

## КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ И БАЗИСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ СТРУКТУРЫ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

### Введение

Применение математического аппарата тензорного анализа к исследованию телекоммуникационных сетей (ТКС) определяет необходимость предварительной геометризации структурно-функционального описания последних. Процесс геометризации подразумевает следующие действия [1, 2]: определение пространства, связанного со структурой сети, выявление множества возможных в этом пространстве систем координат (СК, или базисов), определение правил преобразования различных базисов между собой, выделение ко- и контравариантных геометрических объектов, моделирующих функциональные характеристики изучаемой системы, определение формул преобразования координат этих объектов при переходе от одной СК к другой. Все перечисленное является обязательными составляющими тензорного анализа и в итоге определяет адекватность и достоверность его применения к решению телекоммуникационных задач. Статья посвящена первым этапам геометризации – определению пространства, связанного со структурой сети, и его возможных базисов. Каждый базис, будучи некоторой точкой зрения на систему, выявляет определенные особенности ее структурно-функционального построения. Поэтому с целью получения более полного описания ТКС приходится использовать несколько базисов, количество и тип которых зависят от конкретной задачи. В литературе описаны различные подходы к способу формирования как самого пространства, так и процессу выделения его базисов [3 – 6]. Исходя из того, что важно заранее определить весь спектр возможных СК и выявляемых ими особенностей с тем, чтобы в процессе решения выбрать из них наиболее подходящую, возникает необходимость в обобщении и классификации пространств и базисов, используемых при геометрическом описании структуры ТКС.

### Типы структурных конструкций сети и их множества

В тензорном анализе сетей, основы которого предложены американским ученым Г. Кроном [3], предполагается рассматривать все процессы как протекающие в дискретном пространстве, вводимом в ходе описания структуры моделируемой системы или объекта одно- или многомерным симплициальным комплексом. Наиболее проработанным в настоящее время является раздел тензорного анализа сетей, оперирующий одномерными симплициальными представлениями, т.н. одномерными сетями, которые по используемой терминологии и описанию во многом аналогичны обычному графовому (аналог графа). Традиционно одномерную сеть  $S$  (по аналогии с теории графов) можно представить как совокупность двух множеств: конечного множества  $U = \{u_i, i = \overline{1, m}\}$  нульмерных симплексов – узлов сети (ее маршрутизаторы и коммутаторы) и конечного множества  $V = \{v_i, i = \overline{1, n}\}$  одномерных симплексов – ветвей сети (ее тракты передачи). На множестве  $U$  выделяются несколько типов узлов. Так *полюсами* сети называются ее узлы, выступающие в рассматриваемом случае в роли конечных адресатов. Причем, один из полюсов сети, как правило узел-отправитель, выбирается в качестве т.н. *опорного* узла. В рамках такого подхода узлы и ветви могут трактоваться как простейшие структурные единицы сети. Однако представление в виде  $S = (U, V)$  не является единственным возможным, так известны примеры описания сети уже в виде совокупности других (более сложных) конструкций, которые условно могут быть разделены на три типа: путей  $r$ , разрезов  $\omega$  и деревьев  $\xi$ .

Понятие *пути* в рамках тензорного анализа сетей несколько отличается от пути на графе и определяется как конечная последовательность ветвей, при этом никаких дополнительных ус-

ловий на различие входящих в него ветвей и узлов не накладывается. В такой трактовке путь в одномерной сети совпадает с понятием маршрута в теории графов [4]. Примерами путей являются упорядоченные множества – последовательности  $\{v_2, v_3, v_4\}$  и  $\{v_1, v_3, v_2, v_1\}$  (рис. 1, а). Разновидности путей, у которых конечные узлы совпадают, называются *контурами* ( $\pi$ ) или *замкнутыми путями*. Например, путь  $\{v_1, v_3, v_2\}$  как часть упомянутого выше пути  $\{v_1, v_3, v_2, v_1\}$  представляет собой контур. Путь, в котором начальный и конечный узлы не совпадают, назовем *междуузловым путем*; его примером является последовательность  $\{v_2, v_5, v_4\}$  (рис. 1, а). Если при этом начальным и конечным узлами являются полюса сети, а каждый внутренний (неполюсный) узел встречается только один раз, как например, в последовательности  $\{v_1, v_4\}$ , такой междуузловой путь называется *междуполюсным* (МПП) или  $\gamma$ -путем.

