

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КОНУСЕ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ, СОДЕРЖАЩИМ ВНУТРИ СПЛОШНОЙ КОНИЧЕСКИЙ ЭКРАН

### Введение

Исследование граничных электродинамических задач для незамкнутых конических и биконических структур представляет большой интерес при проектировании широкополосных и сверхширокополосных антенных систем [1]. Наличие неоднородностей, например, щелей на поверхности рассеивающего тела позволяет управлять его электродинамическими характеристиками и создавать направленное излучение. В работе [2] предложен подход для нахождения функции Грина второй краевой задачи уравнения Гельмгольца для полубесконечного кругового тонкого конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями и получено решение в предельном случае полупрозрачного конуса. Этот подход был использован при решении электродинамических граничных задач для конуса с продольными щелями [3-5] и получил свое дальнейшее развитие в задачах рассеяния волн на биконических поверхностях [6,7]. В [7] получено строгое аналитическое решение задачи возбуждения магнитным радиальным диполем конуса с периодическими продольными щелями, содержащего внутри себя сплошной конус в частном случае большого числа щелей, ширина которых мала по сравнению с периодом. На основе этого решения изучено влияние щелей и сплошного конического экрана на спектр граничной задачи, структуру поля и его поведение вблизи вершины. Целью настоящей работы является построение численного алгоритма решения задачи с дальнейшим проведением численного эксперимента в случае произвольных параметров задачи.

### Постановка задачи. Метод решения

Рассмотрим задачу о возбуждении магнитным радиальным диполем полубесконечного тонкого кругового идеально проводящего конуса с периодически прорезанными вдоль образующих  $N$  щелями, содержащего внутри себя полубесконечный тонкий круговой сплошной конус (вершины и оси конусов совпадают) (рис. 1). Считаем, что поле диполя, расположенного в точке  $B_0$  и имеющего направленный на вершину момент  $\vec{p}$ , меняется во времени гармонически. Поскольку конус совпадает с одной из координатных поверхностей сферической системы координат  $r, \theta, \varphi$ , введем ее с началом в вершине конуса. В этой системе координат сплошной конус  $\Sigma_1$  определяется уравнением  $\theta = \gamma_1$ , а конус с продольными щелями  $\Sigma_2$  – уравнением  $\theta = \gamma_2$ ,  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  – координаты источника. Ширина щелей  $d_2$  и период  $l = 2\pi/N$  конуса  $\Sigma_2$  – величины двугранных углов, которые образованы пересечением плоскостей, проведенных через ось конусов и ребра соседних конических лент. Электромагнитное поле  $\vec{E}, \vec{H}$  в среде с биконусом  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  и источником удовлетворяет системе уравнений Максвелла, граничному условию обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности биконуса  $\Sigma$ , условию на бесконечности и условию ограниченности энергии. Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [8]. Представим  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в виде

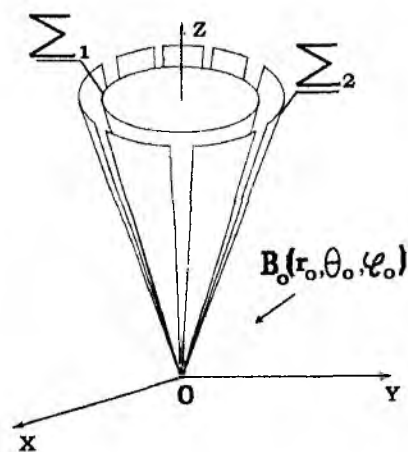


Рис. 1

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1, \quad (1)$$

где  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  – поле диполя;  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  – рассеянное биконусом  $\Sigma$  поле. Для решения электродинамической задачи используем магнитный потенциал Дебая  $\nu(r, \theta, \varphi)$ , через который выразим составляющие электромагнитного поля  $\vec{E}, \vec{H}$  по формулам

