.$$

Наступним кроком буде вибір стратегії за мінімаксом ($S = \min_i S_i$):

$$S = \min(0.03; 6.13; 5.68; 1.73; 6.40; 5.68; 1.32; 6.39; 5.68) = 0.03$$

Отже, за критерієм Севіджа оптимальною є стратегія A_1 (Crop A-SD).

В таблиці 4.1 наведено результати обчислювального експерименту апріорного аналізу.

Таблиця 4.1 – Результат апріорного аналізу

Критерій	Значення функції	Оптимальна стратегія
Вальда	4.02	A_1 (Crop A-SD)
Лапласа	6.05	A_1 (Crop A-SD)
Гурвіца	5.75	A_1 (Crop A-SD)
Севіджа	0.03	A_1 (Crop A-SD)

Аналіз показав повну узгодженість результатів. За всіма класичними критеріями оптимальною є стратегія A_1 (Crop A-SD). Це свідчить про високу стійкість даного рішення – воно гарантує максимальний дохід у найгіршому випадку, має найвищий середній показник та несе найменші ризики втраченої вигоди.

4.2 Обчислювальний експеримент для ідеального експерименту

Розглянемо тепер ситуацію, коли умови обчислювального експерименту будуть ідеальними.

$$A = \begin{pmatrix} 7.48 & 4.02 & 6.65 \\ 1.35 & 1.25 & 2.35 \\ 5.17 & 2.72 & 1.00 \\ 5.75 & 2.70 & 5.85 \\ 1.08 & 1.14 & 1.81 \\ 4.33 & 2.33 & 1.00 \\ 6.86 & 2.70 & 6.68 \\ 1.09 & 1.12 & 2.05 \\ 4.94 & 2.97 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

Використовується та ж платіжна матриця A, що і в апріорному аналізі. Додатково вводиться вектор апріорних ймовірностей станів природи $P(S)$, який базується на статистичних даних про клімат регіону:

– $P(S_1) = 0.3$ – ймовірність низького рівня опадів;

– $P(S_2) = 0.4$ – ймовірність середнього рівня опадів;

– $P(S_3) = 0.3$ – ймовірність високого рівня опадів.

Перед початком розрахунків, перевіримо нормування:

$$\sum P(S_j) = 0.3 + 0.4 + 0.3 = 1.0 .$$

Обчислювальний експеримент продовжується.

Спочатку визначимо базовий рівень ефективності, який ми отримуємо, діючи без прогнозу, спираючись лише на ймовірності. Для кожної стратегії A_i розрахуємо математичне сподівання виграшу:

$$EMV(A_i) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot P(S_j) \,.$$

З цієї формули отримаємо наступне:

$$A_1(CropA - SD) = 7.48 \cdot 0.3 + 4.02 \cdot 0.4 + 6.65 \cdot 0.3 = 2.244 + 1.608 + 1.995 \approx 5.85\,,$$
$$A_2(CropA - MD) = 1.35 \cdot 0.3 + 1.25 \cdot 0.4 + 2.35 \cdot 0.3 = 0.405 + 0.500 + 0.705 = 1.610\,,$$
$$A_3(CropA - LD) = 5.17 \cdot 0.3 + 2.72 \cdot 0.4 + 1.00 \cdot 0.3 = 1.551 + 1.088 + 0.300 = 2.939\,,$$
$$A_4(CropB - SD) = 5.75 \cdot 0.3 + 2.70 \cdot 0.4 + 5.85 \cdot 0.3 = 1.725 + 1.080 + 1.755 = 4.560\,,$$
$$A_5(CropB - MD) = 1.08 \cdot 0.3 + 1.14 \cdot 0.4 + 1.81 \cdot 0.3 = 0.324 + 0.456 + 0.543 = 1.323\,,$$
$$A_6(CropB - LD) = 4.33 \cdot 0.3 + 2.33 \cdot 0.4 + 1.00 \cdot 0.3 = 1.299 + 0.932 + 0.300 = 2.531,$$
$$A_7(CropC - SD) = 6.86 \cdot 0.3 + 2.70 \cdot 0.4 + 6.68 \cdot 0.3 = 2.058 + 1.080 + 2.004 = 5.142\,,$$
$$A_8(CropC - MD) = 1.09 \cdot 0.3 + 1.12 \cdot 0.4 + 2.05 \cdot 0.3 = 0.327 + 0.448 + 0.615 = 1.390,$$
$$A_9(CropC - LD) = 4.94 \cdot 0.3 + 2.97 \cdot 0.4 + 1.00 \cdot 0.3 = 1.482 + 1.188 + 0.300 = 2.970\,.$$

