

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ ФИЗИКИ**

Часть 2

Харьков 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям по курсу физики
(часть 2)
для студентов-иностранцев всех направлений бакалаврата
дневной формы обучения

Утверждено
кафедрой физики
Протокол №8 от 14.05.2019

Харьков 2019

Методичні вказівки до практичних занять курсу фізики (Ч.2) для студентів-іноземців усіх напрямків бакалаврата денної форми навчання / Упорядн.: А.І.Рибалка, О.М.Коваленко, В.О.Стороженко, Р.П.Орел, А.І.Козар, С.М.Мешков, В.В.Калінін, А.А.Онищенко, О.В.Мягкий, С.Г.Кравченко– Харків: ХНУРЕ, 2019. – 140 с. – Рос. мовою.

Упорядники: А.І.Рибалка,
О.М.Коваленко,
В.О.Стороженко,
Р.П.Орел,
А.І.Козар,
С.М.Мешков,
В.В.Калінін,
А.А.Онищенко,
О.В.Мягкий,
С.Г.Кравченко

Рецензент О.М.Юнакова, канд. фіз.-мат. наук, пров. наук. співробітник фізичного факультету ХНУ ім. В.Н.Каразіна.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1	Магнитное поле постоянного тока	5
2	Электромагнитная индукция. Система уравнений Максвелла	23
3	Электромагнитные колебания и волны.....	39
4	Волновая оптика.....	55
5	Равновесное тепловое излучение.....	75
6	Квантовые свойства излучения.....	86
7	Теория Бора атома водорода. Постулаты Бора	98
8	Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.....	107
9	Волновая функция. Уравнение Шредингера.....	118
10	Атом водорода с точки зрения квантовой механики. Принцип Паули. Электронные слои сложных атомов.....	132
11	Рентгеновское излучение. Магнитные свойства атомов	143
12	Строение атомных ядер. Ядерные реакции. Радиоактивность	158
	Рекомендуемая литература.....	173

ВВЕДЕНИЕ

Умение решать задачи – один из основных критериев усвоения курса физики. Оно свидетельствует о способности студента к анализу физических процессов и явлений, о понимании основных физических идей, возможности находить связь между отдельными явлениями.

Цель предлагаемых методических указаний – помочь студентам при подготовке к практическим занятиям по физике.

Данные указания является заключительной (второй) частью методических указаний к практическим занятиям по курсу общей физики и включают 12 тем, соответствующих рабочей программе курса физики.

Методический материал к каждому практическому занятию содержит краткие теоретические сведения по теме занятия (основные законы и формулы). Для каждой темы приведены контрольные вопросы и задания, которые можно использовать для самопроверки и экспресс-контроля на занятиях.

Методические указания содержат типовые задачи по каждой теме и примеры их решения, а также задачи, которые рекомендованы для самостоятельной работы студентов.

1 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1 Цель занятия

Пользуясь основными законами магнетизма, научиться решать задачи по расчету количественных характеристик магнитного поля, действия магнитного поля на токи и заряженные частицы.

1.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

При подготовке к занятию необходимо изучить теоретический материал, приведенный в конспекте лекций и учебнике [1, гл. 5, 3, §39–50, 72–76; 5, гл. 5.1]. Обратите внимание на содержание и пределы применения основных законов и формул этого раздела.

1.3 Основные законы и формулы

1. Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника длиной dl с током, μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость (в вакууме $\mu = 1$); $d\vec{l}$ – вектор, равный по модулю dl проводника и совпадает по направлению с током; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; I – сила тока.

Модуль вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

2. Связь магнитной индукции \vec{B} с напряженностью \vec{H} магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

В вакууме ($\mu = 1$)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

3. Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R},$$

где R – радиус кругового витка.

4. Магнитная индукция в любой точке на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

где h – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

5. Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R},$$

где R – расстояние от оси проводника.

6. Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

где обозначения I , r_0 , φ_1 , φ_2 понятны из рис. 1.1 (вектор \vec{B} направлен перпендикулярно плоскости рисунка).

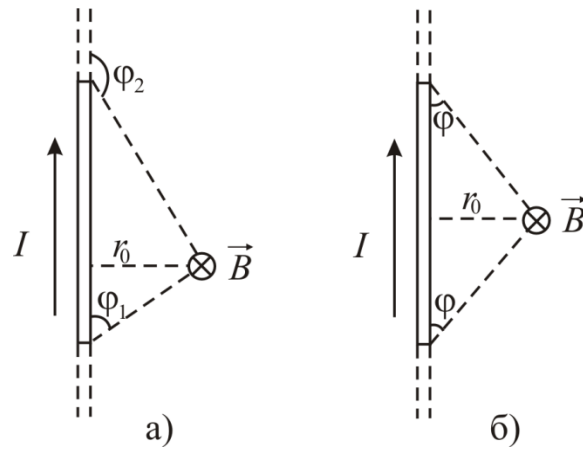


Рисунок 1.1

При симметричном расположении концов проводника относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис. 1.1, б)

$$-\cos \varphi_2 = \cos \varphi_1 = \cos \varphi.$$

Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos \varphi.$$

7. Магнитная индукция поля внутри соленоида

$$B = \frac{\mu_0 \mu N I}{l} = \mu_0 \mu n I,$$

где N – количество витков соленоида; l – длина соленоида; I – сила тока в одном витке, n – плотность намотки, то есть количество витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

8. Принцип суперпозиции магнитных полей

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i,$$

где \vec{B} – вектор магнитной индукции поля, которое порождается несколькими движущимися зарядами (токами) \vec{B}_i – вектор магнитной индукции поля, которое порождается отдельным подвижным зарядом (током).

В случае наложения двух полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

а модуль вектора магнитной индукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos \alpha},$$

где α – угол между векторами.

9. Закон Ампера. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

$$\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}],$$

где I – сила тока, \vec{l} – вектор, по модулю равный длине l проводника и по направлению совпадающий с направлением тока; \vec{B} – магнитная индукция поля. Модуль вектора силы \vec{F}

$$F = IBl \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{l} и \vec{B} .

Сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}],$$

или по модулю

$$dF = IBdl \sin \alpha,$$

где α – угол между $d\vec{l}$ и \vec{B} .

10. Сила взаимодействия двух прямых параллельных проводников токами I_1 и I_2 :

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l,$$

где l – длина проводников, d – расстояние между ними.

11. Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где I – сила тока в плоском контуре S – площадь контура, \vec{n} – единичный вектор положительной нормали к плоскости контура.

12. Механический момент, действующий на рамку с током со стороны магнитного поля:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$$

$$M = p_m B \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

13. Сила Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}],$$

или по модулю

$$F = qvB \sin \alpha,$$

где \vec{v} – скорость заряженной частицы, q – заряд частицы, α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Если частица находится одновременно в электрическом и магнитном полях, то сила (обобщённая сила Лоренца), действующая на частицу, имеет вид

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}],$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля.

14. Теорема о циркуляции вектора \vec{B} (закон полного тока для магнитного поля в вакууме)

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

где n – количество проводников с током, охваченных контуром L произвольной формы.

15. Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через плоскость dS

$$d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS,$$

где $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на направление нормали к плоскости dS (α – угол между векторами \vec{n} и \vec{B}), $d\vec{S} = \vec{n} dS$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \vec{n} к плоскости.

Магнитный поток через произвольную поверхность

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

16. Полный поток (потокосцепление)

$$\Psi = N\Phi,$$

где N – количество витков соленоида или тороида с равномерной намоткой витков, плотно прилегающих друг к другу.

17. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA = Id\Phi.$$

18. Работа по перемещению контура с током

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

где $d\Phi_1$ – поток, пронизывающий контур в начальном положении, $d\Phi_2$ – в конечном.

1.4 Контрольные вопросы и задания

1. Что называют магнитным полем? Какова его природа и количественные характеристики?
2. Какую величину называют вектором магнитной индукции? Как определить ее направление?
3. Как связаны магнитная индукция \vec{B} и напряженность \vec{H} магнитного поля?
4. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа.
5. Сформулируйте принцип суперпозиции магнитных полей.
6. Чему равна магнитная индукция в центре кругового проводника с током?
7. Чему равна магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током? Отрезком проводника?
8. Опишите действие магнитного поля на прямолинейный проводник с током. Сформулируйте закон Ампера. Как определить направление силы Ампера?
9. Чему равен магнитный момент контура с током?
10. Чему равен механический момент, действующий на рамку с током в магнитном поле?
11. Рассчитайте силу взаимодействия двух проводников с токами.
12. Что называют магнитным потоком? В каких единицах его измеряют?
13. Чему равна работа по перемещению проводника с током в магнитном поле?
14. Сформулируйте закон полного тока.
15. Чему равна сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле? В электрическом и магнитном полях одновременно?
16. Как определить направление силы Лоренца?
17. Рассчитайте магнитное поле внутри соленоида.

1.5 Примеры решения задач

Задача 1. По двум длинным параллельным бесконечным проводникам в противоположных направлениях проходят токи 90 А и 70 А. Определить напряженность магнитного поля, которое создается токами в точке M ,

лежащей на расстоянии 12 см от первого и 14 см от второго проводника, если расстояние между ними 10 см.

Дано: $I_1 = 90 \text{ А}; I_2 = 70 \text{ А};$

$R_1 = 12 \text{ см}; R_2 = 14 \text{ см}; d = 10 \text{ см};$

$H - ?$

Анализ и решение

Предположим, что проводники направлены перпендикулярно к плоскости рисунка 1.2. Ток I_1 идет от нас, а I_2 к нам. Каждый ток создает в точке M напряженность магнитного поля $H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1}, H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2}$. Направление векторов \vec{H}_1 и \vec{H}_2 определяется по правилу буравчика и указано на рис. 1.2. Согласно принципу суперпозиции величина напряженности поля \vec{H} в точке M равна геометрической сумме напряженностей \vec{H}_1 и \vec{H}_2 (по теореме косинусов):

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - 2H_1H_2 \cos \beta}. \quad (1.1)$$

Вычисления: $H_1 = \frac{90}{2\pi \cdot 0,12} = 120 \text{ А/м}; H_2 = \frac{70}{2\pi \cdot 0,14} = 80 \text{ А/м}.$

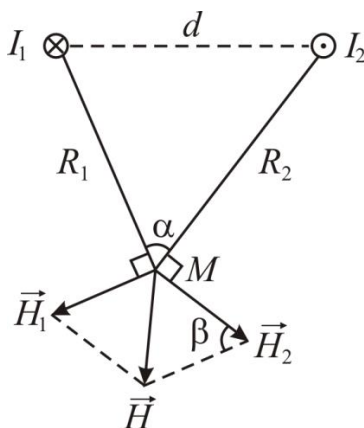


Рисунок 1.2

Из(1.1) найдем $\cos \beta$ (поскольку $\alpha = \beta$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, то $\cos \beta = \cos \alpha$)

$$\cos \alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2} = \frac{(144 + 196 + 100) \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 0,71.$$

Таким образом,

$$H = \sqrt{14400 + 6400 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot 0,71} = 84 \text{ А/м}.$$

Задача 2. Круглая рамка с током площадью 1 см^2 закреплена параллельно магнитному полю, на нее действует крутящий момент $M = 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}$ при индукции $0,05 \text{ Тл}$. Рамку освободили, после поворота на 90° ее угловая скорость равна 20 с^{-1} . Определить ток I , проходящий по рамке, и момент инерции рамки относительно диаметра.

Дано: $S = 1 \text{ см}^2$; $M = 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}$;

$B = 0,05 \text{ Тл}$; $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$;

$I - ?$ $J - ?$

Анализ и решение

Когда плоскость рамки размещена параллельно полю, на нее действует максимальный крутящий момент $M = p_m B = BIS$, где B – индукция поля; I – сила тока; S – площадь рамки; $p_m = IS$ – магнитный момент. Отсюда

$$I = \frac{M}{BS}.$$

Во время поворота рамки выполняется работа

$$A = I \Delta \Phi,$$

где $\Delta \Phi = BS$ – изменение магнитного потока, пронизывающего плоскость рамки, то есть $A = IBS$. Эта работа равна изменению кинетической энергии рамки:

$$IBS = J\omega^2/2 - J\omega_0^2/2 = J\omega^2/2,$$

где J – момент инерции рамки; ω – конечная угловая скорость; $\omega_0 = 0$ – начальная угловая скорость. Отсюда

$$J = \frac{2IBS}{\omega^2},$$

поскольку $M = BIS$, то $J = \frac{2M}{\omega^2}$.

Вычисления: $I = \frac{10^{-5}}{0,05 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ А}$, $J = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{20^2} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 3. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $0,5 \text{ мм}$ длиной $0,6 \text{ м}$ имеет поперечное сечение $0,006 \text{ м}^2$. Какой ток проходит по обмотке при напряжении 10 В , если за $0,001 \text{ с}$ в обмотке выделяется количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $d = 0,5$ мм ; $l = 0,6$ м; $S = 0,006$ м²;

$U = 10$ В; $t = 0,001$ с; $\mu = 1$;

$I - ?$

Анализ и решение

При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделится количество теплоты

$$Q = IUt. \quad (1.2)$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 Sl, \quad (1.3)$$

где S – сечение; l – длина соленоида.

Напряженность магнитного поля внутри соленоида

$$H = nI,$$

где $n = \frac{N}{l} = \frac{N}{Nd} = \frac{1}{d}$ – плотность намотки витков соленоида; N –

количество витков; d – диаметр проволоки. Если витки плотно прилегают друг к другу, то $l = Nd$. После подстановки в (1.3) значения H по условию задачи можно приравнять правые части (1.2) и (1.3), тогда получим:

$$IUt = \frac{\mu \mu_0 I^2 Sl}{2d^2}.$$

Отсюда

$$I = \frac{2Ud^2t}{\mu \mu_0 Sl}$$

Вычисления:

$$I = \frac{2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{-8} \cdot 0,001}{1 \cdot 12,6 \cdot 10^{-7} \cdot 0,006 \cdot 0,6} = 1,1 \text{ А.}$$

Задача 4. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 100$ В, попал в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению линий индукции. Определить радиус R и шаг h траектории движения электрона в виде винтовой линии.

Дано:

$U = 100$ В; $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл; $\alpha = 30^\circ$;

$R - ?$

Анализ и решение

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная векторам индукции \vec{B} и скорости \vec{v} :

$$F = |e|vB \sin \alpha = |e|v_{\perp} B$$

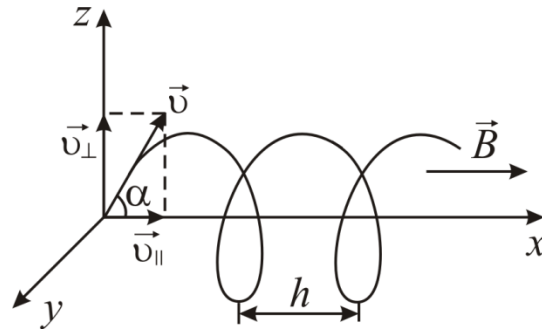


Рисунок 1.3

Составляющая силы Лоренца в направлении \vec{B} равна нулю. Тогда электрон, влетев в магнитное поле, будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции со скоростью v_{\perp} (рис. 1.3) и одновременно вдоль поля с постоянной скоростью v_{\parallel} :

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

Вследствие одновременного движения по окружности и прямой электрон будет двигаться по винтовой линии.

Радиус окружности найдем из следующих соображений. Сила Лоренца для частицы является центростремительной. Таким образом,

$$|e|v_{\perp} B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}.$$

Откуда радиус винтовой линии

$$R = \frac{vm \sin \alpha}{|e|B}.$$

Кинетическая энергия электрона, которую он приобрел в ускоряющем электрическом поле, равна работе поля над частицей. Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = |e|U. \quad (1.4)$$

Имея скорость из выражения (1.4), получим:

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|e|}} \sin \alpha.$$

Шаг винтовой линии равен пути, который прошел электрон в направлении \vec{B} со скоростью v_{\parallel} за время, в течение которого электрон совершает один оборот,

$$h = v_{\perp} T,$$

где $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}.$

Таким образом, $h = v_{\perp} \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha.$

Задача 5. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, пролетает поперечное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,51$ Тл. Ширина области с полем $d = 10$ см (рис. 1.4). Найти угол отклонения протона от первоначального направления движения.

Дано: $U = 500$ кВ; $B = 0,51$ Тл; $d = 10$ см;

$\alpha - ?$

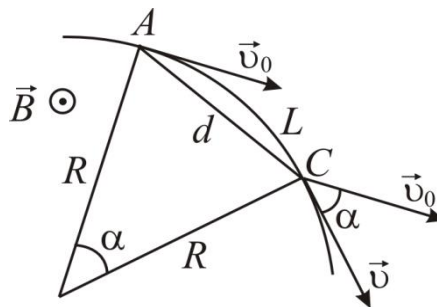


Рисунок 1.4

Анализ и решение

Прежде чем попасть в однородное магнитное поле протон движется в ускоряющем электрическом поле. Работа сил электрического поля идет при этом на увеличение его кинетической энергии

$$eU = \frac{m_p v_0^2}{2}, \quad (1.5)$$

где e – заряд протона; m_p – его масса; v_0 – скорость, приобретенная протоном в электрическом поле.

Из уравнения (1.5)

$$v_0 = \sqrt{2eU/m_p}.$$

На протон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $\vec{F} = e[\vec{v}, \vec{B}]$, благодаря которой протон получает нормальное ускорение:

$$a_n = F/m_p = evB/m_p = v_0^2/R.$$

Таким образом,

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_p}{e}} = 2 \text{ м.}$$

Выйдя из магнитного поля, протон будет продолжать движение по прямой под определенным углом α к направлению вектора начальной скорости \vec{v}_0 . Векторы \vec{v} и \vec{v}_0 перпендикулярны радиусам соответственно в точках A и C (рис. 1.4), поэтому угол можно найти из соотношения $R\alpha = L$, где L – длина дуги.

Так как в нашем случае $R > d$, можно предположить, что $AC \approx d$. Таким образом

$$\alpha \approx d/R = 0,51 \text{ рад.}$$

1.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. По двум параллельным проводникам проходят токи 3 А и 4 А. Расстояние между проводниками 14 см. Найти геометрическое место точек, в которых напряженность магнитного поля равна нулю. Рассмотреть два случая прохождения тока: а) в одном направлении; б) в противоположных направлениях.

Ответ: а) 6 см от меньшего; б) 42 см от меньшего.

Задача 2. По двум параллельным проводникам, расположенным на расстоянии 12 см друг от друга, проходят токи по 30 А. Определить напряженность магнитного поля в точке, лежащей на расстоянии 10 см от каждого проводника, если токи проходят: а) в одном направлении; б) в противоположных направлениях.

Ответ: $H_1 = 76,4 \text{ А/м}$; $H_2 = 57,3 \text{ А/м}$.

Задача 3. Два круговых проводника, радиусом 4 см каждый, расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 0,1 м. По каждому проводнику проходит ток $I_1 = I_2 = 2 \text{ А}$. Найти напряженность магнитного поля на оси колец в точке, которая находится на одинаковом расстоянии от каждого проводника. Задачу вычислить для случаев, когда токи в проводниках имеют: а) одинаковое направление; б) противоположные направления.

Ответ: $H = 12,2 \text{ А/м}$; $H = 0$.

Задача 4. Проводник длиной 1 м имеет вид квадрата. По нему проходит ток 10 А. Найти напряженность магнитного поля в центре квадрата.

Ответ: $H = 35,8 \text{ А/м}$.

Задача 5. Соленоид длиной 30 см имеет 1000 витков. Найти напряженность магнитного поля внутри соленоида, если ток, проходящий по соленоиду, равен $I = 2 \text{ А}$.

Ответ: $H = 6670 \text{ А/м}$.

Задача 6. Рамка, площадь которой 16 см^2 вращается в однородном магнитном поле со скоростью 2 об/с. Ось вращения расположена в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Напряженность магнитного поля $7,96 \cdot 10^4 \text{ А/м}$. Определить: 1) зависимость величины магнитного потока сквозь плоскость рамки от времени; 2) наибольшее значение магнитного потока.

Ответ: $\Phi = 1,6 \cdot 10^{-4} \cos(4\pi t) \text{ Вб}$; $\Phi_{\max} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$.

Задача 7. Поток магнитной индукции через соленоид без сердечника равен $5 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$. Найти магнитный момент соленоида, если его длина 25 см.

Ответ: $p_m = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Задача 8. Магнитный момент кругового контура с током $p_m = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Радиус окружности $R = 10 \text{ см}$. Найти индукцию B в центре контура.

Ответ: $B = 0,2 \text{ мТл}$.

Задача 9. В однородном горизонтальном магнитном поле перпендикулярно к полю в равновесии находится горизонтальный прямолинейный алюминиевый проводник с током 10 А. Определить индукцию поля, если радиус проводника равен 2 мм.

Ответ: $B = 3,39 \cdot 10^{-2}$ Тл.

Задача 10. По проволочному кольцу $R=10$ см проходит ток $I=80$ А. Найти магнитную индукцию B в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r=20$ см.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{2r^3} R^2 = 62,8$ мкТл.

Задача 11. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом (рис. 1.5). По проводникам идут токи $I_1=80$ А и $I_2=60$ А. Расстояние между проводниками $d=10$ см. Чему равна магнитная индукция B в точках A и C , расположенных на одинаковом расстоянии от обоих проводников?

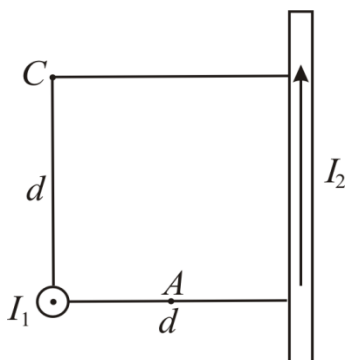


Рисунок 1.5

Ответ: $B_1 = 400$ мкТл, $B_2 = 200$ мкТл.

Задача 12. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, проходит ток $I=60$ А. Стороны прямоугольника $a=30$ см и $b=40$ см. Какое значение имеет магнитная индукция в точке пересечения диагоналей?

Ответ: $B = \frac{2\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab} = 200$ мкТл.

Задача 13. По тонкому проводящему кольцу проходит ток. Не меняя силы тока в проводнике, его превратили в квадрат. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Ответ: В 1,14 раза.

Задача 14. Электрон находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 200$ кВ/м. Какой путь S пройдет электрон за время $t = 1$ нс, если его начальная скорость равна нулю? Какую скорость будет иметь электрон в конце этого промежутка времени?

Ответ: $S = \frac{|e|Et^2}{2m} = 1,76$ см; $v = \frac{|e|E}{mt} = 35,2$ Мм/с.

Задача 15. Какая ускоряющая разность потенциалов U нужна для того, чтобы приобрел скорость $v = 30$ Мм/с: 1) электрон; 2) протон?

Ответ: 1) 2,56 кВ; 2) 4,7 МВ.

Задача 16. Протон, начальная скорость которого равна 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле ($E = 300$ В/см) так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Какой путь S должен пройти протон в направлении линий поля, чтобы его скорость удвоилась?

Ответ: $S = 3m_p v^2 / 2eE = 5,19$ мм. (m_p – масса протона).

Задача 17. Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью $\sigma = 35,4$ нКл/м². В направлении силовых линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определить минимальное расстояние l_{\min} , на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии, $l_0 = 5$ см, он имел кинетическую энергию $T = 80$ эВ.

Ответ: $l = l_0 - \frac{2\varepsilon_0 T}{|e|\sigma} = 1$ см.

Задача 18. Электрон, летевший горизонтально со скоростью $v = 1,6$ Мм/с, попал в однородное электрическое поле с напряженностью $E = 90$ В/см, направленное вертикально вверх. Какой будет скорость электрона v по абсолютному значению и направлению через 1 нс?

Ответ: 2,24 Мм / с; отклонится на 45° от первоначального направления.

Задача 19. В однородное электрическое поле напряженностью $E = 1$ кВ/м вдоль силовой линии влетает электрон со скоростью $v_0 = 1$ Мм/с. Определить

расстояние l , которое прошел электрон до точки, в которой его скорость v_1 будет равна половине начальной.

Ответ: $l = 3mv_0^2/8|e|E = 2,13\text{мм}$.

Задача 20. Электрон с начальной скоростью $v_0 = 3$ Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью $E = 150$ В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найти: силу F , действующую на электрон; ускорение a , которое приобрел электрон; скорость v электрона через $t = 0,1$ мкс.

Ответ: $F = 2,4 \cdot 10^{-17}$ Н; $a = 2,75 \cdot 10^{13}$ м/с²; $v = 4,07$ Мм/с.

Задача 21. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость $v = 10$ Мм/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло $\alpha = 35^\circ$ с начальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами (поле считать однородным), если длина пластин l равна 10 см, расстояние d между ними равно 2 см.

Ответ: $U = 79,6$ В.

Задача 22. Два электрона, расположенные на большом расстоянии друг от друга, сближаются с относительной начальной скоростью $v = 10$ Мм/с. Определить минимальное расстояние r_{\min} , на которое они могут подойти друг к другу.

Ответ: $r_{\min} = \frac{e^2}{\pi m \epsilon_0 v^2} = 10,1$ пм.

Задача 23. Электрон движется в магнитном поле с индукцией $B = 0,02$ Тл по окружности радиусом 1 см. Определить кинетическую энергию T электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

Ответ: $T = \frac{B^2 r^2 e^2}{2m} = 0,563$ Дж = 3,52 кэВ.

Задача 24. Заряженная частица с энергией $T = 1$ кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 1$ мм. Найти силу F , действующую на частицу со стороны поля.

Ответ: $F = 2T/R = 0,32$ пН.

Задача 25. Определить частоту вращения электрона по круговой орбите в магнитном поле, индукция B которого равна 0,2 Тл.

Ответ: $\nu = \frac{B|e|\hbar}{2\pi m} = 5,6 \cdot 10^9$ Гц.

Задача 26. В однородном магнитном поле с индукцией $B=100$ мкТл движется электрон по винтовой линии. Определить скорость v электрона, если шаг h винтовой линии равен 20 см, а радиус $R=5$ см.

Ответ: $v = \frac{B|e|\hbar}{m} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = 1,04$ Мм/с.

Задача 27. Проводник длиной 0,6 м и сопротивлением 0,025 Ом движется поступательно в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю с индукцией $0,5 \cdot 10^{-3}$ Тл. По проводнику проходит ток 4 А. Скорость движения проводника 0,8 м/с. Какая мощность больше и во сколько раз: потраченная на перемещение проводника в магнитном поле или на его нагрев?

Ответ: в 416 раз.

Задача 28. Из проволоки длиной 20 см сделали квадратный и круговой контуры. Найти вращательные моменты, действующие на контуры, если они находятся в однородном магнитном поле, индукция которого 0,1 Тл. По контурам проходит ток 2 А. Плоскость контуров составляет 45° с направлением линий индукции.

Ответ: $M_1 = 3,53 \cdot 10^{-4}$ Н·м; $M_2 = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Н·м.

Задача 29. Заряженная частица влетела перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле, образованное в среде. Вследствие взаимодействия с веществом частица, находясь в поле, потеряла половину своей первоначальной энергии. Во сколько раз будут отличаться радиусы кривизны траектории начала и конца пути?

Ответ: $R_1/R_2 = \sqrt{T_1/T_2} = \sqrt{2}$.

Задача 30. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B=0,1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E=100$ кв/м.

Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

Ответ: $v = \frac{E}{B} = 1 \text{ Мм/с.}$

2 ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

2.1 Цель занятия

Изучить законы электромагнитной индукции и уравнения Максвелла. Научиться пользоваться ими при решении задач.

2.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию изучить теоретический материал по конспекту или учебнику [1, гл. 7, 10; 3, § 60–71; 5, гл. 5.3, 5.5]. Особое внимание обратите на закон Фарадея, правило Ленца, явления самоиндукции и взаимной индукции. Выясните физический смысл и пределы применимости уравнений Максвелла. Ответьте на контрольные вопросы, проанализируйте решения задач, приведенных в качестве примера.

2.3 Основные законы и формулы

1. Закон Фарадея (закон электромагнитной индукции)

$$\varepsilon_i = -N d\Phi/dt,$$

где ε_i – электродвижущая сила (ЭДС) электромагнитной индукции, $\Phi = BS \cos \alpha$ – поток вектора магнитной индукции \vec{B} через плоскость S , α – угол между вектором нормали \vec{n} к плоскости S и вектором магнитной индукции \vec{B} , N – количество витков катушки.

2. ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt},$$

где $L = \Phi/I$ – индуктивность контура, I – сила тока в контуре.

3. Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где $n = N/l$ – количество витков на единицу длины соленоида, $V = Sl$ – объем соленоида.

4. Магнитная индукция соленоида

$$B = \mu_0 \mu n I.$$

5. Мгновенное значение силы тока в цепи с сопротивлением R и индуктивностью L :

а) при замыкании цепи

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

б) при размыкании цепи

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$; t – время, прошедшее после замыкания или размыкания цепи.

6. ЭДС взаимной индукции

$$\varepsilon_{i12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \varepsilon_{i21} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

где $L_{12}I_2 = \Phi_1$, $L_{21}I_1 = \Phi_2$ – магнитные потоки в первом и втором контурах, созданные токами I_2 и I_1 соответственно.