$$\begin{aligned} E_r &= 0, & H_r &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) \cdot (r\nu), \\ E_\theta &= -\frac{qw}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \nu, & H_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial\theta} \cdot (r\nu), \\ E_\varphi &= qw \frac{\partial}{\partial\theta} \nu, & H_\varphi &= \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial\varphi} \cdot (r\nu), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q = -ik$  ( $\text{Im } k \geq 0$ ),  $k$  – волновое число, при гармонической зависимости от времени  $t$  в виде  $\exp(i\omega t)$ ,  $q = ik$  ( $\text{Im } k \leq 0$ ) при гармонической зависимости от времени  $t$  в виде  $\exp(-i\omega t)$ ;  $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – волновое сопротивление среды с диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями. Искомый потенциал Дебая  $\nu$  удовлетворяет

- 1) однородному уравнению Гельмгольца  $\Delta\nu - q^2\nu = 0$  вне биконуса и источника;
- 2) граничному условию Неймана на поверхности биконуса:

$$\left. \frac{\partial\nu}{\partial n} \right|_\Sigma = 0; \quad (3)$$

- 3) принципу предельного поглощения;
- 4) условию ограниченности энергии.

В соответствии со структурой полного поля (1)  $\nu$  ищем в виде

$$\nu = \nu_0 + \nu_1, \quad \nu_0 = b_0 \frac{e^{-q|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|},$$

потенциал Дебая поля диполя, а  $\nu_1(r, \theta, \varphi)$  – потенциал для рассеянного поля,  $b_0 = -\frac{w|\vec{p}|}{qr_0}$ .

Одним из эффективных средств решения краевых задач с конической границей являются интегральные преобразования Конторовича-Лебедева [9, 1-3, 10]. Неизвестный потенциал  $\nu_1$  будем искать в виде интеграла Конторовича-Лебедева относительно радиальной координаты сферической системы координат

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \text{sh}\pi\tau \tilde{\nu}_1 \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, & \tilde{\nu}_1 &= \int_0^\infty \nu_1 \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \\ \tilde{\nu}_1 &= - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau} U_{m\tau}(\theta, \varphi) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta) \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma_2), \\ U_{m\tau} &= \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \beta_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta) + \xi_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta) \right] e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_{mn} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $K_z(z)$  – функция Макдональда;  $\Gamma(z)$  – гамма-функция;  $P_\zeta^m(\cos\theta)$  – присоединенная функция Лежандра первого рода;  $\beta_{mn}, \xi_{mn}, \eta_{mn}$  – искомые коэффициенты. Считаем, что источник расположен вне конуса  $\Sigma_2 (\gamma_2 < \theta_0)$ . Связь между неизвестными коэффициентами и функциональные уравнения для их определения находятся из условий непрерывности поля (потенциала Дебая и его частных производных) в щелях и граничных условий (3) на сплошном конусе  $\Sigma_1$  и лентах конуса  $\Sigma_2$ . В результате приходим к следующей системе функциональных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $y_n^{(m_0)}$ , через которые выражаются искомые коэффициенты [7]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = 0, \quad \pi d/l < |N\varphi| \leq \pi, \quad (4)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1-\varepsilon_n) y_n^{(m_0)} e^{inN\varphi} = -\frac{1}{N(m_0+\nu)} g_\tau^{(m_0)} e^{im_0N\varphi}, \quad |N\varphi| < \pi d/l, \quad (5)$$

$$g_\tau^{(n)} = \frac{|n|}{n} (1-\varepsilon_n) (1-C_\tau^{(n+\nu)N}), \quad C_\tau^M = \frac{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^M(\cos\gamma_1) - \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^M(-\cos\gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+i\tau}^M(-\cos\gamma_1) - \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^M(\cos\gamma_2)},$$

$$\delta_n^{m_0} = 1, n = m_0, \quad \delta_n^{m_0} = 0, n \neq m_0,$$

$$\frac{1}{N(n+\nu)} \frac{|n|}{n} (1-\varepsilon_n) = \frac{(-1)^{(n+\nu)N+1} \operatorname{ch}\pi\tau \Gamma(1/2+i\tau+(n+\nu)N)}{\pi \sin^2 \gamma_2 \Gamma(1/2+i\tau-(n+\nu)N)} \times$$

$$\times \frac{1}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos\gamma_2) - \frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos\gamma_2)} \frac{1}{1-C_\tau^{(n+\nu)N}},$$

