

*А. С. ПОСОХОВ***РАСЧЕТ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ**

Одним из перспективных подходов к анализу нелинейных систем, нашедших в последнее время широкое применение и в нашей стране и за рубежом, является использование математического аппарата рядов Вольтерра [1—6]. При таком подходе отклик нелинейной системы на внешнее воздействие, как известно, представляется одноименным функционалом. Следует отметить два момента, касающиеся применения математического аппарата рядов Вольтерра. Во-первых, такой подход наиболее отвечает случаю умеренных возбуждений, когда режим работы нелинейных элементов с достаточной степенью точности описывается коротким степенным рядом (3—5 членов ряда). Во-вторых, отыскание ядер функционалов Вольтерра — задача в большей степени аналитическая, так как вопрос экспериментального их определения решается довольно сложно [2; 3]. Это объясняется прежде всего тем, что при зондировании нелинейной системы пробными сигналами различные компоненты ее отклика на внешнее воздействие могут быть представлены одной и той же комбинационной частотой, что не позволяет однозначно интерпретировать результаты эксперимен-

та. Следовательно математический аппарат рядов Вольтерра — аппарат в большей степени аналитический и для его использования желательно иметь какие-либо математические модели всех элементов системы, в том числе нелинейных.

В статье рассматривается построение математических моделей некоторых типов нелинейных элементов, которые строятся на базе рядов Вольтерра. При этом доведен до логического завершения наиболее сложный элемент построения математической модели — даются соотношения для расчета ядер функционалов Вольтерра (многомерных параметров нелинейных двухполюсников [2]). Модель ориентирована на использование ее в структурно-матричном методе анализа систем с нелинейными элементами [7]. В этой же работе выводятся соотношения для расчета многомерных S -параметров некоторых типов нелинейных двухполюсников. Поэтому в настоящей статье рассмотрен вывод только многомерных Y -и Z -параметров, а соотношения для расчета многомерных S -параметров приводятся в готовом виде.

Для решения поставленной задачи использовался метод гармонических испытательных сигналов.

Итак, рассмотрим нелинейный двухполюсник, ток и напряжение на клеммах которого связаны каким-либо из приведенных ниже полиномиальных рядов:

нелинейная резистивная проводимость

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n v^n(t), \quad (1)$$

нелинейная емкость

$$i(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} q_n v^n(t), \quad (2)$$

нелинейная индуктивность

$$i(t) = \int_{-\infty}^t \sum_{n=1}^{\infty} q_n v^n(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $i(t)$ — ток, протекающий через нелинейный двухполюсник; $v(t)$ — напряжение на клеммах двухполюсника; q_i — коэффициенты степенного ряда.

Если для описания функционирования нелинейного двухполюсника применить математический аппарат рядов Вольтерра, то его отклик на внешнее воздействие может быть представлен в виде одного из следующих функционалов в зависимости от того, какую систему многомерных параметров использовать:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int Y_n(f_{1,n}) \prod_{p=1}^n U(f_p) e^{j2\pi t(f_1 + \dots + f_n)} df_p; \quad (4)$$

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int Z_n(\bar{f}_{1,n}) \prod_{p=1}^n I(f_p) e^{j2\pi t(f_1 + \dots + f_n)} df_p; \quad (5)$$

$$\beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int S_n(\bar{f}_{1,n}) \prod_{p=1}^n a(f_p) e^{j2\pi t(f_1 + \dots + f_n)} df_p, \quad (6)$$

где $Y_n(\bar{f}_{1,n})$, $Z_n(\bar{f}_{1,n})$, $S_n(\bar{f}_{1,n})$ — соответственно многомерные Y -, Z - и S -параметры, характеризующие двухполосник; $U(f_p)$, $I(f_p)$ и $a(f_p)$ — преобразование Фурье от $v(t)$, $i(t)$ и $\alpha(t)$; $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — падающая и отраженная волны в сечении клемм двухполосника; $(f_{1,n})$ — краткая запись выражения $(f_1, f_2, \dots, f_n)$; $\int$ — обозначение $\int \dots \int$.

Задача состоит в том, чтобы определить для каждого из приведенных выше типов нелинейных двухполосников (см. выражения (1), (2) или (3)) соотношения, связывающие многомерные Y -, Z - или S -параметры с коэффициентами q_i .