7. Энергия магнитного поля, связанного с контуром

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

8. Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

9. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

10. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

11. Третье и четвертое уравнения Максвелла

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q_{своб},$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

2.4 Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.
3. Объясните правило Ленца.
4. В чем заключается явление самоиндукции? Чему равна ЭДС самоиндукции? Дайте определение индуктивности.
5. Как изменяется со временем сила тока при включении электрической цепи с индуктивностью?
6. Запишите законы изменения тока в цепи с индуктивностью при замыкании и размыкании цепи. Объясните с помощью графика.
7. В чем заключается явление взаимной индукции? Чему равна ЭДС взаимной индукции? Дайте определение взаимной индуктивности.
8. Охарактеризуйте природу вихревого электрического поля и его связь с переменным магнитным полем.
9. Какие величины характеризуют электромагнитное поле?
10. Запишите и проанализируйте уравнения Максвелла.

2.5 Примеры решения задач

Задача 1. Прямой проводник длиной l движется со скоростью $\vec{v} = const$ в однородном магнитном поле с индуктивностью \vec{B} так, что плоскость dS его траектории перпендикулярна вектору \vec{B} (рис. 2.1). Пользуясь электронной теорией электропроводности, выведите формулу для закона электромагнитной индукции и поясните сущность природы этого явления, открытого М. Фарадеем.

Дано: $l; \vec{B}; \vec{v}; dS;$

$\varepsilon_i - ?$

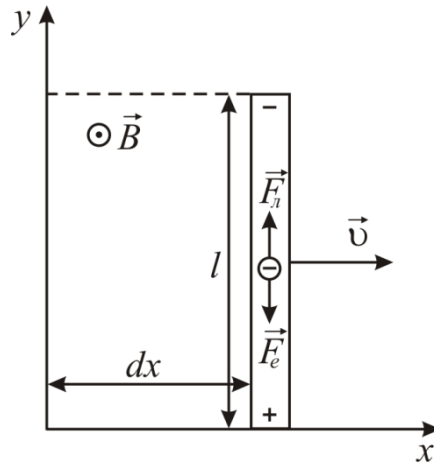


Рисунок 2.1

Анализ и решение

Свободные электроны проводимости, находящиеся в проводнике, движутся вместе с ним в магнитном поле со скоростью \vec{v} . Так что на каждый из электронов действует сила Лоренца

$$\vec{F}_l = e[\vec{v}, \vec{B}].$$

Результатом этого является упорядоченное перемещение этих электронов вдоль проводника в один его конец с образованием там избытка отрицательного заряда. На противоположной стороне образуется излишний положительный заряд. В результате такого перераспределения между этими зарядами возникает электрическое поле с напряженностью \vec{E} , которое вызывает действие на электроны еще одной силы – со стороны создавшегося электрического поля

$$\vec{F}_e = e\vec{E}.$$

Электроны будут двигаться под действием равнодействующей этих сил, пока она не станет равной нулю, то есть при

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_l$$

или с учетом их значений

$$e\vec{E} = -e[\vec{v}, \vec{B}].$$

Отсюда

$$\vec{E} = -[\vec{v}, \vec{B}].$$

Из последнего выражения видно, что напряженность поля сил, которые движут электроны против сил электростатического поля, имеет не электростатическую природу. Поэтому ее называют напряженностью поля сторонних сил $\vec{E}_{cm} = [\vec{v}, \vec{B}]$. Она одинакова по величине с напряженностью электрического поля \vec{E} , но противоположна ей по направлению $\vec{E} = -\vec{E}_{cm}$.

Работа поля сторонних сил $dA = F_n dl \cos \varphi$ по перемещению зарядов против сил электрического поля приводит к появлению ЭДС, индуцированной магнитным полем

$$\varepsilon_i = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = - \int_0^l \vec{E}_{cm} d\vec{l} = - \int_0^l [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l} = - \int_0^l v B dl = -vBl.$$

Учитывая, что $v = dx/dt$, имеем:

$$\varepsilon_i = -vBl = -B \frac{ldx}{dt} = -B \frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi = BdS$ – магнитный поток через плоскость dS .

Таким образом мы вывели формулу ЭДС электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ как работу сторонних сил по перемещению зарядов вдоль проводника, движущегося в магнитном поле, а также выяснили, что поле этих сил не является электростатическим.

Задача 2. Между полюсами магнита с индукцией \vec{B} подвешен проводящий плоский контур с источником тока. Сопротивление контура R . Его плоскость dS расположена параллельно линиям магнитной индукции (рис. 2.2). После замыкания ключа К за время dt контур поворачивается на некоторый угол. При этом магнитный поток через него изменяется на величину $d\Phi$. Выяснить природу электромагнитных явлений, происходящих при этом, их количественные характеристики и связь между ними.

Дано: \vec{B} ; R ; dS ; dt ; $d\Phi$

ε_i – ?

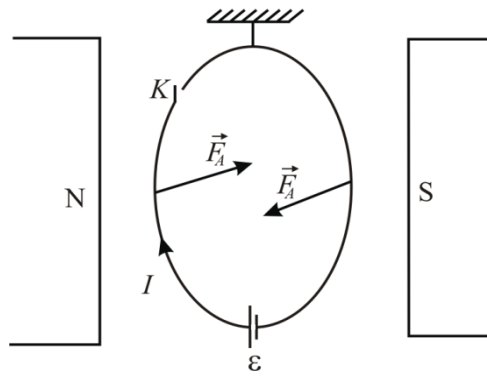


Рисунок 2.2

Анализ и решение

После замыкания ключа К по контуру идет ток, контур нагревается, а также поворачивается на некоторый угол. Эти явления сопровождаются энергетическими изменениями в источнике тока $\varepsilon I dt$, тепловыми в электрическом сопротивлении контура $Q = I^2 R dt$ и механической работой пары сил Ампера при изменении углового положения контура в магнитном поле $dA = Id\Phi$, где $d\Phi$ – изменение потока магнитной индукции через площадь контура dS за время dt . Все эти изменения описываются законом сохранения энергии

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + Id\Phi.$$

После очевидных преобразований этого выражения получаем эквивалентное ему уравнение (закон Ома)

$$RI = \varepsilon - d\Phi/dt,$$

или

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R},$$

где $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ – ЭДС индукции магнитного поля.

Ток, индуцированный в контуре магнитным полем, выражается формулой

$$I_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Кстати, из этих выражений видно, что этот ток будет существовать и в отсутствие источника тока, когда $\varepsilon = 0$, только бы изменялся магнитный поток во времени.

Сделаем, вслед за Максвеллом, еще один важный вывод из полученных результатов. При повороте контура силами Ампера или силами любой другой

природы меняется во времени величина магнитного потока через его плоскость dS со скоростью $\frac{d\Phi}{dt}$, где $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$.

Таким образом

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B}d\vec{S} \right).$$

Поскольку плоскость контура при этом не изменяется со временем, операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами и записать изменение потока Φ через контур как частную производную от \vec{B} по времени. Тогда ЭДС индукции магнитного поля будет выглядеть так:

$$\varepsilon_i = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Обратим внимание на то, что ЭДС в любом контуре равна циркуляции вектора напряженности сторонних сил, то есть

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{cm} d\vec{l},$$

где $\vec{E}_{cm} = \vec{E}$ – вектор напряженности вихревого электрического поля по теории Максвелла. Приравняем правые части последних двух выражений

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Это первое уравнение Максвелла. Оно дает возможность утверждать, что вихревое магнитное поле неизбежно порождает вихревое электрическое поле и они существуют неразрывно друг от друга, причем независимо от наличия проводящего контура. Ведь в этом уравнении отсутствуют его электрические или магнитные характеристики. Поэтому контур является только индикатором наличия вихревого электрического поля.

Задача 3. Контур радиусом 0,2 м расположен в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции, которая меняется со временем по закону $B = 6 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^5 t}$. В пространстве это поле однородно. Найдите напряженность вихревого электрического поля, возбуждаемого в контуре в момент времени $t = 3 \cdot 10^{-5}$ с.

Дано: $R = 0,2$ м; $B = 6 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^5 t}$; $t = 3 \cdot 10^{-5}$ с
 $E - ?$

Анализ и решение

Согласно первому уравнению Максвелла в интегральной форме

$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ можно определить зависимость E от B следующим образом:

$$E \cdot 2\pi R = -\pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t},$$

откуда

$$\begin{aligned} E &= -\frac{R}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{2} \frac{\partial}{\partial t} (6 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^5 t}) = 1,2 \cdot 10^3 \frac{R}{2} e^{-2 \cdot 10^5 t} = \\ &= 1,2 \cdot 10^3 \frac{0,2}{2} e^{-2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = 0,3 \text{ А/м.} \end{aligned}$$

Задача 4. По длинному прямому соленоиду радиусом R проходит ток, который можно изменять так, что магнитное поле в середине соленоида изменяется по закону $B = \beta t^2$, где β – постоянная величина. Найдите плотность тока смещения как функцию расстояния от соленоида.

Дано: R ; $B = \beta t^2$
 $j_{см.}(r) - ?$

Анализ и решение

Плотность тока смещения $\vec{j}_{см.} = d\vec{D}/\partial t$, где \vec{D} – вектор электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Найдём сначала смещение вихревого электрического поля.

Для этого используем уравнение Максвелла для циркуляции вектора \vec{E}

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (2.1)$$

Если $r < R$ то уравнение (2.1) имеет вид

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \text{ или } E = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right).$$

Находим $\partial B / \partial t = 2\beta t$. Тогда $E(r) = r\beta t$, ($r < R$).

Для $r > R$ теорему о циркуляции вектора \vec{E} запишем в виде:

$$2\pi r E = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Отсюда $E(r) = \frac{\beta R^2 t}{r}$, ($r > R$).

Зная зависимость напряженности вихревого электрического поля от расстояния $E(r)$, найдем плотность тока смещения

$$j_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \beta r, \quad (r < R),$$

$$j_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \beta R^2}{r}, \quad (r > R).$$

Зависимость $j_{см}(r)$ можно изобразить графически (рис. 2.3)

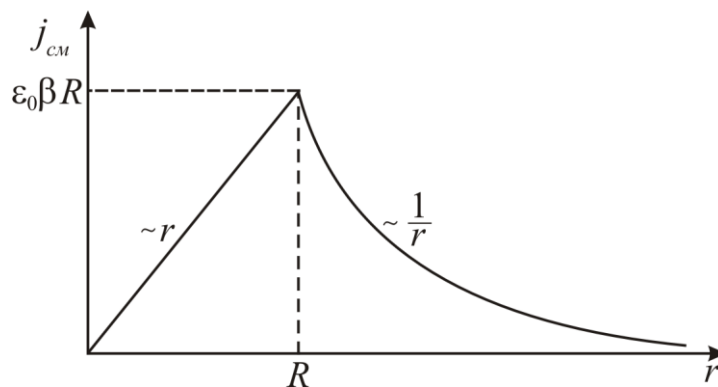


Рисунок 2.3

2.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Прямой проводник длиной $l = 0,4$ м движется в однородном магнитном поле со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно линиям индукции. Разность потенциалов между концами проводника равна $0,6$ В. Найти индукцию магнитного поля.

Ответ: $B = 0,3$ Тл.

Задача 2. Прямой проводник длиной $l = 0,1$ м находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Концы его замкнуты гибким проводником, не находящимся в магнитном поле. Сопротивление этой электрической цепи равно $0,4$ Ом. Какая мощность расходуется, если проводник движется перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 20$ м/с?

Ответ: $P = 10$ Вт.

Задача 3. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0,4$ Тл вращается стержень длиной $l=0,1$ м. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов между концами стержня при частоте вращения $n=16$ с⁻¹.

Ответ: $U=0,2$ В.

Задача 4. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0,35$ Тл равномерно вращается с частотой $n=8$ с⁻¹ рамка. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки $S=50$ см², количество витков $N=1500$. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающей в рамке.

Ответ: $\varepsilon_{\max}=132$ В.

Задача 5. По П-образному проводнику (рис. 2.4) перемещается с постоянной скоростью v под действием силы F перемычка. Контур находится в перпендикулярном его плоскости магнитном поле. Чему равна сила F , если каждую секунду в контуре выделяется количество теплоты Q ?

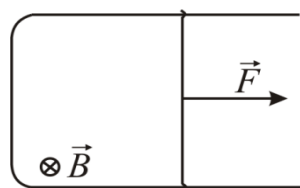


Рисунок 2.4

Ответ: $F = \frac{Q}{vt}$.

Задача 6. Проводник, имеющий форму параболы $y=kx^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 2.5). С вершины параболы в момент времени $t=0$ начали перемещать перемычку 1–2. Найти ЭДС индукции в контуре как функцию, если перемычка движется с постоянной скоростью v .

Ответ: $\varepsilon_i = 2Bv\sqrt{y/k}$

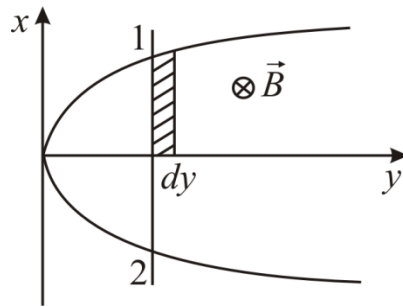


Рисунок 2.5

Задача 7. Кольцо из проводника радиусом $a=0,1$ м лежит на столе. Какой электрический заряд пройдет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R=1$ Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B=50$ мкТл.

Ответ: $q=3,14$ мкКл.

Задача 8. Квадратная рамка с током $a=5$ см и сопротивлением $R=10$ мОм находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=40$ мТл. Нормаль к плоскости рамки расположена под углом $\alpha=30^\circ$ к линиям магнитной индукции. Найти заряд, который пройдет по рамке, если магнитное поле выключить.

Ответ: $q=8,67$ мКл.

Задача 9. Тонкий проводник длиной $l=1$ м согнут в виде квадрата, концы которого замкнуты. Квадрат находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1$ Тл. Определить заряд, который пройдет по проводнику, если квадрат, протянув за противоположные вершины, вытянуть в линию. Сопротивление проводника равно 3 Ом.

Ответ: $q=2,08 \cdot 10^{-3}$ Кл.

Задача 10. Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 0,8 Тл. Ротор имеет $N=100$ витков площадью $S=400$ см². Определить частоту вращения якоря, если максимальное значение ЭДС индукции $\varepsilon_{\max}=200$ В.

Ответ: $n=10$ с⁻¹.

Задача 11. Соленоид площадью сечения 5 см^2 имеет $N = 1200$ витков. При силе тока $I = 2 \text{ А}$ индукция магнитного поля внутри соленоида $B = 0,01 \text{ Тл}$. Найти индуктивность соленоида.

Ответ: $L = 3 \text{ мГн}$.

Задача 12. Изолированный металлический диск радиусом $r = 0,25 \text{ м}$ вращается с угловой скоростью $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Определить разность потенциалов между центром и краем диска, которая возникает при отсутствии магнитного поля и в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10 \text{ мТл}$, перпендикулярном плоскости диска.

Ответ: $1,8 \text{ нВ}; 3,08 \cdot 10^{-2} \text{ В}$.

Задача 13. Катушка с индуктивностью $L = 250 \text{ мГн}$ и сопротивлением $R = 0,3 \text{ Ом}$ подключается к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени τ сила тока в катушке достигнет 50% от установившегося значения?

Ответ: $\tau = 0,58 \text{ с}$.

Задача 14. В цепи проходит ток $I_0 = 50 \text{ А}$. Источник тока можно отключить, не разрывая цепи. Определить силу тока в этой цепи через $t = 0,01 \text{ с}$ после отключения его от источника тока. Сопротивление цепи равно 20 Ом , индуктивность $L = 0,1 \text{ Гн}$.

Ответ: $I = 6,77 \text{ А}$.

Задача 15. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 2 \text{ Ом}$ подключили катушку индуктивности $L = 0,5 \text{ Гн}$ и сопротивлением $R = 8 \text{ Ом}$. Найти промежуток времени, за который ток в катушке, увеличиваясь, достигнет значения, отличающегося от максимального на 1%.

Ответ: $t = 0,23 \text{ с}$.

Задача 16. Две катушки находятся на небольшом расстоянии друг от друга. Когда сила тока в первой катушке изменяется со скоростью $\Delta I / \Delta t = 5 \text{ А/с}$, во второй возникает ЭДС индукции $\varepsilon_2 = 0,1 \text{ В}$. Определить коэффициент взаимной индукции.

Ответ: 20 мГн.

Задача 17. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R меняется в течение времени τ по закону $\Phi(t) = at(\tau - t)$. Найти количество теплоты, выделяющейся за это время в контуре. Индуктивностью контура пренебречь.

Ответ: $Q = \frac{a^2 \tau^3}{3R}$.

Задача 18. Сколько метров тонкого провода нужно для изготовления соленоида длиной 100 см и индуктивностью 1 мГн, если диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины.

Ответ: $l = 100$ м.

Задача 19. Через катушку радиусом 2 см, которая имеет 500 витков, проходит ток силой 2 А. Определить индуктивность катушки, если напряженность магнитного поля в центре равна 10 кА/м.

Ответ: $L = 4$ мГн.

Задача 20. Найти индуктивность единицы длины кабеля, состоящего из двух тонкостенных коаксиальных металлических цилиндров радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Силы токов в цилиндрах одинаковы и противоположно направлены. Магнитная проницаемость среды равна единице.

Ответ: $\frac{L}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

Задача 21. Две катушки, индуктивности которых $L_1 = 3$ мГн и $L_2 = 5$ мГн, соединены последовательно. При этом индуктивность системы $L = 11$ мГн. Как изменится индуктивность системы, если в одной из катушек направление тока изменить на противоположное, не меняя взаимное положение катушек?

Ответ: $L = 5$ мГн.

Задача 22. Два соленоида одинаковой длины l и радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) имеют соответственно n_1 и n_2 витков на единицу длины. Меньший

соленоид целиком поместили внутрь большего так, что их оси совпали. Определить модуль взаимной индуктивности $|L_{12}|$ соленоидов.

Ответ: $|L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$.

Задача 23. Длина соленоида 1 м, площадь его поперечного сечения 20 см^2 , индуктивность $L = 0,4 \text{ мГн}$, объемная плотность энергии $w = 0,1 \text{ Дж/м}^3$. Определить силу тока в соленоиде.

Ответ: $I = \sqrt{\frac{2wSl}{L}} = 1 \text{ А}$.

Задача 24. Однослойный соленоид длиной 0,4 м с площадью поперечного сечения 50 см^2 , намотанный проводом диаметром 0,5 мм, подключен к напряжению 10 В. Какой ток течет по обмотке, если за 0,5 мс в ней выделяется количество теплоты, равное энергии магнитного поля внутри соленоида? Поле однородно.

Ответ: $I = 995 \text{ мА}$.

Задача 25. Определить энергию магнитного поля соленоида, который имеет 300 витков, намотанных на картонный каркас радиусом 3 см и длиной 0,6 м, если по нему проходит ток 4 А.

Ответ: 4,26 мДж.

Задача 26. Доказать, используя уравнения Максвелла, что переменное магнитное поле не может существовать без электрического поля; что однородное электрическое поле не может существовать при наличии переменного магнитного поля.

Задача 27. Показать, что следствием уравнений Максвелла является закон сохранения электрического заряда, то есть $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Задача 28. Сила тока в прямом бесконечном проводнике равна I . На расстоянии r_0 (рис. 2.6) от проводника находится плоский контур, образованный двумя параллельными шинами, по которым перемещается прямой проводник, и резистором с сопротивлением R . Расстояние между

шинами составляет a , скорость движения проводника v . Найти, по каким законам меняется со временем: магнитный поток, пронизывающий контур $\Phi(t)$; ЭДС индукции $\varepsilon_i(t)$; индукционный ток в контуре $I_i(t)$; количество теплоты Q , выделяющейся в контуре за промежуток времени от t_1 до t_2 .

Ответ: $\Phi(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{r_0 + vt}{r_0};$

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \frac{v}{r_0 + vt};$$

$$I_i(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \cdot \frac{v}{r_0 + vt};$$

$$Q = \frac{\mu_0^2 I^2 a^2 v}{4\pi^2 R} \left(\frac{1}{r_0 + vt_1} - \frac{1}{r_0 + vt_2} \right).$$

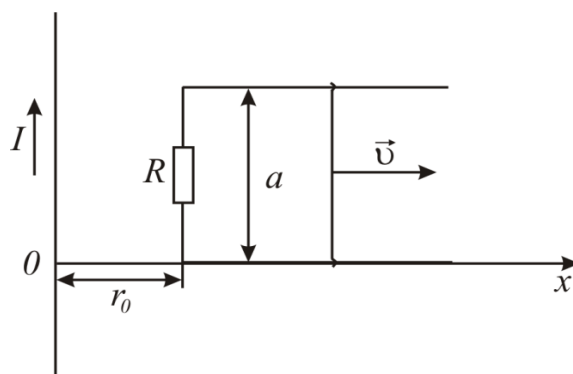


Рисунок 2.6

Задача 29. Квадратная рамка и длинный прямой проводник с током I находятся в одной плоскости (рис. 2.7). Сторона рамки равна a . Рамку перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции как функцию расстояния x .

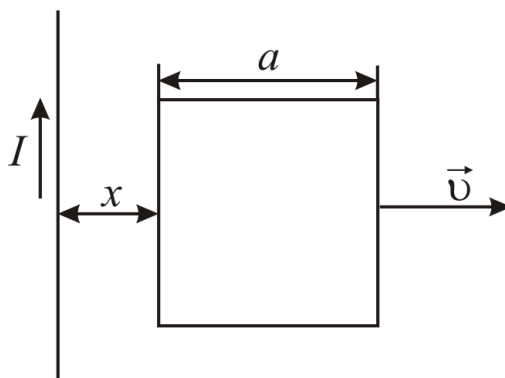


Рисунок 2.7

Ответ: $\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}$.

Задача 30. Определить величину заряда, который прошел по соленоиду с током 0,5 А после замыкания его концов. Диаметр соленоида 3 см, проволока обмотки (алюминий, $\rho = 2,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) имеет диаметр 0,3 мм.

Ответ: $q = 42,7$ мкКл.

3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

3.1 Цель занятия

Усвоить физические величины и уравнения, характеризующие электромагнитные колебания (свободные, затухающие, вынужденные) и волны. Овладеть методами решения задач.

3.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию необходимо изучить теоретический материал по конспекту или учебнику [1, гл. 9, 10; 3, § 88–92, 104–109; 5, гл. 7]. Усвоить физические принципы образования свободных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний, а также излучения, распространения и приема электромагнитных волн. Ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенных в примерах.

3.3 Основные законы и формулы

1. Свободные незатухающие электромагнитные колебания:

– дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний заряда в электромагнитном контуре

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

– решение дифференциального уравнения $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

где q_0 – амплитуда заряда; φ_0 – начальная фаза колебаний;

– $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебаний контура, L – индуктивность контура; C – его емкость;

– период собственных колебаний, формула Томсона

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC};$$

– сила тока в колебательном контуре

$$I = dq/dt = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = q_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2),$$

где $I_0 = q_0\omega_0$ – амплитуда силы тока;

– напряжение на обкладках конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $U_0 = q_0/C$ – амплитуда напряжения на конденсаторе.

2. Затухающие электромагнитные колебания:

– дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0;$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебаний

контура, R – активное сопротивление.

– решение дифференциального уравнения

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_1);$$

- амплитуда затухающих колебаний $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$;

– частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2};$$

– период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

3. Величины, характеризующие затухание:

– время релаксации τ – время, за которое амплитуда уменьшается в e раз;

– коэффициент затухания $\beta = 1/\tau$;

– логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e},$$

где A – амплитуда колебаний, N_e – количество колебаний за время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз;

– добротность колебательного контура

$$Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W},$$

где W – энергия, которую имеет контур в определенный момент времени, δW – уменьшение энергии за период колебаний.

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e.$$

4. Вынужденные колебания:

– дифференциальное уравнение колебаний заряда в контуре

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ – переменная ЭДС;

– решение дифференциального уравнения $q = q_0 \cos(\omega t - \psi)$,

где

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

5. Резонансная частота для заряда и напряжения

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}};$$

для силы тока

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

6. Переменный ток $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$,

где $I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$ – амплитуда силы тока, φ – фазовый сдвиг

между напряжением и током, $\operatorname{tg} \varphi = (\omega L - 1/\omega C)/R$.

7. Полное сопротивление или импеданс

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

8. Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$, емкостное сопротивление $X_C = 1/\omega C$, реактивное сопротивление $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

9. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока $P = I_\partial U_\partial \cos \varphi$, где $I_\partial = I_0/\sqrt{2}$, $U_\partial = U_0/\sqrt{2}$ – действующие значения силы тока и напряжения, φ – фазовый сдвиг между напряжением и током.

10. Связь длины электромагнитной волны λ с периодом T и частотой ν колебаний

$$\lambda = cT \text{ или } \lambda = c/\nu,$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме.

11. Фазовая скорость (скорость распространения в среде фазы монохроматической волны)

$$v = c/n = c/\sqrt{\epsilon\mu},$$

где n – абсолютный показатель преломления, ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость.

12. Волновые уравнения для электромагнитной волны

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

13. Уравнение плоской электромагнитной волны

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

где ω – частота волны, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, α_1 и α_2 – начальные фазы колебаний ($\alpha_1 = \alpha_2$, т.е. волны синфазные).

14. Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в электромагнитной волне

$$E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H\sqrt{\mu_0\mu}.$$

15. Связь между амплитудными значениями векторов \vec{E} и \vec{H}

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_0\sqrt{\mu_0\mu}.$$

16. Объемная плотность энергии электромагнитной волны

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \mu_0\mu H^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu} EH.$$

17. Вектор Умова-Пойнтинга (вектор плотности потока энергии волны)

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

18. Модуль плотности потока энергии

$$S = wv = EH.$$

3.4 Контрольные вопросы и задания

1. Запишите уравнение свободных незатухающих колебаний в колебательном контуре. Какое решение оно имеет?
2. Чему равны период и частота свободных незатухающих колебаний?
3. Запишите уравнение затухающих колебаний в колебательном контуре. Какое решение оно имеет?
4. При каких условиях электрические колебания в колебательном контуре являются незатухающими, а при каких затухающими?
5. Чему равны период и частота затухающих колебаний?
6. Назовите величины, характеризующие затухание электромагнитных колебаний.
7. Что такое логарифмический декремент затухания и добротность?
8. Запишите уравнение вынужденных колебаний в электрическом контуре. Какое решение оно имеет?
9. Чему равны индуктивное, емкостное, реактивное и полное сопротивление цепи?
10. Сформулируйте закон Ома для электрической цепи переменного тока.
11. Что такое действующие значения силы тока и напряжения? Чему они равны?

12. Что такое электромагнитная волна? Какая скорость ее распространения в вакууме и в среде?

13. Запишите волновые уравнения для \vec{E} и \vec{H} электромагнитной волны.

14. Запишите уравнение плоской электромагнитной волны.

15. Чему равна плотность энергии электромагнитной волны?

16. Чему равен и каков физический смысл вектора Умова-Пойнтинга?

3.4 Примеры решения задач

Задача 1. Колебательный контур состоит из конденсатора с двумя пластинами площадью $S = 10 \text{ см}^2$ каждая, которые находятся на расстоянии $d = 0,7 \text{ мм}$ друг от друга, и катушки индуктивности $L = 1 \text{ мкГн}$. Пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком. Колебательный контур имеет резонанс на длине волны $\lambda = 17,73 \text{ м}$. Определить диэлектрическую проницаемость среды ε , заполняющей конденсатор.

Дано: $S = 10 \text{ см}^2$, $d = 0,7 \text{ мм}$, $L = 1 \text{ мкГн}$, $\lambda = 17,73 \text{ м}$.

ε –?

Анализ и решение

Емкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

Тогда диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор:

$$\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S}. \quad (3.1)$$

Емкость C конденсатора найдем из формулы для резонансной частоты колебательного контура $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$,

$$C = \frac{1}{\omega_p^2 L}. \quad (3.2)$$

Чтобы найти резонансную частоту, воспользуемся соотношением $\nu = c/\lambda$, которое связывает длину волны λ , на которой резонирует контур с частотой; c – скорость света.

$$\omega_p = 2\pi \cdot c/\lambda \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.2), а затем емкость C в формулу (3.1), получим

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 L S} \quad (3.4)$$

Выполнив вычисления, находим $\varepsilon = 7$.

Задача 2. Определить время t_0 , за которое амплитуда колебаний силы тока в контуре с добротностью Q уменьшится в η раз, если частота затухающих колебаний равна ω .

Дано: $Q, \omega, A_0/A_1 = \eta$.

$t_0 - ?$

Анализ и решение

Для затухающих колебаний сила тока изменяется со временем по закону:

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

то есть амплитуда уменьшается со временем по закону $A = I_0 e^{-\beta t}$. В начальный момент времени $t = 0$ амплитуда $A_0 = I_0$, в момент времени t_0 амплитуда $A_1 = I_0 e^{-\beta t_0}$. Тогда время, за которое амплитуда уменьшится η в раз, можно определить из уравнения:

$$A_0/A_1 = \eta = e^{-\beta t_0},$$

откуда

$$t_0 = \frac{\ln \eta}{\beta}. \quad (3.5)$$

Добротность Q связана с коэффициентом затухания β :

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta}, \quad (3.6)$$

принимая во внимание, что $T = 2\pi/\omega$.

