СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНКИ СРЕДНЕЙ МОЩНОСТИ ОТРАЖЕНИЙ ОТ МЕТЕООБРАЗОВАНИЙ

Рачков Д.С., Семеняка А.В., Леховицкий Д.И., Дохов А.И., Зарицкий В.И.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, НИЦ ИИРЭСТ, тел. (057) 702-11-38
email: dmitry.letters@gmail.com

The maximum likelihood (**ML**) estimates of power of reflections from meteorological formations (**MF**) are derived for four different cases. The distribution laws (probability density function and cumulative distribution function) of well-known **MF** mean power estimate are derived. Based on them, its statistical characteristics are determined. Their dependences on training sample size, **MF** power, type and level of interperiod correlation of reflections from **MF** are analyzed. Rational ways of practical implementation of **MF** mean power estimate are proved.

1. Введение и постановка задачи. Важный параметр метеообразований (**МО**) – мощность отраженного от них сигнала, определяющая их отражаемость [1, 2]. В существующих метеорадиолокаторах оценкой средней мощности отражений от **МО** в элементе разрешения обычно служит среднее арифметическое оценок мощностей (квадратов модулей) $M \cdot K$ отсчетов отражений, принятых в M смежных интервалах зондирования из K элементов разрешения по дальности, смежных с данным. M - мерные пачки (векторы) отсчетов комплексных амплитуд отражений из K элементов разрешения по дальности полагаются при этом комплексными нормальными (гауссовыми) взаимно независимыми векторами с нулевыми средними значениями и одинаковой корреляционной матрицей (**КМ**) $\mathbf{\Phi}$. Такая оценка мощности численно совпадает с нормированным на M следом оценки $\hat{\mathbf{\Phi}}$ максимального правдоподобия (**МП**) **КМ** $\mathbf{\Phi}$, сформированной по этим векторам.

В типичном для практики случае коррелированных отсчетов отражений эта оценка не является оценкой **МП** средней мощности отражений [3]. Поэтому представляет интерес оценка **МП** этого параметра и отличие ее статистических характеристик от аналогичных характеристик обычно используемой оценки.

Точность случайной оценки мощности **МО** зависит от объема K обучающей выборки, использованной для формирования необходимых элементов оценочной **КМ**, интенсивности, вида и степени междупериодной корреляции отсчетов отражений от **МО**. Их влияние исчерпывающе описывается законами (плотностями или функциями) распределения используемых оценок. Однако в известной литературе обычно ограничиваются отысканием и анализом только отдельных параметров этих распределений.

Цель настоящей работы – получить **МП** оценку мощности отражений от **МО**, проанализировать точностные характеристики используемой в метеорадиолокаторах оценки мощности на основе ее законов распределения и обосновать способы ее реализации.

2. Методика анализа, модели, допущения. А. Исследуемая оценка $\hat{p}$ мощности смеси шума и отражений от **МО**

$$\hat{p} = \frac{1}{M} \cdot tr\left(\hat{\mathbf{\Phi}}\right) = \frac{1}{M \cdot K} \cdot tr(\mathbf{A}), \qquad tr\left(\mathbf{C} = \{ c_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{M}\right) = \sum_{\ell=1}^{M} c_{\ell\ell} \tag{1}$$

формируется по диагональным элементам $M \times M$ оценки **МП**

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \{ \hat{\varphi}_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{M} = \frac{1}{K} \cdot \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} = \{ a_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{M} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^* = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^* \tag{2}$$

КМ $\mathbf{\Phi} = \{ \varphi_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{M}$ M - мерных пачек смеси шума и отражений от **МО** в анализируемых элементах дальности. При синтезе полагается, что определяющая эту оценку матрица $\mathbf{A}$ строится по $M \times K$ - мерной обучающей выборке

$$\mathbf{Y} = \{ \mathbf{y}_i \}_{i=1}^{K}, \quad \mathbf{y}_i = \left\{ y_\ell^{(i)} \right\}_{\ell=1}^{M} \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{\Phi}), \quad \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j^*} = \begin{cases} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}_M + \eta \cdot \boldsymbol{\rho}, & i = j, \\ \mathbf{0}_M, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in \overline{1,K}, \tag{3}$$

взаимно независимые векторы которой $\mathbf{y}_i = \left\{ y_\ell^{(i)} \right\}_{\ell=1}^{M}$ образованы аддитивной смесью векторов собственного шума приемника и отражений от **МО** в M смежных интервалах зондирования из K смежных элементов дистанции.