Вначале сделаем это для многомерных Z -параметров. Воспользовавшись методом гармонических испытательных сигналов, предположим, что протекающий через двухполосник ток имеет вид

$$i(t) = e^{j2\pi f_1 t} + \dots + e^{j2\pi f_m t}. \quad (7)$$

Преобразование Фурье от (7) выглядит следующим образом:

$$I(f) = \delta(f - f_1) + \dots + \delta(f - f_m). \quad (8)$$

Подставим (8) в (5) и вычислим интегралы с учетом свойств δ -функций:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int Z_n(\bar{f}_{1,n}) \prod_{p=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \delta(f_p - f_i) \right] e^{j2\pi f_p t} df_p = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m Z_n(\bar{f}_{k_1, k_n}) e^{j2\pi t(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее выражение (9) подставим в правую часть соотношения (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n v^n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_p=1}^m Z_p(f_{k_1, k_p}) e^{j2\pi t(f_{k_1} + \dots + f_{k_p})} \right]^n = R_1, \quad (10)$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sum_{p_1=1}^{\infty} \sum_{k_1^1=1}^m \dots \sum_{k_{p_1}^1=1}^m \sum_{p_2=1}^{\infty} \sum_{k_1^2=1}^m \dots \sum_{k_{p_2}^2=1}^m \dots \sum_{p_n=1}^{\infty} \sum_{k_1^n=1}^m \dots$$

$$\dots \sum_{k_{p_n}^n=1}^m Z_{p_1}(\bar{f}_{k_1^1, k_{p_1}^1}) Z_{p_2}(\bar{f}_{k_1^2, k_{p_2}^2}) \dots Z_{p_n}(\bar{f}_{k_1^n, k_{p_n}^n}) e^{j2\pi t(f_{k_1^1} + \dots + f_{k_{p_n}^n})}.$$

Таким образом, с учетом (7) и (10) выражение (1) приводится к виду

$$\sum_{i=1}^m e^{i2\pi f_i t} = R_1. \quad (11)$$

Если провести аналогичные преобразования для выражения (3) или (3), то перед правой частью (11) в результате дифференцирования в (2) или интегрирования в (3) появляется множитель. Для нелинейной емкости — $j2\pi(f_{k_1^1} + \dots + f_{k_{p_n}^n})$, а для нелинейной индуктивности — $1/j2\pi(f_{k_1^1} + \dots + f_{k_{p_n}^n})$. Введем коэффициент K перед правой частью (11), который определяется следующим образом:

$$K = \begin{cases} 1 & \text{— нелинейная резистивная проводимость;} \\ j2\pi(f_{k_1^1} + \dots + f_{k_{p_n}^n}) & \text{— нелинейная емкость;} \\ 1/j2\pi(f_{k_1^1} + \dots + f_{k_{p_n}^n}) & \text{— нелинейная индуктивность.} \end{cases}$$

В модифицированном виде соотношение (11) универсально и может быть использовано при рассмотрении любого из трех исходных типов нелинейной зависимости тока от напряжения.

Для конкретного значения $n=t$ осталось приравнять коэффициенты при одинаковых экспонентах в левой и правой частях модифицированного соотношения (11), получив тем самым исходное уравнение для определения многомерного Z -параметра $Z_t(f_1, \dots, f_t)$ порядка t .

Для $n=1$ имеем $1 = q_1 K Z_1(f)$ (12), откуда $Z_1(f) = 1/K q_1$ (13).

Примечательно, что полученное выражение для расчета многомерного Z -параметра первого порядка полностью совпадает с известными из линейной теории цепей соотношениями.

Соотношение для расчета многомерных Z -параметров более высоких порядков ($n \geq 2$) получим, приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми степенями в левой и правой частях соотношения (11) для $n=t \geq 2$ и отделив в правой части слагаемое, содержащее многомерный Z -параметр порядка t , от остальных

ных слагаемых, содержащих многомерные параметры порядка ниже, чем t :

$$0 = t! K q_1 Z_t(f_1, \dots, f_t) + K R_2, \quad (14)$$

где

$$R_2 = \sum_{n=2}^t q_n \sum_{p_1=1}^{t-n+1} \sum_{k_1^1=1}^t \dots \sum_{k_{p_1}^1=1}^t \sum_{p_2=1}^{t-n+1} \sum_{k_1^2=1}^t \dots \\ \dots \sum_{k_{p_n}^2=1}^t \dots \sum_{p_n=1}^{t-n+1} \sum_{k_1^n=1}^t \dots \sum_{k_{p_n}^n=1}^t Z_{p_1}(f_{k_1^1, k_{p_1}^1}) \times \\ \times Z_{p_2}(f_{k_1^2, k_{p_2}^2}) \dots Z_{p_n}(f_{k_1^n, k_{p_n}^n}); \quad \sum_{i=1}^n p_i = t, \quad k_1^1 \neq k_2^1 \neq \dots \neq k_{p_n}^n.$$

Из соотношения (14) легко определить многомерный Z -параметр $Z_t(f_1, \dots, f_t)$ порядка t :

$$Z_t(f_1, \dots, f_t) = -R_2/t!q_1 = -R_3/q_1, \quad (15)$$

где $R_3 = R_2/t!$.