Максимальний очікуваний виграш без інформації буде наступним:

$$EMV^* = \max(5.85; 1.61; 2.939; 4.56; 1.323; 2.532; 5.14; 1.39; 2.97) = 5.85\,од.$$

Отже, оптимальна стратегія (за критерієм Байєса): A_1 (Crop A-SD).

Далі змоделюємо ситуацію «ідеального експерименту». Припустимо, що ми маємо джерело абсолютно точної інформації, яке заздалегідь повідомляє нам, який стан погоди настане. У такому випадку для кожного стану ми обиратимемо найкращу можливу стратегію.

Знайдемо максимуми по стовпцях платіжної матриці ($M_j = \max_i a_{ij}$):

– для S_1 – низькі опади (стратегія A_1):

$$M_1 = \max(7.48; 1.35; 5.17; 5.75; 1.08; 4.33; 6.86; 1.09; 4.94) = 7.48\,;$$

– для S_2 – середні опади (стратегія A_1):

$$M_2 = \max(4.02;1.25;2.72;2.70;1.14;2.33;2.70;1.12;2.97) = 4.02;$$

– для S_3 – високі опади (стратегія A_7):

$$M_3 = \max(6.65;2.35;1.00;5.85;1.81;1.00;6.68;2.05;1.00) = 6.68.$$

Розрахуємо середній очікуваний виграш за наявності точного прогнозу (EPC):

$$EPC = \sum_{j=1}^{3} M_j \cdot P(S_j),$$

$$EPC = 7.48 \cdot 0.3 + 4.02 \cdot 0.4 + 6.68 \cdot 0.3,$$

$$EPC = 2.244 + 1.608 + 2.004 = 5.86\ од.$$

Наступним кроком буде розрахунок вартості ідеальної інформації. Визначимо цінність інформації як різницю між виграшом з точним прогнозом та найкращим виграшом, який ми маємо зараз:

$$EVPI = EPC - EMV^*,$$

$$EVPI = 5.86 - 5.85 = 0.01\ од.$$

Зробимо висновки з обчислювального експерименту.

Базовий середній виграш підприємства (EMV^*) становить 5.85 од., що досягається при використанні стратегії Crop A - SD. Потенційний середній виграш при наявності абсолютно точного прогнозу погоди становить 5.86 од. Максимальна сума, яку доцільно витратити на отримання ідеального прогнозу ($EVPI$), становить 0.01 од.

Настільки низьке значення $EVPI$ свідчить про те, що невизначеність зовнішнього середовища майже не впливає на вибір оптимального рішення. Стратегія A_1 (Crop A-SD) є настільки стійкою та ефективною, що вона є найкращою у двох станах природи з трьох S_1, S_2, а у третьому стані S_3 поступається лідеру (A_7) на незначну величину (6.65 проти 6.68).

Отже, проведення додаткових метеорологічних досліджень або купівля прогнозів є економічно недоцільними, оскільки витрати на них перевищать потенційний мізерний приріст прибутку. Слід залишатися на стратегії, обраній під час апріорного аналізу.

4.3 Обчислювальний експеримент для неідеального експерименту

Тепер змоделюємо ситуацію прийняття рішень за умов використання реального джерела інформації, який не є абсолютно точним.