Из(3.5) и (3.6) получим

$$\beta = \frac{\omega}{2Q},$$

$$t_0 = \frac{2Q}{\omega} \ln \eta.$$

Задача 3. Контур, состоящий из резистора сопротивлением 100 Ом, конденсатора емкостью 35,4 мкФ и катушки индуктивности 0,7 Гн, подключен

к цепи переменного тока с действующим напряжением $U_{\partial} = 220$ В и частотой 50 Гц. Напишите уравнение зависимости от времени тока $I(t)$ и напряжения $U(t)$. Найдите падение напряжения на резисторе, конденсаторе и катушке. Определите частоту переменного тока, при которой в данном контуре будет наблюдаться резонанс, и мощность, которую потребляет контур.

Дано: $R = 100$ Ом, $c = 35,4$ мкФ, $L = 0,7$ Гн, $U_{\partial} = 220$ В, $\nu = 50$ Гц.

$I(t) - ?$ $U(t) - ?$ $U_R - ?$ $U_C - ?$ $U_L - ?$ $\nu_p - ?$ $P - ?$

Анализ и решение

Ток и напряжение в цепи меняются по закону

$$I = I_0 \sin \omega t, \quad U = U_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.7)$$

где φ – сдвиг фаз между током и напряжением.

Амплитуду U_0 напряжения найдем из соотношения

$$U_0 = \sqrt{2}U_{\partial}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (3.8)$$

Амплитуды тока и напряжения связаны законом Ома:

$$I_0 = U_0/Z, \quad (3.9)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – полное сопротивление цепи переменного тока,

$X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – индуктивное и емкостное сопротивления цепи,

соответственно.

Из соотношений (3.8), (3.9) найдем:

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}U_{\partial}}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}.$$

Расчеты дают:

$$U_0 = 311 \text{ В}, \quad I_0 = 1,9 \text{ А}, \quad \omega = 100\pi \text{ с}^{-1}.$$

Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и внешним напряжением определим так:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = 0,61; \quad \varphi = 54^\circ = 0,3\pi.$$

Уравнения (3.7) с учетом расчетов:

$$I(t) = 1,9 \sin 100\pi t;$$

$$U(t) = 311 \sin(100\pi t + 0,3\pi).$$

Падение напряжения на элементах контура равно

$$U_R = I_\partial R; U_C = I_\partial X_C; U_L = I_\partial X_L,$$

где $I_\partial = I_0/\sqrt{2}$ – действующее значение силы тока.

Тогда

$$U_R = \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = 134 \text{ В}; U_C = \frac{I_0}{\sqrt{2}\omega C} = 121 \text{ В}; U_L = \frac{I_0 \omega L}{\sqrt{2}} = 295 \text{ В}.$$

Условие резонанса $X_L = X_C$. Из соотношения $\omega L = 1/\omega C$ получим резонансную частоту:

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 32 \text{ Гц}.$$

Мощность, потребляемая контуром:

$$P = I_\partial U_\partial \cos \varphi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi = 180 \text{ Вт}.$$

Задача 4. Рассчитать энергию, которую перенесет за время $t = 1$ мин плоская синусоидальная электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, через плоскость $S_0 = 10 \text{ см}^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрической волны $E_0 = 1,0 \text{ мВ/м}$. Период волны $T \ll t$.

Дано: $t = 1$ мин, $S_0 = 10 \text{ см}^2$, $E_0 = 1,0 \text{ мВ/м}$, $T \ll t$.

$W - ?$

Анализ и решение

Энергия, которую перенесет электромагнитная волна за единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга \vec{S} . Принимая во внимание, что $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$, а в электромагнитной волне $\vec{E} \perp \vec{H}$, получим для модуля вектора \vec{S}

$$S = EH. \quad (3.10)$$

Величины \vec{E} и \vec{H} изменяются по гармоническому закону и имеют одинаковую фазу, тогда из (3.10):

$$S = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t, \quad (3.11)$$

то есть S зависит от времени. Тогда вектор \vec{S} можно связать с модулем плотности потока энергии:

$$S = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{S_0}.$$

Откуда энергия, которая переносится волной через площадь S_0 за время dt , с учетом (3.11)

$$dW = SS_0 dt = E_0 H_0 S_0 \sin^2 \omega t dt. \quad (3.12)$$

Амплитудные значения векторов \vec{E} и \vec{H} связаны между собой выражением:

$$E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu}. \quad (3.13)$$

Если $\mu = \varepsilon = 1$, то из (3.13) получим:

$$H_0 = E_0 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}.$$

Тогда уравнение (3.12) имеет вид:

$$dW = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_0^2 S_0 \sin^2 \omega t dt.$$

Полная энергия, которая переносится волной за время t

$$W = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S_0 \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S_0 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right). \quad (3.14)$$

По условию задачи частота неизвестна, поэтому воспользуемся условием $T \ll t$ для оценки значения $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$. Принимая во внимание, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, имеем:

$$\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{1}{8\pi} T \sin \frac{4\pi t}{T} \leq \frac{T}{8\pi}.$$

Вследствие условия $T \ll t$ членом $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$ в формуле (3.14) можно пренебречь. Тогда получим

$$W = 1/2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S_0 t,$$

$$W = 8 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

3.5 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Катушка с индуктивностью $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн соединена последовательно с плоским конденсатором, площадь пластин которого $S = 100 \text{ см}^2$, расстояние между ними $d = 0,1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды между пластинами, если контур резонирует на длину волны 750 м?

Ответ: $\varepsilon = 6$.

Задача 2. Период колебаний контура, который состоит из катушки и конденсатора, соединенных параллельно, $T = 33,2$ нс. Воздушный конденсатор представляет собой две круглые пластины диаметром $D = 20$ см, которые находятся на расстоянии $d = 1$ см. Определить индуктивность катушки.

Ответ: $L = 1$ мкГн.

Задача 3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $L = 1$ мГн и конденсатора переменной емкости. Диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызвать резонанс в этом контуре, составляет от $\lambda_1 = 200$ м до $\lambda_2 = 600$ м. Определить, в каких пределах изменяется емкость конденсатора. Активным сопротивлением контура пренебречь.

Ответ: от $C_1 = 11,3$ пФ до $C_2 = 101,4$ пФ.

Задача 4. Найти период колебаний контура, состоящего из катушки длиной $l = 50$ см, площадью поперечного сечения $S_1 = 2 \text{ см}^2$ и числом витков $N = 1000$ и конденсатора с двумя пластинами, площадью $S = 50 \text{ см}^2$ каждая, расположенными на расстоянии $d = 2$ мм друг от друга. Пространство между пластинами конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon = 2$).

Ответ: $T = 0,93$ мкс.

Задача 5. Колебательный контур состоит из емкости $C = 0,025$ мкФ и индуктивности $L = 1,015$ Гн. Омическое сопротивление отсутствует. Заряд конденсатора $q = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Написать для этого колебательного контура уравнение, описывающее зависимость напряжения на конденсаторе и силы тока

в цепи от времени. Найти напряжение на конденсаторе и силу тока в цепи в моменты времени $T/8$, $T/4$, $T/2$ (T – период колебаний).

Ответ: 1) $U = 100 \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)$ В, $I = -15,7 \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)$ мА,

2) $U_1 = 70,7$ В, $I_1 = -11,1$ мА; $U_2 = 0$, $I_2 = -15,7$ мА; $U_3 = -100$ В, $I_3 = 0$.

Задача 6. Уравнение, определяющее зависимость напряжения на конденсаторе от времени в колебательном контуре, имеет вид $U = 50 \cos(10^4 \cdot \pi \cdot t)$ В, емкость конденсатора $C = 10^{-7}$ Ф. Определить: 1) период колебаний; 2) индуктивность контура; 3) закон изменения силы тока в контуре от времени; 4) длину волны, соответствующую этому контуру.

Ответ: 1) $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с; 2) $L = 10,15$ мГн; 3) $I = -157 \sin(10^4 \pi \cdot t)$ мА; 4) $\lambda = 6 \cdot 10^4$ м.

Задача 7. Сила тока в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности $L = 0,1$ Гн и конденсатора, изменяется со временем согласно выражению $I = -0,1 \sin(200\pi \cdot t)$ А. Определить: 1) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного и электрического полей.

Ответ: 1) $T = 10$ мс; 2) $C = 0,25 \cdot 10^{-4}$ Ф; 3) $U_m = 6,37$ В; 4) $W_{\max}^m = 0,5$ мДж; $W_{\max}^e = 0,5$ мДж.

Задача 8. В колебательном контуре наблюдаются свободные незатухающие колебания с энергией 0,5 мДж. Частота собственных колебаний в контуре увеличилась в 2,5 раза при медленном раздвигании пластин конденсатора. Найти работу, совершенную против сил электростатического поля.

Ответ: $A = -2,63$ мДж.

Задача 9. Колебательный контур имеет конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ и катушку индуктивности $L = 0,1$ мГн с общим количеством витков 500. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора равно 300 В. Определите максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку.

Ответ: $\Phi = 8,5$ мкВб.

Задача 10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ, индуктивности $L = 0,23$ Гн и сопротивления $R = 40$ Ом. Конденсатор заряжен зарядом $q = 5,6 \cdot 10^{-4}$ Кл. Найти период колебаний контура, логарифмический декремент затухания. Написать уравнение зависимости изменения напряжения на конденсаторе от времени. Найти напряжение на конденсаторе в моменты времени $T/2$, T , $3/2T$ и $2T$ (T – период колебаний).

Ответ: 1) $T = 8 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $\lambda = 0,7$; 3) $U = 80e^{-87t} \cos(250 \cdot \pi \cdot t)$ В; 4) $U_1 = -56,5$ В; $U_2 = 40$ В; $U_3 = -28$ В; $U_4 = 20$ В.

Задача 11. Катушка колебательного контура имеет индуктивность $L = 1$ Гн. Какое активное сопротивление имеет контур, если амплитуда свободных колебаний в нем за $0,05$ с уменьшается в $2,7$ раза?

Ответ: $R = 40$ Ом.

Задача 12. Индуктивность катушки колебательного контура $L = 5$ мГн, емкость конденсатора $C = 0,05$ мкФ, сопротивление $R = 10$ Ом. Определить количество полных колебаний, в течение которых амплитуда тока уменьшится в e раз.

Ответ: 10.

Задача 13. Определить, через сколько полных колебаний энергия колебательного контура уменьшится в 16 раз, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,138$.

Ответ: 10.

Задача 14. Добротность колебательного контура равна 30 , частота затухающих колебаний 600 кГц. Определить время, за которое амплитуда силы тока в этом контуре уменьшится в 10 раз.

Ответ: $t = 37$ мкс.

Задача 15. Индуктивность катушки колебательного контура $L = 6$ мГн, а емкость конденсатора $C = 0,3$ мкФ. Найти логарифмический декремент затухания и сопротивление контура, если за время $t = 1$ мс разность потенциалов на обкладках конденсатора уменьшилась в 4 раза.

Ответ: $\lambda = 0,37; R = 16,6 \text{ Ом}$.

Задача 16. Колебательный контур имеет параметры: $L = 40 \text{ мкГн}$ и $R = 8 \text{ Ом}$. Определить время, в течение которого амплитуда свободных колебаний уменьшится в e^2 раз.

Ответ: $t = 4L/R = 20 \text{ мкс}$.

Задача 17. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $0,2 \text{ мкФ}$ и катушки индуктивностью $5,07 \text{ мГн}$. При каких значениях логарифмического декремента затухания и сопротивления разность потенциалов на обкладках конденсатора за $0,001 \text{ с}$ уменьшится втрое?

Ответ: $\lambda = 0,22 ; R = 11 \text{ Ом}$.

Задача 18. Индуктивность $L = 2,26 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$ и активное сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой 50 Гц . Найти величину сопротивления R , если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током равен 60° .

Ответ: $R = 12,3 \text{ Ом}$.

Задача 19. Активное сопротивление колебательного контура $R = 0,33 \text{ Ом}$. Какую мощность нужно придать контуру, чтобы в нем существовали незатухающие колебания с амплитудой силы тока $I_0 = 30 \text{ мА}$?

Ответ: $P = \frac{RI_0^2}{2} = 0,15 \text{ мВт}$.

Задача 20. Параметры колебательного контура $C = 10 \text{ пФ}$, $L = 6,0 \text{ мкГн}$, $R = 0,50 \text{ Ом}$. Какую мощность нужно придать контуру, чтобы в нем существовали незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_0 = 10 \text{ В}$?

Ответ: $P = 4,2 \text{ мкВт}$.

Задача 21. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 4 мкФ , катушки индуктивностью 2 мГн и активным сопротивлением 10 Ом . Определить отношение энергии магнитного поля катушки к энергии

электрического поля конденсатора в момент времени, соответствующий максимуму силы тока в контуре.

Ответ: $W_m/W_e = 5$.

Задача 22. Колебательный контур радиоприемника настроен на длину волны 1,5 м. Во сколько раз нужно изменить емкость конденсатора в контуре, чтобы настроиться на частоту 100 МГц?

Ответ: увеличить в 4 раза.

Задача 23. Выразить модуль напряженности электрического поля E плоской волны через модуль вектора Умова-Пойтинга \vec{S} и диэлектрическую проницаемость среды ϵ . Предположить $\mu = 1$.

Ответ: $E = \left(S / c\epsilon_0 \sqrt{\epsilon} \right)^{1/2}$.

Задача 24. Электромагнитная волна с частотой 3,0 МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. Определить изменение длины волны.

Ответ: $\Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1 \right) \frac{c}{\nu} = 50$ м.

Задача 25. Амплитуда напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде, диэлектрическая проницаемость которой $\epsilon = 81$, $H_0 = 0,05$ А/м. Определить амплитуду напряженности электрического поля E_0 и скорость распространения волны в среде.

Ответ $E_0 = 2,09$ В/м; $v = 3,3 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 26. Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси x . Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 5$ мВ/м, амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_0 = 1$ мА/м. Определить энергию, перенесенную волной за время $t = 10$ мин через поверхность, расположенную перпендикулярно оси x , площадь поверхности $S = 15$ см². Период волны $T \ll t$.

Ответ: $W = \frac{1}{2} E_0 H_0 S t = 2,25 \text{ мкДж}$.

Задача 27. Переменное напряжение, действующее значение которого $U_0 = 220 \text{ В}$, а частота $\nu = 50 \text{ Гц}$, включили последовательно с индуктивностью $L = 31,8 \text{ мГн}$ и активным сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. Найти количество тепла Q , выделившегося на активном сопротивлении за 1 с . Как изменится Q , если последовательно с индуктивностью и активным сопротивлением включить конденсатор емкостью $C = 219 \text{ мкФ}$?

Ответ: $Q = 2,4 \text{ кДж}$; увеличится в два раза.

Задача 28. Собственная частота колебаний контура $\nu_0 = 8 \text{ кГц}$, добротность $Q = 72$, в контуре возникают затухающие колебания. Найти закон уменьшения энергии в сопротивлении от времени. Какая часть начальной энергии сохранится в контуре за 1 мс ?

Ответ: $W = W_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right), 50\%$.

Задача 29. На сколько процентов отличается частота свободных колебаний реального контура с добротностью $Q = 5$ от частоты свободных колебаний такого же идеального контура?

Ответ: $0,5\%$.

Задача 30. Цепь переменного тока состоит из последовательно соединенных катушки, конденсатора и резистора. Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC_0} = 173 \text{ В}$, а амплитудное значение напряжения на резисторе $U_{R_0} = 100 \text{ В}$. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Ответ: 60° .

4 ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

4.1 Цель занятия

Усвоить основные законы волновой оптики. Научиться использовать на практике основные соотношения, описывающие такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия и поглощение света.

4.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Для более полного усвоения материала нужно изучить разделы «Интерференция света», «Дифракция света» [1, гл. 12, 13; 3, §119-133; 5, гл. 8.3, 8.4], «Поляризация» и «Дисперсия и поглощение света» [1, гл. 14; 3, §134-146; 5, гл. 8.5], а также использовать конспект лекций.

При изучении раздела «Интерференция света» в первую очередь необходимо научиться проводить расчет интерференционной картины.

Задачи на интерференцию могут быть двух типов:

1) исследование интерференции света от двух когерентных источников излучения, при котором используются зеркала Френеля, бипризмы Френеля, зеркало Ллойда, опыт Юнга и др.

2) исследование интерференции в тонких пленках. Интерференционные полосы равного наклона и равной толщины.

При рассмотрении явления дифракции основной целью является расчет дифракционной картины, то есть нахождение распределения интенсивности света в зависимости от размеров и формы неоднородностей, которые вызывают дифракцию.

Необходимо различать два вида дифракции: дифракцию Фраунгофера (дифракция в параллельных лучах) и дифракцию Френеля (дифракция сходящихся лучей).

При рассмотрении явления поляризации необходимо обратить внимание на такие понятия, как неполяризованная, частично или полностью поляризованная световая волна, плоскость поляризации, поляризатор, анализатор. Стоит также ознакомиться с принципом действия призм Николя и вспомнить законы отражения и преломления света.

Необходимо уяснить содержание таких явлений как поглощение света, рассеяние света и дисперсия света.

4.3 Основные законы и формулы

Интерференция света

1. Скорость света в среде

$$v = c/n,$$

где c – скорость света в вакууме, n – абсолютный показатель преломления среды.

2. Закон отражения света: угол падения лучей равен углу отражения.

3. Закон преломления света

$$\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1 = n_{21},$$

где α и β – углы падения и преломления; n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления для первой и второй среды; n_{21} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

4. Оптический путь света в среде

$$L = \int n dS,$$

где S – геометрический путь.

Если среда однородная, то есть $n = \text{const}$, то оптический путь равен

$$L = nS.$$

5. Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2 S_2 - n_1 S_1,$$

где n_1 и n_2 – показатели преломления; S_1 и S_2 – пути соответствующих волн.

6. Результирующая интенсивность света при наложении двух монохроматических волн одинаковой частоты

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$ – разность фаз волн, Δ – оптическая разность хода, λ_0 – длина

волны в вакууме.

7. Условия интерференционных

максимумов $\Delta = \pm m \lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$

минимумов $\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

8. При отражении света от среды с оптически большей плотностью фаза волны скачком меняется на π , то есть оптический путь световой волны меняется на $\lambda/2$.

9. Разность хода световых волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей плоскопараллельной пластинки или пленки с показателем преломления n_2 :

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda_0}{2}$$

где d – толщина пластинки (пленки), α – угол падения лучей на нее, n_1 – показатель преломления окружающей среды. Второе слагаемое ($\lambda_0/2$) учитывает изменение оптического пути при отражении света от среды с большей оптической плотностью. Для света, проходящего сквозь пленку, отражение световой волны происходит от среды с меньшей оптической плотностью, поэтому дополнительной разности хода световых лучей не наблюдается.

10. Радиусы колец Ньютона в отраженном свете

светлых $r_m = \sqrt{(m-1/2)R\lambda_0}$, $m = 1, 2, 3, \dots$,

темных $r_m = \sqrt{mR\lambda_0}$,

где m – номер кольца ($m = 1, 2, 3 \dots$), R – радиус кривизны линзы.

Дифракция света

11. Внешний радиус m -й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$$
, $m = 1, 2, 3, \dots$

где $m = 1, 2, 3$ – расстояние от диафрагмы с круглым отверстием до точечного источника света, b – расстояние от диафрагмы до экрана, где наблюдается дифракционная картина, m – номер зоны Френеля, λ – длина волны.

Для плоской волны

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}$$
, $m = 1, 2, 3, \dots$

12. Количество открытых зон Френеля для дифракции Френеля от открытого отверстия радиуса r

$$m = \frac{r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

где a – расстояние от источника до отверстия, b – расстояние от отверстия до точки наблюдения.

13. При дифракции Фраунгофера на щели шириной a при нормальном падении света

– условие минимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

– условие максимумов интенсивности

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где φ – угол дифракции, m – номер максимума.

14. При дифракции света на дифракционной решетке с периодом $d = a + b$ (a – ширина щели, b – расстояние между щелями).

– условие главных максимумов интенсивности

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

где m – порядок главного максимума.

15. Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \lambda / \Delta \lambda = mN,$$

где $\Delta \lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta \lambda$), которые можно разделить с помощью этой решетки, m – порядковый номер дифракционного максимума, N – количество щелей в решетке.

16. Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_{\varphi} = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

17. Линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D_l = \delta l / \delta \lambda,$$

где $\delta\varphi$ – угловое расстояние, δl – линейное расстояние между спектральными линиями, которые отличаются по длине волны на $\delta\lambda$.

Для малых углов дифракции

$$D_l \approx fD_\varphi \approx f \frac{m}{d}$$

где f – фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран.

18. Формула Вульфа-Брэгга

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла, θ – угол скольжения (угол между направлением параллельных рентгеновских лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла), который определяет направление, в котором наблюдается зеркальное отражение излучения (дифракционный максимум).

Поляризация света

19. Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} \varphi_B = n_{21},$$

где φ_B – угол падения, при котором отражена световая волна полностью поляризована, $n_{21} = n_2/n_1$ – относительный показатель преломления двух сред.

20. Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \varphi,$$

где I – интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего сквозь анализатор, I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор, φ – угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

21. Степень поляризации света

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}),$$

где, I_{\max} , I_{\min} – соответственно максимальная и минимальная интенсивность частично поляризованного света, прошедшего через анализатор.

Поглощение света. Рассеяние света. Дисперсия света

22. Закон Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где I_0 – значение интенсивности света на входе в слой среды толщиной x , I – значение интенсивности света на выходе из среды, α – коэффициент поглощения среды, который зависит от химической природы, состояния среды и от длины волны λ .

23. Абсолютный показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\epsilon\mu},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость.

24. Дисперсия вещества показывает, как быстро меняется показатель преломления с длиной волны

$$D = dn/d\lambda,$$

Если $dn/d\lambda < 0$, ($dn/d\omega > 0$) – нормальная дисперсия.

Если $dn/d\lambda > 0$, ($dn/d\omega < 0$) – аномальная дисперсия.

25. Групповая скорость

$$u = d\omega/dk,$$

где $\omega = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$ – циклическая частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

26. Связь между групповой и фазовой скоростью

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

где v – фазовая скорость.

4.4 Контрольные вопросы и задания

1. Какое явление называется интерференцией света и условия ее наблюдения?
2. Какие волны называются когерентными?
3. Что такое геометрическая и оптическая разность хода?

4. Запишите условия минимума и максимума интенсивности при интерференции света.
5. Назовите способы получения когерентных источников света.
6. Что такое дифракция света? Какие виды дифракции вы знаете?
7. В чем заключается отличие дифракции Френеля от дифракции Фраунгофера?
8. Определите условия наблюдения дифракции света.
9. В чем заключается принцип построения зон Френеля?
10. Запишите условия дифракционных минимумов и максимумов для одной щели, для дифракционной решетки.
11. Как определяется распределение интенсивности света в случае дифракции в параллельных лучах на одной щели и на дифракционной решетке?
12. Какой вид имеет дифракционный спектр видимого света? Чем он отличается от призматического спектра?
13. Что такое линейная, угловая дисперсия и разрешающая сила дифракционной решетки?
14. Запишите формулу Вульфа-Брэгга. Какое ее практическое применение?
15. Какое явление называется дисперсией света? Чем отличается нормальная дисперсия от аномальной?
16. Какой свет называется естественным, а какой – поляризованным и частично поляризованным?
17. Что называется степенью поляризации света? Чему равна степень поляризации естественного, плоскополяризованного света?
18. Сформулируйте закон Малюса.
19. Под каким углом свет должен падать на границу раздела двух прозрачных диэлектриков, чтобы отраженный луч был полностью поляризован?
20. Что называется поглощением света? Сформулируйте закон Бугера.
21. Какой физический смысл понятия «коэффициент поглощения»? От чего зависит этот коэффициент?
22. Чем отличаются групповая и фазовая скорости волны? Какой формулой они связаны?

4.5 Примеры решения задач

Задача 1. Два когерентных источника света S' и S'' расположены на расстоянии $d = 5$ мм друг от друга и на расстоянии $L = 6$ м от экрана (рис. 4.1). Длина волны источников в вакууме $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Определить на экране местоположение пятого максимума и расстояние между соседними максимумами. Предположив, что источники имеют конечные размеры, определить какой должна быть допустимая ширина щелей d_0 , чтобы на экране получить выразительную интерференционную картину.

Дано: $d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м,

$L = 6$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

$x_5 - ?$ $\Delta x - ?$ $d_0 - ?$

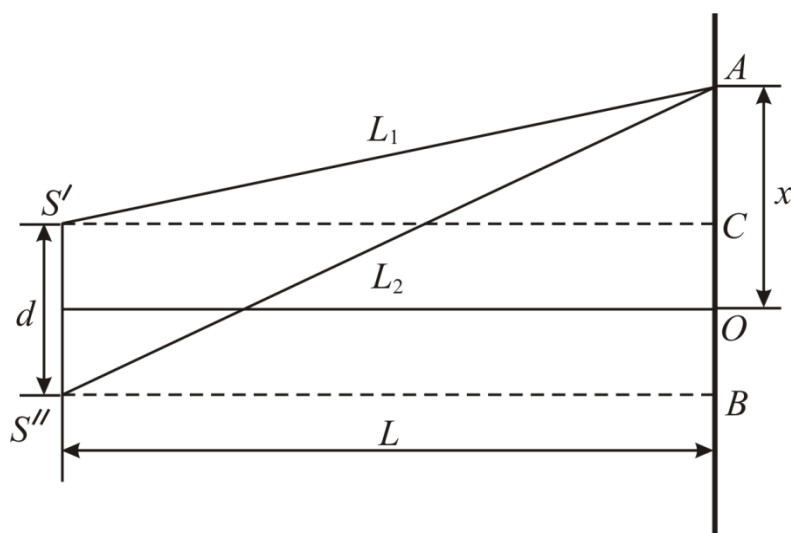


Рисунок 4.1

Анализ и решение

Волны от источников S' и S'' , которые интерферируют в точке A , до встречи проходят различные геометрические пути L_1 и L_2 . Имея в виду, что показатель преломления среды, где распространяются волны, равен единице, можно записать оптическую разность хода двух лучей:

$$\Delta = (L_2 - L_1)n = L_2 - L_1.$$

Условие максимума интенсивности

$$\Delta = m\lambda,$$

$$L_2 - L_1 = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2,$$

Учитывая это, для определения положения максимума нужно связать разность хода с координатой точки А на экране.

Из $\triangle CS'A$ получаем:

$$L_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad \left(CO = \frac{d}{2}\right), \quad (4.2)$$

а из $\triangle BS''A$ получаем

$$L_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \quad (4.3)$$

Вычитая от (4.3) соотношение (4.2), имеем:

$$\begin{aligned} L_2^2 - L_1^2 &= 2xd, \\ (L_2 - L_1)(L_2 + L_1) &= 2xd. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Имея в виду, что расстояние между источниками гораздо меньше, чем расстояние от источников излучения до экрана, можно считать $L_1 \approx L_2 \approx L$, то есть $L_2 + L_1 = 2L$, тогда из (4.4) следует:

$$L_2 - L_1 = 2xd/2L = xd/L.$$

Используя (4.1), определяем положение m -го максимума:

$$\begin{aligned} x_m d/L &= m\lambda, \\ x_m &= \frac{m\lambda L}{d}. \end{aligned}$$

Если среда имеет показатель преломления n , то:

$$x_m = \pm \frac{m\lambda L}{nd}.$$

$$x_5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \text{положение пятого максимума.}$$

Расстояние между соседними максимумами (а также и расстояние между соседними минимумами)

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{m+1} - x_m = \frac{L}{d} \lambda, \\ \Delta x &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Таким образом, расстояние Δx не зависит от порядка интерференции, то есть интерференционная картина имеет вид светлых и темных полос равной ширины.

Если источники излучения протяженные, то каждая точка щели может считаться точечным источником. Интерференционная картина от крайних точек щели будет состоять из двух интерференционных картин, сдвинутых друг относительно друга на расстояние d_0 . Если это расстояние меньше расстояния между соседними светлой и темной полосами, равного $L\lambda/2d$, то суммарная интерференционная картина будет выразительной. Это означает, что суммарная интерференционная картина выразительная, если выполняется условие $d_0 \leq L\lambda/2d$, то есть

$$d_0 \leq \frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 2. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления 1,33 падает нормально параллельный пучок белого света. При какой наименьшей толщине пленки она будет наиболее прозрачной для света с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм? При какой наименьшей толщине пленка одновременно будет наиболее прозрачной для света с длинами волн $\lambda_1 = 600$ нм, $\lambda_2 = 500$ нм?