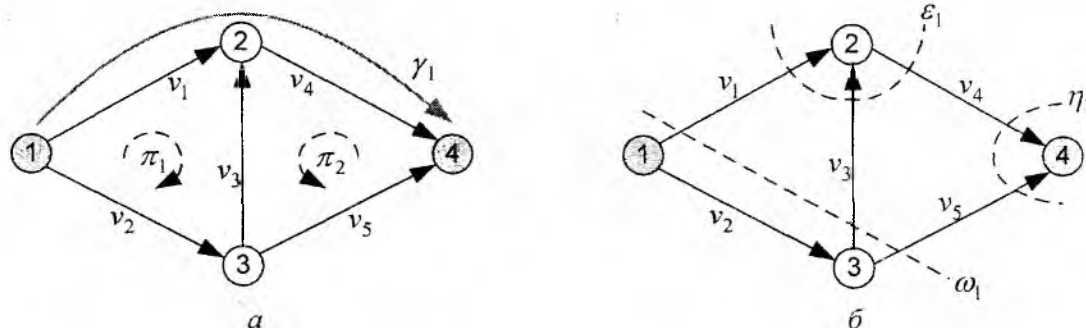


Рис. 1

Вторую группу возможных для сети  $S$  конструкций ее одномерных симплексов образуют *разрезающие множества* и *разрезы*  $\omega$ . Разрезающим множеством сети является множество ветвей, удаление которых разделяет сеть, т.е. сеть становится несвязной. Разновидностью разрезающего множества является *разрез*  $\omega$ , который представляет собой минимальное множество ветвей, удаление которых из связной сети приводит к образованию двух несвязанных между собой подсетей. Примерами разрезов являются множества ветвей  $\{v_1, v_3, v_5\}$ ,  $\{v_1, v_3, v_4\}$  и  $\{v_5, v_4\}$  (рис. 1, б).

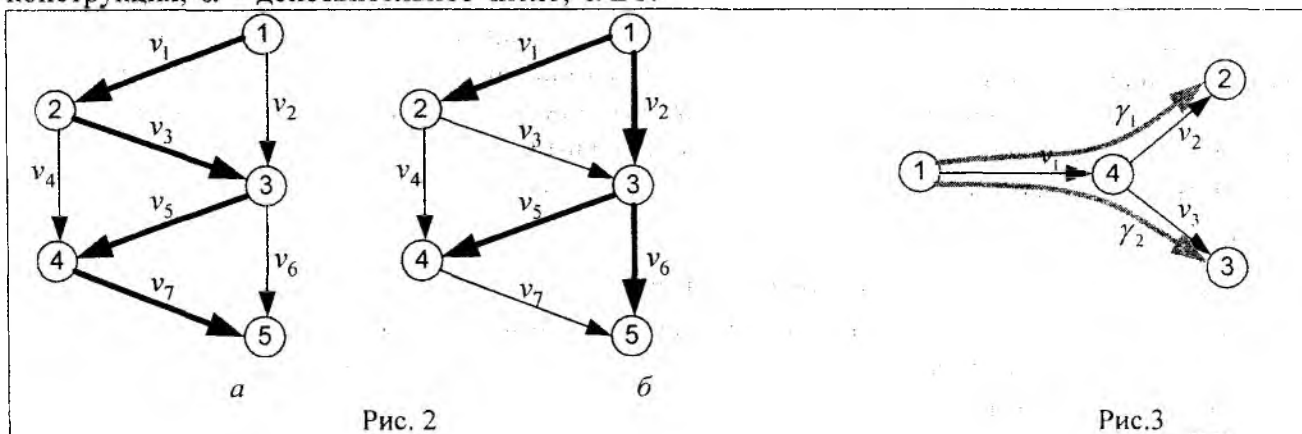
Множество  $\{v_5, v_4\}$  представляет собой частный случай разреза – т.н. *центральный разрез*, при помощи которого в рамках тензорного анализа сетей задаются узловые пары. Формально *узловая пара*  $\eta$  может представляться двояко: с одной стороны, это множество из двух различных узлов связной сети, один из которых является опорным, а с другой, она всецело определяется множеством инцидентных ко второму узлу ветвей. На множестве узловых пар, в свою очередь, можно выделить подмножество *полюсных* и *внутренних* узловых пар, причем полюсные узловые пары образованы непосредственно полюсами сети, а внутренние – опорным узлом и произвольным узлом, не являющимся полюсом.