Нехай інформаційна система (метеослужба) може генерувати три типи прогнозів (сигналів Y):

– Y_1 – прогноз «низький рівень опадів»;

– Y_2 – прогноз «середній рівень опадів»;

– Y_3 – прогноз «високий рівень опадів».

Надійність системи задається матрицею умовних ймовірностей $P(Y\,|\,S)$, де елемент $P(Y_k\,|\,S_j)$ показує ймовірність отримання прогнозу Y_k за умови, що насправді реалізується стан S_j.

В обчислювальному експерименті використовується наступна матриця надійності:

$$P(Y\,|\,S) = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.20 & 0.10 \\ 0.15 & 0.70 & 0.15 \\ 0.10 & 0.20 & 0.70 \end{pmatrix}.$$

Апріорні ймовірності станів природи беремо з ідеального експерименту: $P(S_1) = 0.3$, $P(S_2) = 0.4$, $P(S_3) = 0.3$.

Почнемо з того, що визначимо повну ймовірність отримання кожного з прогнозів $P(y_k)$ за формулою повної ймовірності:

$$P(y_k) = \sum_{j=1}^{3} P(y_k \mid S_j) \cdot P(S_j).$$

Отримаємо наступне:

– для прогнозу y_1:

$$P(y_1) = 0.70 \cdot 0.3 + 0.20 \cdot 0.4 + 0.10 \cdot 0.3 = 0.21 + 0.08 + 0.03 = 0.32;$$

– для прогнозу y_2:

$$P(y_2) = 0.15 \cdot 0.3 + 0.70 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.3 = 0.045 + 0.28 + 0.045 = 0.37;$$

– для прогнозу y_3:

$$P(y_3) = 0.10 \cdot 0.3 + 0.20 \cdot 0.4 + 0.70 \cdot 0.3 = 0.03 + 0.08 + 0.21 = 0.32.$$

Перевіримо суму прогнозів:

$$\sum P(y_k) = 0.32 + 0.37 + 0.32 = 1.01 \approx 1.0.$$

Використовуючи формулу Байєса, перерахуємо ймовірності станів природи $P(S_j \mid y_k)$ за умови отримання відповідного прогнозу:

$$P(S_j \mid y_k) = \frac{P(y_k \mid S_j) \cdot P(S_j)}{P(y_k)}.$$

Для прогнозу y_1 ($P(y_1) = 0,32$):

– $P(S_1 \mid y_1) = \dfrac{0,70 \cdot 0,3}{0,32} = \dfrac{0,21}{0,32} \approx 0.656$;

– $P(S_2 \mid y_1) = \dfrac{0,20 \cdot 0,4}{0,32} = \dfrac{0,08}{0,32} = 0.250$;

– $P(S_3 \mid y_1) = \dfrac{0,10 \cdot 0,3}{0,32} = \dfrac{0,03}{0,32} \approx 0.094$.

Для прогнозу y_2 ($P(y_2) = 0,37$):

– $P(S_1 \mid y_2) = \dfrac{0,15 \cdot 0,3}{0,37} = \dfrac{0,045}{0,37} \approx 0.122$;

– $P(S_2 \mid y_2) = \dfrac{0,70 \cdot 0,4}{0,37} = \dfrac{0,28}{0,37} \approx 0.757$;

– $P(S_3 \mid y_2) = \dfrac{0,15 \cdot 0,3}{0,37} = \dfrac{0,045}{0,37} \approx 0.122$.

Для прогнозу y_3 ($P(y_3) = 0,32$):

– $P(S_1 \mid y_3) = \dfrac{0,10 \cdot 0,3}{0,32} = \dfrac{0,03}{0,32} \approx 0.094$;

– $P(S_2 \mid y_3) = \dfrac{0,20 \cdot 0,4}{0,32} = \dfrac{0,08}{0,32} = 0.250$;

– $P(S_3 \mid y_3) = \dfrac{0,70 \cdot 0,3}{0,32} = \dfrac{0,21}{0,32} \approx 0.656$.