Дано: $n = 1,33$; $\lambda_1 = 600$ нм; $\lambda_2 = 500$ нм;

$d_1 - ?$ $d_2 - ?$

Анализ и решение

При падении на пленку свет частично проходит, частично отражается от ее поверхности. В проходящем свете интерferируют две волны, одна из которых проходит через пленку без отражения, а вторая – после отражения от обеих поверхностей пленки (рис. 4.2, лучи 1 и 2). Результат интерференции зависит от оптической разности хода, которая при нормальном падении лучей имеет вид:

$$\Delta = 2dn. \quad (4.5)$$

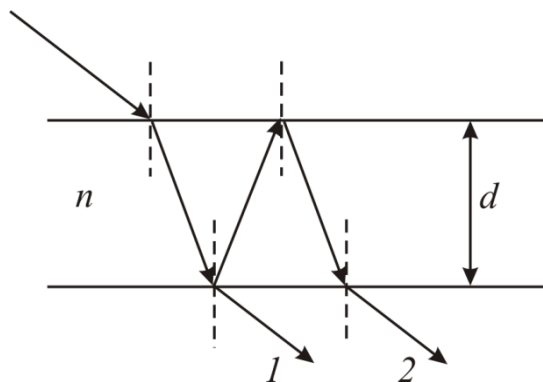


Рисунок 4.2

Пленка будет наиболее прозрачной, если разность хода (4.5) равна целому числу длин волн:

$$\Delta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

Приравнявая (4.5) и (4.6), получим:

$$2dn = m\lambda, \\ d = \frac{\lambda_1 m}{2n} \quad (\text{для } \lambda_1). \quad (4.7)$$

Наименьшая толщина пленки соответствует $m = 1$, то есть

$$d = \lambda_1 / 2n = 0,23 \text{ мкм.}$$

Пленка будет наиболее прозрачной для волн с длинами λ_1 и λ_2 одновременно тогда, когда выполняются и условие (4.7), и условие

$$d = \frac{\lambda_2 k}{2n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

Приравняв правые части (4.7) и (4.8), найдем

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k}{m}.$$

Это означает, что наибольшая прозрачность для двух заданных длин волн одновременно возможна, если отношение этих длин волн равна отношению двух целых чисел.

По условию

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \dots,$$

то есть $k = 6$, $m = 5$ – минимально возможные значения. Наименьшая толщина пленки, которая соответствует этим k и m , согласно (4.7) и (4.8)

$$d = \frac{5\lambda_1}{2n} = \frac{6\lambda_2}{2n} = 1,15 \text{ (мкм).}$$

Задача 3. Желтый свет натрия (которому соответствуют длины волн 589,00 нм и 589,59 нм) падает на дифракционную решетку, имеющую 7500 штрихов на сантиметр. Определить: 1) максимум какого наибольшего порядка наблюдается для желтого света натрия; 2) угловую дисперсию дифракционной решетки; 3) ширину решетки, которая необходима для разделения двух линий натрия; 4) разрешающую способность дифракционной решетки в этом случае.

Дано: $\lambda_1 = 589,00$ нм; $\lambda_2 = 589,59$ нм; $N = 7500$ штр/см.

$m_{\max} - ?$ $D_{\phi} - ?$ $l - ?$ $R - ?$

Анализ и решение:

Согласно условию максимумов для дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (4.9)$$

где d – постоянная (период) дифракционной решетки, λ – длина волны, m – порядок дифракционного максимума, φ – угол отклонения лучей, которые соответствуют m -му дифракционному максимуму.

Учитывая то, что постоянная решетки d связана с количеством штрихов на единицу длины решетки N , как $d = \frac{1}{N}$, имеем $d = \frac{10^{-2}}{7500} = 1,33 \cdot 10^{-6}$ м.

Наибольший порядок максимума для $\lambda_1 = 589,00$ нм, который можно наблюдать с помощью этой решетки, найдем из формулы (4.9), принимая во внимание, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° :

$$m \leq \frac{d}{\lambda} \sin \varphi_{\max},$$
$$m \leq \frac{1,33 \cdot 10^{-6}}{5,89 \cdot 10^{-7}} = 2,25.$$

m – целое число. Таким образом, максимальный порядок $m_{\max} = 2$.

2) Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}.$$

Линия натрия в спектре второго порядка наблюдается при

$$\sin \varphi = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{1,33 \cdot 10^{-6}} = 0,886,$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = 0,464,$$

$$D_\varphi = \frac{2}{1,33 \cdot 10^{-6} \cdot 0,464} = 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ (рад/нм)}.$$

3) Для разделения двух линий натрия необходимо разрешение решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589 \cdot 10^{-9}}{0,59 \cdot 10^{-9}} = 1000.$$

Чтобы достичь такого разрешения, общее количество штрихов решетки, учитывая $R = mN'$, должно быть равно $N' = \frac{R}{m}$.

$$\text{Ширина решетки } l = N' \cdot d = \frac{R}{m} d = \frac{1000}{2} \cdot 1,33 \cdot 10^{-6} = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 4. Какой угол составляют между собой главные плоскости поляризаторов, если интенсивность естественного света, прошедшего сквозь два поляризатора, уменьшилась в 3,29 раз? При прохождении каждого из поляризаторов потери на отражение и поглощение света равны $k = 10\%$.

Дано: $I_0/I_2 = 3,29$, $k = 10\%$.

$\varphi - ?$

Анализ и решение

Поляризатор пропускает колебания, параллельные главной плоскости поляризатора, поэтому интенсивность естественного света после прохождения идеального поляризатора уменьшается вдвое. С учетом потерь при отражении и поглощении интенсивность света, прошедшего сквозь первый поляризатор

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - k),$$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый поляризатор.

Интенсивность света, прошедшего сквозь второй поляризатор (анализатор), с учетом потерь, найдем по закону Малюса

$$I_2 = I_1 (1 - k) \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 (1 - k)^2 \cos^2 \varphi.$$

Согласно условию задачи $I_0/I_2 = 3,29$, тогда

$$\cos \varphi = \frac{1}{1 - k} \sqrt{\frac{2I_2}{I_0}},$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{1}{1 - k} \sqrt{\frac{2I_2}{I_0}} \right); \varphi = 30^\circ.$$

Задача 5. Под каким углом должен падать пучок света из воздуха на поверхность воды ($n = 1,33$), чтобы при отражении от дна стеклянного сосуда ($n = 1,5$) свет был полностью поляризованный?

Дано: $n_1 = 1,33$; $n_2 = 1,5$.

$\alpha - ?$

Анализ и решение

На рис. 4.3 изображено явление прохождения света сквозь границу раздела двух диэлектриков. На границе воздух-вода естественный свет (луч 1) частично отражается (луч 2), частично преломляется (луч 3) (рис. 4.3). Преломленный луч 3 частично поляризован. Он частично отражается от границы вода-стекло (луч 4).

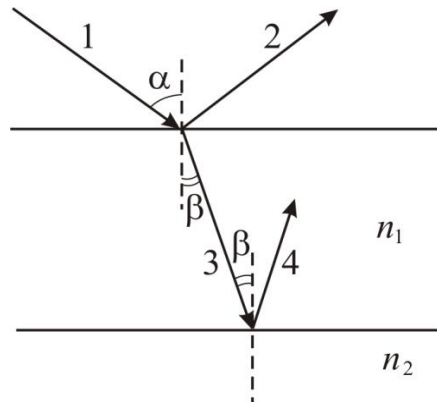


Рисунок 4.3

Для того, чтобы отраженный луч 4 был полностью поляризован, должно выполняться условие:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= n_{21} = n_2 / n_1, \\ \beta &= \operatorname{arctg} (n_2 / n_1). \end{aligned}$$

Чтобы найти угол падения, воспользуемся законом преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n} = n_1$$

где $n = 1$ – показатель преломления воздуха.

В итоге имеем:

$$\alpha = \arcsin \left[n_1 \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} \right) \right] = 84^\circ.$$

Задача 6. Частично поляризованный свет проходит сквозь николю. При повороте николя на 60° от положения, которое соответствует максимальной интенсивности, интенсивность светового пучка уменьшается в 2 раза. Пренебрегая поглощением света в николе, определите: 1) отношение интенсивностей естественного и плоско поляризованного света; 2) степень поляризации пучка.

Дано: $\alpha = 60^\circ$; $I'/I'' = 2$.

I_e/I_n ?

Анализ и решение

В первом положении николь полностью пропустит линейно поляризованный свет I_n , а также половину интенсивности естественного света I_e

Таким образом, интенсивность прошедшего света

$$I' = I_n + 0,5I_e. \quad (4.10)$$

Во втором положении интенсивность пропущенного поляризованного света изменится в соответствии с законом Малюса и сумма будет выглядеть:

$$I'' = I_n \cos^2 \alpha + 0,5I_e. \quad (4.11)$$

Согласно условию задачи $I' = 2I''$. Используя (4.10) и (4.11), получим

$$I_n + 0,5I_e = 2(I_n \cos^2 60^\circ + 0,5I_e),$$

$$I_n + 0,5I_e = 2\left(\frac{1}{4}I_n + 0,5I_e\right),$$

$$I_n = I_e.$$

Итак, отношение интенсивностей естественного и плоско поляризованного света равно единице.

Степень поляризации находится по соотношению:

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$$

Очевидно, что $I_{\max} = I' = I_n + 0,5I_e$, а $I_{\min} = 0,5I_e$.

Таким образом,

$$P = \frac{(I_n + 0,5I_e) - 0,5I_e}{(I_n + 0,5I_e) + 0,5I_e} = \frac{I_n}{I_n + I_e} = \frac{I_n}{2I_n} = 0,5.$$

4.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. На пути световой волны, распространяющейся в воздухе, поставили стеклянную пластинку ($n=1,5$) толщиной 1 мм. Как изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластинку: 1) нормально, 2) под углом 30° .

Ответ: увеличится 1) на 0,5 мм; 2) на 0,548 мм.

Задача 2. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга $d = 0,5$ мм ($\lambda = 0,6$ мкм). Найти ширину Δx интерференционных полос, если расстояние L от щелей до экрана составляет 1 м.

Ответ: $\Delta x = 1,2$ мм.

Задача 3. Найти расстояние между щелями d в опыте Юнга, если расстояние между третьим и пятым интерференционными минимумами равно $l = 0,8$ см, длина волны $\lambda = 0,48$ мкм, экран расположен на расстоянии $L = 5$ м от щелей.

Ответ: $d = 0,6$ мм.

Задача 4. На мыльную пленку ($n = 1,3$), которая расположена на воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине пленки d отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции.

Ответ: $d = 0,1$ мкм.

Задача 5. Чему равна толщина оптического покрытия d из MgF_2 ($n_1 = 1,38$), предназначенное для гашения света с длиной волны $\lambda = 550$ нм при нормальном падении на стекло ($n_2 = 1,5$)?

Ответ: $d = 99,6$ нм.

Задача 6. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм). Определить угол α между поверхностями клина, если расстояние между соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно 4 мм.

Ответ: $\alpha = 10,3''$.

Задача 7. Поверхности стеклянного клина ($n = 1,5$) создают между собой угол $\alpha = 0,2'$. На клин, нормально к его поверхности, падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм. Определить ширину интерференционной полосы.

Ответ: $b = \frac{\lambda}{2n\alpha} = 3,15$ мм.

Задача 8. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластине. Определить толщину h слоя воздуха там, где в отраженном свете ($\lambda = 0,6$ мкм) наблюдается первое светлое кольцо Ньютона.

Ответ: $h = 0,15$ мкм.

Задача 9. При наблюдении колец Ньютона в желтом свете $\lambda = 0,58$ мкм, проходящем через установку, пространство между линзой и стеклянной пластиной заполнено водой ($n = 1,33$). Разница радиусов шестнадцатого и четвертого колец Ньютона $\Delta r_{16,4} = 1,32 \cdot 10^{-3}$ м. Определить радиус кривизны линзы R .

Ответ: $R = 1$ м.

Задача 10. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого R можно менять. Расстояние от диафрагмы до источника и от диафрагмы до экрана $a = 100$ см и $b = 125$ см, соответственно. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $R_1 = 1$ мм, а следующий максимум при $R_2 = 1,29$ мм.

Ответ: $\lambda = 0,6$ мкм.

Задача 11. Радиус четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус шестой зоны Френеля.

Ответ: $r_6 = 3,67$ мкм.

Задача 12. Плоская световая волна ($\lambda = 0,5$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало зоны Френеля: 1) одну; 2) две?

Ответ: 1) $b = 50$ м; 2) $b = 25$ м.

Задача 13. На щель шириной $a = 0,1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,5$ мкм). За щелью расположена собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол φ дифракции равен: 1) $17'$; 2) $43'$?

Ответ: первый дифракционный минимум; дифракционный максимум, что соответствует $m = 2$.

Задача 14. На дифракционную решетку, которая имеет $N = 400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Найти общее количество дифракционных максимумов, которые имеет решетка. Определить угол дифракции φ , соответствующий последнему максимуму.

Ответ: $m_{\max} = 8$; $\varphi_{\max} = 74^\circ$.

Задача 15. На дифракционную решетку, которая имеет 50 штрихов на 1 мм, падает параллельно пучок белого света. Какая разница углов отклонения конца первого и начала второго спектра? Длину крайних красных и крайних фиолетовых волн принять равными 760 и 400 нм.

Ответ: $\Delta\varphi = 7'$.

Задача 16. На дифракционную решетку, которая имеет $N = 500$ штрихов на 1 мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр спроецирован расположенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние L от линзы до экрана равно 3 м. Граница видимости спектра $\lambda_{\text{красн}} = 780$ нм, $\lambda_{\text{фиол}} = 400$ нм.

Ответ: $b_1 = 66$ см.

Задача 17. При прохождении в веществе расстояния 1,5 см интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Чему равен путь, на котором интенсивность света уменьшится в 9 раз?

Ответ: $x = 3$ см.

Задача 18. При прохождении в некотором веществе расстояния x интенсивность света уменьшается в 2 раза. Как изменится интенсивность света при прохождении втрое большего пути?

Ответ: уменьшится в 8 раз.

Задача 19. Определить, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего сквозь два николя, расположенных так, что угол между главными плоскостями равен 45° , а в каждом николе теряется 5% интенсивности падающего на него света.

Ответ: $I_0/I_2 = 4,52$.

Задача 20. Определить степень поляризации P света, образованного смесью естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света в три раза больше интенсивности естественного.

Ответ: $P = 0,75$.

Задача 21. Угол между главными плоскостями анализатора и поляризатора равен 60° . Во сколько раз увеличится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол уменьшить до 45° ?

Ответ: $I_2/I_1 = 2$.

Задача 22. Угол преломления луча в жидкости $\beta = 35^\circ$. Определить показатель преломления n жидкости, если известно, что отраженный пучок света максимально поляризован.

Ответ: $n = 1,43$.

Задача 23. Определить угол полной поляризации при отражении света от стекла, показатель преломления которого равен $1,57$.

Ответ: $\varphi_n = 57^\circ 30'$.

Задача 24. Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества равен 45° . Чему равен для этого вещества угол полной поляризации?

Ответ: $\varphi_n = 54^\circ 44'$.

Задача 25. Чему равен показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления 30° ?

Ответ: $1,73$.

Задача 26. В опыте Юнга найти расстояние x между центральной полосой и четвертым интерференционным максимумом, если расстояние между щелями $d = 0,5$ мм, экран расположен на расстоянии $L = 3$ м от щелей, длина волны $\lambda_0 = 0,58$ мкм.

Ответ: $x = 14$ мм.

Задача 27. Пучок монохроматических ($\lambda = 0,6$ мкм) световых волн падает под углом 30° на расположенную в воздухе мыльную пленку ($n = 1,3$). При какой наименьшей толщине пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией, максимально усилены?

Ответ: $t_1 = 0,25$ мкм; $t_2 = 0,125$ мкм.

Задача 28. Между стеклянной пластинкой и расположенной на ней плоско-выпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Радиус r_8 восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 700$ нм) равен 2 мм. Радиус R кривизны выпуклой поверхности линзы равен 1 м. Найти показатель преломления n жидкости.

Ответ: $n = 1,4$.

Задача 29. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань кристалла. Под углом $\theta = 65^\circ$ к плоскости грани наблюдается максимум первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями кристалла 280 нм. Определить длину волны λ рентгеновского излучения.

Ответ: $\lambda = 506$ нм.

Задача 30. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,2$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей $I_n / I_{\text{ест.}}$.

Ответ: $I_n / I_{\text{ест.}} = 0,25$.

5 РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

5.1 Цель занятия

Изучение законов теплового излучения и овладение методикой решения задач на основе этих законов.

5.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию необходимо изучить теоретический материал по конспекту лекций или учебнику [2, гл. 1, 4, § 1-7; 5, гл. 9.1], усвоить смысл физических величин, характеризующих тепловое излучение и законов теплового излучения (закон Кирхгофа, закон Стефана-Больцмана, законы Вина, закон Рэлея-Джинса, формула Планка), ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенных в примерах.

5.3 Основные законы и формулы

1. Поток (мощность) излучения

$$\Phi = W/t,$$

где W – энергия излучения, t – время.

2. Интегральная энергетическая светимость тела (интегральная излучательная способность)

$$R_e = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{t \cdot S},$$

где S – площадь тела.

3. Спектральная энергетическая светимость (спектральная излучательная способность, спектральная плотность энергетической светимости) тела

$$r(\nu, T) = dR_e/d\nu,$$

где R_e – энергетическая светимость; ν – частота излучения.

4. Связь между длиной волны и частотой теплового излучения

$$\lambda = c/\nu,$$

где λ – длина волны, c – скорость света.

5. Связь между излучательной способностью в частотном диапазоне $r(\nu, T)$ и диапазоне длин волн $r(\lambda, T)$

$$r(\lambda, T) = r(\nu, T) \frac{c}{\lambda^2}.$$

6. Поглощательная способность тела

$$\alpha(\nu, T) = d\Phi'/d\Phi,$$

где $d\Phi$ – поток лучистой энергии, падающей на элементарную площадь поверхности,

$d\Phi'$ – поток, поглощаемый этой площадью.

7. Закон Кирхгофа

$$r(\nu, T)/\alpha(\nu, T) = f(\nu, T),$$

где $f(\nu, T)$ – универсальная функция Кирхгофа

.

8. Закон Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e – интегральная энергетическая светимость абсолютно черного тела,
 T – термодинамическая температура,

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана.

9. Энергетическая светимость серого тела

$$R = \alpha(\nu, T)\sigma T^4.$$

10. Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = b/T,$$

где λ_{\max} – длина волны, на которую приходится максимум спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела,

$b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

11. Зависимость спектральной максимальной излучательной способности от температуры (второй закон Вина)

$$r_{\max}(\lambda, T) = CT^5,$$

где C – постоянная ($C = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/м³·К⁵).

12. Формула Планка

$$r(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

где $r(\lambda, T)$ и $r(\nu, T)$ – излучательные способности абсолютно черного тела,

λ – длина волны,

ν – частота,

c – скорость света в вакууме,

k – постоянная Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К),

T – термодинамическая температура,

h – постоянная Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

13. Энергия кванта

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = \hbar\omega,$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

5.4 Контрольные вопросы и задания

1. Что называют тепловым излучением?
2. Назовите характеристики теплового излучения.
3. Какое тело называют абсолютно черным, серым?
4. Какое излучение называется равновесным?
5. Сформулируйте законы теплового излучения – закон Кирхгофа, закон Стефана-Больцмана, закон Вина.
6. Объясните физический смысл универсальной функции Кирхгофа.
7. Что такое квант? Чему равна энергия кванта?
8. Запишите формулу Планка для теплового излучения.
9. Дайте определение радиационной, цветовой и яркостной температуре.

5.5 Примеры решения задач

Задача 1. Поверхность Солнца по своим свойствам близка к абсолютно черному телу. Максимум эмиссионной способности приходится на длину волны $\lambda_m = 0,50$ мкм (в излучении Солнца, прошедшего сквозь атмосферу и достигнувшего поверхности Земли, максимум приходится на $\lambda_m = 0,55$ мкм).

Определить:

- 1) температуру T солнечной поверхности;
- 2) энергию W , излучаемую Солнцем за 1 секунду в виде электромагнитных волн;
- 3) массу Δm , теряемую Солнцем за 1 секунду за счет излучения;
- 4) примерное время τ , за которое масса Солнца уменьшилась бы за счет излучения на 1%, если бы температура Солнца оставалась постоянной.

Дано:

$$\lambda_m = 0,50 \text{ мкм}; t = 1 \text{ с}; \frac{\Delta m_1}{M_c} = 0,01; M_c = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг (масса Солнца);}$$

$$r_c = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м (радиус Солнца); } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с (скорость света).}$$

$$T - ? W - ? \Delta m - ? \tau - ?$$

Анализ и решение

Температуру T солнечной поверхности можно определить по закону смещения Вина:

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{0,50 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 5,8 \text{ (кК)}. \quad (5.1)$$

Энергия, излучаемая Солнцем, равна произведению потока энергии на время, за которое этот поток излучается, то есть:

$$W = \Phi \cdot t. \quad (5.2)$$

Поток энергии Φ , излучаемый Солнцем, равен произведению излучательности (энергетической светимости) на площадь его поверхности:

$$\Phi = R_e \cdot S$$

Энергетическую светимость R_e находим из закона Стефана-Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4. \quad (5.3)$$

Площадь солнечной поверхности

$$S = 4\pi r_c^2. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.1), (5.3), (5.4) в формулу (5.2), получим

$$W = 4\pi r_c^2 \cdot \sigma b^4 t / \lambda^4 = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Дж.} \quad (5.5)$$

Массу Δm , что теряет Солнце каждую секунду за счет излучения электромагнитных волн, найдем из следующих соображений.

Поскольку масса Солнца уменьшается каждую секунду на величину Δm , то при этом выделяется энергия $\Delta E = (\Delta m)c^2$, где c – скорость электромагнитного излучения.

Эта же энергия электромагнитных волн, излучаемых за время t , равна произведению потока энергии Φ (мощность излучения) на время t (5.2). Таким образом, $W = c^2 \Delta m$, откуда, с учетом (5.5):

$$\Delta m = \frac{W}{c^2} = \frac{4\pi r_c^2 \cdot \sigma b^4 \cdot t}{c^2 \cdot \lambda^4}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$\Delta m = 4,3 \text{ Гкг.}$$

Поскольку каждую секунду масса Солнца уменьшается за счет излучения на 4,3 Гкг, то уменьшение массы Солнца на 1% (то есть $\Delta m_1 = 0,01M_c$) произойдет за время

$$\tau = \frac{0,01M_c}{\Delta m} = \frac{1,98 \cdot 10^{28} \text{ кг}}{4,3 \cdot 10^9 \text{ кг/с}} \approx 10^{11} \text{ лет.}$$

Задача 2. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности излучательности $r_{\max}(\lambda, T)$ сместился с $\lambda_1 = 2,4$ мкм до $\lambda_2 = 0,8$ мкм. Как и во сколько раз изменилась излучательность R_e тела и максимальная спектральная плотность излучательности $r_{\max}(\lambda, T)$?

Дано: $\lambda_1 = 2,4$ мкм; $\lambda_2 = 0,8$ мкм.

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = ? \quad \frac{r_{\max 2}(\lambda, T)}{r_{\max 1}(\lambda, T)} = ?$$

Анализ и решение

Излучательность (энергетическую светимость) абсолютно черного тела найдем из закона Стефана-Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4.$$

Для температуры T_1 , которой соответствует максимум спектральной излучательности $r(\lambda, T)$ на длине волны $\lambda_1 = 2,4$ мкм **излучательность** $R_{e1} = \sigma T_1^4$. Для температуры T_2 , которой соответствует максимум спектральной излучательной способности $r(\lambda, T)$ на длине волны $\lambda_2 = 0,8$ мкм, соответственно **находим** $R_{e2} = \sigma T_2^4$.

Тогда

$$R_{e2}/R_{e1} = T_2^4/T_1^4. \quad (5.6)$$

Температуры T_1 и T_2 определим из закона смещения Вина:

$$\lambda_m = b/T$$

Тогда

$$T_1 = b/\lambda_1; T_2 = b/\lambda_2.$$

Подставив T_1 и T_2 в формулу (5.6), получим

$$R_{e2}/R_{e1} = \lambda_1^4/\lambda_2^4 = 81 \text{ раз.}$$

Максимальную спектральную излучательную способность находим по формуле:

$$r_{\max}(\lambda, T) = CT^5,$$

Тогда

$$r_{\max 2}(\lambda, T)/r_{\max 1}(\lambda, T) = T_2^5/T_1^5 = \lambda_1^5/\lambda_2^5 = 243 \text{ раз.}$$

5.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Определить температуру T , при которой излучательность (энергетическая светимость) R_e абсолютно черного тела равна 10 кВт/м^2 .

Ответ: 648 К.

Задача 2. Поток энергии Φ , излучаемый со смотрового окошка плавильной печи, равен 34 Вт. Определить температуру T печи, если площадь отверстия $S = 6 \text{ см}^2$.

Ответ: 1 кК.

Задача 3. Определить энергию W , излучаемую за время $t = 1$ мин. смотровым окошком площадью $S = 8 \text{ см}^2$ плавильной печи, если ее температура $T = 1,2 \text{ кК}$.

Ответ: 5,65 кДж.

Задача 4. Считая, что муфельная печь излучает как абсолютно черное тело и рассеивает стенками 70% мощности, определить температуру ее внутренней поверхности при открытом смотровом отверстии площадью $S = 20 \text{ см}^2$, если потребляемая печью мощность, равна $P = 1,4 \text{ кВт}$.

Ответ: $T = 1386 \text{ К}$.

Задача 5. Термодинамическая температура абсолютно черного тела возросла в 3 раза. Определить, во сколько раз увеличилась при этом его интегральная энергетическая светимость? Во сколько раз и как изменилась длина волны, соответствующая максимуму его излучательной способности?

Ответ: 1) 81 раз; 2) уменьшилась в 3 раза.

Задача 6. Энергия, излучаемая за время $t = 2$ минуты из смотрового окошка плавильной печи площадью $S = 10 \text{ см}^2$, равна $W = 8 \text{ кДж}$. Определить температуру печи.

Ответ: $T = 1041 \text{ К}$.

Задача 7. Температура T верхних слоев звезды Сириус равна 10 кК. Определить поток энергии Φ , излучаемой с поверхности площадью $S = 1 \text{ км}^2$ этой звезды.

Ответ: $567 \cdot 10^{12} \text{ Вт} = 567 \text{ ТВт}$.

Задача 8. Во сколько раз нужно увеличить термодинамическую температуру абсолютно черного тела, чтобы его интегральная излучательная способность выросла в два раза?

Ответ: В 1,19 раз.

Задача 9. Определить относительное изменение интегральной энергетической светимости черного тела $\Delta R_e/R_e$ при увеличении его температуры на 1%.

Ответ: 4%.

Задача 10. Определить температуру T зачернённой металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной

атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца ($1,49 \cdot 10^{11}$ м). Солнечная постоянная $C = 1,4$ кДж/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$).

Ответ: 396 К.

Задача 11. Считая, что коэффициент черноты угля при температуре $T = 600$ К равен 0,8. Определить излучательную способность угля R ; энергию W , которая излучается с поверхности угля площадью $S = 5$ см^2 за $t = 10$ минут.

Ответ: $R = 5,88$ кДж/ $\text{м}^2 \cdot \text{с}$; $W = 1,76$ кДж.

Задача 12. С поверхности сажи площадью $S = 2$ см^2 при температуре $T = 400$ К за время $t = 5$ минут излучается энергия $W = 83$ Дж. Определить коэффициент черноты сажи.

Ответ: 0,953.

Задача 13. Можно условно считать, что Земля излучает как серое тело, имеющее температуру $T = 280$ К. Определить коэффициент черноты Земли, если излучательная способность R ее поверхности равна 325 кДж/ $\text{м}^2 \cdot \text{час}$.

Ответ: 0,25.

Задача 14. Мощность P излучения шара радиусом $R = 10$ см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Найти эту температуру, считая шар серым телом с коэффициентом черноты 0,25.

Ответ: $T = \left(\frac{P}{4\pi\alpha R^2\sigma} \right)^{1/4} = 866$ К.

Задача 15. Муфельная печь потребляет мощность $P = 1$ кВт. Температура ее внутренней поверхности, при открытом отверстии площадью $S = 25$ см^2 , равна 1,2 кК. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть n мощности рассеивается стенками печи.

Ответ: $n = 1 - \sigma T^4 S / P \approx 0,71$.

Задача 16. Максимум спектральной плотности излучательности $r_{\text{max}}(\lambda, T)$ звезды Арктур приходится на длину волны $\lambda_m = 580$ нм. Считая, что

звезда излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T поверхности звезды.

Ответ: 4,98 кК.

Задача 17. Температура T верхних слоев Солнца равна 5,3 кК. Считая Солнце абсолютно черным телом, определить длину волны λ_m , которой соответствует максимальная спектральная излучательная способность $r_{\max}(\lambda, T)$ Солнца.

Ответ: 547 нм.

Задача 18. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной излучательной способности $r_{\max}(\lambda, T)$, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2 .

Ответ: 3,62 кК; 7,24 кК.

Задача 19. Определить температуру T абсолютно черного тела, при которой максимум спектральной излучательной способности $r_{\max}(\lambda, T)$ приходится на красную границу видимого спектра $\lambda_1 = 750$ нм, на фиолетовую $\lambda_2 = 380$ нм.

Ответ: 3,8 кК; 7,6 кК.

Задача 20. При переходе от температуры T_1 до температуры T_2 площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности энергии равновесного излучения по длинам волн, увеличивается в 16 раз. Как изменится при этом длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной излучательной способности абсолютно черного тела?

Ответ: λ_m уменьшается в два раза.

Задача 21. Максимальная спектральная излучательная способность $r_{\max}(\lambda, T)$ абсолютно черного тела равна $4,16 \cdot 10^{11}$ Вт/м³. На какую длину волны λ_m она приходится?

Ответ: 1,45 мкм.

