

СИНТЕЗ КРУГЛОЙ АПЕРТУРЫ С ЗАДАНЫМ РАДИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

Известно, что поле в зоне Френеля обладает более сложной пространственной структурой, чем в дальней зоне. Кроме угловой, оно имеет достаточно сложную зависимость от продольной (радиальной) координаты. Более того, вид углового распределения зависит от расстояния до антенны. В связи этим на практике может возникнуть необходимость в формировании поля в пространстве не только с заданным угловым, но и с заданным радиальным распределением. Это, например, может наблюдаться при разработке радиолокационных систем ближнего действия, космических систем передачи энергии СВЧ лучом (СПЭСЛ), систем обработки оптических и ультразвуковых изображений, представляющих большой интерес для медицинской диагностики, для которой высокое радиальное разрешение очень важно. В данной работе рассматривается задача синтеза круглой сфокусированной апертуры с заданным радиальным распределением поля в зоне Френеля при одновременном контроле вида углового распределения на фокальной сфере.

Основные соотношения

Антенна имеет вид круглой апертуры с радиусом R , центр которой лежит в начале цилиндрической системы координат ρ, φ, z (рис. 1).

Предположим, что поле возбуждения $\vec{E}_0(Q)$ линейно поляризовано и распределение амплитуды его имеет угловую симметрию. Направление главного максимума излучения задается углами φ_0 и ϑ_0 и в общем случае не совпадает с направлением нормали к плоскости апертуры. Тогда электрическое поле в зоне Френеля сфокусированной апертуры в приближении малых углов можно записать следующим образом [1]:

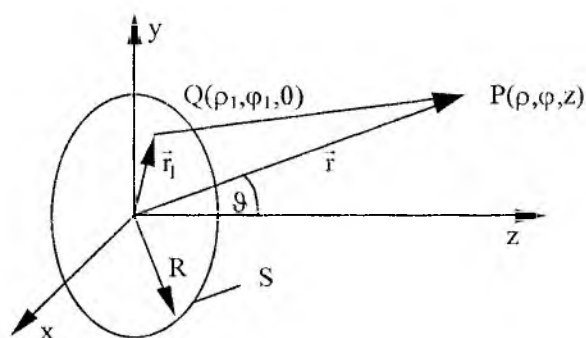


Рис. 1

$$\vec{E}(P) = \vec{e}_E \frac{ikR^2}{2\pi r} e^{-ikr} e^{-ik\frac{\rho^2}{2r}} E_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} A_0(u) e^{i\{2u^2\xi + u[-\psi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + \psi \cos(\varphi - \varphi_1)]\}} u du d\varphi_1, \quad (1)$$

где $\vec{e}_E = \vec{E}_0 / |\vec{E}_0|$ – единичный вектор; $r = 2\pi/\lambda$ – волновое число в воздухе; E_0 – напряженность электрического поля в центре апертуры; $A_0(u)$ – функция, описывающая амплитудно-фазовое распределение (АФР) поля возбуждения без учета фокусирующего фазового множителя ($A_0(0) = 1$); $u = \rho_1/R$ – безразмерная радиальная координата; $\psi = kR \sin \vartheta$ – обобщенный угол; $\xi = b(1 - \chi_0/\chi)$ – обобщенная радиальная координата, определяющая расстояние от фокуса до точки наблюдения; $\chi = r/r_{fz}$, $\chi_0 = r_f/r_{fz}$, r_f и $r_{fz} = 8R^2/\lambda$ – расстояния от апертуры до фокуса и границы дальней зоны соответственно; $\psi_0 = kR \sin \vartheta_0$; $b = \pi/16\chi_0$. Заметим, что параметр χ_0 , обобщенный угол ψ_0 и угол φ_0 определяют пространственное положение точки фокуса.

Выполнив интегрирование по φ_1 получим

$$\vec{E}(\chi, \psi, \varphi) = \vec{e}_E E_0 \left(i\pi^2 / 8\chi_0 \right) e^{-ik\chi r_{fz}} F(\xi, \psi, \varphi), \quad (2)$$

$$\text{где } F(\xi, \psi, \varphi) = \left(1 - \frac{\xi}{b} \right) \frac{2}{\pi} \int_0^1 A_0(u) e^{i2u^2\xi} J_0 \left(u \sqrt{\psi_0^2 + \psi^2 - 2\psi_0\psi \cos(\varphi - \varphi_0)} \right) u du \quad (3)$$

описывает пространственное распределение комплексной амплитуды поля во френелевой и дальней зонах сфокусированной круглой апертуры при линейно поляризованном и осесимметричном амплитудном распределении; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода. Очевидно, что если $\psi_0 = 0$, то $F(\xi, \psi, \varphi) = F(\xi, \psi)$, т. е. не зависит от угла φ .