Отримані данні занесемо до таблиці апостеріорних ймовірностей станів природи (табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Апостеріорні ймовірності станів природи

Стан природи (S_j)	$P(S_j \mid y_1)$	$P(S_j \mid y_2)$	$P(S_j \mid y_3)$
S_1 (низькі опади)	0,656	0,122	0,094
S_2 (середні опади)	0,250	0,757	0,250
S_3 (високі опади)	0,094	0,122	0,656
$\sum$	1,00	1,00	1,00

Далі знайдемо стратегію, яка максимізує середній виграш $E(A_i \mid y_k)$ для кожного прогнозу, використовуючи нові ймовірності. Порівняємо лідера A_1 (Crop A-SD) та конкурента A_7 (Crop C-SD).

Матриця виграшів у нас наступна: $A_1 = [7,48;\ 4,02;\ 6,65]$, $A_7 = [6,86;\ 2,70;\ 6,68]$.

Якщо отримано прогноз y_1 (прогнозуються низькі опади):

$$E(A_1 \mid y_1) = 7,48(0,656) + 4,02(0,250) + 6,65(0,094) = 4,907 + 1,005 + 0,625 = 6.537,$$

$$E(A_7 \mid y_1) = 6,86(0,656) + 2,70(0,250) + 6,68(0,094) = 4,500 + 0,675 + 0,628 = 5,803,$$

Оптимальна стратегія: A_1.

Якщо отримано прогноз y_2 (прогнозуються середні опади):

$$E(A_1 \mid y_2) = 7,48(0,122) + 4,02(0,757) + 6,65(0,122) = 0,913 + 3,043 + 0,811 = 4.767,$$

$$E(A_7 \mid y_2) = 6,86(0,122) + 2,70(0,757) + 6,68(0,122) = 0,837 + 2,044 + 0,815 = 3,696,$$

Оптимальна стратегія: A_1.

Якщо отримано прогноз y_3 (прогнозуються високі опади):

$$E(A_1 \mid y_3) = 7,48(0,094) + 4,02(0,250) + 6,65(0,656) = 0,703 + 1,005 + 4,362 = 6.070,$$

$$E(A_7 \mid y_3) = 6,86(0,094) + 2,70(0,25) + 6,68(0,656) = 0,645 + 0,675 + 4,382 = 5,702,$$

Оптимальна стратегія: A_1.

Оцінюємо економічну ефективність експерименту.

Розрахуємо очікуваний дохід з неідеальною інформацією (ESV):

$$ESV = \sum_{k=1}^{3} P(y_k) \cdot \max E(A_i \mid y_k),$$

$$ESV = 0,32 \cdot 6,537 + 0,37 \cdot 4,767 + 0,32 \cdot 6,070,$$

$$ESV = 2,092 + 1,764 + 1,942 = 5,798\ од.$$

Порівняємо з базовим виграшом без експерименту ($EMV^* = 5,85$):

$$EVSI = 5,798 - 5,85 \approx -0,05.$$

Оскільки $EVSI \le 0$, інформаційна система не приносить економічної вигоди. Оптимальною стратегією за будь-якого прогнозу залишається A_1 (Crop A-SD). Рекомендовано відмовитися від купівлі прогнозу.

4.4 Обчислювальний експеримент для задачі з нечіткими вхідними даними

Розглянемо задачу прийняття рішень для аграрного підприємства, що обирає оптимальний сорт культури. Множина альтернатив (стратегій ОПР) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ включає:

– x_1 (SD): сорт короткого терміну дозрівання;

– x_2 (MD): сорт середнього терміну дозрівання;

– x_3 (LD): сорт довгого терміну дозрівання.

Множина станів природи $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ складається з: s_1 – малий рівень опадів, s_2 – середній рівень опадів, s_3 – високий рівень опадів.