Для вывода аналогичных соотношений, позволяющих рассчитать многомерные Y -параметры, также воспользуемся методом гармонических испытательных сигналов и представим, что напряжение $v(t)$ на клеммах нелинейного двухполюсника имеет вид

$$v(t) = e^{j2\pi f_1 t} + \dots + e^{j2\pi f_m t}. \quad (16)$$

Преобразование Фурье из (16) выглядит следующим образом:

$$U(f) = \delta(f - f_1) + \dots + \delta(f - f_m). \quad (17)$$

Подставим (17) и (4) и вычислим интегралы с учетом свойств δ -функций:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int Y_n(\bar{f}_{1,n}) \prod_{p=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \delta(f_p - f_i) \right] e^{j2\pi f_p t} df_p = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m Y_n(\bar{f}_{k_1, k_n}) e^{j2\pi t(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})}. \quad (18)$$

С другой стороны, для нелинейной резистивной проводимости, например, можно записать, используя соотношение (1), выражение для тока $i(t)$, протекающего через двухполюсник:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[e^{j2\pi f_1 t} + \dots + e^{j2\pi f_m t} \right]^n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m e^{j2\pi t(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})}. \quad (19)$$

Для других типов нелинейных двухполюсников выражения (2), (3) преобразуются следующим образом: для нелинейной емкости

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m j2\pi(f_{k_1} + \dots + f_{k_n}) e^{j2\pi t(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})}, \quad (20)$$

для нелинейной индуктивности

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m \frac{e^{j2\pi t(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})}}{j2\pi(f_{k_1} + \dots + f_{k_n})}. \quad (21)$$

Далее, сопоставляя (19), (20) и (21) с (18) и приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми степенями в этих выражениях, можно записать для резистивной нелинейной проводимости

$$Y_n(\bar{f}_{1,n}) = q_n, \quad (22)$$

для нелинейной емкости

$$Y_n(\bar{f}_{1,n}) = j2\pi(f_1 + \dots + f_n) q_n, \quad (23)$$

для нелинейной индуктивности

$$Y_n(\bar{f}_{1,n}) = q_n / j2\pi(f_1 + \dots + f_n). \quad (24)$$

Или, используя ранее введенный коэффициент K , будем иметь

$$Y_n(\bar{f}_{1,n}) = K q_n. \quad (25)$$

Методика получения соотношений для расчета многомерных S -параметров изложена в работе [7]. Мы же приведем эти соотношения в готовом виде:

$$S_1(f) = (1 - Kq_1)/(1 + Kq_1); \quad S_i(\bar{f}_{1,i}) = -R_i/t! (q_1 + 1/K), \quad (26)$$

где

$$R_i = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sum_{p_1=1}^{\infty} \sum_{k_1^1=1}^m \dots \sum_{k_{p_1}^1=1}^m \sum_{p_2=1}^{\infty} \sum_{k_1^2=1}^m \dots \sum_{k_{p_2}^2=1}^m \dots \sum_{p_n=1}^{\infty} \sum_{k_1^n=1}^m \dots$$

$$\dots \sum_{k_{p_n}^n=1}^m S'_{p_1}(\bar{f}_{k_1^1, k_{p_1}^1}) \times S'_{p_2}(\bar{f}_{k_1^2, k_{p_2}^2}) \dots S'_{p_n}(\bar{f}_{k_1^n, k_{p_n}^n});$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = t, \quad k_1^1 \neq k_2^1 \neq \dots \neq k_{p_n}^n;$$

$$S'_n(\bar{f}_{1,n}) = \begin{cases} 1 + S_1(f), & \text{для } n = 1; \\ S_n(\bar{f}_{1,n}), & \text{для } n \geq 2. \end{cases}$$