При $\xi = 0$ получаем функцию, описывающую угловое распределение поля на фокальной сфере, т. е. обычную угловую диаграмму направленности (УДН), которая, как известно, такая, как для дальней зоны:

$$f_\psi(\psi) = F(\xi = 0, \psi, \varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 A_0(u) J_0\left(u \sqrt{\psi_0^2 + \psi^2 - 2\psi_0\psi \cos(\varphi - \varphi_0)}\right) u du. \quad (4)$$

Радиальное распределение поля вдоль направления, задаваемого углами $\psi^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$, с точностью до несущественного для дальнейшего фазового множителя $\exp(-ik\chi r_{fz})$ определяется выражением

$$F(\xi, \psi_1, \varphi_1) = F^0(\xi) e^{i\xi} = e^{i\xi} \left(1 - \frac{\xi}{b}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 A_1(y) e^{i\xi y} dy = e^{i\xi} \left(1 - \frac{\xi}{b}\right) f_\xi(\xi), \quad (5)$$

где

$$y = 2u^2 - 1 \quad A_1(y) = A_0\left(\sqrt{(y+1)/2}\right) J_0\left(\sqrt{(y+1)/2} \sqrt{\psi_0^2 + \psi^{(1)2} - 2\psi_0\psi^{(1)} \cos(\varphi^{(1)} - \varphi_0)}\right). \quad (6)$$

Функцию $F^0(\xi)$ назовём функцией радиального распределения поля (ФРРП), а $f_\xi(\xi)$, которая связана с $A_1(y)$ преобразованием Фурье так же, как обычная угловая ДН линейной антенны с её АФР – радиальной диаграммой направленности (РДН). Величина $A_1(y) = A_1(2u^2 - 1)$ есть полное АФР на апертуре, сфокусированной на бесконечность и направление максимального излучения которой совпадает с оптической осью. Область значений $(-\infty, \pi/16\chi_0)$ переменной ξ соответствует переднему полупространству, значение $\xi = -\infty$ – положению точки наблюдения на апертуре ($\chi = 0$), $\xi = 0$ – в фокусе ($\chi = \chi_0$) и $\xi = b = \pi/16\chi_0$ – в бесконечности ($\chi \rightarrow \infty$). Очевидно, что при удалении фокуса от апертуры $\chi_0 \rightarrow \infty$ (приближении антенны к синфазной) величина $b \rightarrow 0$. Ближнюю границу зоны Френеля обозначим через ξ_1 ($\xi_1 < 0$, $|\xi_1| < \infty$), дальнюю границу через $\xi_2 = \pi(1 - \chi_0)/16\chi_0$. Функция $f(\xi)$ формально определена на всей оси $\xi \in (-\infty, \infty)$, но имеет физический смысл только на её части, а именно на $(-\infty, \pi/16\chi_0)$. По аналогии с обычной угловой ДН, интервал $(-\infty, \pi/16\chi_0)$ можно считать областью видимости РДН на оси ξ .

Постановка и общее решение задачи синтеза

Рассмотрим задачу синтеза круглой сфокусированной апертуры с заданной ФРРП. Пусть $F_{\xi_0}(\xi)$ – заданная ФРРП. Необходимо найти АФР $A_0(u)$, создающее радиальное распределение поля $F_\xi(\xi)$ в направлении $\psi^{(1)}, \varphi^{(1)}$, близкое по какому-либо критерию к $F_{\xi_0}(\xi)$.

Предварительно сделаем ряд замечаний. Поскольку РДН $f_{\xi_0}(\xi) = \frac{F_{\xi_0}(\xi)}{(1 - \xi/b)}$, как и в случае линейной антенны, связана с АФР преобразованием Фурье, то удобнее синтезировать $f_{\xi_0}(\xi)$ и применять методы, разработанные для синтеза линейных антенн по заданной УДН [2]. Кроме того, из выражения (5) видно, что связь между РДН $f(\xi)$ и приведенным АФР $A_1(y)$ не зависит от направления главного максимума излучения и от направления, для которого синтезируется РДН. Таким образом, если найдено АФР, создающее требуемую РДН при каких-либо заданных значениях величин

$\psi_0, \psi^{(1)}, \varphi_0, \varphi^{(1)}$, то для других значений этих величин нет необходимости вновь решать задачу синтеза. Достаточно воспользоваться уже полученным решением и соотношением (6). Однако описанный способ синтеза заданного осевого распределения поля или РДН может привести к мало пригодному на практике результату, ибо в этом случае при определении АФР, обеспечивающего нужную РДН, никак не контролируется угловое распределение поля, т. е. УДН. Следовательно, нет никаких гарантий в получении приемлемой УДН.