Економічна ефективність стратегій задана платіжною матрицею A:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ -5 & 20 & 25 \\ -20 & 10 & 40 \end{pmatrix}.$$

Інформація про стани природи є нечіткою. Експертна оцінка можливості реалізації погодних умов задається нечіткою множиною $\tilde{S}$ з вектором функції належності μ:

$$\mu = \{0.3; 1.0; 0.7\}.$$

Це означає, що найбільш очікуваним є стан s_2 ($\mu = 1.0$), стан s_3 є можливим ($\mu = 0.7$), а s_1 – малоймовірним ($\mu = 0.3$).

Для врахування нечіткості використовується метод максимізації гарантованого результату на перетині цілей та обмежень.

Виконаємо лінійне нормування матриці A. Знаходимо мінімальний та максимальний елементи матриці:

$$\min(A) = -20,\ \max(A) = 40.$$

Розмах варіації $R = 40 - (-20) = 60$.

Формула перетворення:

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - (-20)}{60}.$$

Розрахунок елементів нормованої матриці $\overline{A}$:

– x_1 (SD):

$$s_1, s_2, s_3 \to \frac{10+20}{60} = \frac{30}{60} = 0.50\,;$$

– x_2 (MD):

$$s_1 = \frac{-5+20}{60} = \frac{15}{60} = 0.25\,,$$

$$s_1 = \frac{20+20}{60} = \frac{40}{60} \approx 0.67\,,$$

$$s_1 = \frac{25+20}{60} = \frac{45}{60} = 0.75\,;$$

– x_3 (LD):

$$s_1 = \frac{-20+20}{60} = 0.00\,,$$

$$s_1 = \frac{10+20}{60} = \frac{30}{60} = 0.50\,,$$

$$s_1 = \frac{40+20}{60} = \frac{60}{60} = 1.00\,.$$

Отримана нормована матриця:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.25 & 0.67 & 0.75 \\ 0.00 & 0.50 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

Розрахуємо вектор неможливості станів природи $(1-\mu)$:

$$1-\mu=\{1-0.3; 1-1.0; 1-0.7\}=\{0.7; 0.0; 0.3\}.$$

Функція належності оптимального рішення $\mu_D(x_i)$ визначається за формулою:

$$\mu_D(x_i)=\min_j\{\max(\bar{a}_{ij}, 1-\mu(s_j))\}.$$

Розрахунок для кожної стратегії:

– x_1 (SD):

$$j=1\rightarrow\max(0.50, 0.7)=0.7,$$

$$j=2\rightarrow\max(0.50, 0.0)=0.5,$$

$$j=3\rightarrow\max(0.50, 0.3)=0.5,$$

$$\mu_D(x_1)=\min(0.7, 0.5, 0.5)=0.50;$$

– x_2 (MD):

$$j=1\rightarrow\max(0.25, 0.7)=0.7,$$

тобто ризик низького врожаю перекривається низькою ймовірністю засухи.

$$j=2\rightarrow\max(0.67, 0.0)=0.67,$$

$$j=3\rightarrow\max(0.75, 0.3)=0.75,$$

$$\mu_D(x_2)=\min(0.7, 0.67, 0.75)=0.67;$$

– x_3 (LD):

$$j=1\rightarrow\max(0.00, 0.7)=0.7,$$

$$j = 2 \to \max(0.50, 0.0) = 0.5,$$

$$j = 3 \to \max(1.00, 0.3) = 1.0,$$

$$\mu_D(x_3) = \min(0.7, 0.5, 1.0) = 0.50.$$

Максимальне значення функції належності має стратегія x_2:

$$x^* = \arg\max\{0.50;\ 0.67;\ 0.50\} = x_2\ \text{(MD)}.$$

Для верифікації результату проведено розрахунок за класичними критеріями прийняття рішень.

1. Критерій Вальда:

$$W(x_i) = \min_j a_{ij},$$

$$x_1 \to \min(10, 10, 10) = 10,$$

$$x_2 \to \min(-5, 20, 25) = -5,$$

$$x_3 \to \min(-20, 10, 40) = -20.$$

Оптимальна стратегія x_1 (SD), оскільки $\max(10, -5, -20) = 10$.