Анализируя полученные соотношения, для расчета многомерных параметров нелинейного двухполосника, отметим следующее: многомерные Y -параметры нелинейного двухполосника любого порядка n определяются единственным коэффициентом полиномиального ряда q_n ; многомерные параметры нелинейной резистивной проводимости частотно независимы. Ввиду этого выражения для указанного расчета можно упростить:

$$Z_t = -\frac{1}{q_1} \sum_{n=2}^t q_n \sum_{p_1=1}^{t-n+1} \sum_{p_2=p_1}^{t-n+1} \dots \sum_{p_n=p_{n-1}}^{t-n+1} C(n; p_1, p_2, \dots, p_n) \times \\ \times Z_{p_1} \cdot Z_{p_2} \dots Z_{p_n};$$

$$S_t = -\frac{1}{q_1 + 1} \sum_{n=2}^t q_n \sum_{p_1=1}^{t-n+1} \dots \sum_{p_n=p_{n-1}}^{t-n+1} C(n; p_1, p_2, \dots, p_n) \times \\ \times S'_{p_1} \cdot S'_{p_2} \dots S'_{p_n},$$

где

$$C(n; p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_s!}; \quad \sum_{i=1}^n p_i = t; \quad (27)$$

s — число групп одинаковых индексов p_i ; m_i — количество одинаковых индексов в i -й группе; многомерные Z - и S -параметры рассеяния порядка больше первого считаются по однотипным выражениям, поэтому для их вычисления может быть применена единая методика. Она заключается в том, что весь расчет многомерного параметра n -го порядка разбивается на ряд этапов. На первом этапе считаются многомерные параметры рассеяния первого порядка по соответствующим соотношениям, на втором — параметры второго порядка и т. д. На всех последующих этапах используются те же соотношения, что и на втором. При этом для расчета многомерного параметра i -го порядка ($2 \leq i \leq n$) на i -м этапе используются многомерные параметры меньших, чем i , порядков, посчитанные на предварительных этапах. Эта методика, основанная на свойстве рекуррентности исходных выражений, положена в основу при разработке пакета прикладных программ (ППП) расчета многомерных параметров нелинейных двухполосников на ЭВМ. Указанный ППП реализован на алгоритмическом языке Фортран-4. Программирование многократных сумм с меняющейся в ходе расчетов кратностью выполнено на базе алгоритма [8]. Исходными данными для расчета являются тип и коэффициенты полиномиального ряда, аппроксимирующего вольт-амперную характеристику нелинейного двухполосника, тип и порядок рассчитываемых многомерных параметров, частоты входных воздействий.

Итак, изложенная методика расчета многомерных параметров нелинейных двухполюсников является составной частью структурно-матричного метода анализа систем с нелинейными элементами (см. [7]).

Список литературы: 1. *Богданович Б. М.* Нелинейные искажения в приемно-усилительных устройствах. М., 1980. 224 с. 2. *Зайцев А. Н.* Многомерные параметры рассеяния и их применение для исследования нелинейных микроэлектронных СВЧ-устройств: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Горький, 1980. 24 с. 3. *Бусоганг Ю., Эрман Л., Грейам Д.* Анализ нелинейных систем при воздействии нескольких входных сигналов//ТИИЭР. 1974. 62, № 8. С. 56—92. 4. *Трушин С. В.* Вопросы использования аппарата функциональных рядов Вольтерра в задачах анализа усилителей и преобразователей частоты/Новосибир. электротехн. ин-т. Новосибирск, 1983. 55 с. Деп. в ВИНТИ 12.05.83, № 2538—83. 5. *Данилов А. В., Конник С. И., Шеслер А. А.* Применение рядов Вольтерра—Пикара для анализа, синтеза и идентификации цепей//Электрон. моделирование. 1984. 6, № 4. С. 27—32. 6. *Ильин В. Н., Жигалов И. Е., Ланцов В. Н.* Методы автоматизации схемотехнического проектирования нелинейных радиотехнических цепей (обзор)//Изв. вузов. Радиоэлектрон. 1985. 28, № 6. С. 7—17. 7. *Шифрин Я. С., Лучанинов А. И., Посохов А. С.* Матричный метод анализа антенн с нелинейными многополюсниками при периодическом или почти периодическом воздействии/Харьк. ин-т. радиоэлектроники. Х., 1986. 54 с. Деп. в УкрНИИНТИ 25.06.86, № 1456-Ук. 86. 8. *Посохов А. С.* Об одном алгоритме, используемом при работе с аппаратом рядов Вольтерра//Харьк. ин-т. радиоэлектроники. Х., 1985. 9 с. Деп. в УкрНИИНТИ 20.04.85. № 787 Ук-85.

Поступила в редколлегию 06.03.89