Чтобы избежать таких неприятных последствий, предлагаем следующий подход к задаче синтеза в зоне Френеля по заданной РДН.

Будем рассматривать комплексные РДН и УДН как элементы гильбертовых пространств со скалярными произведениями

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2})_{g_1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}^*(\xi) f_{\xi_2}(\xi) g_1(\xi) d\xi, \quad (7)$$

$$(f_{\psi_1}, f_{\psi_2})_{g_2} = \int_0^{\infty} f_{\psi_1}^*(\xi) f_{\psi_2}(\xi) g_2(\xi) d\xi, \quad (8)$$

где * – знак комплексного сопряжения; $g_{1,2}(\xi)$ – неотрицательные во всей области интегрирования весовые функции; f_{ξ_1}, f_{ξ_2} и f_{ψ_1}, f_{ψ_2} – элементы гильбертовых пространств $L^2_{f_{\xi}}(\xi_1, \xi_2)$.

$L^2_{f_{\psi}}(0, \infty)$ соответственно. Комплексные амплитуды $A_1(\gamma)$ тогда в силу равенства Парсеваля должны принадлежать пространству $L^2[-1, 1]$.

Пусть $f_{\xi_0}(\xi)$ и $f_{\psi_0}(\psi)$ – заданные РДН и УДН соответственно. Уклонение полученных в результате синтеза диаграмм от заданных оценим квадратами норм в $L^2_{f_{\xi}}$ и $L^2_{f_{\psi}}$ разностей диаграмм:

$$\varepsilon_1 = \|f_{\xi_0}(\xi) - f_{\xi}(\xi)\|_{L^2_{f_{\xi}}[\xi_1, \xi_2]}^2, \quad (9)$$

$$\varepsilon_2 = \|f_{\psi_0}(\psi) - f_{\psi}(\psi)\|_{L^2_{f_{\psi}}[0, \infty]}^2, \quad (10)$$

где $[\xi_1, \xi_2]$ – интервал на котором контролируется близость заданной и синтезируемой РДН.

Введем функционал

$$\varepsilon = \|f_{\xi_0}(\xi) - f_{\xi}(\xi)\|_{L^2_{f_{\xi}}[\xi_1, \xi_2]}^2 + \mu \|f_{\psi_0}(\psi) - f_{\psi}(\psi)\|_{L^2_{f_{\psi}}[0, \infty]}^2. \quad (11)$$

Задачу синтеза сформулируем следующим образом. Найти АФР $A_1(\gamma) \in L^2[-1, 1]$, обеспечивающее минимум функционала ε при условии, что квадрат невязки синтезированной РДН не превышает заданного значения δ , т. е.

$$\min_{A_1 \in L^2[-1, 1]} \left\{ \|f_{\xi_0}(\xi) - f_{\xi}(\xi)\|_{L^2_{f_{\xi}}[\xi_1, \xi_2]}^2 + \mu \|f_{\psi_0}(\psi) - f_{\psi}(\psi)\|_{L^2_{f_{\psi}}[0, \infty]}^2 \right\}. \quad (12)$$

При этом параметр μ определяем из такого функционального уравнения:

$$\|f_0(\xi) - f(\xi)\|_{L^2_{f_{\xi}}[\xi_1, \xi_2]}^2 = \delta, \quad (13)$$

где δ – заданная точность синтеза требуемой РДН в области, соответствующей зоне Френеля.

Поскольку целью является получение заданной РДН при приемлемой УДН, то в качестве $f_{\psi 0}(\psi)$ желательно выбрать какую-либо реализуемую УДН, обладающую приемлемыми свойствами. В качестве УДН можно взять ДН, созданную некоторым стандартным (типовым) АР.

Искомое АФР представим в виде разложения по некоторой полной в $L^2[-1,1]$ системе функций $\{\phi_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$A_{1,N}(y) = \sum_{n=0}^N b_n \phi_n(y), \quad (14)$$

которое является N -ым конечномерным приближением к точному решению $A_1(y)$, получаемому при $N \rightarrow \infty$.