Задаваемая через множество инцидентных ко второму (неполюсному) узлу ветвей внутренняя узловая пара представляет собой частный случай более общей конструкции – *внутреннего разреза*  $\varepsilon$ . Под внутренним разрезом (или в дальнейшем  $\varepsilon$ -разрезом) связной сети  $S$  с заданной парой полюсов будем понимать такое множество ветвей, удаление которых из сети  $S$  приводит к ее разделению на две подсети, одна из которых обязательно содержит оба полюса сети  $S$ . Примером  $\varepsilon$ -разреза для сети (рис. 1, б) является уже упомянутое выше множество  $\{v_1, v_3, v_4\}$ .

Кроме всевозможных путей и разрезов для сети  $S$  можно выделить еще одну группу конструкций – подсети *древовидной* структуры. Основная особенность подобных структур заключается в отсутствии в них контуров. Среди этой группы отдельно выделяются т.н. *остовые деревья*  $\xi$  – деревья, связывающее все узлы сети. На рис. 2 приведены примеры двух остовых деревьев для одной и той же сети. Заметим, что дерево (рис. 2, а) является одновре-

менно и путем, и разрезом, в то время как дерево (рис. 2, б) не может быть отнесено ни к одной из этих конструкций.

Для перечисленных конструкций, возможных для заданной сети  $S$ , определим операцию сложения «+». В теории графов для сложения различных структурных подсетей используется операция кольцевой суммы  $\oplus$  или суммы по модулю 2. Однако определенная таким образом операция сложения не учитывает функциональные особенности телекоммуникационных систем. Так, в рамках ТКС один и тот же тракт передачи может использоваться одновременно несколькими потоками. Если связать отдельный поток с некоторой сетевой конструкцией, отражающей его распределение по сети, получаем, что одна и та же ветвь, которая присутствует одновременно в нескольких из них, должна быть учтена в сумме этих конструкций несколько раз. Например, в сети (рис. 3) из узла 1 передаются два различных потока, адресованные узлам 2 и 3, при этом задействованы пути  $\gamma_1 = \{v_1, v_2\}$  и  $\gamma_2 = \{v_1, v_3\}$ . Тогда результирующей конструкцией, отражающей распределение двух потоков одновременно, будет сумма  $\gamma_1 + \gamma_2$  двух путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 = \{v_1, v_2\} + \{v_1, v_3\}$ , в которой один начальный узел, а ветвь  $v_1$  фигурирует два раза. Таким образом, тот факт, что в разных конструкциях по одной и той же ветви в общем случае могут протекать различные потоки, не позволяет использовать при сложении этих конструкций алгебру по модулю 2 ( $1+1=0$ ) и определяет использование обычных правил сложения ( $1+1=2$ ). Другая функциональная особенность телекоммуникационных систем, связанная с частичным (неполным) использованием сетевых трактов в процессе передачи информационных потоков, определяет необходимость дополнения множества уже введенных конструкций множеством их «долей» вида  $\alpha x$ , где  $x$  – любая конструкция,  $\alpha$  – действительное число,  $\alpha \leq 1$ .



Таким образом, все возможные для данной сети  $S$  сетевые конструкции одного типа, дополненные их «долями» и суммами, не приводящими к изменению типа, образуют следующие множества: совокупность всех возможных путей, их долей и сумм образует множество путей  $W_r^S$ ; совокупность всех возможных разрезов, их долей и сумм образует множество разрезов  $W_\omega^S$ ; совокупность всех возможных остовых деревьев и их долей образует множество деревьев  $W_\xi^S$ . При этом подмножеством множества  $W_r^S$  является множество контуров  $W_\pi^S$ , образованное совокупностью всех возможных контуров, их долей и сумм, а подмножеством  $W_\omega^S$  является множество внутренних разрезов  $W_\varepsilon^S$ , образованное совокупностью всех возможных  $\varepsilon$ -разрезов, их долей и сумм. Совокупность множеств путей  $W_r^S$ , разрезов  $W_\omega^S$ , деревьев  $W_\xi^S$  сети  $S$ , включая пустое множество  $\emptyset$ , образует множество  $W^S$  всевозможных конструкций данной сети, построенное уже с учетом функциональных особенностей.