$\frac{m}{N} = m_0 + \nu$ ,  $m_0$  – ближайшее целое число к  $\frac{m}{N}$ ,  $-1/2 \leq \nu < 1/2$ . Для коэффициентов  $\varepsilon_n$

имеет место оценка при  $(n+\nu)N \gg 1$   $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{(n+\nu)^2 N^2}\right)$ .

Используя процедуру регуляризации уравнений (4), (5) и метод задачи Римана-Гильберта [2, 7], сведем исходную задачу к решению систем линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2) относительно коэффициентов

$x_n^{m_0} = y_n^{m_0} + \delta_n^{m_0}$  следующего вида:

$$x_n^{m_0} - \delta_n^{m_0} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_{np} (x_p^{m_0} - \delta_p^{m_0}) - g_\tau^{(m_0)} V_{n-1}^{m_0-1}(u), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

$$M_\nu(\dots)(x_0^{m_0} - \delta_0^{m_0}) = N \cdot \nu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{|n|}{n} \varepsilon_n (x_0^{m_0} - \delta_0^{m_0}) - g_\tau^{(n)} \delta_n^{m_0} \right] V^p(u), \quad (7)$$

$$b_{np} = \frac{|p|}{p} \varepsilon_p V_{n-1}^{m_0-1}(u) + \delta_p^0 P_n(u), \quad u = \cos \alpha, \quad \alpha = \pi d/l,$$

$$V_{n-1}^{p-1}(u) = \frac{n}{2(n-p)} [P_{n-1}(u)P_p(u) - P_n(u)P_{p-1}(u)], \quad n \neq p,$$

$$V^p(u) = \frac{1}{p+\nu} \{P_p(u) + M_\nu(-u)V_{p-1}^{-1}(u)\}, V_{n-1}^{-1}(u) = \frac{1}{2}[P_{n-1}(u) - P_n(u)], M_\nu(u) = \frac{2P_{\nu-1}(u)}{P_\nu(u) + P_{\nu-1}(u)}.$$

Следует отметить, что матричные коэффициенты СЛАУ-2 не зависят от волнового числа  $k$ , что существенно упрощает алгоритм построения диаграмм рассеяния и определения поля вблизи вершины биконуса. Для любых параметров задачи решение СЛАУ-2 может быть получено численно методом редукции. Этот метод и используется для построения численного решения поставленной задачи.

### Численное решение

Рассмотрим случай, когда источник расположен на оси биконической структуры ( $m = m_0 = 0, \nu = 0$ ), а конус  $\Sigma_2$  с одной щелью ( $N = 1$ ). Коэффициенты  $x_n$ , являющиеся решением системы (6), (7), по абсолютной величине не превосходят единицы. На рис. 2, 3 приведены зависимости  $|x_n|, n = 0, 1$  от величины ширины щели  $d_2$  и различных фиксированных углах раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma_1$  ( $\gamma_2 = \pi/8$ , 1. –  $\gamma_1 = \pi/18$ , 2. –  $\gamma_1 = \pi/16$ , 3. –  $\gamma_1 = \pi/14$ ).