Здесь $\mathbf{I}_M$ – единичная $M \times M$ **КМ** M-мерной пачки некоррелированных собственных шумов каналов приема с одинаковой (единичной) мощностью, η – относительная (по отношению к мощности этих шумов) мощность отражений от **МО** (**ОСШ**), $\boldsymbol{\rho} = \{ \rho_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{M}$, $\rho_{\ell\ell} = 1$, $\ell \in 1,M$ – нормированная **КМ** междупериодных флуктуаций отражений от **МО**, черта сверху и звездочка (*) – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения соответственно.

Б. По плотностям и функциям распределения исследуемой оценки мощности определяются и анализируются ее точностные характеристики (смещение, дисперсия, доверительные интервалы ошибок).

3. МП оценка мощности отражений от МО. А. Получим **МП** оценку $\hat{\eta}$ мощности η отражений от **МО** для случаев, когда:

1) отсчеты отражений некоррелированы ($\boldsymbol{\rho} = \mathbf{I}_M$) и имеют различную мощность $\eta_{\ell\ell}$, $\ell \in 1,M$ в каждом из M смежных интервалов зондирования;

2) отсчеты отражений некоррелированы ($\boldsymbol{\rho} = \mathbf{I}_M$) и имеют одинаковую мощность η в M смежных интервалах зондирования;

3) отсчеты отражений коррелированы и их нормированная **КМ** $\boldsymbol{\rho}$ известна;

4) отсчеты отражений коррелированы и их нормированная **КМ** $\boldsymbol{\rho}$ неизвестна.

Б. В рассматриваемом случае комплексных векторов отражений от **МО** по аналогии с [4, 5] нетрудно показать, что **МП** оценки неизвестных параметров **КМ** $\boldsymbol{\Phi}$ максимизируют целевую функцию

$$l(\boldsymbol{\Phi}) = K \cdot \ln\left|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\right| - tr\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{A}\right), \tag{4}$$

для которой система уравнений правдоподобия имеет вид

$$\frac{\partial\ l(\boldsymbol{\Phi})}{\partial\ \varphi_{\ell m}} = K \cdot \frac{\partial\ \ln\left|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\right|}{\partial\ \varphi_{\ell m}} - tr\left(\frac{\partial\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}}{\partial\ \varphi_{\ell m}} \cdot \mathbf{A}\right) = 0, \tag{5}$$

а дифференцирование проводится по неизвестным параметрам матрицы $\boldsymbol{\Phi}$. Здесь $|\mathbf{C}|$ – детерминант (определитель) квадратной матрицы $\mathbf{C}$.

Используя известные равенства [6, с. 124]

$$\frac{\partial\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}}{\partial\ \varphi_{\ell m}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}\right)' = -\boldsymbol{\Phi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}' \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1}, \qquad \left(\ln\left|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\right|\right)' = tr\left(\boldsymbol{\Phi} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}\right)'\right) = -tr\left(\boldsymbol{\Phi}' \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1}\right), \tag{6}$$

уравнения (5) можно переписать в виде

$$tr\left(\mathbf{B} \cdot \frac{\partial\ \boldsymbol{\Phi}}{\partial\ \varphi_{\ell m}}\right) = 0, \qquad \mathbf{B} = \{ b_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{M} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1} - K \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \mathbf{B}^{*}. \tag{7}$$

В. Пусть отсчеты отражений от **МО** некоррелированы, так что $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{I}_M$, и имеют различную мощность $\eta_{\ell\ell}$, $\ell \in 1,M$ в M смежных интервалах зондирования. В этом случае **КМ** $\boldsymbol{\Phi}$ (3), производные от нее по параметрам $\eta_{\ell\ell}$ и матрица, обратная **КМ**, равны

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}_M + \boldsymbol{\eta} = diag\{ 1 + \eta_{\ell\ell} \}_{\ell=1}^{M}, \qquad \frac{\partial\ \boldsymbol{\Phi}}{\partial\ \eta_{\ell\ell}} = \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_\ell^{*}, \qquad \boldsymbol{\Phi}^{-1} = diag\left\{ (1 + \eta_{\ell\ell})^{-1} \right\}_{\ell=1}^{M}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\eta} = diag\{ \eta_{\ell\ell} \}_{\ell=1}^{M}$ – диагональная матрица мощностей отсчетов отражений в M смежных интервалах зондирования, $\mathbf{e}_\ell$ – ℓ-й, $\ell \in 1,M$ столбец $M \times M$ единичной матрицы.