стей ТКС. Заметим, что множество  $W^S$  значительно отличается от множества всех подсетей, традиционно связываемого с сетью, в рамках теории графов.

### Векторное пространство, связанное со структурой сети $S$

Имея множество всевозможных конструкций сети  $S$ , можно сопоставить этой сети линейное (векторное) пространство. Так, множество  $W^S$  может рассматриваться как векторное пространство над полем действительных чисел  $R$  с обычными операциями сложения «+» и умножения «·», если выполняются следующие аксиомы [4].

1. Множество  $W^S$  по отношению к операции сложения «+» является абелевой группой.
2. Для любых элементов  $\alpha$  и  $\beta$ , принадлежащих  $R$ , и любых  $a$  и  $c$  из  $W^S$  имеет место операция произведения «·», причем умножение на число ассоциативно и  $1 \cdot a = a$  для  $\forall a \in W^S$ .
3. Операции сложения и умножения связаны между собой следующими соотношениями  $\alpha \cdot (a + c) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot c)$  и  $(\alpha + \beta) \cdot c = \alpha \cdot c + \beta \cdot c$ .

Проверка показывает, что множество  $W^S$  действительно является абелевой группой. Это множество было построено таким образом, что заведомо содержит все возможные суммы сетевых конструкций, а значит, является замкнутым относительно операции сложения. Кроме того,  $W^S$  включает в себя пустое множество  $\emptyset$ , являющееся нулем группы. Наличие обратных элементов обусловлено изменением направления сетевой конструкции на противоположное, например для пути обратным элементом будет последовательность тех же ветвей, но взятых в обратном порядке, для отдельной ветви  $v$  обратной является эта же ветвь, но с противоположной ориентацией, т.е.  $\bar{v} = -v$ . Нетрудно убедиться в ассоциативности и коммутативности операции сложения, а также в выполнении других аксиом векторного пространства, связанных с операцией умножения.

Таким образом, сети  $S$  можно сопоставить векторное пространство  $W^S$ , построенное на одноименном множестве  $W^S$ . Размерность этого пространства определяется числом трактов передачи в сети, т.е.  $\dim(W^S) = n$ . Согласно общим свойствам векторных пространств каждый элемент  $w$  пространства  $W^S$ ,  $w \in W^S$  может быть представлен в его базисе  $B^S$  как

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \quad (1)$$

где  $b_i$  –  $i$ -й элемент базиса  $B^S$ ;  $\alpha_i$  –  $i$ -я координата элемента  $w$  в СК  $B^S$ .

В качестве базиса пространства  $W^S$  в частном случае может выступать множество всех ветвей  $V$  сети  $S$ , образуя так называемую систему координат ветвей  $B^S$ , в которой  $b_i = v_i$  (1). Например, указанные на рис. 1 конструкции могут быть соответственно записаны как  $\pi_1 = v_1 - v_2 - v_3$ ,  $\pi_2 = v_5 - v_3 - v_4$ ,  $\gamma_1 = v_1 + v_4$ ,  $\omega_1 = v_1 + v_3 + v_5$ ,  $\eta_1 = v_4 + v_5$ ,  $\varepsilon_1 = v_1 + v_3 - v_4$ . В данном примере все координаты  $\alpha$  принимают значения 1, 0 или -1, причем положительное значение координаты свидетельствует о совпадении ориентации ветви и конструкции, а отрицательное – о несовпадении.