Задача 22. Шар радиусом $r = 8$ см излучает как серое тело. Мощность излучения при постоянной температуре шара $T = 1000$ К равна $P = 800$ Вт. Определить коэффициент черноты шара.

Ответ: 0,18.

Задача 23. Длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности, увеличилась на $\Delta\lambda = 600$ нм при охлаждении абсолютно черного тела. Термодинамическая температура тела при этом уменьшилась в три раза. Найти начальную и конечную температуры и длины волн, на которые приходятся максимумы излучательной способности на этих температурах. Во сколько раз изменилась спектральная излучательная способность?

Ответ: 1) $T_1 = 9,66$ кК, $T_2 = 3,22$ кК; 2) $\lambda_1 = 300$ нм, $\lambda_2 = 900$ нм; 3) 243.

Задача 24. Длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности абсолютно черного тела, уменьшилась в три раза при увеличении его температуры от T_1 до T_2 . Определить, во сколько раз и как изменится площадь, ограниченная графиком зависимости спектральной излучательной способности тела от длины волны.

Ответ: увеличится в 81 раз.

Задача 25. Куб, ребра которого $a = 20$ см, нагрет до определенной постоянной температуры. Излучаемая мощность куба $P = 2$ кВт, коэффициент черноты $\alpha = 0,2$. Найти температуру куба.

Ответ: $T = 930$ К.

Задача 26. К медному цилиндру длиной $l = 4$ см и диаметром $d = 2$ см подводится тепло мощностью $P = 0,2$ Вт. В результате температура цилиндра поддерживается постоянной и равной $t = 17^\circ\text{C}$. Определить температуру пространства, окружающего цилиндр. Поглощающая способность меди 0,6.

Ответ: $t_0 = -5^\circ\text{C}$.

Задача 27. По проводу диаметром $d = 1$ мм протекает ток $I = 5$ А. Температура провода поддерживается постоянной и равной $t = 727^\circ\text{C}$. Удельное сопротивление провода $\rho = 9,2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м. Температура окружающей

среды $t=17^\circ\text{C}$. Считая поверхность провода серой, найти его поглощающую способность.

Ответ: 0,165.

Задача 28. Звезда массой $m=1,98 \cdot 10^{30}$ кг и радиусом $R=6,95 \cdot 10^8$ м излучает как абсолютно черное тело. Максимум излучательной способности звезды приходится на длину волны $\lambda=480$ нм. Найти ее максимальную спектральную излучательную способность $r_{\max}(\lambda, T)$ и время t , за которое звезда потеряет свою массу вследствие излучения электромагнитных волн.

Ответ: 1) $r_{\max}(\lambda, T) = 1,04 \cdot 10^{14}$ Вт/м³, 2) $t = 1,24 \cdot 10^{13}$ лет.

Задача 29. Считая, что Солнце имеет свойства абсолютно черного тела, определить интенсивность I солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы (эта интенсивность называется солнечной постоянной). Температура солнечной поверхности $T = 5785$ К.

Ответ: $I = \sigma T^4 (r/R)^2 = 1,37$ кВт/м² (r – радиус Солнца, R – расстояние от Солнца до Земли).

Задача 30. Считая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислить интегральную излучательную способность и температуру его поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом $\theta = 32'$. Солнечная постоянная $C = 1,4$ кДж/(м² · с) (солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца).

Ответ: $R_e = 64,7$ МВт/м²; $T = 5,8$ кК.

6 КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ

6.1 Цель занятия

Ознакомиться с явлениями, которые свидетельствуют о квантовые свойства излучения – внешним фотоэффектом, давлением света и эффектом Комптона. Научиться решать задачи, пользуясь уравнением Эйнштейна, определять энергию, массу, импульс фотона, давление света, изменение длины волны фотона при его рассеянии на электронах.

6.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Пользуясь конспектом лекций и учебными пособиями [2, гл. 2, 4, § 8-11; 5, гл. 9], ознакомиться с явлениями, которые свидетельствуют о квантовой природе излучения. Изучить законы фотоэффекта, уравнение Эйнштейна; формулу Комптона; соотношения, определяющие энергию, массу, импульс фотона; давление света. Ответить на контрольные вопросы, проанализировать решения задач, приведенных в качестве примера.

6.3 Основные законы и формулы

1. Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = \hbar\omega,$$

где h – постоянная Планка, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,

ν – частота излучения, λ – длина волны,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + T_{\max},$$

или

$$\hbar\omega = A + T_{\max},$$

где $h\nu = \hbar\omega = \varepsilon$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла,

A – работа выхода электрона из металла,

T_{\max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

3. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона:

а) нерелятивистский фотон (энергия фотона гораздо меньше энергии покоя электрона ($\varepsilon \ll E_0 = 0,51$ МэВ)).

$$T_{\max} = m_0 v_{\max}^2 / 2,$$

где m_0 – масса покоя электрона.

б) релятивистский фотон (энергия фотона сравнима с энергией покоя электрона или больше нее)

$$T_{\max} = (m - m_0)c^2,$$

где m – масса релятивистского электрона, или

$$T_{\max} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right).$$

4. Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = hc / A,$$

$$\nu_0 = A / h,$$

где λ_0 – максимальная длина волны излучения, ν_0 – минимальная частота, при которой еще возможен фотоэффект.

5. Давление света при нормальном падении на поверхность

$$P = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

где $E_e = N h \nu$ – энергия всех фотонов, падающих на 1 м^2 за 1 с , то есть энергетическая освещенность поверхности,

N – количество фотонов,

$w = E_e / c$ – объемная плотность энергии излучения,

ρ – коэффициент отражения света.

6. Масса и импульс фотона

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda},$$

$$p = mc = h/\lambda = h\nu/c.$$

7. Формула Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \lambda_C(1 - \cos\theta),$$

или

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны фотона, падающего на свободный или слабо связанный электрон,

λ' – длина волны фотона, который рассеялся на угол θ после столкновения с электроном,

m_0 – масса покоя электрона.

8. Комптоновская длина волны

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}.$$

(При рассеянии фотона на электроне $\lambda_C = 2,43$ пм).

6.4 Контрольные вопросы и задания

1. Что называют явлением внешнего фотоэффекта?
2. Объясните уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.
3. Сформулируйте законы внешнего фотоэффекта.
4. Что такое «красная» граница фотоэффекта? От чего она зависит?
5. Что такое работа выхода фотоэлектрона?
6. Что называют напряжением запираения при внешнем фотоэффекте? От чего оно зависит?
7. Чему равна энергия, масса, импульс фотона?
8. От чего зависит давление света?
9. В чем заключается эффект Комптона?
10. От чего зависит комптоновское изменение длины волны?

6.5 Примеры решения задач

Задача 1. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, выбитых с поверхности натрия монохроматическим светом с длиной волны 1)

$\lambda = 300$ нм, 2) γ -излучением ($\lambda = 1$ пм). Работа выхода для натрия равна $A = 2,5$ эВ.

Дано: $\lambda_1 = 300$ нм, $\lambda_2 = 1$ пм, $A = 2,5$ эВ = $4 \cdot 10^{-19}$ Дж,

$v_{\max 1} - ?$ $v_{\max 2} - ?$

Анализ и решение

Для определения максимальной скорости фотоэлектронов воспользуемся уравнением Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{\max} \quad (6.1)$$

Энергию фотона находим по формуле $\varepsilon = hc/\lambda$.

Кинетическую энергию фотоэлектронов в уравнении Эйнштейна, в зависимости от того, какую скорость они приобретают, находим или по классической формуле, если энергия фотона гораздо меньше энергии покоя электрона ($\varepsilon \ll E_0 = 0,51$ МэВ), или по релятивистской формуле, при энергии фотона, сравнимой с энергией покоя электрона.

1. Вычислим энергию фотона для монохроматического света ($\lambda = 300$ нм):

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^{-9}} = 6,63 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,15 \text{ эВ.}$$

Энергия фотона оказалась гораздо меньше энергии покоя электрона. Таким образом, максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона находим по классической формуле

$$T_{\max} = \frac{m_0 v_{\max}^2}{2} \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1), имеем

$$\varepsilon_1 = A + \frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2.$$

откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A)}{m_0}} = \sqrt{\frac{2(6,63 \cdot 10^{-19} - 4 \cdot 10^{-19})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 0,76 \text{ Мм/с}$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда на поверхность натрия падает γ -излучение с длиной волны $\lambda_2 = 1$ пм.

Вычислим энергию фотона γ -излучения

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^{-12}} = 19,89 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 1,24 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, энергия фотона превышает массу покоя электрона больше чем вдвое. Поэтому для определения кинетической энергии фотоэлектрона воспользуемся релятивистским выражением

$$T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} - 1 \right), \quad (6.3)$$

откуда

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{T(T + 2E_0)}}{(T + E_0)} \cdot c. \quad (6.4)$$

Поскольку работа выхода электронов из натрия очень мала по сравнению с энергией γ -фотона, то ею можно пренебречь в формуле (6.1). Поэтому можно считать, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:

$$T_{\max} = \varepsilon = 1,24 \text{ МэВ} = 19,89 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}.$$

Подставляя значения величин T и c в (6.4), получим

$$v_{\max} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 285 \text{ Мм/с}.$$

Задача 2. Определить красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если во время облучения его поверхности фиолетовым светом длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов составляет 0,65 Мм/с.

Дано: $\lambda = 400$ нм, $v_{\max} = 0,65$ Мм/с,

λ_0 — ?

Анализ и решение

Во время облучения светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а также кинетическая энергия фотоэлектрона равна нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $h\nu = A + T_{\max}$ в случае красной черты запишется в виде $h\nu_0 = A$ или $hc/\lambda_0 = A$.
откуда

$$\lambda_0 = hc/A. \quad (6.5)$$

Работу выхода для цезия найдем из уравнения Эйнштейна

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv^2}{2}.$$

Подставив значение A в формулу (6.5), найдем.

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 - mv^2\lambda/2hc} = 640 \text{ нм.}$$

Задача 3. Фотон с энергией $\varepsilon = 0,75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60^\circ$. Считая кинетическую энергию и импульс электрона, до столкновения с фотоном, достаточно малыми, определить:

- 1) энергию рассеянного фотона;
- 2) кинетическую энергию T электрона отдачи.

Дано: $\varepsilon = 0,75$ МэВ, $\theta = 60^\circ$,

$\varepsilon' - ?$, $T - ?$

Анализ и решение

Энергию рассеянного фотона найдем с помощью формулы Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Выразив длину волн λ' и λ через энергии соответствующих фотонов, получим

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Поделим обе части этого уравнения на $2\pi\hbar c$

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos\theta}{mc^2}.$$

Отсюда

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon(1 - \cos\theta)}{mc^2} + 1} \approx 0,43 \text{ МэВ.}$$

Кинетическая энергия электрона отдачи, по закону сохранения энергии, равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon', \quad T = 0,32 \text{ МэВ.}$$

Задача 4. Пучок монохроматического света падает нормально на плоскую поверхность. Поток энергии $\Phi = 0,5$ Вт. Сила давления на поверхность равна $F = 3$ нН. Определить коэффициент отражения.

Дано: $\Phi = 0,5$ Вт, $F = 3$ нН,

ρ – ?

Анализ и решение

Сила светового давления на поверхность равна

$$F = P \cdot S, \quad (6.6)$$

где P – давление света, S – площадь поверхности.

Давление света находим по формуле

$$P = \frac{E_e}{c}(\rho + 1), \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.6), получим

$$F = \frac{E_e S (\rho + 1)}{c}.$$

Но $E_e S = \Phi$. Тогда

$$F = \frac{\Phi(\rho + 1)}{c}.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{cF}{\Phi} - 1 = 0,8.$$

6.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. На вольфрам падает свет с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Определить наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится, если работа выхода из вольфрама $A = 4,52$ эВ.

Ответ: $U_3 = 1,695$ В.

Задача 2. Задерживающее напряжение для калиевой пластинки $U_1 = 0,91$ В. Работа выхода электронов из калия $A_1 = 2,2$ эВ. При тех же условиях для другой пластинки удерживающее напряжение равно $U_2 = 3$ В. Определить работу выхода с этой пластинки.

Ответ: $A = 0,110$ эВ.

Задача 3. Максимальная скорость электронов, вырывающихся из некоторого металла под действием света с длиной волны $\lambda = 500$ нм, равна $v_{\max} = 540$ км/с. Определить красную границу фотоэффекта.

Ответ: $\lambda = 750,2$ нм.

Задача 4. На поверхность лития падает монохроматический свет $\lambda = 310$ нм. Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно подать задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Найти работу выхода A .

Ответ: $A = 2,31$ эВ.

Задача 5. Какая часть энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 307$ нм, а максимальная кинетическая энергия T_{\max} фотоэлектрона равна 1 эВ?

Ответ: 0,8.

Задача 6. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки (работа выхода электронов из платины равна 6,3 эВ), нужно подать задерживающую разность потенциалов $U = 3,7$ В. Если платиновую пластину заменить на другую, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Найти работу выхода A электронов с поверхности этой пластины.

Ответ: $A = 4$ эВ.

Задача 7. Найти длину волны ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов 10 Мм/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

Ответ: $\lambda = 4,36$ нм.

Задача 8. Поверхность металла поочередно облучают светом с длинами волн 400 нм и 800 нм. Во втором случае максимальная скорость движения фотоэлектронов в 1,5 раза меньше, чем в первом. Какова работа выхода электронов из металла?

Ответ: $A = 0,31$ эВ.

Задача 9. Максимальная скорость v_{\max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ -фотонами, достигает 291 Мм/с. Определить энергию ε γ -фотонов.

Ответ: $\varepsilon = 1,59$ МэВ.

Задача 10. Определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ -излучения с длиной волны $\lambda = 3$ пм.

Ответ: $v_{\max} = 250$ Мм / с.

Задача 11. Работа выхода электронов из серебра $A = 4,7$ эВ. На пластинку из серебра падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 208$ нм. Определить максимальный импульс, передаваемый поверхности серебра вылетающим электроном.

Ответ: $p = 6,10 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

Задача 12. На поверхность вольфрама (работа выхода $A = 4,52$ эВ) падает γ -излучение с длиной волны $\lambda = 1$ пм. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, которые вырываются с поверхности вольфрама.

Ответ: $v_{\max} = 288$ Мм/с.

Задача 13. Определить энергию ε , массу m и импульс p фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 380$ нм (фиолетовая граница видимого спектра).

Ответ: $\varepsilon = 3,27$ эВ; $m = 5,82 \cdot 10^{-36}$ кг $p = 1,75 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с.

Задача 14. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов 9,8 В.

Ответ: $\lambda = 393$ пм.

Задача 15. Давление p монохроматического света длиной волны $\lambda = 600$ нм на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить количество N фотонов, падающих за $t = 1$ с на поверхность площадью $S = 1$ см².

Ответ: $N = 9,05 \cdot 10^{15}$.

Задача 16. Параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на черную поверхность и осуществляет на нее давление $p = 10$ мкПа. Определить: концентрацию n фотонов в пучке; количество n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с .

Ответ: $n = 2,51 \cdot 10^{13} \text{ м}^3$; $n_1 = 7,54 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}$.

Задача 17. На абсолютно черную поверхность $S = 2 \text{ м}^2$, расположенную перпендикулярно падающим лучам монохроматического света, каждую секунду падает $N = 8 \cdot 10^{19}$ фотонов. Давление света на поверхность равно $p = 0,1$ мкПа. Определить длину волны света.

Ответ: $\lambda = 265,2$ нм.

Задача 18. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на идеально отражающую поверхность, расположенную нормально к падающему излучению, равно $p = 0,2$ мкПа. Определить количество фотонов, падающих на поверхность площадью $S = 80 \text{ см}^2$ за одну секунду.

Ответ: $N = 4,83 \cdot 10^{17}$.

Задача 19. На абсолютно черную поверхность $S = 2 \text{ м}^2$, расположенную перпендикулярно лучам падающего на нее монохроматического света, ежесекундно попадают $N = 8 \cdot 10^{19}$ фотонов. Давление света на поверхность, равно $p = 0,1$ мкПа. Определить длину волны света.

Ответ: $\lambda = 265$ нм.

Задача 20. Длина волны фотона равна комптоновской длине волны λ_C электрона. Определить энергию и импульс p фотона.

Ответ: $\varepsilon = 0,512 \text{ МэВ}$; $p = 2,73 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

Задача 21. Определить угол θ рассеяния фотона после столкновения со свободным электроном, если изменение длины волны $\Delta\lambda$ при рассеянии составляет $3,62$ пм.

Ответ: 119° или 241° .

Задача 22. Определить импульс p электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$.

Ответ: $3,64 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

Задача 23. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон рассеялся на угол $\theta = 180^\circ$? Энергия ε фотона до рассеяния равна 0,255 МэВ.

Ответ: 0,5.

Задача 24. При рассеивании узкого пучка монохроматического рентгеновского излучения на рассеивающем веществе оказалось, что длины волн рассеянного под углами $\theta_1 = 45^\circ$ и $\theta_2 = 90^\circ$ излучения отличаются в два раза. Определить длину волны падающего излучения, считая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

Ответ: $\lambda = 1,01$ пм.

Задача 25. В результате эффекта Комптона фотон с энергией $\varepsilon = 0,5$ МэВ при столкновении со свободным электроном рассеялся под углом $\theta = 60^\circ$. Найти энергию ε' рассеянного фотона.

Ответ $\varepsilon' = 0,336$ МэВ.

Задача 26. На рисунке 6.1 приведена вольтамперная характеристика вакуумного фотоэлемента, на катод которого падает свет с длиной волны 450 нм. Определить мощность действующего на катод излучения, считая, что каждый сотый из падающих фотонов вырывает из катода электрон.

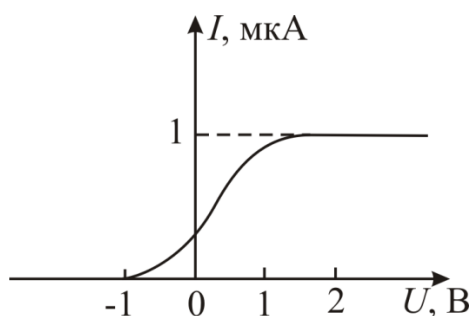


Рисунок 6.1

Ответ: $27,6 \cdot 10^{-5}$ Вт.

Задача 27. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии $\Phi = 0,6$ Вт. Определить силу F давления на эту поверхность, а также количество фотонов, падающих на нее за время $t = 5$ с.

Ответ: $F = 4$ нН; $N = 10^{19}$.

Задача 28. Определите давление света на стенки электрической лампочки мощностью 150 Вт, считая, что вся мощность расходуется на излучение, а стенки лампочки отражают 15% света, падающего на них. Считайте лампочку сферой радиусом 4 см.

Ответ: $p = 28,6$ мкПа.

Задача 29. Угол рассеивания θ фотона равен 90° . Угол отдачи φ электрона равен 30° . Определить энергию ε падающего фотона.

Ответ: $\varepsilon = 0,37$ МэВ.

Задача 30. Фотон рассеялся на свободном покоящемся электроны. В результате этого длина волны рассеянного фотона увеличилась на 15%, а кинетическая энергия электрона отдачи составляла 45 кэВ. Определить энергию фотона, рассеянного на электроны.

Ответ: $\varepsilon = 0,345$ кэВ.

7 ТЕОРИЯ БОРА АТОМА ВОДОРОДА. ПОСТУЛАТЫ БОРА

7.1 Цель занятия

Усвоить теорию Бора атома водорода. Научиться применять на практике постулаты Бора и формулу Бальмера для расчета спектра водорода и водородоподобных ионов (He +, Li ++ и др.).

7.2 Указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию изучить теоретический материал по конспекту лекций или учебнику [2, гл. 5, 4, § 12-17; 5, гл. 10]. Обратить внимание на постулаты Бора, квантование электронных орбит и энергии атома водорода, формулу Бальмера. Ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенные в примерах.

7.3 Основные законы и формулы

1. Момент импульса электрона на стационарных орбитах атома водорода по теории Бора

$$L = mvr = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где m – масса электрона;

r – радиус орбиты;

v – скорость электрона на орбите;

n – главное квантовое число;

\hbar – постоянная Планка.

2. Радиус n -й стационарной орбиты

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{ze^2 m} = a_0 n^2,$$

где a_0 – первый борковский радиус ($a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м); z – порядковый номер атома в таблице Менделеева.

3. Энергия электрона в атоме водорода

$$E_n = -\frac{mz^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

4. Энергия фотона, излучаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое

$$\varepsilon = h\nu = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m – соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

5. Обобщенная формула Бальмера

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где ν – частота спектральных линий в спектре атома водорода;

$$R = \frac{mz^2e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1} - \text{постоянная Ридберга};$$

m – определяет серию ($m = 1, 2, 3, \dots$);

n – определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, m + 3, \dots$),

или
$$1/\lambda = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

где $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

7.4 Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте постулаты Бора.
2. В чем заключаются недостатки планетарной модели атома Резерфорда?
3. Покажите разницу между моделями атома Резерфорда и Бора.
4. Запишите выражение для радиусов боровских орбит атома водорода и водородоподобных ионов.
5. Запишите выражение для энергии электронов в атоме водорода.
6. Почему спектр атомарных газов линейчатый?
7. Объясните обобщенную формулу Бальмера.
8. В чем заключаются недостатки теории Бора?

7.5 Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

Анализ и решение

Потенциал ионизации U_i это та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с данным невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по изъятию электрона из атома A_i равна работе сил электрического поля, ускоряющего электрон:

$$A_i = eU_i.$$

С другой стороны, работа по ионизации атома A_i равна кванту энергии $h\nu$, поглощенной атомом водорода при переходе электрона с первой боровской орбиты на бесконечно удаленную орбиту. Из формулы Бальмера

$$\nu = R\left(1/n^2 - 1/m^2\right),$$

при $n=1$ и $m=\infty$ получаем

$$A_i = h\nu = hR\left(1/n^2 - 1/m^2\right) = hR,$$

$$U_i = hR/e = 13,6 \text{ В.}$$

Первый потенциал возбуждения U_1 – это та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу с первой боровской орбиты на вторую.

Если принять $n=1$ и $m=2$, получим

$$eU_1 = h\nu = hR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{3}{4}hR,$$

$$U_1 = \frac{3}{4} \frac{hR}{e} = \frac{3}{4} \cdot 13,6 \text{ В} = 10,2 \text{ В.}$$

Задача 2. Вычислить в боровской модели длину волны света, который излучается атомом водорода при переходе с энергетического уровня $m=6$ на уровень $n=2$.

Дано: $m=6$, $n=2$;

λ – ?

Анализ и решение

Используем формулу Бальмера для вычисления длины волны перехода

$$1/\lambda = R'\left(1/n^2 - 1/m^2\right).$$

$$\text{Откуда } \lambda = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} = \frac{1}{1,1 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right)} \approx 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 410 \text{ нм.}$$

Это четвертая линия в серии Бальмера (фиолетовая).

Задача 3. Вычислить радиус пятой орбиты в атоме водорода и определить скорость вращения электрона на этой орбите.

Анализ и решение

Согласно теории Бора условие стационарных орбит в атоме водорода определяется соотношением

$$m v_n r_n = n \hbar, \quad (7.1)$$

где m – масса электрона; v_n – его скорость; r_n – радиус орбиты; \hbar – постоянная Планка; n – главное квантовое число ($n=1, 2, 3, \dots$), соответствующее номеру орбиты.

Во время вращения электрона вокруг ядра, благодаря силам взаимодействия электрически заряженного ядра и электрона, электрон приобретает центростремительное ускорение. Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{m v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \quad (7.2)$$

или

$$m v_n^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}. \quad (7.3)$$

Из формулы (7.1) находим

$$v_n = n \hbar / m r_n. \quad (7.4)$$

Подставив (7.4) в (7.3) определим радиус n -й орбиты

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m e^2}. \quad (7.5)$$

Подставляя в (7.5) числовые значения величин, находим

$$r_5 = 1,31 \text{ нм} \quad (7.6)$$

Соответственно, по формуле (7.4) с учетом числового значения (7.6), находим скорость электрона на пятой орбите атома водорода

$$v_5 = 0,45 \text{ Мм/с.}$$

7.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Вычислить длины волн первых трех линий серии Бальмера.

Ответ: $\lambda_1 = 657$ нм; $\lambda_2 = 487$ нм; $\lambda_3 = 432$ нм.

Задача 2. Первые потенциалы возбуждения Li и Na равны соответственно 1,84 В и 2,1 В. При какой температуре средняя кинетическая энергия частиц этих веществ равна энергии возбуждения?

Ответ: $T_1 = 1,43 \cdot 10^4$ К; $T_2 = 1,63 \cdot 10^4$ К.

Задача 3. На атом водорода падает фотон и выбивает из него электрон. Кинетическая энергия электрона равна 3,22 эВ. Чему равна длина волны такого света, если атом находится в первом возбужденном состоянии?

Ответ: $\lambda = 187,5$ нм.

Задача 4. На какой энергетический уровень перешел электрон при возбуждении иона гелия, если при переходе в нормальное состояние было последовательно зафиксировано два фотона с длиной волны 108,5 нм и 30,4 нм?

Ответ: на пятый.

Задача 5. На сколько изменилась энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 486$ нм?

Ответ: 2,55 эВ.

Задача 6. Вычислить скорость и частоту вращения электрона на второй орбите атома водорода.

Ответ: $v = 1,09$ Мм/с; $\nu = 8,19 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 7. Вычислить энергию фотона, который излучается при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

Ответ: $E = 12,1$ эВ.

Задача 8. Фотон с энергией $E = 16,5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра атома?

Ответ: $v = 1$ Мм/с.

Задача 9. Определить наименьшую E_{\min} и наибольшую E_{\max} энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).

Ответ: $E_{\min} = 10,2$ эВ; $E_{\max} = 13,6$ эВ.

Задача 10. Вычислить длину волны λ , которую излучает ион гелия He^+ при переходе со второго энергетического уровня на первый. Сделать такой же расчет для иона лития Li^{++} .

Ответ: $\lambda_{He^+} = 30,3$ нм; $\lambda_{Li^{++}} = 13,5$ нм.

Задача 11. Определить угловую скорость вращения электрона на второй боровской орбите атома He^+ .

Ответ: $2,05 \cdot 10^{16}$ рад/с.

Задача 12. Вычислить для атома водорода и иона He^+ : энергию связи электрона в основном состоянии, потенциал ионизации, первый потенциал возбуждения и длину волны главной линии серии Лаймана.

Ответ: $E_{3e} = \hbar R z^2$, $U_i = \frac{E_{3e}}{e}$; $U_1 = \frac{3\hbar R z^2}{4e}$, $\lambda = \frac{8\pi c}{3R z^2}$.

Задача 13. Какую минимальную энергию нужно передать иону He^+ , который находится в основном состоянии, чтобы он смог излучить фотон, соответствующий главной линии серии Бальмера?

Ответ: $E_{\min} = \frac{8}{9} \hbar R z^2 = 48,5$ эВ.

Задача 14. Определите длины волн, соответствующие: 1) границе серии Лаймана; 2) границе серии Бальмера; 3) границе серии Пашена.

Ответ: $\lambda_1 = 91$ нм, $\lambda_2 = 364$ нм, $\lambda_3 = 820$ нм,.

Задача 15. Какому элементу соответствует водородоподобный спектр, длины волн линий которого в четыре раза меньше, чем у атомарного водорода?

Ответ: He^+ .

Задача 16. У какого водородоподобного иона разность длин волн между главными линиями серий Бальмера и Лаймана равна 59,3 нм?

Ответ: Li^{++} .

Задача 17. Какие линии имеет спектр поглощения атомарного водорода в диапазоне длин волн от 94,5 до 130,0 нм.

Ответ: $\lambda = 97,0$ нм; 102,3 нм и 121,2 нм.

Задача 18. Определить постоянную Ридберга, если известно, что для ионов He^+ разность длин волн между главными линиями серий Бальмера и Лаймана $\Delta\lambda = 133,7$ нм.

Ответ: $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

Задача 19. Вычислить энергию и потенциал ионизации ионов He^+ и Li^{++}

Ответ: He : 54 эВ, 54 В; Li : 122,7 эВ, 122,7 В.

Задача 20. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 121,5$ нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

Ответ: $r = 212$ пм.

Задача 21. Определите частоту света, излучаемого атомом водорода при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $n = 2$, если радиус орбиты электрона изменился в $k = 9$ раз.

Ответ: $\nu = 7,31 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 22. Определить скорость и частоту вращения электрона на четвертой орбите атома водорода.

Ответ: $v_4 = 0,55$ Мм/с; $\nu_4 = 1,027 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 23. Определить период вращения электрона на третьей орбите атома водорода.

Ответ: $4,12 \cdot 10^{-15}$ с.

Задача 24. Частота света, излучаемая атомом водорода при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $n = 3$, равна $\nu = 3,29 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить, во сколько раз изменился при этом радиус орбиты электрона.

Ответ: в 10 раз.

Задача 25. Электрон вращается в атоме водорода с частотой $\nu = 8,22 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить, на какой орбите находится этот электрон.

Ответ: $n = 2$.

Задача 26. Атом излучает фотон с длиной волны $\lambda = 486$ нм. Определить изменение орбитального механического момента электрона при переходе из возбужденного состояния в основное.

Ответ: $\Delta L = 1,14 \cdot 10^{-35}$ Дж·с.