Система уравнений правдоподобия (7) с учетом (8) принимает вид

$$tr\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\ell\cdot\mathbf{e}_\ell^*\right)=\mathbf{e}_\ell^*\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\ell=0,\quad \ell\in 1,M\,, \tag{9}$$

откуда

$$\mathbf{e}_\ell^*\cdot\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Phi}^{-1}-K\cdot\mathbf{\Phi}^{-1}\right)\cdot\mathbf{e}_\ell=\left(1+\eta_{\ell\ell}\right)^{-2}\cdot\mathbf{e}_\ell^*\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\ell-K\cdot\left(1+\eta_{\ell\ell}\right)^{-1}=0\,, \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\hat{\eta}_{\ell\ell}=\frac{1}{K}\cdot a_{\ell\ell}-1,\quad a_{\ell\ell}=\mathbf{e}_\ell^*\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\ell,\quad \ell\in 1,M\,, \tag{11}$$

где $a_{\ell\ell}$ – (ℓ,ℓ) элемент матрицы $\mathbf{A}$ (2).

Г. Пусть отсчеты отражений от **МО** некоррелированы, так что $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{I}_M$, но имеют одинаковую относительную мощность η в M смежных интервалах зондирования. В этом случае **КМ** $\mathbf{\Phi}$ (3) и производная от нее по параметру η равны соответственно

$$\mathbf{\Phi}=(1+\eta)\cdot\mathbf{I}_M,\qquad \frac{\partial\,\mathbf{\Phi}}{\partial\,\eta}=\mathbf{I}_M\,. \tag{12}$$

Уравнение правдоподобия (7) с учетом (12) принимает вид

$$tr(\mathbf{B})=tr\left((1+\eta)^{-2}\cdot\mathbf{A}-K\cdot(1+\eta)^{-1}\cdot\mathbf{I}_M\right)=(1+\eta)^{-2}\cdot tr(\mathbf{A})-M\cdot K\cdot(1+\eta)^{-1}=0\,, \tag{13}$$

откуда

$$\hat{\eta}=\frac{1}{M\cdot K}\cdot tr(\mathbf{A})-1=\frac{1}{M}\cdot tr\left(\hat{\mathbf{\Phi}}\right)-1=\frac{1}{M}\cdot\sum_{\ell=1}^{M}\hat{\eta}_{\ell\ell}\,. \tag{14}$$

Последняя оценка представляет собой среднее арифметическое оценок (11), что физически объясняется априорным равенством мощностей каждого из M отсчетов.

Д. Пусть отсчеты отражений от **МО** коррелированы и их нормированная **КМ** $\boldsymbol{\rho}$ известна. Эта задача подобна решенной в [5] для действительной симметричной **КМ** вида $\mathbf{\Phi}=\eta\cdot\boldsymbol{\rho}$, для которой **МП** оценкой неизвестного масштабного множителя η служит $\hat{\eta}=(M\cdot K)^{-1}\cdot tr\left(\boldsymbol{\rho}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right)$, где $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{A}$ – действительные симметричные матрицы.

В рассматриваемом случае **КМ** $\mathbf{\Phi}$ отражений от **МО** имеет вид (3), а производная от нее по параметру η равна

$$\frac{\partial\,\mathbf{\Phi}}{\partial\,\eta}=\boldsymbol{\rho}\,. \tag{15}$$

Эрмитова положительно определенная (э.п.о.) матрица $\boldsymbol{\rho}$ представима в виде

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{H}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{H}^*, \tag{16}$$

где $\mathbf{\Lambda}=diag\left\{\lambda_\ell\right\}_{\ell=1}^{M}$ – диагональная $M\times M$ матрица неотрицательных собственных чисел $\lambda_\ell\geq 0$, $\ell\in 1,M$ матрицы $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{H}$ – унитарная $M\times M$ матрица собственных векторов матрицы $\boldsymbol{\rho}$, удовлетворяющая равенству

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*=\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{H}=\mathbf{I}_M\,. \tag{17}$$

С учетом (16), (17) матрица, обратная **КМ** $\mathbf{\Phi}$, равна

$$\mathbf{\Phi}^{-1}=\left(\mathbf{I}_M+\eta\cdot\boldsymbol{\rho}\right)^{-1}=\mathbf{H}^{-*}\cdot\left(\mathbf{I}_M+\eta\cdot\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\cdot\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{H}\cdot\left(\mathbf{I}_M+\eta\cdot\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\cdot\mathbf{H}^*\,. \tag{18}$$