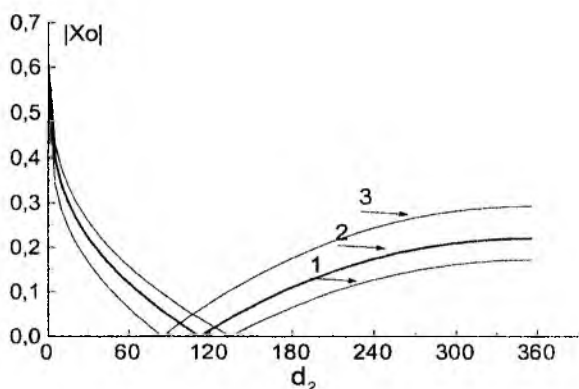


Рис. 2

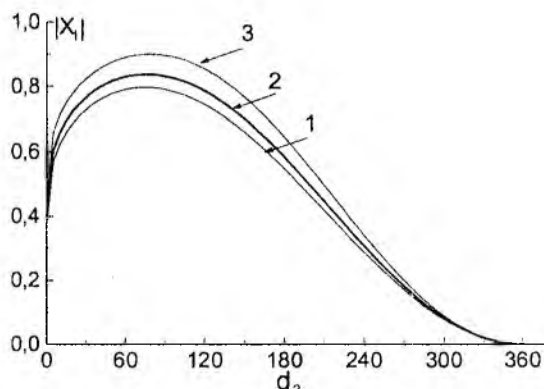


Рис. 3

Коэффициент  $x_0$  связан с отражением поля от поверхности биконической структуры и в предельном случае отсутствия щели ( $d_2 = 0$ ) равен единице (сплошной конус  $\theta = \gamma_2$ ). При увеличении ширины щели сначала наблюдается убывание  $|x_0|$  до нуля (минимума), а затем рост (рис. 2). Уменьшение угла раствора сплошного конуса  $\theta = \gamma_1$  приводит к смещению минимума  $|x_0|$  в сторону увеличения ширины щели  $d_2$ . В случае узкого сплошного конуса ( $\gamma_1 \ll 1$ ) кривая зависимости  $|x_0|$  от  $d_2$  мало чем отличается от кривой  $|x_0|$  для одиночного конуса с продольной щелью [11]. Остальные коэффициенты связаны с прохождением поля через щель в пространство между конусами  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  и убывают с уменьшением ширины щели и конической ленты. Кривая зависимости  $|x_1|$  от ширины щели приведена на рис. 3. При увеличении ширины щели наблюдается монотонное возрастание  $|x_1|$ , а затем убывание до нуля. Причем в окрестности  $d_2 = 70^\circ$   $|x_1|$  достигает своего наибольшего значения во всем промежутке изменения ширины щели. Поле в дальней зоне строится на основании использования представления (2) составляющих электромагнитного поля через потенциал Дебая и поведения функция Макдональда  $K_\zeta(z)$  при  $z \gg 1$  [12]. На рис. 4, 5 даны диаграммы рассеяния поля в горизонтальной плоскости (перпендикулярной оси структуры) в зависимости от ширины щели ( $\gamma_1 = \pi/16, \gamma_2 = \pi/8, \theta = \pi/4 + \pi/20, kr_0 = 1$ , Рис. 4: 1. –  $d_2 = 5^\circ$ , 2. –  $d_2 = 30^\circ$ , 3. –  $d_2 = 60^\circ$ ; Рис. 5: 1. –  $d_2 = 90^\circ$ , 2. –  $d_2 = 180^\circ$ , 3. –  $d_2 = 240^\circ$ ).

Анализ диаграмм рассеяния показал, что с увеличением ширины щели наблюдается влияние внутреннего сплошного конуса на излучение из щели. При ширине щели, равной  $60^\circ$  это излучение будет наибольшим (рис.4). По мере расширения щели (уменьшения угловых размеров конической ленты) форма диаграммы непрерывно изменяется, превращаясь в круговую (предельный случай биконической поверхности-сплошной конус  $\Sigma_1$ ).