Задача 27. Электрон переходит из возбужденного состояния в основное и излучает фотон с длиной волны $\lambda = 102,6$ нм. Определить, на какой орбите находился электрон. Вычислить радиус этой орбиты и орбитальный механический момент электрона, когда он находился на данной орбите.

Ответ: $n = 3$; $r_3 = 47,61 \cdot 10^{-11}$ м; $L = 3,162 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 28. Сколько спектральных линий будет излучать атомарный водород, который возбуждают на n -й энергетический уровень.

Ответ: $N = n(n - 1)/2$.

Задача 29. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по третьей орбите атома водорода.

Ответ: $2,8 \cdot 10^{-23}$ А·м².

Задача 30. Атом He^+ излучает фотон, соответствующий главной линии серии Лаймана. Этот фотон выбивает электрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. Найти скорость электрона.

Ответ: $3,1 \cdot 10^6$ м/с.

8 ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

8.1 Цель занятия

Ознакомиться с гипотезой де Бройля об универсальности корпускулярно-волнового дуализма. Выяснить физический смысл соотношения неопределенностей Гейзенберга и научиться использовать его для решения задач.

8.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

При подготовке к практическому занятию изучить теоретический материал по конспекту или учебнику [2, гл. 3.1, 3.4; 4, § 18-20; 5, гл. 11.1-11.3]. Выяснить, что, исходя из гипотезы де Бройля, между корпускулярными и волновыми характеристиками электрона или других микрочастиц существует такая же связь как и между характеристиками фотона. Усвоить соотношение неопределенностей Гейзенберга для координат и импульса, для энергии и времени. Ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенных в примерах.

8.3 Основные законы и формулы

1. Длина волны де Бройля

$$\lambda = h/p,$$

где p – импульс частицы;

$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

а) в классическом приближении (скорость частицы намного меньше скорости света $v \ll c$)

$$p = m_0 v,$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v},$$

где v – скорость частицы;

m_0 – масса покоя.

б) в релятивистском случае (скорость частицы близка к скорости света в вакууме)

$$p = m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

2. Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией T частицы:

а) в классическом приближении (кинетическая энергия частицы намного меньше ее энергии покоя $T \ll E_0$, $E_0 = m_0 c^2$)

$$T = m_0 v^2 / 2,$$

$$\lambda = h / \sqrt{2m_0 T}.$$

б) в релятивистском случае (кинетическая энергия частицы сравнима с ее энергией покоя)

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

$$\lambda = hc / \sqrt{T(T + 2E_0)}.$$

3. Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

а) для координаты и импульса частицы

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar,$$

$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar,$$

$$\Delta p_z \Delta z \geq \hbar,$$

где Δp_x , Δp_y , Δp_z – неопределенность проекций импульса частицы на оси x , y , z соответственно; Δx , Δy , Δz – неопределенности ее координат;

б) для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt – время пребывания системы в этом состоянии.

8.4 Контрольные вопросы и задания

1. Что такое корпускулярно-волновой дуализм?
2. В чем смысл гипотезы де Бройля?
3. Что такое волна де Бройля? Чему равна ее длина?

4. В чем заключаются волновые свойства микрочастиц?
5. Как определяется групповая и фазовая скорости волн де Бройля?
6. Запишите соотношение неопределенностей для координат и импульса.
7. Запишите соотношение неопределенностей для энергии и времени.
8. В чем заключается физический смысл соотношения неопределенностей?

8.5 Примеры решения задач

Задача 1. Определить длину волны де Бройля, если кинетическая энергия электрона равна 0,5 кэВ.

Дано: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

$T = 0,5$ кэВ = $0,8 \cdot 10^{-19}$ Дж

λ – ?

Анализ и решение

Кинетическая энергия электрона намного меньше его энергии покоя

$$E_0 = m_0 c^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,51 \text{ МэВ.}$$

Для определения длины волны де Бройля воспользуемся формулой:

$$\lambda = h/mv. \quad (8.1)$$

Из выражения для кинетической энергии $T = mv^2/2$, найдем

$$v = \sqrt{2T/m} \quad (8.2)$$

Подставив (8.2) в (8.1), получим

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{2T/m}} = \frac{h}{\sqrt{2Tm}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 0,8 \cdot 10^{-19} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}} = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Задача 2. Электрон движется со скоростью $v = 212$ Мм/с. Определить длину волны де Бройля электрона. Сравнить ее с комптоновской длиной волны ($\lambda_C = 2,426$ пм).

Дано: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с;

$v = 212$ Мм/с = $2,12 \cdot 10^8$ м/с.

λ – ?

Анализ и решение

Скорость электрона сравнима со скоростью света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Воспользуемся формулой для релятивистского импульса

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad (8.3)$$

где m_0 – масса покоя электрона.

Длина волны де Бройля

$$\lambda = h/p. \quad (8.4)$$

Подставляя (8.3) в (8.4), имеем

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon} \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}. \quad (8.5)$$

Подставляя числовые значения величин в (8.5), имеем

$$\lambda = 2,426 \text{ пм.}$$

Таким образом, длина волны де Бройля электрона равна комptonовской длине волны, то есть

$$\lambda = \lambda_C$$

Задача 3. Частица движется со скоростью υ . Найти выражения для фазовой и групповой скоростей распространения волн де Бройля, связанных с движением частицы.

Дано: υ

υ_ϕ – ? и – ?

Анализ и решение

Как известно, фазовая скорость определяется соотношением

$$\upsilon_\phi = \omega/k,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Перепишем это соотношение так

$$\upsilon_\phi = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = \frac{h\nu\lambda}{h} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{m\upsilon} = \frac{c^2}{\upsilon},$$

где $E = h\nu$, $p = h/\lambda$.

Поскольку $c < \upsilon$, то фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме.

Групповая скорость определяется по формуле

$$u = d\omega/dk .$$

Перепишем это выражение так

$$u = \frac{d(2\pi\nu)}{d(2\pi/\lambda)} = \frac{d(h\nu)}{d(h/\lambda)} = \frac{dE}{dp} .$$

Поскольку $E = \frac{p^2}{2m}$, то

$$dE/dp = p/m = mv/m = v .$$

То есть $u = v$ – групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы.

Задача 4. Пучок электронов, которые движутся с одинаковой скоростью, падает нормально на узкую щель шириной $a = 1$ мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, расположенном на расстоянии 20 см от щели, ширина центрального дифракционного максимума составляет $\Delta x = 48$ мкм.

Дано: $a = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м; $l = 20$ см $= 0,2$ м;

$\Delta x = 48$ мкм $= 4,8 \cdot 10^{-5}$ м; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг.

$v = ?$

Анализ и решение

Ширина центрального дифракционного максимума на экране равна расстоянию между двумя первыми дифракционными минимумами (рис. 8.1).

Дифракционный минимум наблюдается, если выполняется условие

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} .$$

Для первого дифракционного минимума $k = 1$, тогда

$$a \sin \varphi = \lambda . \tag{8.6}$$

Из рисунка видно, что ширина центрального дифракционного максимума равна

$$\Delta x = 2l \cdot \operatorname{tg} \varphi . \tag{8.7}$$

Если угол φ слишком мал, то $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$.

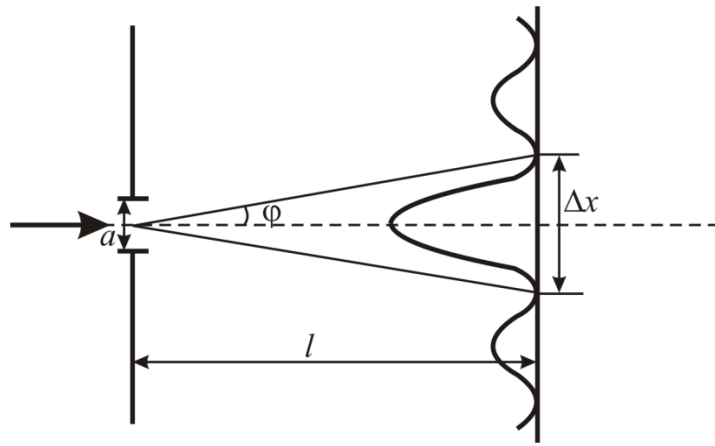


Рисунок 8.1

Воспользовавшись (8.6) и (8.7), найдем

$$\lambda = \frac{a\Delta x}{2l}. \quad (8.8)$$

Согласно с гипотезой де Бройля движение электрона со скоростью v связано с определенным волновым процессом, длина волны которого определяется уравнением

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

откуда

$$v = \frac{h}{m\lambda}.$$

Воспользовавшись (8.8), найдем

$$v = \frac{2hl}{ma\Delta x} = 6,1 \text{ (Мм/с)}.$$

Задача 5. Минимальный диаметр атома водорода $d_{\min} = 124$ пм. Применяя соотношение неопределенностей, найти кинетическую энергию электрона в атоме водорода.

Дано: $d_{\min} = 124$ пм $= 1,24 \cdot 10^{-10}$ м; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг

$T - ?$

Анализ и решение

Соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет вид

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar. \quad (8.9)$$

Если диаметр атома d , тогда электрон будет находиться в атоме в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = d/2.$$

Тогда соотношение (8.9) можно записать в виде

$$\frac{d}{2} \Delta p \geq \hbar$$

или

$$d \geq 2\hbar/\Delta p. \quad (8.10)$$

Неопределенность импульса не может превышать значение самого импульса, то есть

$$\Delta p \leq p.$$

Импульс связан с кинетической энергией электрона соотношением

$$p = \sqrt{2mT}.$$

Заменим Δp значением $\sqrt{2mT}$, а d на d_{\min} и перейдем от неравенства (8.10) к равенству. В результате имеем

$$d_{\min} = \frac{2\hbar}{\Delta p} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}},$$

откуда

$$T = \frac{2\hbar^2}{md_{\min}^2} = 1,45 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 9,1 \text{ эВ}.$$

8.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Сравнить дебройлевскую волну для маленького шарика массой $m = 1$ г, который перемещается со скоростью $v = 100$ м/с, и электрона, который перемещается со скоростью $v = 10^6$ м/с.

Ответ: $6,6 \cdot 10^{-24}$ нм; 0,67 нм.

Задача 2. Найти зависимость дебройлевской длины волны λ от кинетической энергии: а) для нерелятивистской частицы ($T \ll m_0c^2$); б) для релятивистской частицы ($T \approx m_0c^2$).

Ответ: а) $\lambda = h/\sqrt{2m_0T}$ б) $\lambda = hc/\sqrt{T(T + 2E_0)}$.

Задача 3. Найти длину волны де Бройля молекулы водорода, которая движется со средней квадратичной скоростью при температуре 300 К. Масса молекулы водорода $3,4 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ: 0,102 нм.

Задача 4. Найти дебройлевскую длину волны тепловых нейтронов, соответствующую наиболее вероятной скорости при температуре $T = 300\text{К}$ ($m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг).

Ответ: $\lambda = 1,78 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 5. Сравнить длину волн де Бройля для электрона и протона, имеющих одинаковую скорость ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг).

Ответ: $\lambda_e/\lambda_p = m_p/m_e = 1840$.

Задача 6. Какую ускоряющую разность потенциалов нужно пройти электрону, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,1 нм?

Ответ: $U = 150$ В.

Задача 7. Какую дополнительную энергию нужно придать электрону, чтобы его длина волны де Бройля уменьшилась с 100 до 50 пм?

Ответ: 0,45 кэВ.

Задача 8. Найти длину волны де Бройля для электрона, кинетическая энергия которого равна: 1) 10 кэВ 2) 1 МэВ.

Ответ: 12,2 пм; 0,87 пм.

Задача 9. Найти длину волны де Бройля для электронов, ускоренных в электрическом поле с разностью потенциалов: 1) 1 В; 2) 100 В.

Ответ: 1,23 нм; 0,123 нм.

Задача 10. Определить, при каком численном значении скорости длина волны де Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны.

Ответ: $2,12 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 11. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1,282$ пм. Найдите массу частицы, если ее заряд равен заряду электрона. Что это за частица?

Ответ: $1,672 \cdot 10^{-27}$ кг

Задача 12. Определить длину волны де Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите.

Ответ: $\lambda = 1$ нм.

Задача 13. Определить длины волн де Бройля электрона, протона и атома урана, имеющих одинаковую кинетическую энергию 100 эВ.

Ответ: 123 пм, 2,86 пм, 0,186 пм.

Задача 14. Электрон движется по окружности радиусом 0,5 см в однородном магнитном поле, индукция которого равна 8 мТл. Определить длину волны де Бройля электрона.

Ответ: 0,1 нм.

Задача 15. Протон, движущийся в однородном магнитном поле по окружности радиусом 1,4 м, имеет длину волны де Бройля 0,197 пм. Определить индукцию магнитного поля.

Ответ: 15 мТл.

Задача 16. Найти длину волны де Бройля релятивистских электронов, подлетающих к антикатоде рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы рентгеновского спектра 10 пм.

Ответ: 3,3 пм.

Задача 17. Определить с помощью соотношения Гейзенберга минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером 0,2 нм.

Ответ: 1 эВ.

Задача 18. Оцените наименьшие ошибки, с которыми можно определить скорость электрона, протона и шарика массой 1 мг, если координаты частиц и центра шарика установлены с неопределенностью 1 мкм.

Ответ: 10^4 , 10 , 10^{-20} см/с.

Задача 19. Считая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна длине волны де Бройля, определить относительную неопределенность $\Delta p/p$ импульса этой частицы.

Ответ: 16%.

Задача 20. Электрон движется в атоме водорода по первой Боровской орбите. Считая, что неопределенность скорости составляет 10% от ее численного значения, определить неопределенность координаты электрона.

Ответ: $\Delta x = 3,34$ нм.

Задача 21. Пучок электронов вылетает из электронной пушки под действием разности потенциалов $U = 200$ В. Можно ли одновременно определить траекторию электрона с точностью до 100 пм и его скорость с точностью до 10%?

Ответ: $\Delta p \Delta x = 7,64 \cdot 10^{-35}$ Дж $< \hbar$.

Задача 22. Определить отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата определена с точностью до 10^{-5} м, и частицы массой 10^{-12} кг, если ее координата определена с такой же точностью.

Ответ: $\Delta v_x / \Delta v_y = 1,1 \cdot 10^{18}$.

Задача 23. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Известно, что неопределенность скорости составляет 0,1% от ее численного значения. Определить неопределенность координаты электрона.

Ответ: $\Delta x = 6,17$ нм.

Задача 24. Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга, определить минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в пространстве с размерами: 1) $d \approx 10^{-10}$ м (атом) 2) $d \approx 10^{-15}$ м (атомное ядро).

Ответ: $T_{\min} = 4$ эВ; $T_{\min} \approx 0,2$ ГэВ.

Задача 25. Электрон локализован в пространстве с размером 10 мкм. Среднее значение его кинетической энергии равно 4 эВ. С помощью соотношения Гейзенберга определить: 1) относительную неопределенность $\Delta v/v$ скорости электрона; 2) неопределенность его кинетической энергии T .

Ответ: 10^{-4} ; 0,49 мэВ.

Задача 26. Найдите зависимость между длиной волны де Бройля релятивистской частицы и ее кинетической энергией T .

Ответ: $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}$.

Задача 27. На грань кристалла под углом 60° к его поверхности падает параллельный поток электронов, движущихся с одинаковой скоростью. Определить скорость электронов, если они испытывают интерференционное отражение первого порядка. Расстояние между атомными плоскостями кристалла 0,2 нм.

Ответ: 2,25 Мм/с.

Задача 28. Пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью 1 Мм/с, попадает на диафрагму со щелью шириной 1 мкм. Вследствие движения электронов сквозь щель на экране, расположенном на расстоянии 50 см от нее, появляется дифракционная картина. Найти расстояние между первыми дифракционными минимумами.

Ответ: 1,1 мм.

Задача 29. Параллельный пучок электронов попадает на диафрагму со щелью шириной 1 мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, находящемся на расстоянии 50 см от щели, ширина дифракционного максимума равен 0,36 мм.

Ответ: $1 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 30. Параллельный поток электронов, ускоренных разностью потенциалов 25 В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми 50 мкм. Определить расстояние между соседними максимумами интерференционной картины на экране, расположенном на расстоянии 100 см от щелей.

Ответ: 4,9 мкм.

9 ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

9.1 Цель занятия

Ознакомиться с уравнением Шредингера, понять физический смысл волновой функции. Научиться решать простые задачи квантовой механики.

9.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию необходимо изучить теоретический материал по конспекту лекций или учебнику [2, гл. 3.2-3.3; 4, § 21-27, разд. 11.4-11.11]. Выяснить, что в квантовой механике состояние микрочастицы описывается волновой функцией, физический смысл которой связан с вероятностью обнаружения данной микрочастицы в определенном месте пространства и в определенный момент. Обратит внимание на то, что Ψ -функция может быть найдена при решении уравнения Шредингера. Ответить на контрольные вопросы, проанализировать решения задач, изложенных в качестве примеров.

9.3 Основные законы и формулы

1. Общее уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$\Psi(x, y, z, t)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы;

E – полная энергия;

U – потенциальная энергия частицы;

m – масса частицы;

\hbar – постоянная Планка;

i – мнимая единица.

2. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0.$$

3. Плотность вероятности

$$dP/dV = |\psi|^2,$$

где dP – вероятность того, что частица находится в пределах объема dV .

4. Вероятность нахождения частицы в объеме V

$$P = \int_V dP = \int_V |\psi|^2 dV = \int_V \psi \psi^* dV,$$

где ψ^* – комплексно сопряженная волновая функция.

5. Условие нормирования волновой функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1.$$

6. Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера

$$D \approx \exp\left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right].$$

где U_0 – высота потенциального барьера;

E – энергия частицы;

l – ширина потенциального барьера.

9.4 Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте уравнение Шредингера в общем виде и дайте определение основных параметров.
2. Сформулируйте стационарное уравнение Шредингера и дайте определение основных параметров.
3. В чем заключается физический смысл ψ -функции?
4. От чего зависит вероятность обнаружения частицы в данной точке пространства?
5. Каким условиям должна удовлетворять ψ -функция?
6. Запишите выражение для ψ -функции в общем виде.
7. Запишите условие нормирования волновой функции.
8. В чем заключается явление туннельного эффекта?
9. С помощью каких физических характеристик описывают прохождение частицы сквозь потенциальный барьер?
10. Чему равен коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера?

9.5 Примеры решения задач

Задача 1. Протон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $l = 1 \text{ \AA}$ в возбужденном состоянии ($n_1=5$). Найти: 1) разность энергий между уровнями $n_2=6$ и $n_1=5$; 2) нормировочный коэффициент волновой функции, описывающей состояние протона в потенциальной яме.

Дано: $l = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м,}$

$$m_p = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг,}$$

$$n_1 = 5, n_2 = 6.$$

$$\Delta E - ? A - ?$$

Анализ и решение

Для решения задачи воспользуемся уравнением Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (9.1)$$

В случае одномерной бесконечно глубокой потенциальной ямы, в которой движется протон, уравнение (9.1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (9.2)$$

Потенциальная энергия U равна нулю при $0 \leq x \leq l$ и превращается в бесконечность при $x < 0$ и $x > l$ (рис. 9.1).

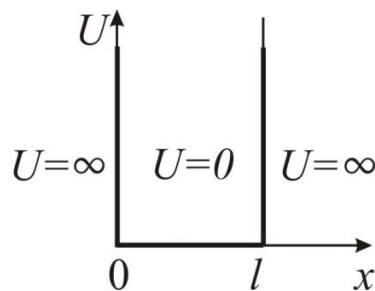


Рисунок 9.1

За пределы потенциальной ямы протон попасть не может, поэтому вероятность обнаружения его снаружи равна нулю. А из условия непрерывности следует, что волновая функция ψ должна равняться нулю и на границах ямы, то есть

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (9.3)$$

Внутри ямы ($0 \leq x \leq l$, $U = 0$) уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0. \quad (9.4)$$

Обозначим

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = k^2 \quad (9.5)$$

и запишем (9.4) в виде

$$\psi'' + k^2\psi = 0. \quad (9.6)$$

Решением уравнения (9.6) является

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha). \quad (9.7)$$

Из граничных условий (9.3) найдем постоянные k и α .

Из условия $\psi(0) = 0$ получим

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0,$$

откуда следует, что $\alpha = 0$.

Из второго граничного условия $\psi(l) = 0$ получим

$$\psi(l) = A \sin kl = 0$$

и находим, что это возможно только при

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.8)$$

Из уравнений (9.5) и (9.8) находим

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

1. Найдем разность энергии двух соседних уровней с квантовыми числами $n_2 = 6$ и $n_1 = 5$.

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1).$$

Подставляя числовые значения величин, находим

$$\Delta E_{6,5} = 22,25 \text{ эВ}.$$

2. Для нахождения нормировочного коэффициента A подставим в (9.7) значение k , полученное из (9.8). В результате имеем собственные функции

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Воспользуемся условием нормировки

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1,$$

которое в данном случае запишем так

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1. \quad (9.9)$$

Возьмем интеграл левой части равенства (9.9)

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx &= \int_0^l \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{2n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[x \Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l \right] = \frac{1}{2} l. \end{aligned} \quad (9.10)$$

С учетом (9.10) условие нормировки (9.9) принимает вид

$$A^2 \frac{l}{2} = 1,$$

откуда

$$A = \sqrt{2/l}.$$

Для данной ширины ямы $l = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ нормировочный коэффициент равен

$$A = 1,45 \cdot 10^5 \text{ м}^{-\frac{1}{2}}.$$

Задача 2. Электрон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины l . Определить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ямы.

Дано: $l, n = 2, l/3 \leq x \leq 2l/3$.

$P - ?$

Анализ и решение

Вероятность того, что частица будет обнаружена в пределах интервала $x_1 \leq x \leq x_2$, равна

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (9.11)$$

где ψ_n – собственная волновая функция, соответствующая данному состоянию.

Для электрона в потенциальной яме эта функция равна

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Для возбужденного состояния ($n = 2$):

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x \quad (9.12)$$

Подставив (9.12) в (9.11), получим

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx. \quad (9.13)$$

Пределы интегрирования для средней трети потенциальной ямы равны $x_1 = l/3$, $x_2 = 2l/3$.

Подставим эти пределы в (9.13) и сделаем замену

$$\sin^2 \frac{2\pi x}{l} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x \right)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} dx - \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \cos \frac{4\pi}{l} x dx = \\ &= \frac{x}{l} \Big|_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{l} x \Big|_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 0,195 \end{aligned}$$

Задача 3. Найти вероятность прохождения микрочастицы сквозь потенциальный барьер прямоугольной формы (рис. 9.2), если потенциальная энергия U_0 меньше полной энергии E .

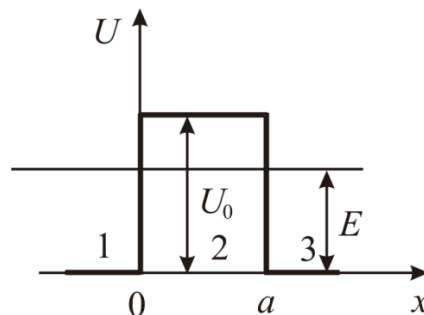


Рисунок 9.2

Дано: $U_0 < E$,

R – ?

Анализ и решение

Для характеристики величины туннельного эффекта введем коэффициент прозрачности барьера, под которым будем понимать модуль отношения плотности потока частиц, прошедших через барьер, к плотности потока падающих частиц. Пусть частица движется в положительном направлении оси x . Волна де Бройля, соответствующая движению частицы, пройдет сквозь барьер и будет распространяться в области $x > a$.

Уравнение Шредингера в различных областях выглядит

$$\partial^2 \psi_1 / \partial x^2 + k_1^2 \psi_1 = 0 \text{ – область 1,}$$

$$\partial^2 \psi_2 / \partial x^2 + k_2^2 \psi_2 = 0 \text{ – область 2,}$$

$$\partial^2 \psi_3 / \partial x^2 + k_3^2 \psi_3 = 0 \text{ – область 3,}$$

где $k_1 = k_3 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$.

В областях 1, 2 существует как падающая, так и отраженная волна

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \quad (x \leq 0),$$

$$\psi_2 = A_2 e^{-k_2 x} + B_2 e^{k_2 x} \quad (0 \leq x \leq a).$$

В области 3 существует только волна, движущаяся в положительном направлении осей

$$\psi_3 = A_3 e^{ik_3 x} \quad (x \geq a).$$

Воспользовавшись условиями непрерывности волновой функции и ее производной в точках $x = 0$ и $x = a$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0),$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0),$$

$$\psi_1(a) = \psi_2(a),$$

$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a),$$

можно найти такие соотношения между коэффициентами A_1, B_1, A_2, B_2, A_3

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad (9.14)$$

$$ik_1(A_1 - B_1) = k_2(B_2 - A_2), \quad (9.15)$$

$$A_2 e^{-k_2 a} + B_2 e^{k_2 a} = A_3 e^{ik_3 a}, \quad (9.16)$$

$$k_2(B_2 e^{k_2 a} - A_2 e^{-k_2 a}) = ik_3 A_3 e^{ik_3 a}. \quad (9.17)$$

Из уравнений (9.15) и (9.17) следует, что

$$A_2 = \frac{1-in}{2} A_3 e^{k_2 a}, \quad (9.18)$$

$$B_2 = \frac{1+in}{2} A_3 e^{-k_2 a}, \quad (9.19)$$

где $n = k_1/k_2 = \sqrt{E/(U_0 - E)}$.

Поскольку $k_2 a \gg 1$, то из (9.18) и (9.19) имеем, что $|A_2| \gg |B_2|$. Поэтому можно считать $B_2 = 0$.

Решая уравнение (9.14) и (9.16), находим

$$A_1 = \frac{1-in}{2} \cdot \frac{i+n}{2n} A_3 e^{k_2 a},$$

$$B_1 = \frac{1-in}{2} \cdot \frac{n-i}{2n} A_3 e^{-k_2 a}.$$

откуда коэффициент прозрачности (диффузии) D будет выглядеть

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \approx \frac{16n^2}{(1+n^2)^2} e^{-2k_2 a}.$$

Введем величину $D_0 = \frac{16n^2}{(1+n^2)^2}$, тогда получим

$$D \approx D_0 e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}.$$

9.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Частица массы m находится в одномерной потенциальной яме шириной l .

1. Запишите уравнение Шредингера для частицы в области $(0 \leq x \leq l)$.
2. Определите граничные условия и найдите собственные значения волновой функции.
3. Найдите нормировочный коэффициент для найденных функций и покажите, что он не зависит от номера n .

Ответ: 1) $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$; 2) $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\psi_n(x) = B \sin \frac{\pi n x}{l}$;

3) $B = \sqrt{2/l}$.

Задача 2. Пользуясь уравнением Шредингера и функциями, которые соответствуют собственным решениям для частицы в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме, найти спектр собственных значений энергии E_n частицы.

Ответ: $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Задача 3. Пользуясь результатами задач № 1 и № 2, отразить в масштабе графики E_n , $\psi_n(x)$ и $\psi_n^2(x)$ в зависимости от координаты x частицы для $n = 1, 2, 3$. Определить зависимость количества узлов функции $\psi_n(x)$ от номера n .

Задача 4. Волновая функция частицы имеет вид $\psi = A \sin \frac{3\pi x}{l}$ и определена в области $0 \leq x \leq l$. Найти нормировочный коэффициент A .

Ответ: $A = \sqrt{2/l}$.

Задача 5. Волновая функция частицы имеет вид $\psi(r) = \frac{A}{r} \sin kr$, где r – расстояние этой частицы до силового центра, k – некоторая постоянная величина. Определить нормировочный коэффициент A . Волновая функция определена только в области $0 \leq r \leq R$, где R – радиус этой области.

Ответ: $A = 1 / \sqrt{2\pi \left(R - \frac{1}{2k} \sin 2kR \right)}$.

Задача 6. Волновая функция частицы массой m для основного состояния в одномерном потенциальном поле $U(x) = kx^2/2$ имеет вид $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, где A – нормировочный коэффициент, α – положительная постоянная. Найти с помощью уравнения Шредингера постоянную α и энергию частицы в этом состоянии.

Ответ: $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}, \quad E = \frac{\hbar\omega}{2}$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Задача 7. Электрон находится в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной l . Определить вероятность обнаружения электрона в первой четверти ямы, если он находится в возбужденном состоянии ($n = 2$).

Ответ: 0,25.

Задача 8. Определить вероятность обнаружения частицы в левой трети одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной ямы шириной l . Частица находится в основном состоянии.

Ответ: 0,195.

Задача 9. Определить вероятность обнаружения частицы в третьей четверти одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной ямы шириной l . Частица находится в возбужденном состоянии ($n = 2$).

Ответ: 0,25.

Задача 10. Определить, в каких точках одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной ямы шириной l плотность вероятности обнаружения частицы будет максимальной и минимальной. Частица находится в возбужденном состоянии ($n = 4$).

Ответ: максимумы: $x=l/8; 3l/8, 5l/8; 7l/8$; минимумы: $x=l/4; l/2; 3l/4$.

Задача 11. Определить, во сколько раз изменится отношение разности энергий соседних энергетических уровней к энергии «нижнего» состояния $\Delta E_{n-1,n}/E_n$ частицы, находящейся в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной l при переходе этой частицы из состояния $n = 4$ в состояние $n' = 10$.

Ответ: уменьшится в 2,68 раза.

