УДК 517.544.8:517.958

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ В ЗАДАЧАХ ГІДРОДИНАМІКИ

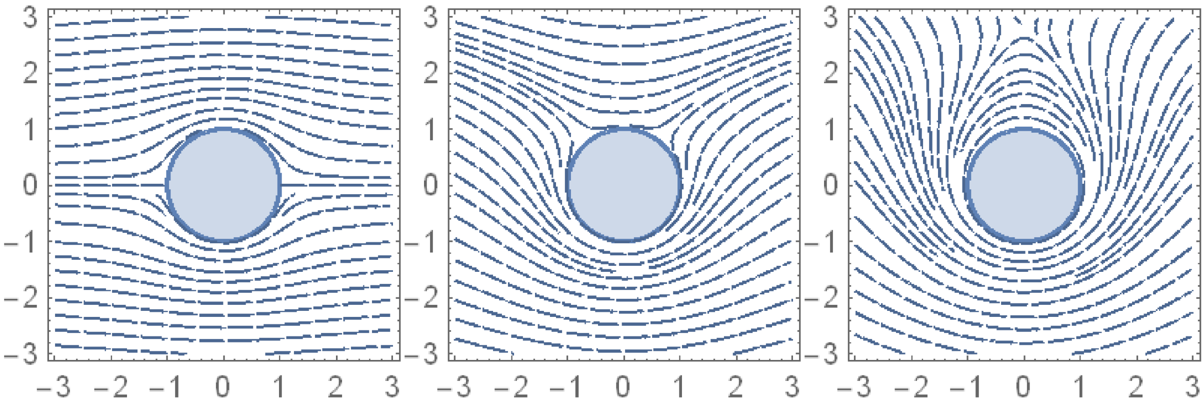
Дудар М.А.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38(063) 724-02-11, email: mykyta.dudar@nure.ua

The paper considers the application of complex analysis methods to the solving of the problem of flowing (non-circulating and circulating) of a circular cylinder by a flow of ideal (inviscous) fluid. The corresponding complex potential is obtained and stream lines are constructed for different values of circulation.

Ще з робіт Леонардо Ейлера методи комплексного аналізу знаходять широке застосування при розв'язанні задач математичного моделювання різних фізико-механічних полів, зокрема, при розв'язанні задач обтікання тіл ідеальною рідиною. Стаціонарна безвихорева плоска течія нестисливої рідини повністю характеризується так званим комплексним потенціалом – аналітичною функцією $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ комплексної змінної $z=x+iy$, дійсна $\varphi(x,y)$ та уявна $\psi(x,y)$ частини якої є відповідно потенціалом та функцією течії [1]. Лінії рівня $\varphi(x,y)=\text{const}$ називаються еквіпотенціальними лініями, а лінії рівня $\psi(x,y)=\text{const}$ – лініями течії. Як раз лінії течії і є лінями, вздовж яких рухаються частинки рідини, а еквіпотенціальні лінії їм ортогональні. Тоді можна знайти поле швидкості $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ рідини за формулою $\mathbf{v}=v_x+iv_y=\overline{f'(z)}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}-i\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, тобто $v_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

Одним з найбільш цікавим та корисним з точки зору застосувань є задача обтікання циліндричного тіла потоком рідини. Нехай область D комплексної площини (z), яка є зовнішністю простого замкненого контуру L, займає ідеальна (нев'язка) рідина. Якщо контур L співпадає з деякою лінією течії, то швидкість рідини спрямована в точках $z\in L$ за дотичною до L. У цьому випадку і кажуть, що рідина обтікає нерухоме циліндричне тіло з напрямною L та твірною, якає є перпендикулярною до площини (z). Векторне поле швидкостей течії має комплексний потенціал $f(z)$, для однозначного визначення якого треба задати ще додаткову умову. Такою умовою є задання швидкості в нескінченно віддаленій точці: $\left|\overline{f'(\infty)}\right|=v_\infty$. Якщо $\Gamma=\oint\limits_\gamma f'(z)dz$, де γ – довільний простий замкнений контур, що охоплює контур L, то при $\Gamma=0$ обтікання циліндричного тіла є безциркуляційним, а при $\Gamma \neq 0$ – циркуляційним.

Розглянемо випадок, коли L – коло радіуса a: $|z| = a$ і незбурений потік рідини направлений вздовж дійсної осі [1]. Якщо $\Gamma = 0$, то відповідна область D: $|z| > a$ конформно відобразиться на зовнішність відрізка $[-1; 1]$ дійсної осі за допомогою відображення $w = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)$. З урахуванням умови $f'(\infty) = v_\infty$ отримаємо, що $f(z) = v_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$. Якщо ж $\Gamma > 0$, то розташуємо у точці $z = 0$ вихор інтенсивності Γ. Тоді комплексний потенціал циркуляційної течії отримаємо, додавши до попереднього виразу потенціал цього вихору: $f(z) = v_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$. Розділяючи тепер дійсну та уявну частини $(z = re^{i\theta})$ знаходимо функцію течії $\psi(r,\theta) = v_\infty\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$. На рис. 1 наведено відповідні картини течії, побудовані у пакеті Mathematica 10.3 © $(a = 1, v_\infty = 1)$.



а) $\Gamma = 0$ б) $\Gamma = 10$ в) $\Gamma = 20$

Рисунок 1 – Картина течії

Наявність циркуляції, яка виникає через обертання циліндра, приводить до появи підіймальної сили (ефект Магнуса) [2]. Цей ефект має чисельні застосування при проєктувані вітрогенераторів, турбопарусів на кораблях, пневматиці тощо.

Список використаних джерел:

1. Лаврентьев, М.А., & Шабат, Б.В. (1973). *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. Наука.

2. Faber, T.E. (1995). *Fluid dynamics for physicists*. Cambridge University Press.