Подставив выражение (14) в функцию (11) и после ряда преобразований получим

$$\varepsilon_N = \|f_{\xi 0}\|_{L^2_{f_{\xi}}}^2 + \|f_{\psi 0}\|_{L^2_{f_{\psi}}}^2 + \langle \mathbf{b}_N^* (\mathbf{\Phi} + \mu \mathbf{P}) \mathbf{b}_N \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{b}_N^*, \mathbf{c}_N + \mu \mathbf{d}_N \rangle, \quad (15)$$

где \mathbf{b}_N – вектор-столбец искомых коэффициентов b_n ; $\|f_{\xi 0}\|^2$, $\|f_{\psi 0}\|^2$ – квадрат нормы заданных РДН на $L^2_{f_{\xi}}[\xi_1, \xi_2]$ с весом $g_1(\xi)$ и УДН на $L^2_{f_{\psi}}[0, \infty]$ с весом $g_2(\psi)$; $\mathbf{\Phi}$ и \mathbf{P} – квадратные симметрические матрицы порядка $(N+1)$ с элементами

$$\Phi_{n,m} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_n(y) \phi_m^*(y') K_1(y, y') dy' dy, \quad (16)$$

$$P_{n,m} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_n(y) \phi_m^*(y') K_2(y, y') dy' dy, \quad (17)$$

где $K_1(y, y') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-i(y-y')\xi} g_1(\xi) d\xi$,

$$K_2(y, y') = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\sqrt{0.5(y+1)} \cdot \sqrt{\psi_0^2 + \psi^2 - 2\psi_0\psi \cos(\varphi - \varphi_0)}\right)}{J_0\left(\sqrt{0.5(y+1)} \cdot \sqrt{\psi_0^2 + \psi^{(1)2} - 2\psi_0\psi^{(1)} \cos(\varphi^{(1)} - \varphi_0)}\right)} \times \\ \times \frac{J_0\left(\sqrt{0.5(y'+1)} \cdot \sqrt{\psi_0^2 + \psi^2 - 2\psi_0\psi \cos(\varphi - \varphi_0)}\right)}{J_0\left(\sqrt{0.5(y'+1)} \cdot \sqrt{\psi_0^2 + \psi^{(1)2} - 2\psi_0\psi^{(1)} \cos(\varphi^{(1)} - \varphi_0)}\right)} g_2(\psi) \psi d\psi,$$

\mathbf{c}_N и \mathbf{d}_N – векторы-столбцы с элементами

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \phi_n(y') \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_{\xi 0}^*(\xi) e^{-iy'\xi} g_1(\xi) d\xi dy', \quad (18)$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f_{\psi 0}^*(\psi) \psi \int_{-1}^1 \phi_n(y) \frac{J_0\left(\sqrt{0.5(y+1)} \cdot \sqrt{\psi_0^2 + \psi^2 - 2\psi_0\psi \cos(\varphi - \varphi_0)}\right)}{J_0\left(\sqrt{0.5(y'+1)} \cdot \sqrt{\psi_0^2 + \psi^{(1)2} - 2\psi_0\psi^{(1)} \cos(\varphi^{(1)} - \varphi_0)}\right)} dy d\psi. \quad (19)$$

Оптимальный вектор \mathbf{b}_{N0} , на котором функционал ε_N достигает минимума, определяем из условия равенства нулю первой вариации его по $\langle \mathbf{b}_N^* \rangle$:

$$\mathbf{b}_{N0} = (\Phi + \mu \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{c}_N + \mu \mathbf{d}_N), \quad (20)$$

а множитель μ является решением уравнения (13). Минимальное значение ε_N при этом равно

$$\varepsilon_{N,\min} = \|f_{\xi 0}\|^2 + \mu \|f_{\psi 0}\|^2 - \langle (\mathbf{c}_N + \mu \mathbf{d}_N)^* (\Phi + \mu \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{c}_N + \mu \mathbf{d}_N) \rangle. \quad (21)$$

Полное амплитудно-фазовое распределение с учетом квадратичного фокусирующего и обеспечивающего отклонение направления главного максимума линейного фазовых распределений определяем соотношением

$$A(u, \varphi_1) = A_{1,N} (2u^2 - 1) \cdot \frac{\exp\{j[2u^2 b - u\psi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_1)]\}}{J_0(u\sqrt{\psi_0^2 + \psi^{(1)2}} - 2\psi_0\psi^{(1)} \cos(\varphi_0 - \varphi_1))}. \quad (22)$$

Численные результаты

Пусть требуемое радиальное распределение поля (ФРПП) вдоль направления, определяемого углом $\psi^{(1)} = 0$, постоянно на интервале $[\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}]$ и равно нулю вне его, т. е.

$$F_{\xi 0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}] \\ 0, & \xi \in [\xi_1, \xi_1^{(1)}) \cup (\xi_2^{(1)}, \xi_2] \end{cases},$$