2. Критерій Лапласа:

$$L(x_i) = \frac{1}{3}\sum_j a_{ij},$$

$$x_1 = 10.00,$$

$$x_2 \to \frac{-5 + 20 + 25}{3} = \frac{40}{3} \approx 13.33,$$

$$x_3 \to \frac{-20 + 10 + 40}{3} = \frac{30}{3} = 10.00.$$

Оптимальна стратегія x_2 (MD), оскільки $\max(10, 13.33, 10) = 13.33$.

3. Критерій Гурвіца:

$$H(x_i) = 0.5 \cdot \max(a_{ij}) + 0.5 \cdot \min(a_{ij}),$$

$$x_1 \to 0.5(10) + 0.5(10) = 10,$$

$$x_2 \to 0.5(25) + 0.5(-5) = 12.5 - 2.5 = 10,$$

$$x_3 \to 0.5(40) + 0.5(-20) = 20 - 10 = 10.$$

Всі стратегії є рівнозначними.

4. Критерій Севіджа.

Матриця ризиків R (віднімаємо від максимуму по стовпцю).

Максимуми стовпців: $10, 20, 40$.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 15 & 0 & 15 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальний ризик: $x_1 = 30$, $x_2 = 15$, $x_3 = 30$.

Оптимальна стратегія x_2 (MD), оскільки $\min(30, 15, 30) = 15$.

Результати моделювання наведено в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Порівняння результатів вибору стратегій

Метод	Оцінка кращої стратегії	Рекомендація
Нечіткий метод	$\mu_D = 0.67$	x_2 (MD)
Критерій Вальда	10	x_1 (SD)
Критерій Лапласа	13.33	x_2 (MD)
Критерій Гурвіца	10	Рівнозначні
Критерій Севіджа	15	x_2 (MD)

Застосування методу нечітких множин підтвердило доцільність вибору стратегії x_2 (MD). Цей результат збігається з рекомендаціями критеріїв Лапласа та Севіджа. На відміну від критерію Вальда, який пропонує надмірно обережну стратегію x_1, нечіткий метод дозволяє врахувати експертну інформацію про те, що сценарій (s_1) є малоймовірним ($\mu = 0.3$), що робить вибір x_2 більш обґрунтованим з точки зору балансу ризику та прибутку.

Висновки за розділом 4

За результатами апріорного аналізу встановлено, що стратегія A_1 (Crop A-SD) є абсолютною домінантою, оскільки вона визнана оптимальною за всіма застосованими критеріями (Вальда, Лапласа, Гурвіца, Севіджа). Це свідчить про високу надійність та прибутковість даного вибору. Аналіз цінності інформації показав, що гранична вартість ідеального прогнозу є низькою, а цінність реального неідеального прогнозу дорівнює нулю. Проведення додаткових метеорологічних досліджень є економічно недоцільним, оскільки отримання прогнозів не змінює оптимальної стратегії. Остаточним управлінським рішенням є посів культури Crop A-SD.

Проведене дослідження в умовах нечіткої невизначеності дозволило врахувати експертну інформацію про ступені можливості погодних станів. Розрахунок показав, що при ігноруванні малоймовірних ризиків, пріоритет зміщується на користь стратегії Crop B-MD. Нечіткий метод продемонстрував, що стратегія MD є більш збалансованою для найбільш очікуваних умов, тоді як стратегія SD є надмірно консервативною. Таким чином, якщо ОПР орієнтується на гарантовану стабільність – рекомендовано SD, проте за умов довіри до експертних прогнозів, стратегія MD має більший потенціал ефективності.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розв'язано актуальну науково-прикладну задачу ігри з «природою», коли множина її стратегій є нечіткою. Задачею виступала модель аграрного підприємства, де ОПР (Фермеру) треба було визначитись, яку саме культуру засіяти та який термін вегетації обрати для максимізації прибутку в умовах невизначеності погодних умов.