### Подпространства векторного пространства сети

В рамках векторного пространства  $W^S$  можно выделить ряд подпространств более низкой размерности. Известно, что подпространство может быть образовано подмножеством, для которого выполняются все аксиомы векторного пространства [7]. Как показала проверка выполнения перечисленных выше аксиом для подмножеств  $W_r^S$ ,  $W_\pi^S$ ,  $W_\omega^S$ ,  $W_\varepsilon^S$  и  $W_\eta^S$ , наиболее кри-

тичным среди них является требование замкнутости множества относительно операции сложения, входящее в определение абелевой группы. Можно показать, что все из перечисленных подмножеств, за исключением подмножества деревьев  $W_{\xi}^S$ , действительно являются замкнутыми относительно операции сложения, т.е. образуют подпространства векторного пространства  $W^S$ . Причем, между подпространствами путей  $W_r^S$ , контуров  $W_{\pi}^S$ , разрезов  $W_{\omega}^S$  и внутренних разрезов  $W_{\varepsilon}^S$  выполняются соотношения:

- 1)  $W_{\pi}^S \subset W_r^S \subset W^S$ ,  $\dim(W_{\pi}^S) = \mu$ ,  $\dim(W_r^S) = \mu + 1$ , где  $\mu$  – цикломатическое число сети,  $\mu = n - m + 1$ ;
- 2)  $W_{\varepsilon}^S \subset W_{\omega}^S \subset W^S$ ,  $\dim(W_{\varepsilon}^S) = \rho - 1$ ,  $\dim(W_{\omega}^S) = \rho$ , где  $\rho$  – ранг сети,  $\rho = n - 1$ ;
- 3)  $W_{\pi}^S \cap W_{\varepsilon}^S = \emptyset$ ,  $W_{\pi}^S \cap W_{\omega}^S = \emptyset$ ,  $W_{\varepsilon}^S \cap W_r^S = \emptyset$ ;
- 4)  $W_r^S \cap W_{\omega}^S \neq \emptyset$ ,  $\dim(W_r^S \cap W_{\omega}^S) = 1$ ;
- 5) подпространства  $W_{\pi}^S$  и  $W_{\omega}^S$ , как показано в теории графов, являются ортогональными.

Можно доказать, подпространства  $W_r^S$  и  $W_{\varepsilon}^S$  также являются ортогональными.

В рамках каждого из подпространства может быть введен свой базис соответствующей размерности, определяющий через линейную комбинацию базисных элементов любой другой элемент этого подпространства. При этом существуют некоторые особенности. Так, базис  $B_{\omega}^S$  пространства разрезов  $W_{\omega}^S$  сети  $S$  в частном случае может быть образован только центральными разрезами  $\eta$ , задающими множество узловых пар сети, выделяя тем самым для сети так называемую систему координат узловых пар  $B_{\eta}^S$ . Базис  $(\mu + 1)$ -мерного пространства путей  $W_r^S$  в случае неразделимых сетей весь может быть сформирован только из межполюсных путей (базис  $B_{\gamma}^S$ ). Однако для разделимых сетей число линейно независимых МПП несколько меньше и составляет  $n - m + 2 - c$ , где  $c$  – число независимых контуров в разделимых подсетях, удаление которых не удаляет из сети ни одного из его полюсов [8]. В таких случаях базис пространства  $W_r^S$  будет состоять из  $n - m + 2 - c$  межполюсных путей и  $c$  путей, не являющихся МПП, а представляющих собой, например, контуры (базис  $B_{\eta}^S$ ).

### Базисы пространства, связанного со структурой сети

Каждое базисное множество  $n$ -мерного векторного пространства  $W^S$ , связанного с сетью  $S$ , представляет собой набор  $n$  линейно независимых структурных единиц, посредством которых может быть выражена как сеть в целом, так и любая ее конструкция. Исходя из описанной структуры пространства  $W^S$ , его подмножеств и подпространств можно предложить следующую классификацию базисов  $B^S = \{b_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так, в зависимости от типов базисных элементов  $b_i$  можно выделить три типа базисов: неортогональный, ортогональный и смешанный (рис. 4). Неортогональный базис объединяет в себе базисные элементы одного типа. Поскольку все описанные выше подпространства имеют размерности, меньшие  $n$ , принадлежащие им элементы не могут образовывать базис данного типа. Примерами неортогональных базисов являются СК ветвей  $B_v^S$  и деревьев  $B_{\xi}^S$ . Первая образована множеством  $V$  отдельных ветвей сети, а вторая – множеством ее линейно независимых остовых деревьев. В отличие от неортогонального базисы ортогональный и смешанный образованы разнотипными элементами. Причем в ортогональной СК базисные элементы принадлежат двум обязательно ортогональным подпространствам. Эти системы координат могут быть получены путем простого объединения базисов двух ортогональных подпространств. Смешанный базис

представляет собой более общий случай и образован разнотипными элементами, принадлежащими более чем двум подмножествам. В состав такого базиса могут одновременно входить ветви, деревья, пути и разрезы.