соответственно требуемая РДН будет иметь вид

$$f_{\xi 0}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - \xi/b)}, & \xi \in [\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}] \\ 0, & \xi \notin [\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}] \end{cases}.$$

В качестве $f_{\psi 0}(\psi)$ возьмём ДН равномерно возбужденной апертуры, т. е. $f_{\psi 0}(\psi) = J_1(\psi)/2\pi\psi$, где $J_1(\psi)$ – функция Бесселя первого рода. Зададим значения величин $\chi_1, \chi_2, \chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}$: $\chi_1 = 0,3, \chi_2 = 0,5, \chi_1^{(1)} = 0,014, \chi_2^{(1)} = 50$. Углы ψ_0 и $\psi^{(1)}$, определяющие направление главного максимума и направление, вдоль которого необходимо обеспечить требуемое радиальное распределение, равны $\psi_0 = \psi^{(1)} = 0$. Параметр χ_0 выберем таким образом, чтобы точка фокуса ξ_0 лежала в центре интервала $[\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}]$, т. е. $\chi_0 = 0,375$, при этом $\xi_1^{(1)} = -0,13, \xi_2^{(1)} = 0,13$, а $\xi_1 = -13,5$ и $\xi_2 = 0,52$.

На рис. 2 и 3 сплошными кривыми линиями показаны нормированные квадрат РРП и УДН по мощности, полученные в результате синтеза. Там же для сравнения приведены результаты синтеза по заданному РРП, но при ограничении на норму АФР – штриховые кривые. Видно, что в области основного лепестка для обоих методов радиальные распределения поля различаются незначительно. В интервале же между основным лепестком и ближней границей зоны Френеля синтез с ограничением на норму АФР дает лучшие результаты в смысле близости к заданному РРП. Так, для $\chi \in (0,02, 0,1)$ значения $F^2(\chi) \leq -10 \text{ дБ}$, в то время как при рассмотренном способе синтеза $F^2(\chi) \leq -5 \text{ дБ}$. Однако, как следует из рис. 3, при отсутствии контроля за УДН синтез с ограничением на норму АФР приводит к чрезвычайно низким значениям поля вдоль направления нормали к апертуре. Фактически для УДН в данном направлении характерен провал, что делает результаты синтеза мало пригодными

с практической точки зрения. В то же время предложенный способ синтеза дает более приемлемую для практики УДН.

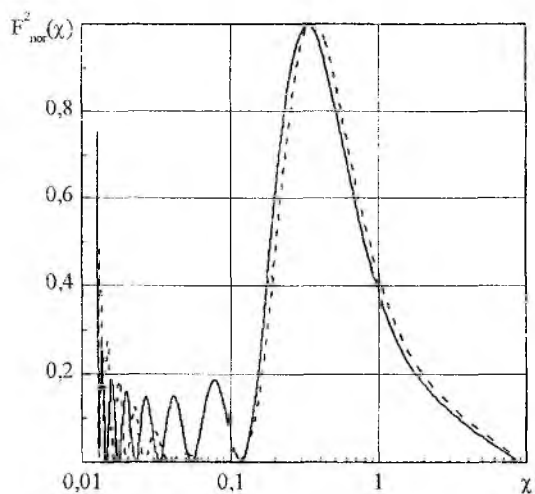


Рис. 2

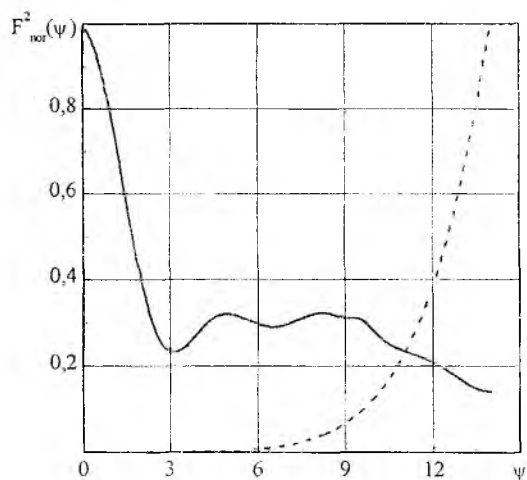


Рис. 3

Список литературы: 1. Silver S. Microwave Antenna Theory and Design. New York.: McGraw-Hill, 1949. 312 p.
2. Минкович Б.М., Яковлев В.П. Теория синтеза антенн. М.: Сов. радио, 1969. 296 с.

*Харьковский государственный технический
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 5.07.2000