Система уравнений правдоподобия (7) с учетом (15), (18) принимает вид

$$\sum_{\ell=1}^{M}\frac{\lambda_\ell}{\left(1+\eta\cdot\lambda_\ell\right)^2}\cdot\mathbf{h}_\ell^*\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{h}_\ell-K\cdot\sum_{\ell=1}^{M}\frac{\lambda_\ell}{1+\eta\cdot\lambda_\ell}=0,\qquad \mathbf{h}_\ell=\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}_\ell,\ \ \ell\in 1,M\,, \tag{19}$$

а **МП** оценка мощности должна отыскиваться как ее решение относительно η.

Е. Пусть отсчеты отражений от **МО** коррелированы, но их нормированная **КМ** $\boldsymbol{\rho}$ неизвестна. В этом случае производные от **КМ** (3) по параметрам η и $\rho_{\ell m}$, $\ell,m\in 1,M$

$$\frac{\partial\,\mathbf{\Phi}}{\partial\,\eta}=\boldsymbol{\rho},\qquad \frac{\partial\,\mathbf{\Phi}}{\partial\,\rho_{\ell m}^{(\mathrm{Re})}}=\eta\cdot\left(\mathbf{e}_\ell\cdot\mathbf{e}_m^*+\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{e}_\ell^*\right),\qquad \frac{\partial\,\mathbf{\Phi}}{\partial\,\rho_{\ell m}^{(\mathrm{Im})}}=j\cdot\eta\cdot\left(\mathbf{e}_\ell\cdot\mathbf{e}_m^*-\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{e}_\ell^*\right), \tag{20}$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

После несложных преобразований система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{cases} tr(\mathbf{B}) = 0, \\ b_{\ell m} = 0, \quad \ell \neq m. \end{cases} \qquad (21)$$

В частном случае $M = 2$ ее решения

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2 \cdot K} \cdot tr(\mathbf{A}) - 1, \qquad \hat{\rho}_{21} = \frac{a_{21}}{K \cdot \hat{\eta}}, \qquad \mathbf{A} = \{ a_{\ell m} \}_{\ell,m=1}^{2} \qquad (22)$$

представляют собой **МП** оценки средней мощности η и коэффициента корреляции ρ_{21} отражений от **МО** в двух смежных интервалах зондирования.

4. Обсуждение результатов. Как следует из проведенного анализа, используемая на практике оценка средней мощности отсчетов отражений от **МО** в реальных условиях коррелированных отражений не является оценкой **МП**. Предусматриваемое в ней усреднение оценок мощностей каждой из компонент увеличивает точность оценивания в меньшей степени, чем при их взаимной некоррелированности, когда она является оценкой **МП**. Эта точность увеличивается по мере уменьшения коррелированности отсчетов отражений от **МО** и их относительной интенсивности. В последнем случае возрастает декоррелирующее влияние собственного шума, приближающее используемую оценку к оценке **МП**.

Количественному анализу и конкретизации этих эффектов посвящено остальное содержание доклада. Отыскиваются законы (плотности и функции) распределения относительной ошибки $\hat{\varepsilon} = \hat{p}/\eta - 1$ оценки $\hat{p}$ (1) средней мощности смеси отражений от **МО** и шума приемника. На их основе определяются ее точностные характеристики, обосновываются требования к объему обучающей выборки, необходимому для оценивания мощности с ошибкой, не превосходящей ± 1 дБ [2]. Разрабатываются рекуррентные алгоритмы и схемы формирования оценки средней мощности **МО**.

Литература.

1. Довиак Р.Дж., Зрнич Д.С. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1988. 512 с.

2. Автоматизированные метеорологические радиолокационные комплексы "Метеоячейка". Отв. ред. Бочарников Н.В., Солонин А.С. СПб.: Гидрометеоиздат, 2007. 238 с.

3. Frehlich R. Performance of maximum likelihood estimators of mean power and Doppler velocity with a priori knowledge of spectral width // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. Nov. 1999. Vol. 16, № 11. PP. 1702 – 1709.

4. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.

5. Берг Дж.П., Люнбергер Д.Г., Венгер Д.Л. Оценивание ковариационных матриц с заданной структурой // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 63 – 77.

6. Журавлев А.К., Лукошкин А.П., Поддубный С.С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 240 с.