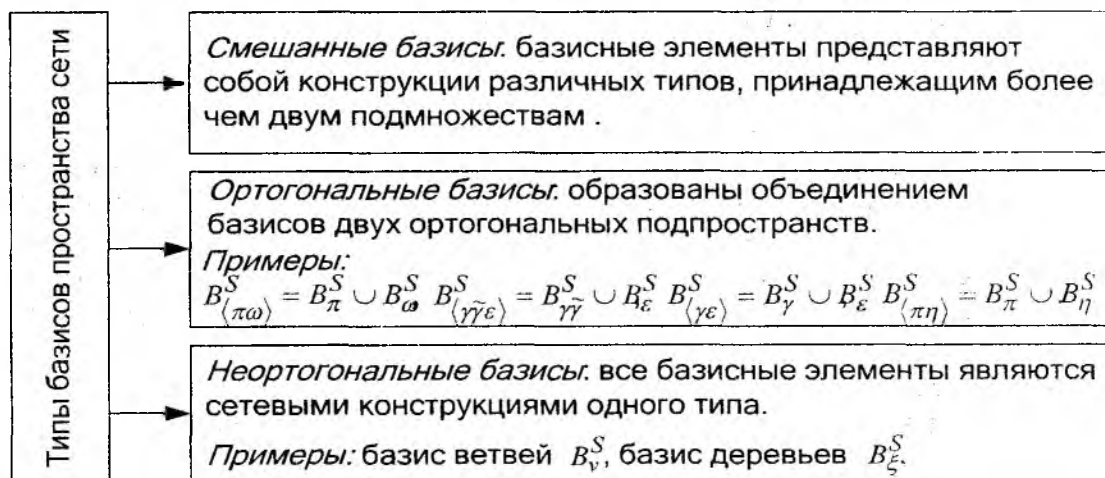


Рис. 4

## Выводы

Моделирование ТКС одномерной сетью  $S$  позволяет связать с ней  $n$ -мерное векторное пространство  $W^S$  над полем действительных чисел. В рамках данного пространства можно выделить четыре подпространства более низкой размерности: путей, контуров, разрезов и внутренних разрезов. Среди перечисленных выделяются две пары ортогональных пространств: путей и внутренних разрезов, контуров и разрезов. Исходя из структуры пространства  $W^S$  все его базисы можно разделить на три типа: неортогональные, ортогональные и смешанные. Каждый из базисов играет свою роль в тензорном анализе сетей. Причем наиболее часто исходные данные задаются как координаты в ортогональных базисах, в то время как решение предпочтительно получить в неортогональном или смешанном. Так, для решения задач многоадресной рассылки (multicast) более актуальным является описание сети в базисе остовых деревьев, а для одноадресной рассылки (unicast) предпочтителен базис ветвей. Смешанный базис в этом смысле наиболее универсален, так как может одновременно указывать на исходные данные и искомые координаты.

**Список литературы:** 1. Пасечников И.И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей. М.: Машиностроение-1, 2004. 216 с. 2. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. М.: Радио и связь, 1985. 152 с. 3. Крон Г. Тензорный анализ сетей. М.: Сов. радио, 1978. 719 с. 4. Лемешко А.В. Тензорная модель многопутевой маршрутизации агрегированных потоков с резервированием сетевых ресурсов, представленная в пространстве с кривизной // Праці УНДІРТ. 2004. Вип. №4 (40). 5. Евсеева О.Ю. Тензорная модель гарантированного обеспечения нормированных показателей качества обслуживания в ТКС // Наукові записки УНДІЗ. 2008. №3(5). С. 71-81. 6. Лемешко А.В., Евсеева О.Ю., Дробот О.А. Методика выбора независимых путей с определением их количества при решении задач многопутевой маршрутизации // Праці УНДІРТ. 2006. №4(48). С. 69-74. 7. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 455 с. 8. Басакер Р., Саати Е. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1973. 368 с.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.09.2009