УДК 517.927.4 : 519.624.2 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.170

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Василишин К.В.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Ламтюгова С.М.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: kostiantyn.vasylyshyn@nure.ua

A one-dimensional Dirichlet problem for the heat equation with an exponential heat conductivity coefficient and a heat sources function is considered. By replacing the unknown function, the problem under consideration was reduced to a problem for a semilinear differential equation, which was analyzed by methods of the operators theory in semi-ordered Banach spaces. Conditions for the existence of a single positive solution are obtained. The results of a computational experiment are presented.

Розглядатимемо задачу знаходження додатного розв’язку нелінійної крайової задачі вигляду:

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{T}\frac{dT}{dx}\right)=\lambda e^{\sigma T},\ 0<x<l, \tag{1}$$

$$T(0)=T(l)=0. \tag{2}$$

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу теплопровідності у випадку, коли коефіцієнт теплопровідності експоненціально залежить від температури і коли на $(0,l)$ наявні джерела тепловиділення, розподілені за експоненціальним законом $f(T)=\lambda e^{\sigma T}$ (параметр λ характеризує їх потужність).

У задачі (1), (2) зробимо заміну $T=\ln\theta$, де $\theta(x)$ – нова невідома функція. Тоді для функції θ отримаємо крайову задачу:

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2}=\lambda\theta^{\sigma},\ 0<x<l, \tag{3}$$

$$\theta(0)=\theta(l)=1. \tag{4}$$

Крайові умови (4) не є однорідними, тому робимо заміну $\theta=1+u$, де u – нова невідома функція, і отримуємо крайову задачу:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda(1+u)^{\sigma},\ 0<x<l, \tag{5}$$

$$u(0)=u(l)=0. \tag{6}$$

Для розв’язання задачі (5), (6) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [1 – 4].

Тоді задача (5), (6) буде еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x, s)(1 + u(s))^{\sigma} ds. \qquad (7)$$

Рівняння (7) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0, l]$ неперервних на відрізку $[0, l]$ функцій. У просторі $C[0, l]$ введемо напівупорядкованість за допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій.

Узагальненим розв'язком задачі (5), (6) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком рівняння (7). Тоді розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1), (2) вважатимемо функцію $T^* = \ln(1 + u^*)$.

У конусі $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій з $C[0, l]$ виділимо інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ умовами:

$$\lambda \int_0^l G(x, s)(1 + v_0(s))^{\sigma} ds \geq v_0(x) \text{ для всіх } x \in [0, l],$$

$$\lambda \int_0^l G(x, s)(1 + w_0(s))^{\sigma} ds \leq w_0(x) \text{ для всіх } x \in [0, l].$$

Оскільки $F(0) = 1 + \lambda > 0$, то конусний відрізок, сильно інваріантний для оператора $T(u)(x) = \lambda \int_0^l G(x, s)(1 + u(s))^{\sigma} ds$, можна шукати у вигляді $< v_0, w_0 >=< 0, \beta >$.

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^l G(x, s)(1 + v^{(k)}(s))^{\sigma} ds, \; k = 0, 1, 2, ..., \qquad (8)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^l G(x, s)(1 + w^{(k)}(s))^{\sigma} ds, \; k = 0, 1, 2, ..., \qquad (9)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x), \; w^{(0)}(x) = w_0(x). \qquad (10)$$

Можна довести, що за умови $0 < \sigma < 1$ ітераційний процес (8)–(10) збігається у нормі простору $C[0, l]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (5), (6), причому має місце ланцюг нерівностей:

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq ... \leq v^{(k)} \leq ... \leq u^* \leq ... \leq w^{(k)} \leq ... \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0. \qquad (11)$$

Нерівності (11) характеризують ітераційний процес (8) – (10) як метод двобічних наближень. Перевагою цього методу є те, що на кожній k-й ітерації для наближеного розв'язку $u^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x))$ матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки: $\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| w^{(k)} - v^{(k)} \right\|$.

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{x \in [0, l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$. Тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$, а отже, $T^*(x) \approx \ln(1 + u^{(k)}(x))$.

Проведено обчислювальний експеримент для задачі (5), (6) у якій покладемо $\lambda = 2$ і $\sigma = \dfrac{2}{3}$. Умовою збіжності метода знаходження додатного розв'язку є нерівність $0 < \sigma < 1$. Тепер можемо знайти параметр β $[1, 4]$, та побудувати інваріантний конусний відрізок $< 0, \beta >$. Отримаємо, що $\beta = 0,2974$. Запустимо ітераційний процес вигляду (8) – (10) і задамо точність $\varepsilon = 10^{-4}$.

Ітераційний процес зійшовся із заданою точністю до розв'язку вихідної задачі за 4 ітерації. Результати ітерацій наведено на рис. 1.

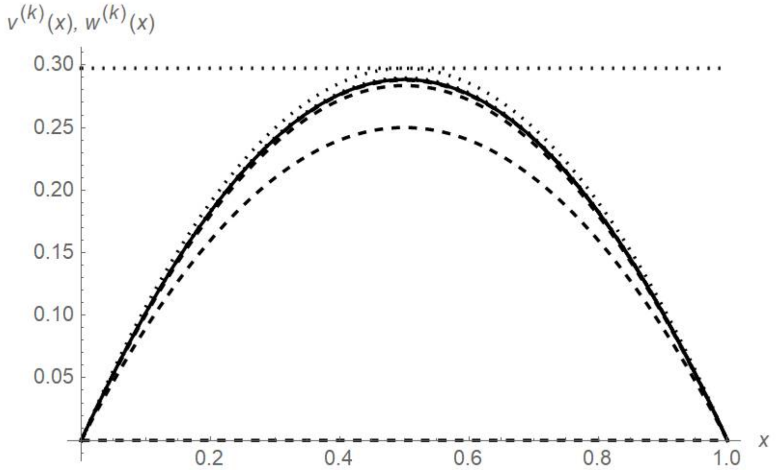

Рисунок 1 – Графіки $v^{(k)}(x)$ і $w^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Список використаних джерел:

1. Ламтюгова С. М., Поляков А. О., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження методами двосторонніх наближень крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2023. № 1. С. 142–148. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.21

2. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57–66. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-1-6

3. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2021. № 3 (58). С. 26–41. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-3-3

4. Gybkina N., Sidorov M., Vasylyshyn K. Application of two-sided approximations method to solution of first boundary value problem for one-dimensional nonlinear heat conductivity equation. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2021. № 4. С. 115–127. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.09