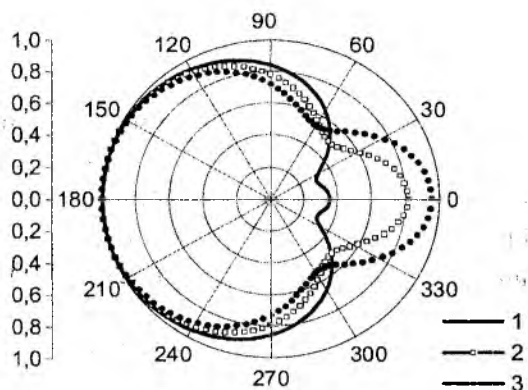


Рис. 4

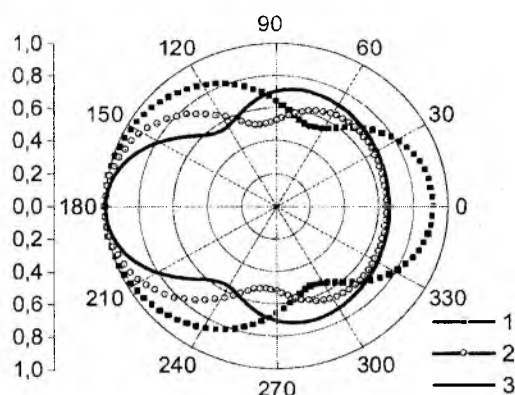


Рис. 5

### Заключение

Построен численно-аналитический алгоритм решения задачи возбуждения магнитным радиальным диполем неограниченной идеально проводящей биконической поверхности, состоящей из конуса с периодическими продольными щелями и вложенного внутри его сплошного конического экрана. Получено численное решение задачи, на основе которого изучено влияние щелей и сплошного конуса на коэффициенты Фурье составляющих электромагнитного поля и диаграммы рассеяния. В предельных случаях биконической структуры полученные результаты согласуются с известными для сплошного конуса и биконуса.

### Благодарность

Авторы выражают благодарность проф. Шифрину Я.С. и проф. Лучанинову А.И. за обсуждение результатов работы.

**Список литературы:** 1. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск. Изд-во Томск. ун-та. 1987. 127с. 2. Сологуб В.Г., Харчевникова Т.И. Дифракция сферических волн на конической поверхности специального вида // Радиотехника. Вып. 20. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. 1972. С.52 – 58. 3. Дорошенко В.А., Сологуб В.Г. О структуре поля радиального магнитного диполя, рассеянного конической поверхностью с прорезанными вдоль образующих щелями // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. №5. С. 1110 – 1112. 4. Дорошенко В.А. Возбуждение магнитным радиальным диполем конуса с продольными щелями // Радиотехника Всеукр. межвед. науч-техн. сб. 1992. Вып. 97. С. 54 – 61. 5. Дорошенко В.А., Семенова Е.К., Русакова А.Г. Рассеяние поля точечного гармонического источника на незамкнутом конусе // Радиоэлектроника и информатика. Харьков. 2001. №2(15). С.21 – 26. 6. Дорошенко В.А., Сологуб В.Г. Возбуждение биконической поверхности специального вида электрическим радиальным диполем // Радиопизика и электроника: Сб. науч. тр. ИРЭ АН УССР. Харьков. 1988. С. 7. Дорошенко В.А. Возбуждение модифицированной биконической структуры магнитным радиальным диполем // Радиотехника Всеукр. межвед. науч-техн. сб. 2001. Вып. 121. С. 19 – 26. 8. Хенл Х., Мауэ Л., Вестпфаль К. Теория дифракции. М: Мир. 1964. 428 с. 9. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем. ЖЭТФ. 1938. Т. 8. Вып. 10-11. С.1192 – 1206. 10. Колодий Б.І., Куриляк Д.Б. Осесиметричні задачі дифракції електромагнітних хвиль на конічних поверхнях. Київ: Наук. думка. 1995. 167 с. 11. Дорошенко В.А., Евсюкова Е.К., Кравченко В.Ф. Возбуждение конической щелевой антенны // Радиотехника и электроника. 2001. Т.46. С. 1 – 7. 12. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т.2. М.: Наука, 1974. 295с.