Одержані результати базуються на комплексному використанні методів теорії статистичних рішень, теорії нечітких множин та системного аналізу. Побудована математична модель адекватно відображає конфліктну ситуацію взаємодії виробника з зовнішнім середовищем. Застосування класичних критеріїв (Вальда, Лапласа, Гурвіца, Севіджа) дозволило виявити єдину стійку оптимальну стратегію – посів зернових культур короткого терміну дозрівання (Crop A - SD), яка є домінуючою за всіма показниками ефективності. Використання байєсового підходу для моделювання неідеального експерименту відповідає сучасному рівню технічних знань. Дослідження методами нечіткої логіки дозволило врахувати експертну інформацію про ступені можливості погодних станів. Встановлено, що при врахуванні низької можливості настання критичних умов (низького рівню опадів), оптимальною стає стратегія середнього терміну дозрівання (Crop B - MD), яка забезпечує кращий баланс між ризиком та потенційним прибутком. Чисельно доведено, що для заданої матриці виграшів цінність додаткової інформації (прогнозу погоди) є нульовою, що дозволяє уникнути зайвих витрат. Достовірність результатів підтверджено чисельним моделюванням у середовищі Wolfram Mathematica 12.0.

Результатом роботи є розроблена програма, що дозволяє автоматизувати процес прийняття рішень та оцінки ризиків. Основною сферою використання є агропромисловий комплекс. Крім того, запропонована методика є універсальною і може бути адаптована для використання в логістиці, інвестиційному менеджменті та страховому бізнесі, де необхідно мінімізувати ризики в умовах стохастичної невизначеності.

Наукова значущість полягає в удосконаленні методології прийняття рішень через поєднання апріорного аналізу з оцінкою граничної вартості інформації (EVPI) та моделюванням надійності прогнозів (EVSI). У свою чергу, соціальна значущість роботи полягає у наданні інструментарію для підвищення фінансової стійкості підприємств. Практичне застосування методики дозволило обґрунтувати економічну недоцільність витрат на метеорологічні прогнози та обрати стратегію, що гарантує максимальний середній прибуток (5,85 од.) навіть за несприятливих умов.

Перспективним напрямком продовження досліджень є повний перехід від чітких числових оцінок до використання апарату нечітких множин. Це дозволить врахувати невизначеність експертних даних та лінгвістичний характер інформації, що є характерним для реальних економічних систем.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Дзюба Є. В., Матвієнко О. І. Ігри з «природою», коли множина її стратегій є нечіткою. *9-й Міжнародна науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем»* : зб. матеріалів форуму (м. Дніпро, 5-7 листопада 2025 р.). Дніпро : УДХТУ, 2025. С. 89–90.

2. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications / Zadeh L., Gupta M., Ragade R., Yager R. North-Holland Publishing Company : Amsterdam, 1979. 780 p.

3. Hachoł J., Bondar-Nowakowska E., Hachaj P. Application of Game Theory against Nature in the Assessment of Technical Solutions Used in River Regulation in the Context of Aquatic Plant Protection. *Sustainability*. 2019. Vol. 11, No. 5. P. 1–19.

4. Zadeh L. Outline a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 1973. Vol. 3, No. 1. P. 28–44.

5. Zadeh L., Bellman E. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*. 1970. Vol. 17. No. 4. P. 141–164.

6. Wald A. Statistical Decision Functions. New York : John Wiley & Sons, 1947. 192 p.

7. Savage L. The Foundations of Statistics. New York : John Wiley & Sons, 1954. 308 p.

8. Gaspars-Wieloch H. Modifications of the Hurwicz's decision rule. *Central European Journal of Operations Research*. 2014.Vol. 22, No. 4. P. 779–794.

9. Bardet J. Laplace's method and BIC model selection for least absolute value criterion. *Statistics & Probability Letters*. 2022. Vol. 195. 13 p.

10. Decision Making Under Uncertainty / Kochenderfer M., Amato C., Chowdhary G., How J. The MIT Press : Massachusetts, 2015. 349 p.