Задача 12. Электрон находится в потенциальной яме шириной l . В каких точках интервала ($0 < x < l$) плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетическом уровнях одинакова? Определить плотность вероятности для этих точек.

Ответ: $x_1 = l/3; x_2 = 2l/3; |\psi|^2 = 3/2l$.

Задача 13. Частица в потенциальной яме шириной l находится в основном состоянии. Определите вероятность нахождения частицы в средней трети ямы, в крайней трети.

Ответ: 0,609; 0,195.

Задача 14. Определить отношение вероятностей P_1/P_2 нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной l .

Ответ: 5,22.

Задача 15. Протон движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме бесконечной глубины. Найти ширину ямы, если разность энергий между четвертым и третьим состояниями равна 0,5 эВ.

Ответ: $l = 53,3$ пм.

Задача 16. Электрон с энергией 5 эВ движется в положительном направлении оси x , встречая на пути прямоугольный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0,1$ нм. Определите коэффициент прозрачности барьера.

Ответ: $D = 0,1$.

Задача 17. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0,1$ нм. Определите разность энергий $U - E$, при которой вероятность прохождения электрона через барьер составляет 0,5.

Ответ: $U - E = 0,454$ эВ.

Задача 18. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов 10 кВ. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности потенциального барьера для электрона и протона? Высота потенциального барьера равна 20 кэВ, ширина 0,1 пм.

Ответ: 74.

Задача 19. Протон с энергией 5 эВ движется в положительном направлении оси x , встречая на пути прямоугольный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0,1$ нм. Определите во сколько раз нужно сузить барьер, чтобы

вероятность прохождения его протоном была такой же, как для электрона при тех же условиях?

Ответ: $l_1/l_2 = 42,8$.

Задача 20. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0,1$ нм. Разность между высотой потенциального барьера и энергией электрона, движущегося в положительном направлении оси x $U - E = 5$ эВ. Определите, как изменится коэффициент прозрачности барьера, если разность $U - E$ возрастет в 4 раза.

Ответ: $D_1/D_2 = 10$.

Задача 21. Электрон с энергией 4,9 эВ движется в положительном направлении оси x . Высота потенциального барьера 5 эВ. При какой ширине потенциального барьера вероятность прохождения электрона через него будет равняться 0,2?

Ответ: $4,93 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 22. Частица с энергией $E = 10$ эВ движется в положительном направлении оси x , встречая на пути широкий прямоугольный барьер высотой $U = 5$ эВ. Определите коэффициент преломления волн де Бройля на границе потенциального барьера.

Ответ: $n = \lambda_1/\lambda_2 = k_2/k_1 = \sqrt{(E - U)/E} = 0,707$.

Задача 23. Энергия электрона 10 эВ. Определить во сколько раз изменятся его скорость и длина волны де Бройля при прохождении через потенциальный барьер (рис. 9.3) высотой $U_0 = 6$ эВ.

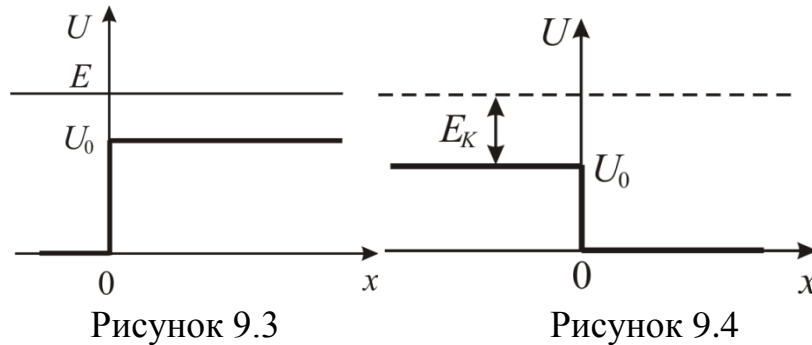
Ответ: 0,632; 1,58.

Задача 24. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной 0,5 нм. Высота барьера U больше энергии электрона E на 1%. Определить коэффициент прозрачности барьера, если энергия электрона 10 эВ, 100 эВ.

Ответ: 0,2; $5,94 \cdot 10^{-3}$.

Задача 25. Определите коэффициент преломления волн де Бройля для протонов на границе потенциального барьера (рис. 9.4) Кинетическая энергия протонов равна 16 эВ, а высота потенциального барьера равна 9 эВ.

Ответ: $n = \sqrt{1 + U_0/E_k} = 1,25$.



Задача 26. Определить ψ -функции и значение энергии частицы массы m , которая находится в двумерной бесконечно глубокой потенциальной яме, размеры которой $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$.

Ответ: $\psi_{n_1, n_2} = \sqrt{\frac{4}{ab}} \cdot \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{b}$.

$$E_{n_1, n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \cdot \left(n_1^2 / a^2 + n_2^2 / b^2 \right), \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots$$

Задача 27. Определить ψ -функции и значение энергии частицы массы m , находящейся в трёхмерной глубокой потенциальной яме, размеры которой $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.

Ответ: $\psi_{n_1, n_2, n_3} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \cdot \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{b} \cdot \sin \frac{\pi n_3 z}{c}$,

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \cdot \left(n_1^2 / a^2 + n_2^2 / b^2 + n_3^2 / c^2 \right), \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

Задача 28. Частица массы m движется в положительном направлении оси на потенциальный барьер высоты U_0 (рис. 9.3). Энергия частицы равна E ($E > U_0$). Найти коэффициент отражения R и коэффициент прозрачности D барьера.

Ответ: $R = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2$, $D = 4k_1^2 / (k_1 + k_2)^2$, $k_1 = \sqrt{2mE} / \hbar$, $k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)} / \hbar$.

Задача 29. При каком соотношении высоты потенциального барьера U_0 (рис. 9.3) и энергии E электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения равен 0,5?

Ответ: 0,97.

Задача 30. Найти вероятность прохождения электрона с энергией E через потенциальный барьер (рис. 9.5), если ширина основания барьера l , а высота U_0 .

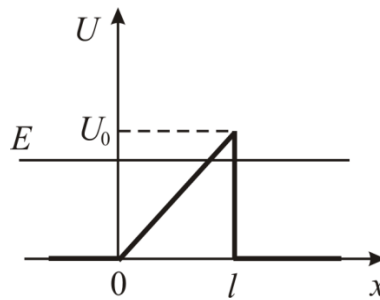


Рисунок 9.5

Ответ: $P \approx \exp\left(-\frac{4\sqrt{2ml}}{3\hbar U_0}(U_0 - E)^{3/2}\right)$.

10 АТОМ ВОДОРОДА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ. ПРИНЦИП ПАУЛИ. ЭЛЕКТРОННЫЕ СЛОИ СЛОЖНЫХ АТОМОВ

10.1 Цель занятия

Усвоить основы квантово-механической теории атома водорода, водородоподобных систем и многоэлектронных атомов.

10.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

При изучении теоретических положений по конспекту или учебнику [2, гл. 6; 4, § 36-37; 5, гл. 12] нужно обратить внимание на квантовый характер величин, описывающих состояние электрона в атоме, запомнить правила квантования этих величин и возможные значения квантовых чисел для электрона и многоэлектронного атома. После изучения теории ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенных в примерах.

10.3 Основные законы и формулы

1. Уравнение Шредингера для стационарных состояний атома водорода и водородоподобных атомов:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовой системе

координат;

$\psi = \psi(\vec{r})$ – волновая функция, описывающая состояние электрона;

E – полная энергия электрона;

$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ – потенциальная энергия электрона в водородоподобном

атоме;

Z – зарядовое число;

r – расстояние между ядром и электроном;

e – заряд электрона;
 m – масса электрона;
 \hbar – постоянная Планка.

2. Уравнение Шредингера в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \cdot \psi = 0,$$

$$\psi = \psi(r, \varphi, \theta).$$

3. Условие нормировки волновой функции $\psi = \psi(\vec{r})$:

$$\int_G |\psi(\vec{r})|^2 dV = 1,$$

где G – область определения волновой функции $\psi = \psi(\vec{r})$;

$dV = dx dy dz$ – дифференциал объема в прямоугольной декартовой системе координат, $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ – дифференциал объема в сферической системе координат.

4. Среднее значение функции $F(\vec{r})$:

$$\langle F \rangle = \int_G F(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 dV.$$

5. Квантовые числа, определяющие состояние электронов в атоме:

- 1) главное квантовое число $n = 1, 2, 3, 4, \dots$;
- 2) орбитальное квантовое число $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$;
- 3) магнитное квантовое число $m_l = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$;
- 4) спиновое магнитное квантовое число $m_s = 1/2, -1/2$.

6. Орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона:

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)},$$

где μ_B – магнетон Бора, $(\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл})$.

7. Проекция орбитального момента импульса и магнитного момента на направление внешнего магнитного поля (совпадающее с осью Oz)

$$L_{lz} = \hbar m_l, \mu_{lz} = \mu_B m_l.$$

8. Спиновый момент импульса и магнитный момент электрона

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$
$$\mu_s = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)},$$

где s – спиновое квантовое число (для электрона $s = 1/2$).

9. Проекция спинового момента импульса и магнитного момента электрона на направление внешнего магнитного поля (что совпадает с осью Oz)

$$L_{sz} = \hbar m_s, \mu_{sz} = 2\mu_B m_s.$$

10. Принцип Паули: в атоме не может находиться два или более электрона, характеризующихся одинаковым набором квантовых чисел n, l, m_l, m_s .

11. Полный орбитальный момент атома

$$L_L = \hbar \sqrt{L(L+1)},$$

где L – полное орбитальное квантовое число.

12. Полный спиновый момент атома

$$L_S = \hbar \sqrt{S(S+1)},$$

где S – полное спиновое квантовое число.

13. Полный момент импульса атома:

$$L_J = \hbar \sqrt{J(J+1)},$$

где J – квантовое число полного момента импульса,

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|.$$

14. Спектральные обозначения термов:

$${}^{2S+1}L_J = {}^{\infty}L_J,$$

где $\kappa = 2S + 1$ – мультиплетность,

$L =$	0	1	2	3	4	5
	S	P	D	F	G	H

15. Правила отбора для квантовых чисел

$$\Delta S = 0; \Delta m_S = 0;$$

$$\Delta L = \pm 1; \Delta m_L = 0, \pm 1;$$

$$\Delta J = 0, \pm 1; \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

10.4 Контрольные вопросы и задания

1. Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний атома водорода.
2. Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний атома водорода в сферической системе координат.
3. Какими квантовыми числами определяется состояние электрона в атоме? Какие значения могут принимать квантовые числа?
4. Квантование каких величин описывают главное n , орбитальное l , магнитное m_l и спиновое m_s квантовые числа электрона в атоме?
5. Сформулируйте принцип Паули.
6. Что такое электронная оболочка, подоболочка атома?
7. Что такое спин электрона?
8. Какие формулы определяют модуль орбитального, спинового и полного механического моментов многоэлектронного атома?
9. Чему равны квантовые числа L , S и J для многоэлектронного атома?
10. Как записать спектральный символ терма? Что такое мультиплетность?
11. Что означает вырождение состояния, как определять кратность вырождения?

10.5 Примеры решения задач

Задача 1. Используя принцип Паули, найдите максимальное количество электронов в атоме, имеющих одинаковые квантовые числа: 1) n, l, m_l, m_s ; 2) n, l, m_l ; 3) n, l ; 4) n .

Дано: n, l, m_l, m_s .

$Z_{\max} - ?$

Анализ и решение

1. В соответствии с принципом Паули в одном квантовом состоянии не может находиться более одного электрона. Поэтому в атоме только один электрон имеет квантовые числа n, l, m_l и m_s , $Z_{\max} = 1$.

2. Одинаковые квантовые числа n, l, m_l могут иметь электроны, для которых различными будут квантовые числа m_s . Спиновое квантовое число $m_s = \pm 1/2$, поэтому в данном случае $Z_{\max} = 2$.

3. Магнитное квантовое число равно

$$m_l = -l, -l + 1, \dots, +l,$$

Следовательно вместе $(2l + 1)$ возможных значений. Кроме того, каждое из этих состояний электрона может отличаться от другого спиновым квантовым числом $m_s = \pm 1/2$.

Таким образом, одинаковые квантовые числа n и l есть у $Z_{\max} = 2(2l + 1)$ электронов.

4. В состоянии с данным квантовым числом n , которое определяет энергию электрона, могут находиться электроны, отличающиеся квантовыми числами l, m_l, m_s . Орбитальное квантовое число равно $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ (всего n возможных значений). Эти электроны могут отличаться квантовыми числами m_l и m_s – всего $2(2l + 1)$ значений.

Итак, максимальное количество электронов, имеющих данное значение главного квантового числа n , равно $Z_{\max} = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2$.

Задача 2. Определить химические элементы периодической системы Менделеева, электроны которых последовательно заполняют оболочку с главным квантовым числом $n = 2$. Записать для них основную электронную конфигурацию.

Дано: $n = 2$.

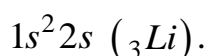
$x - ?$

Анализ и решение

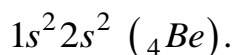
Главное квантовое число $n = 2$ имеют электроны, находящиеся на L -оболочке атома. Тогда K -оболочка ($n = 1$) для определяемых химических элементов заполнена. Если $n = 2$, то l может иметь максимальное значение $l_{\max} = n - 1 = 1$. То есть на L -оболочке находятся s - и p -электроны. Буквы s и p обозначают состояние электрона с $l = 0, 1$ соответственно. На K -оболочке расположены два s -электрона.

Первый из химических элементов, которые мы определяем, имеет в таблице Менделеева порядковый номер 3 (это ${}_3\text{Li}$). Электронная конфигурация его такова: два s -электрона на K -оболочке и один s -электрон на L -оболочке.

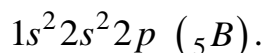
Сокращенно эту конфигурацию записывают так:



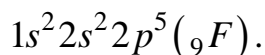
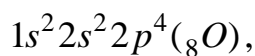
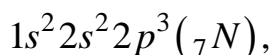
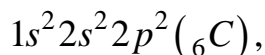
Следующий химический элемент – бериллий (${}_4\text{Be}$) имеет два $2s$ -электрона, его электронная конфигурация



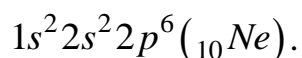
У бора (${}_5\text{B}$) начинается заполнение p -состояния ($l = 1$). Всего 5 электронов: два s -электрона, для которых $n = 1$, два s -электрона с $n = 2$, и один p -электрон ($l = 1$) на энергетическом уровне $n = 2$. Электронная конфигурация



Следующие химические элементы:



Всего на L -оболочке ($n = 2$) могут находиться $2n^2$ электронов, то есть два s -электрона и шесть p -электронов. Тогда последний из определяемых элементов имеет порядковый номер $2 + 2 + 6 = 10$. Это неон ${}_{10}\text{Ne}$. У него полностью заполнены K - и L -оболочки:



Задача 3. Чему равен максимально возможный полный механический момент L_J атома лития, валентный электрон которого находится в состоянии с $n = 3$? Запишите символ терма соответствующего состояния.

Дано: $n = 3$,

$$L_J^{\max} = ? \quad \text{X}_J = ?$$

Анализ и решение

Если $n = 3$, то максимально возможное $L = n - 1 = 2$. Один валентный электрон лития расположен на внешней электронной оболочке, поэтому спиновое квантовое число S определяется спином этого электрона: $S = 1/2$. Тогда максимально возможное значение J составляет $J = L + S = 5/2$, а механический момент импульса атома равен

$$L_J = \hbar \sqrt{J(J+1)} = \hbar \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{35}.$$

Спектральный символ терма запишем, зная квантовые числа этого состояния: $L = 2$. Тогда это D -состояние, мультиплетность состояния равна $\text{x} = 2S + 1 = 2$. Спектральный символ терма ${}^2D_{5/2}$.

10.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Запишите квантовые числа, определяющие внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома натрия.

Ответ: $n = 3$; $l = 0$; $m_l = 0$; $m_s = \pm 1/2$.

Задача 2. Какую группу электронов в атоме называют оболочкой, подоболочкой? Определить максимально возможное количество электронов на оболочке и подоболочке.

Ответ: Для подоболочки $Z_{\max} = 2(2l+1)$; для оболочки $Z_{\max} = 2n^2$.

Задача 3. Определить возможные значения полных механических моментов электронных оболочек атома в состояниях 4P и 5D .

Ответ: $L'_J = \hbar \sqrt{35/4}$; $\hbar \sqrt{15/4}$; $\hbar \sqrt{3/4}$;

$L''_J = \hbar \sqrt{20}$; $\hbar \sqrt{12}$; $\hbar \sqrt{6}$; $\hbar \sqrt{2}$; 0.

Задача 4. Определить возможную мультиплетность терма $D_{3/2}$.

Ответ: 2,4,6,8.

Задача 5. Мультиплетность F -состояния равна 5. Напишите термы, которые определяют это состояние.

Ответ: ${}^5F_1; {}^5F_2; {}^5F_3; {}^5F_4; {}^5F_5$.

Задача 6. Какие из термов ${}^2S_1; {}^2P_1; {}^3P_{1/2}; {}^3P_3; {}^5D_0; {}^1F_0; {}^8F_{13/2}$ записаны неправильно?

Ответ: Первый, второй, третий, четвертый, шестой.

Задача 7. Записать символ терма, что соответствует состоянию, для которого механический момент атома равен $L_J = \hbar\sqrt{2}$, магнитный момент – нулю, а спиновое квантовое число $S = 2$.

Ответ: 5F_1 .

Задача 8. Атом находится в состоянии, мультиплетность которого равна 4, механический момент $L_J = \hbar\frac{\sqrt{63}}{2}$. Какие значения может иметь квантовое число L для этого состояния?

Ответ: $L = 2, 3, 4, 5$.

Задача 9. Чему равен полный механический момент L_J атома, если магнитный момент равен нулю, а орбитальное и спиновое квантовые числа имеют значения $L = 2; S = 3/2$.

Ответ: $L_J = \hbar\sqrt{3/4}$.

Задача 10. Электронная оболочка атома состоит из s -, p - и d - электронов. Записать символ терма для состояния, в котором атом имеет минимальный для данной конфигурации полный механический момент L_J .

Ответ: ${}^2P_{1/2}$.

Задача 11. Определить кратность вырождения $3D$ -состояния атома лития. Какой физический смысл этой величины?

Ответ: 10.

Задача 12. Записать спектральный символ терма, кратность вырождения которого равна семи, а квантовые числа L и S связаны соотношением $L = 3S$.

Ответ: 3F_3 .

Задача 13. У какого элемента заполнены K -, L - и M -оболочки, $4S$ -подоболочка и наполовину $4P$ -подоболочка?

Ответ: As .

Задача 14. Определить, какие из переходов запрещены правилами отбора: ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$; ${}^2P_1 \rightarrow {}^2S_{1/2}$; ${}^3F_3 \rightarrow {}^3P_2$; ${}^4F_{7/2} \rightarrow {}^4D_{5/2}$.

Ответ: Второй и третий.

Задача 15. В случае четырех эквивалентных p -электронов принципу Паули не противоречат термы 1S_0 ; 3P_2 ; 3P_1 ; 3P_0 ; 1D_2 . Какой из них является основным?

Ответ: 3P_2 .

Задача 16. D -терм состоит из пяти компонентов. Какой может быть мультиплетность этого терма?

Ответ: 5, 6, 7, ...

Задача 17. Чему равен квадрат орбитального момента импульса L^2 электрона в состояниях $2p$; $3f$?

Ответ: $L_1^2 = 2\hbar^2$; $L_2^2 = 12\hbar^2$.

Задача 18. Состояние атома характеризуется квантовыми числами L и S , равными 3 и 2; 1 и $3/2$. Найти возможные значения квантового числа J .

Ответ: $J_1 = 1, 2, 3, 4, 5$; $J_2 = 1/2, 3/2, 5/2$.

Задача 19. Из скольких компонентов состоят термы 1S ; 2S ; 2P ; 4P ; 5D ?

Ответ: 1) из одного; 2) из одного; 3) из двух; 4) из трех; 5) из пяти.

Задача 20. Вычислить полную энергию, орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

Ответ: $-3,4$ эВ; $1,5 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

Задача 21. Определить, сколько различных волновых функций соответствует главному квантовому числу $n = 3$.

Ответ: 9.

Задача 22. Волновая функция, описывающая $1s$ -состояние электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = Ce^{-r/a}$, где r – расстояние электрона от ядра, a – первый боровский радиус. Определите нормированную волновую функцию, соответствующую этому состоянию.

Ответ: $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$.

Задача 23. Атом находится в состоянии, мультиплетность которого равна трем, а полный механический момент $L_J = \hbar\sqrt{20}$. Каким будет квантовое число L для этого состояния?

Ответ: $L = 3, 4, 5$.

Задача 24. $1s$ -электрон, поглотивший фотон с энергией 12,1 эВ, перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным квантовым числом. Определить изменение момента импульса орбитального движения электрона ΔL_l .

Ответ: $\Delta L_l = 2,57 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 25. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 3$. Определить число электронов на этой оболочке, имеющих одинаковые квантовые числа: 1) $m_s = -1/2$; 2) $m_l = 0$; 3) $m_l = -1$, $m_s = -1/2$.

Ответ: 1) 9; 2) 6; 3) 2.

Задача 26. Определённый атом, кроме заполненных оболочек, имеет три электрона (s -, p -, d -) и находится в состоянии с максимально возможным

механическим моментом. Найти в векторной модели атома угол между спиновым и полным механическим моментом атома.

Ответ: $\theta = 31^\circ$.

Задача 27. Атом находится в состоянии, для которого спиновое квантовое число равно $S = 1$, а полный механический момент $L_J = \hbar\sqrt{6}$. Для векторной модели угол между спиновым и полным механическим моментом равен $\theta = 73,2^\circ$. Записать спектральный символ терма этого состояния.

Ответ: 3D_2 .

Задача 28. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$ -состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где a – первый боровский радиус. Определите расстояние электрона от ядра, на котором он может находиться с наибольшей вероятностью.

Ответ: $r = a = 52,9$ пм.

Задача 29. Учитывая, что нормированная волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода имеет вид $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра.

Ответ: $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a$.

Задача 30. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$ -состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$. Определите среднюю потенциальную энергию электрона в поле ядра.

Ответ: $\langle U \rangle = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}$.

11 РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА АТОМОВ.

11.1 Цель занятия

Усвоить законы, которым подчиняются основные характеристики тормозного и характеристического рентгеновского излучения, рассмотреть магнитные свойства атома. Научиться решать задачи на основе этих законов.

11.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Во время подготовки к практическому занятию изучить теоретический материал по конспекту лекций или учебнику [2, гл. 2.3, 6.6, 7.1; 4, § 8, 33-35, 38]. Рентгеновское излучение, что подтверждает квантовую природу излучения, существует двух видов – тормозное и характеристическое. Для того, чтобы успешно решать задачи, прежде всего нужно понять физическую природу и условия возникновения рентгеновского излучения, запомнить формулу для коротковолновой границы рентгеновского спектра и изучить закон Мозли.

При изучении магнитных свойств атома и теории эффекта Зеемана нужно обратить особое внимание на квантовую природу величин, характеризующих эти свойства.

После теоретической подготовки нужно ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенные в примерах.

11.3 Основные законы и формулы

1. Коротковолновая граница λ_{\min} сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{|e|U} = \frac{hc}{E_{\max}},$$

где e – заряд электрона;

U – разность потенциалов, которая приложена к рентгеновской трубке;

h – постоянная Планка;

c – скорость света;

E_{\max} – максимальная кинетическая энергия электронов.

2. Закон Мозли в общем случае

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)^2,$$

где ω – частота линий рентгеновского спектра;

Z – атомный номер элемента, который излучает этот спектр;

σ – постоянная экранирования;

C – постоянная.

3. Закон Мозли для K_α -линий:

$$\omega_{K_\alpha} = R(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4}(Z - 1)^2 R,$$

или

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}(Z - 1)^2 R',$$

где $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$, $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга.

4. Магнитный момент атома

$$\mu_J = g\mu_B \sqrt{J(J + 1)},$$

где μ_B – магнетон Бора;

g – множитель (или фактор) Ланде.

5. Множитель (или фактор) Ланде

$$g = 1 + \frac{J(J + 1) + S(S + 1) - L(L + 1)}{2J(J + 1)},$$

где J – квантовое число полного момента импульса

$(J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|)$;

S – полное спиновое квантовое число;

L – полное орбитальное квантовое число.

6. Проекция магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля

$$\mu_{J_z} = g\mu_B m_J,$$

где m_J – полное магнитное квантовое число ($m_J = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$).

7. Сила, действующая на атом в неоднородном магнитном поле

$$F_z = \frac{\partial B}{\partial z} \mu_{J_z},$$

где $\partial B/\partial z$ – градиент магнитной индукции.

8. Энергия атома в магнитном поле с индукцией B

$$E = -\mu_{J_z} B.$$

9. Частота ларморовой прецессии

$$\omega_L = \frac{eB}{2m},$$

где m – масса электрона,

B – индукция магнитного поля.

10. Величина расщепления спектральной линии при эффекте Зеемана

а) аномальном

$$\Delta\omega = (m_1 g_1 - m_2 g_2) \omega_L,$$

где m_i , g_i – магнитные квантовые числа и множители Ланде термов, между которыми происходит переход.

б) нормальном

$$\Delta\omega = 0, \pm\omega_L.$$

11. Правила отбора для квантовых чисел

$$\Delta S = 0; \Delta m_S = 0;$$

$$\Delta L = \pm 1; \Delta m_L = 0, \pm 1;$$

$$\Delta J = 0, \pm 1; \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

11.4 Контрольные вопросы и задания

1. Какое рентгеновское излучение называется тормозным?

Сформулируйте условия его возникновения.

2. Какое рентгеновское излучение называется характеристическим?

Сформулируйте условия его возникновения.

3. Сформулируйте закон Мозли.

4. Чему равен магнитный момент электрона? Какие квантовые числа определяют эту величину?

5. Как определить магнитный момент многоэлектронного атома?
6. Чему равен фактор Ланде?
7. Чему равна проекция магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля?
8. Какие значения может иметь квантовое число, определяющее проекцию магнитного момента атома на ось z ?
9. Чему равна сила, действующая на атом в магнитном поле?
10. Как определить смещение спектральных линий в случае нормального эффекта Зеемана?
11. Какая формула определяет смещение спектральных линий для аномального эффекта Зеемана?
12. Сформулируйте правила отбора для квантовых чисел.

11.5 Примеры решения задач

Задача 1. Какое напряжение приложено к рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длины волн K_α -линии и коротковолновой границы сплошного спектра равна 84 пм?

Дано: $\Delta\lambda = 84 \text{ пм} = 84 \cdot 10^{-12} \text{ м}$; $Z = 28$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$;
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{С}$; $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

$U - ?$

Анализ и решение

Тормозное рентгеновское излучение возникает в результате торможения электронов на антикатоде. Поэтому энергия рентгеновского фотона не может быть больше энергии электрона $h\nu \leq eU$, или $h\frac{c}{\lambda} \leq eU$.

В результате наименьшая длина волны рентгеновского излучения (коротковолновая граница тормозного рентгеновского излучения) равна:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}. \quad (11.1)$$

Запишем закон Мозли для частоты K_α -линии характеристического рентгеновского излучения:

$$\omega_{k\alpha} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

Отсюда найдем длину волны K_α -линии:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R' (Z - 1)^2. \quad (11.2)$$

Здесь Z – порядковый номер элемента, который излучает характеристическое рентгеновское излучение (в данной задаче это никель).

Используя (11.1) и (11.2), запишем

$$\Delta\lambda = \lambda_{K_\alpha} - \lambda_{\min} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \frac{hc}{eU}$$

$$\frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda = \frac{hc}{eU},$$

$$U = \frac{hc}{e \left(\frac{4}{3R'(z-1)^2} - \Delta\lambda \right)} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

Задача 2. Наименьшее напряжение на рентгеновской трубке, при котором появляются K_α -линии в спектре характеристического рентгеновского излучения, равно $U = 8$ кВ. Определить, из какого материала изготовлен антикатод этой трубки. Вычислить частоту и энергию фотона, который принадлежит K_α -линии в спектре характеристического излучения материала антикатада.

Дано: $U_{\min} = 8 \text{ кВ} = 8 \cdot 10^3 \text{ В}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Z –? ν –? ε –?

Анализ и решение

Рентгеновское излучение возникает при бомбардировке антикатада трубки электронами, которые излучаются катодом, за счет энергии, возникающей при торможении электронов. Величина кванта $\hbar\omega$ не может превышать энергию электрона. Поэтому квант излучения появится тогда, когда его энергия равна минимальной энергии электрона, который бомбардирует антикатод.

Итак,

$$\hbar\omega = eU_{\min},$$

где e – заряд электрона.

Отсюда

$$U_{\min} = \frac{\hbar\omega}{e}. \quad (11.3)$$

Если энергия электрона достаточна, чтобы проникнуть в глубину электронной оболочки атома, то он способен выбить электрон, который принадлежит внутренним электронным слоям атома. При этом на фоне сплошного рентгеновского спектра появляются линии характеристического излучения.

Частота линии K_{α} -серии подчиняется закону Мозли

$$\omega_{K_{\alpha}} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2, \quad (11.4)$$

где $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ – постоянная Ридберга, Z – атомный номер элемента, который излучает этот спектр.