11. Kruse R., Gebhard J., Klawonn F. Foundations of Fuzzy Systems. Chichester : John Wiley and Sons Inc, 1994. 326 p.

12. Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton : Princeton University Press, 1953. 674 p.

13. Mehta P., Tonk M., Chaudhary K. Mathematical Modelling for Crop Selection Using Fuzzy Logic. *Asian Journal of Agricultural Extension, Economics & Sociology*. 2023. Vol. 41, No. 10. P. 225–240.

14. Tuncel G., Gunturk B. A Fuzzy Multi-Criteria Decision-Making Approach for Agricultural Land Selection. *Sustainability*. 2024. Vol. 16, No. 23. P. 10509.

15. Imamguluyev R., Gurbanov A., Jabbarov A. Fuzzy Logic for Yield Prediction: Enhancing Decision-Making in Agricultural Economics. *Agris on-line Papers in Economics and Informatics*. 2025. Vol. 17, No. 3. P. 27–36.

16. Bekolli A., Guardiola L., Meca A. HarvestTech agriculture cooperatives: A game-theoretic approach. *Journal of Industrial & Management Optimization*. 2025. Vol. 21, No. 7. P. 4898–4921.

17. Wildayat I., Affandi A., Arsyad A. Fuzzy Methods in Smart Farming: A Systematic Review. *Informatica*. 2024. Vol. 36, No. 2. P. 453–489.

18. Solanki S., Verma S. DFI-ADR: Fuzzy Logic-Driven Information Retrieval and Machine Learning for Environmental and Crop Prediction to Optimize Farming Decisions. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB)*. 2025. Vol. 17, No. 6. P. 48–59.

19. Faizi S., Sałabun W., Rashid T. Decision Making with Uncertainty Using Hesitant Fuzzy Sets. *International Journal of Fuzzy Systems.* 2017. Vol. 20. P. 93–103.

20. Liu B. Uncertainty Theory, Fourth Edition. Singapore : Springer, 2022. 491 p.

21. Seikh M., Karmakar S. Solving matrix games with hesitant fuzzy pay-offs. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*. 2020. Vol. 17, No. 4. P. 25–40.

22. Djebara S., Achemine F., Zerdani O. A new approach for solving constrained matrix games with fuzzy constraints and fuzzy payoffs. *Journal of Mathematical Modeling*. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 425–439.

23. Verma T., Kumar A., Kacprzyk J. A Novel Approach to the Solution of Matrix Games with Payoffs Expressed by Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. *Journal of Automation Mobile Robotics & Intelligent Systems*. 2015. Vol. 9, No. 3. P. 25–46.

24. Jangid V., Jumar G., Sharma G. A Novel Approach to Solve Fuzzy Rough Matrix Game with Two Players. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AMM)*. 2022. Vol. 18, No. 2. 17 p.

25. Xu Z. Hesitant Fuzzy Sets Theory. Springer : China, 2014. 474 p.

26. Kollias I., Leventides J., Papavassiliou V. On the solution of games with arbitrary payoffs: An application to an over-the-counter financial market. *International Journal of Finance & Economics*. 2024. Vol. 29, No. 2. P. 1877–1895.

27. Jain V., Chandra S., Bector C. Matrix games with fuzzy goals and fuzzy payoffs. *Omega*. 2005. Vol. 33, No. 5 P. 425–429.

28. Li. D. Decision and Game Theory in Management With Intuitionistic Fuzzy Sets. *Springer*. 2014. Vol. 308. 19 p.

29. Jana J., Roy S. Solution of Matrix Games with Generalised Trapezoidal Fuzzy Payoffs. *Fuzzy Information and Engineering*. 2018. Vol. 10, No. 2. P. 213–224.

30. Li S., Tu G. Bi-Matrix Games with General Intuitionistic Fuzzy Payoffs and Application in Corporate Environmental Behavior. *Symmetry*. Vol. 14, No. 4. 2022. P. 1–30.