Если подставить в (11.3) частоту K_{α} -серии (11.4), получим:

$$U_{\min} = \frac{3\hbar}{4e}R(Z-1)^2.$$

Отсюда следует

$$Z = 1 + 2\sqrt{\frac{eU_{\min}}{3\hbar R}}. \quad (11.5)$$

Подставляя числовые значения величин в формулу (11.5), находим, что $Z = 29$. Итак, материалом антикатада является медь.

Энергию фотона найдем по формуле

$$\varepsilon_{K_{\alpha}} = \hbar\omega = \frac{3}{4}\hbar R(Z-1)^2. \quad (11.6)$$

Если подставить в (11.6) числовые значения величин, имеем $\varepsilon_{K_{\alpha}} = 8,01 \text{ кэВ}$.

Частота фотона $\nu = \varepsilon/h$, где $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

Расчет дает $\nu = 19,3 \text{ фГц}$.

Задача 3. Валентный электрон атома натрия находится в состоянии, которое характеризуется главным квантовым числом $n = 4$. Другие квантовые числа такие, что атом имеет самый большой из возможных полный механический момент L_J . Определить магнитный момент μ_J атома в этом состоянии.

Дано: $n = 4$; $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$.

$\mu_J - ?$

Анализ и решение

Магнитный момент атома равен

$$\mu_J = g\mu_B\sqrt{J(J+1)},$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ – магнетон Бора;

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \text{ – фактор Ланде;}$$

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|.$$

Для того, чтобы определить μ , необходимо знать, чему равны квантовые числа J , L и S . Найдем эти квантовые числа, пользуясь условием задачи.

Механический момент атома равен $L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$.

Наибольшим он будет тогда, когда J имеет наибольшее возможное значение, то есть $J = L + S$.

Для данной задачи наибольшим будет $L = 3$, потому что $n = 4$ по условию. Для атомов натрия (и других щелочных металлов) квантовое число S совпадает со спиновым числом валентного электрона на внешней электронной оболочке $S = 1/2$. Тогда $J = L + S = 7/2$, а $g = 8/7$.

Находим магнитный момент атома.

$$\mu_J = \frac{7}{8}\mu_B\sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{4}{7}\sqrt{63}\mu_B.$$

Задача 4. Узкий пучок атомов ванадия в основном состоянии ${}^4F_{3/2}$ пропускают по методу Штерна и Герлаха через поперечное неоднородное магнитное поле длиной $l_1 = 5,0$ см. Расщепление пучка наблюдают на экране, который находится на расстоянии $l_2 = 15$ см от магнита. Кинетическая энергия атомов $T = 22$ МэВ. Чему равен градиент индукции магнитного поля, если расстояние между крайними компонентами расщепленного пучка на экране равно $x = 2,0$ мм?

Дано: $l_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м; $l_2 = 15$ см $= 15 \cdot 10^{-2}$ м; $T = 22$ МэВ $= 3,52 \cdot 10^{-13}$ Дж; $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл; $x = 2,0$ мм $= 2,0 \cdot 10^{-3}$ м.

$\partial B / \partial x - ?$

Анализ и решение

Атомы ванадия находятся в состоянии ${}^4F_{3/2}$. Этому состоянию соответствуют квантовые числа $L=3$; $J=3/2$.

Квантовое число S найдем из соотношения: $2S+1=4$

$$S = 3/2$$

Если атом движется в неоднородном магнитном поле, то на него действует сила

$$F_x = \frac{\partial B}{\partial x} \mu_{JZ} = \frac{\partial B}{\partial x} g \mu_B m_J, \quad (11.7)$$

где $m_J = J, J-1, \dots, -J$ – полное магнитное квантовое число; g – фактор Ланде.

Если $J=3/2$, то m_J равно $3/2$; $1/2$; $-1/2$; $-3/2$.

В соответствии с этим пучок атомов ванадия в неоднородном магнитном поле расщепляется на четыре компоненты. Для крайних компонент расщепленного пучка $m_J = 3/2$; $-3/2$ или $|m_J| = J$.

Из формулы (11.7) можно найти градиент индукции магнитного поля $\partial B/\partial x$, для этого нужно знать F_x . Рассмотрим движение атомов в системе координат xOy . Ось Oy направлена перпендикулярно к экрану, а ось Ox – параллельно экрану, на котором наблюдают расщепление пучка (рис. 11.1). В направлении оси Ox на атомы действует сила F_x , поэтому атомы движутся с ускорением $a_x = F_x/m$, а проекция скорости атомов v_x изменяется от 0 до $v_x = a_x t_1$, где t_1 – время движения атомов в магнитном поле. Проекция скорости v_y остается постоянной при движении атомов в магнитном поле и равна $v_y = \sqrt{2T/m}$ (T – кинетическая энергия атомов). Смещение атомов в магнитном поле можно найти из формулы

$$x_1 = \frac{a_x t_1^2}{2}, \quad (11.8)$$

где $t_1 = \frac{l_1}{v_y}$; $a_x = \frac{F_x}{m}$.

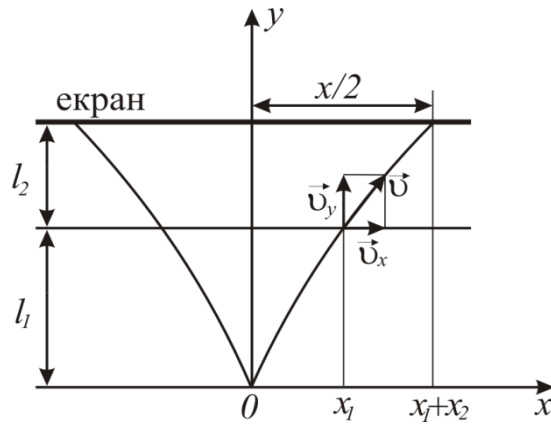


Рисунок 11.1

Используя формулы (11.7) и (11.8), определим

$$x_1 = \frac{F_x}{2m} t_1^2 = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{g\mu_B J}{2m} \cdot \frac{l_1^2 m}{2T} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{g\mu_B}{4T} l_1^2 J.$$

После вылета из области неоднородного магнитного поля атомы движутся с постоянной скоростью v , проекции которой равны $v_x = a_x t_1$, $v_y = \sqrt{2T/m} = l_1/t_1$. Если t_2 – время движения атомов до экрана после вылета из магнитного поля, а x_2 – смещение атомов за это время, то

$$l_2 = v_y t_2$$

$$x_2 = v_x t_2 = \frac{v_x}{v_y} l_2 = \frac{a_x t_1^2 l_2}{l_1} = 2x_1 \frac{l_2}{l_1}$$

Из рис. 11.1 понятно, что $x/2 = x_1 + x_2$, так

$$x = 2(x_1 + 2x_1 \frac{l_2}{l_1}),$$

$$x = \frac{(l_1 + 2l_2) g\mu_B J l_1}{2T} \cdot \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{2Tx}{g\mu_B J l_1 (l_1 + 2l_2)} \approx 1,5 \cdot 10^2 \text{ Тл/м.}$$

Задача 5. Нарисуйте схему возможных переходов между термами $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле.

Дано: $^2P_{3/2}$; $^2S_{1/2}$.

Анализ и решение

Квантовое число, определяющее проекцию магнитного момента атома на направление магнитного поля, равно $m_J = J, J-1, \dots, -J$ – (всего $2J+1$ возможных значений). Поэтому в магнитном поле энергетические уровни атома расщепляются на $2J+1$ уровень. Так терм ${}^2P_{3/2}$ ($J_1 = 3/2$) расщепится на 4 уровня, соответствующие значениям $m_J = 3/2; 1/2; -1/2; -3/2$. Терм ${}^2S_{1/2}$ ($J_1 = 1/2$) расщепится на 2 уровня, соответствующие значениям $m_J = 1/2; -1/2$.

Схема возможных шести переходов между уровнями изображена на рис. 11.2. Здесь учтено, что правила отбора позволяют переходы между состояниями, для которых $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

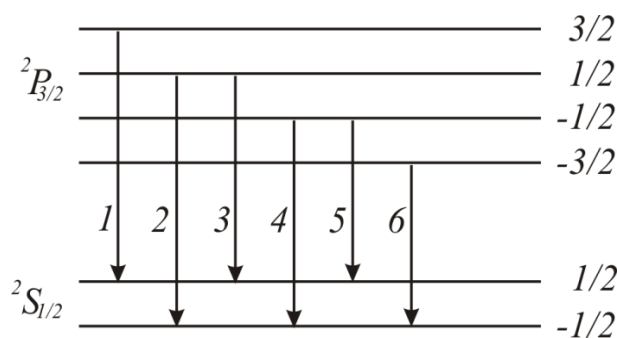


Рисунок 11.2

11.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Найти максимальную скорость электронов, долетающих до антиматода рентгеновской трубки, если коротковолновая граница рентгеновского спектра 2 нм.

Ответ: $v = 1,48 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 2. Определить изменение длины волны коротковолновой границы рентгеновского спектра при изменении напряжения на трубке от 16 до 24 кВ, а также относительное изменение длины волны.

Ответ: $\Delta\lambda = 2,6 \cdot 10^{-11}$ м; $\Delta\lambda/\lambda_1 = 33\%$.

Задача 3. Определить длину волны коротковолновой границы рентгеновского спектра, если при увеличении напряжения на рентгеновской трубке в два раза она уменьшилась на 50 пм.

Ответ: 100 пм.

Задача 4. Найти длину волны коротковолновой границы рентгеновского спектра, а также ускоряющую разность потенциалов, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде, составляет $0,3c$.

Ответ: $\lambda_{\min} = 1,24 \cdot 10^{-11}$ м; $U = 100$ кВ.

Задача 5. В рентгеновской трубке антикатод сделан из ниобия ${}_{41}\text{Nb}$. Определить длину волны и энергию кванта для K_{α} -линии. При какой наименьшей разности потенциалов возбуждается K -серия?

Ответ: $\lambda = 7,6 \cdot 10^{-11}$ м; $E = 16,25$ кэВ; $U = 16$ кВ.

Задача 6. При исследовании линейчатого рентгеновского спектра некоторого элемента было обнаружено, что длина волны K_{α} -линии составляет 22 пм. Какой это элемент?

Ответ: $Z = 74$, вольфрам.

Задача 7. В атоме вольфрама ($Z = 74$) электрон перешел с M -слоя на L -слой. Принимая постоянную экранирования равной $\sigma = 5,5$, определить длину волны излучаемого фотона.

Ответ: 0,14 нм.

Задача 8. Определить длину волны K_{α} и K_{β} -линии характеристического рентгеновского спектра, полученного в трубке с молибденовым антикатодом ($Z = 42$). Можно ли наблюдать эти линии при напряжении 12 кВ?

Ответ: $\lambda = 7,6 \cdot 10^{-11}$ м; $\lambda_{\beta} = 6,1 \cdot 10^{-11}$ м, невозможно.

Задача 9. Длина волны линии L_{α} у вольфрама ($Z = 74$) равна 0,1476 нм, а свинца ($Z = 82$) 0,1175 нм. Исходя из этих данных, найти значения констант C и σ в законе Мозли: $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$.

Ответ: $C = 5,398 \cdot 10^7$ с^{-1/2}; $\sigma = 7,8$.

Задача 10. С помощью закона Мозли:

1) определить длину волны и энергию кванта, соответствующие K_{α} -линии серебра;

2) определить к каким элементам относятся следующие K_α -линии: 193,5; 178,7; 165,6; 143,4 пм.

Ответ: 1) 57,5 пм; 2) железо, кобальт, никель, цинк.

Задача 11. Минимальная длина волны рентгеновских лучей, полученных с помощью трубки, работающей при напряжении $U = 60$ кВ, равна 20,7 пм. Определить по этим данным постоянную Планка.

Ответ: $6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Задача 12. Определить постоянную экранирование для L -серии рентгеновского излучения, если при переходе электрона в атоме вольфрама с M -оболочки на L -оболочку длина волны излучаемого, фотона составляет 140 пм.

Ответ: 5,63.

Задача 13. Определить фактор Ланде для атомов с одним валентным электроном в состояниях S и P .

Ответ: $g_1 = 2$; $g_2 = 2/3$; $3/4$.

Задача 14. Определить в магнетонах Бора магнитный момент атома в 1) 1F -состоянии; 2) в состоянии $^2D_{3/2}$.

Ответ: 1) $\sqrt{12}\mu_B$; 2) $\sqrt{3/5}\mu_B$.

Задача 15. Определить спиновый момент атома в состоянии D_2 , если максимальное значение проекции магнитного момента равен четырем магнетонам Бора.

Ответ: $L_S = 2\sqrt{3}\hbar$.

Задача 16. Атом углерода с электронной конфигурацией $1s^2 2s^2 2p 3d$ имеет максимально возможный полный механический момент. Чему равен (в магнетонах Бора) магнитный момент атома в этом состоянии?

Ответ: $\mu = (\mu_B/2)\sqrt{125}$.

Задача 17. Найти три самые простые термы, для которых множитель Ланде $g = 0$.

Ответ: ${}^4D_{1/2}$; 5F_1 ; 7H_2 .

Задача 18. На сколько компонентов расщепится в опыте, аналогичном опыту Штерна и Герлаха, пучок атомов, находящихся в состоянии: ${}^2P_{3/2}$; 3D_1 ; 7H_1 .

Ответ: $N = 4$; 3; 9.

Задача 19. Максимальное значение проекции магнитного момента атома, находящегося в состоянии D_2 , равно четырем магнетонам Бора. Определить мультиплетность этого терма.

Ответ: $\kappa = 7$.

Задача 20. Атом находится в магнитном поле с индукцией $B = 1,00$ Тл. Найти полное расщепление ΔE термов 1S , 1P , ${}^1D_{5/2}$.

Ответ: $\Delta E = 0$ эВ; $1,16 \cdot 10^{-4}$ эВ; $3,48 \cdot 10^{-4}$ эВ.

Задача 21. Найти числовое значение нормального (лоренцевого) смещения (при простом эффекте Зеемана) $\Delta\omega_0$, что соответствует $B = 1,0$ Тл.

Ответ: $\Delta\omega_0 = 0,879 \cdot 10^{11}$ с⁻¹.

Задача 22. Построить схему возможных энергетических переходов в магнитном поле между состояниями атома, которые определяются такими термами: 1) ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S$; 2) ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S$; 3) ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$.

Задача 23. Какой эффект Зеемана (простой или сложный) наблюдается при расщеплении в слабом магнитном поле спектральной линии, соответствующей переходу ${}^1P_1 \rightarrow {}^1S_0$; ${}^1P \rightarrow {}^1S_0$; ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{3/2}$?

Ответ: Простой; сложный; сложный.

Задача 24. Привести схему возможных переходов в магнитном поле между состояниями $^1P \rightarrow ^1S_0$ и $^1F \rightarrow ^1D$. Сколько компонентов имеет спектральная линия, соответствующая каждому из этих переходов?

Ответ: В обоих случаях три компонента.

Задача 25. Определить возможные значения квантового числа m_J и изобразить на схеме расщепление энергетических уровней атома в магнитном поле для состояний: 1) 2S , 2) $^2P_{3/2}$, 3) $^2D_{5/2}$, 4) 1F .

Ответ: 1) $-1/2, 1/2$, 2) $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$,

3) $-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$, 4) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Задача 26. Определить кинетическую энергию электронов, вырывающихся из K -оболочки атомов молибдена K_α -излучением серебра. Постоянную σ в законе Мозли считать равной единице.

Ответ: 1,54 кэВ.

Задача 27. Атом водорода в нормальном состоянии находится на расстоянии $r = 2,5$ см от длинного прямого проводника с током $I = 10$ А. Найти силу, действующую на атом.

Ответ: $F = 3 \cdot 10^{-26}$ Н.

Задача 28. Интервал между крайними компонентами спектральной линии $\lambda = 525$ нм при простом эффекте Зеемана равен $\Delta\lambda = 22$ пм. Найти интервал (в электрон-вольтах) между соседними уровнями зеемановского расщепления соответствующих термов.

Ответ: $\Delta E = \frac{\pi c \hbar \Delta\lambda}{\lambda^2} = 5 \cdot 10^{-5}$ эВ.

Задача 29. Узкий пучок атомарного водорода пропускается в опыте Штерна и Герлаха через поперечное неоднородное магнитное поле $\partial V / \partial z = 2$ кТл/м. Все атомы водорода находятся в основном состоянии, длина пути атомов в магнитном поле 8 см, скорость 4 км/с. Определить расстояние между компонентами расщепленного пучка атомов на выходе из магнитного поля.

Ответ: 4,46 мм.

Задача 30. Узкий пучок атомов рубидия в основном состоянии пропускается через поперечное неоднородное магнитное поле длиной 10 см. На экране, расположенном на расстоянии 10 см от магнита, наблюдают расщепление пучка на две компоненты. Определите силу, действующую на атомы рубидия, если расстояние между компонентами расщепленного пучка на экране равно 4 мм, а скорость атомов составляет 0,5 км/с.

Ответ: $2,86 \cdot 10^{-21}$ Н.

12 СТРОЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. РАДИОАКТИВНОСТЬ

12.1 Цель занятия

Научиться решать задачи, пользуясь основными законами ядерной физики, записывать схемы радиоактивного превращения одних атомных ядер в другие при всех видах распада и уравнения ядерных реакций.

12.2 Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Изучить соответствующий теоретический материал по конспекту лекций и учебнику [2, гл. 10, 11; 4, § 66-73; 5, гл. 14], обратить особое внимание на усвоение основных понятий физики атомного ядра – зарядового числа и массового числа, понятие дефекта массы, энергии связи, основных характеристик радиоактивного вещества – постоянной радиоактивного распада, периода полураспада, времени жизни радиоактивного ядра, активности препарата. Разобраться во всех радиоактивных процессах (α -распад, β -распад, γ -излучение, спонтанное деление тяжелых ядер, протонная радиоактивность). Усвоить закон радиоактивного распада.

Ответить на контрольные вопросы, тщательно разобрать решения задач, приведенные в примерах.

12.3 Основные законы и формулы

1. Ядра атомов состоят из протонов и нейтронов. Общее название протона и нейтрона – нуклон. Нейтральный атом и его ядро обозначаются одним и тем же символом:



где X – символ химического элемента; Z – атомный номер (число протонов в ядре) A – массовое число (число нуклонов в ядре). Количество N нейтронов в ядре равно разности $A - Z$.

2. Согласно с релятивистской механикой, масса покоя m устойчивой системы взаимосвязанных частиц меньше суммы масс покоя $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ тех же частиц, взятых в свободном состоянии. Разница:

$$\Delta m = (m_1 + m_2 + \dots + m_k) - m$$

называется дефектом массы системы частиц.

3. Энергия связи прямо пропорциональна дефекту массы системы частиц:

$$E_{св} = c^2 \Delta m,$$

где c – скорость света в вакууме ($c^2 = 8,987 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = 8,989 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг}$).

Если энергия выражена в мегаэлектронвольтах, а масса в атомных единицах массы, то $c^2 = 931,4 \text{ МэВ/а.е.м}$.

4. Дефект массы Δm атомного ядра является разностью между суммой масс свободных протонов и нейтронов и массой ядра, образовавшегося из них :

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_{я},$$

где Z – количество протонов в ядре, N – количество нейтронов ($N = A - Z$), m_p и m_n – массы свободных протона и нейтрона соответственно, $m_{я}$ – масса ядра.

Если учесть, что $m_{я} = m_a - Zm_e$; $m_p + m_e = m_{1H}$, где m_a, m_e, m_{1H} – масса атома, электрона и атома водорода соответственно, A – массовое число (число нуклонов в ядре), то дефект массы можно записать в виде

$$\Delta m = Zm_{1H} + (A - Z)m_n - m_a.$$

5. Удельная энергия связи (энергия связи на один нуклон):

$$E_{уд} = E_{св} / A.$$

6. Основной закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – количество атомов, которые не распались в момент времени t ; N_0 – количество атомов, не распавшихся в начальный момент времени (при $t = 0$), e – основание натурального логарифма; λ – постоянная радиоактивного распада.

7. Период полураспада $T_{1/2}$ – промежуток времени, за который количество не распавшихся атомов уменьшилось в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

8. Количество атомов, распавшихся за время t :

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Если промежуток времени $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для определения количества распавшихся атомов можно использовать приближенную формулу:

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

9. Среднее время жизни τ радиоактивного ядра – промежуток времени, за который количество нераспавшихся ядер уменьшается в e раз:

$$\tau = 1/\lambda.$$

10. Количество атомов, содержащихся в радиоактивном веществе:

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где m – масса вещества, M – молярная масса, N_A – постоянная Авогадро.

11. Активность A нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа) – величина, равная отношению количества dN ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени dt , за который произошел распад. Активность определяется по формуле:

$$A = -dN/dt = \lambda N,$$

или

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активность источника в начальный момент времени ($t = 0$):

$$A = \lambda N_0.$$

Активность изотопа изменяется со временем по тому же закону, что и количество не распавшихся ядер:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

12.4 Контрольные вопросы и задания

1. Из чего состоит атомное ядро?
2. Какие характеристики атомного ядра вы знаете?
3. Дайте определение изотопов, изобаров, изотонов и изомеров.
4. Чему равна энергия связи ядра?
5. Дайте определение удельной энергии связи ядра.
6. Почему прочность ядер уменьшается при переходе к тяжелым элементам?
7. Запишите формулу дефекта массы.
8. Что называется ядерными силами? Назовите их основные свойства.
9. В чем суть оболочечной модели ядра и какие явления она объясняет?
10. В чем суть капельной модели ядра и какие явления она объясняет?
11. Что такое радиоактивность? Назовите виды радиоактивных излучений.
12. Изменится ли химическая природа элемента при излучении его ядром γ -кванта?
13. Какие явления сопровождают прохождение γ -излучения через вещество и в чем их суть?
14. Что называется радиоактивным распадом?
15. Сформулируйте закон радиоактивного распада.
16. Что называется периодом полураспада вещества?
17. Что такое время жизни радиоактивного ядра? Как эта величина связана с постоянной радиоактивного распада?
18. Что называется активностью нуклида? По какому закону изменяется активность со временем?
19. Что называется ядерными реакциями?
20. По каким признакам можно классифицировать ядерные реакции?

12.5 Примеры решения задач

Задача 1. Водород обогащён дейтерием. Определить массовые доли w_1 протия и w_2 дейтерия, если относительная атомная масса такого водорода равна 1,222.

Дано: $A_r = 1,222$.

$w_1 - ?$ $w_2 - ?$

Анализ и решение

Массовые доли протия и дейтерия можно выразить соотношениями

$$w_1 = m_1 / (m_1 + m_2), \quad w_2 = m_2 / (m_1 + m_2),$$

где m_1 и m_2 – массы соответственно протия и дейтерия в смеси.

Выразим из этих уравнений массы m_1 и m_2

$$m_1 = w_1 (m_1 + m_2); \quad m_2 = w_2 (m_1 + m_2)$$

и подставим их в знаменатель формулы, определяющей молярную массу M смеси

$$M = (m_1 + m_2) / (m_1 / M_1 + m_2 / M_2),$$

где M_1 и M_2 – молярные массы компонентов смеси. После такой подстановки и простых преобразований получим

$$M = M_1 M_2 / (w_1 M_1 + w_2 M_2). \quad (12.1)$$

Поскольку молярные массы протия и дейтерия пропорциональны их относительным атомным массам, то уравнение (12.1) можно переписать в виде

$$A_r = A_{r_1} A_{r_2} / (w_1 A_{r_2} + w_2 A_{r_1}),$$

где A_{r_1} и A_{r_2} – относительные атомные массы соответственно протия и дейтерия. Отметим далее, что сумма массовых долей всех компонентов должна быть равной единице, то есть

$$w_1 + w_2 = 1$$

Решив совместно уравнения (12.2) и (12.3), найдем

$$w_1 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r (A_{r_2} - A_{r_1})}, \quad (12.2)$$

$$w_2 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r (A_{r_1} - A_{r_2})}. \quad (12.3)$$

Из физических таблиц находим $A_{r_1} = 1,00783$, $A_{r_2} = 2,01410$.

Подставив числовые значения величин в (12.2) и (12.3), получим

$$w_1 = 0,796 \text{ и } w_2 = 0,204.$$

Задача 2. Рассчитать дефект массы Δm , энергию связи $E_{св}$ ядра 1_5B .

Дано: 1_5B .

Δm – ? $E_{св}$ – ?

Анализ и решение

Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm_{1H} + (A - Z)m_n - m_a . \quad (12.4)$$

Вычисление дефекта массы выполним в несистемных единицах а.е.м. Для ядра ${}^{11}_5B$: $Z = 5$, $A = 11$. Массы нейтральных атомов водорода 1_1H и бора ${}^{11}_5B$, а также нейтрона n найдем в физических таблицах. Подставим значения масс в формулу (12.4)

$$\begin{aligned} \Delta m &= [5 \cdot 1,00783 + (11 - 5) \cdot 1,00867 - 11,00931], \\ \Delta m &= 0,08186 \text{ а.е.м.} \end{aligned} \quad (12.5)$$

Энергия связи ядра определяется соотношением

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2.$$

Энергию связи также найдем в МэВ.

Для этого дефект массы подставим в соотношение (12.5) в а.е.м., а коэффициент пропорциональности $c^2 = 931,4 \text{ МэВ/а.е.м.}$, то есть

$$E_{св} = 931,4 \cdot 0,08186 = 76,24 \text{ МэВ.}$$

Задача 3. Определить энергию E , которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}^{23}_{11}Na$

Дано: ${}^{23}_{11}Na$.

$E - ?$

Анализ и решение

После отрыва нейтрона число нуклонов A в ядре уменьшится на единицу. А количество протонов Z останется без изменения; получим ядро ${}^{23}Na$, образовавшееся в результате захвата свободного нейтрона ядром ${}^{22}Na$. Энергия отрыва нейтрона от ядра ${}^{23}Na$ равна энергии связи нейтрона с ядром ${}^{22}Na$ ($E = E_{св}$).

Выразив энергию связи нейтрона из-за дефекта массы системы, получим

$$E = E_{св} = c^2 \Delta m = c^2 (m_{22Na} + m_n - m_{23Na}). \quad (12.6)$$

При подстановке числовых значений в (12.6) заменяем массы ядер массами нейтральных атомов. Несмотря на то, что количество электронов в

оболочках атомов ^{22}Na и ^{23}Na одинаково, разность масс атомов ^{23}Na , ^{22}Na от такой замены не изменится.

$$E = 931,4 \cdot 0,01334 = 12,42 \text{ МэВ.}$$

Задача 4. Радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2 . Считая, что в начальный момент препарат имел только ядра изотопа A_1 , найти, через какое время активность радиоизотопа A_2 достигнет максимума?

Дано: $A_1, \lambda_1, A_2, \lambda_2$.

$t_{a_{\max}} - ?$

Анализ и решение

Активность препарата пропорциональна количеству существующих ядер

$$a = -dN/dt = \lambda N.$$

Следовательно, максимальная активность радиоизотопа A_2 будет соответствовать максимальному количеству ядер N_2 . Закон изменения N_2 со временем имеет вид

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (12.7)$$

где $N_1(0)$ – количество ядер радиоизотопа A_1 в момент времени $t = 0$.

Чтобы найти время t , соответствующее максимуму функции $N_2(t)$, про дифференцируем выражение (12.7) по времени и приравняем к нулю производную

$$N_2'(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0, \quad (12.8)$$

из формулы (12.8)

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Откуда имеем

$$t_{a \max} = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Задача 5. Определить, сколько ядер радиоизотопа церия ${}_{51}^{141}\text{Ce}$ массой $m_0 = 2$ мг распадаются в течение таких промежутков времени: $\Delta t_1 = 10$ с; $\Delta t_2 = 1$ год. Период полураспада церия $T = 285$ суток.

Дано: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$, $m_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ кг, $\Delta t_1 = 10$ с, $\Delta t_2 = 1$ год, $T = 285$ суток; $\mu = 0,144$ кг/моль.

$\Delta N - ?$

Анализ и решение

1. Количество не распавшихся ядер ΔN , найдем из закона радиоактивного распада

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

где

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (12.9)$$

Отсюда

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Delta t. \quad (12.10)$$

Начальное количество ядер (атомов) определим как

$$N_0 = N_A \cdot \nu = N_A \frac{m_0}{\mu}, \quad (12.11)$$

где ν – количество молей, содержащийся в препарате, m_0 – начальная масса препарата, N_A – число Авогадро, μ – молярная масса изотопа.

Подставив (12.11) в (12.10), получим

$$\Delta N = \frac{\ln 2 \cdot N_A \cdot m_0 \cdot \Delta t}{T \mu} = 2,4 \cdot 10^{12}.$$

2. Во втором случае $\Delta t = T$. Поэтому можно воспользоваться интегральной формой закона радиоактивного распада

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (12.12)$$

Подставив в (12.12) значения N_0 и λ из (12.11) и (12.9), получим

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{t \cdot \ln 2}{T}} \right).$$

Поскольку $e^{\ln 2} = 2$, то $\Delta N = \frac{N_A \cdot m_0}{\mu} \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}} \right) = 5 \cdot 10^{18}$.

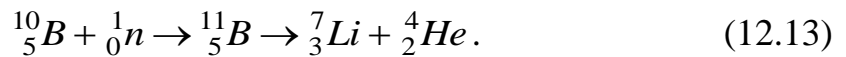
Задача 6. Определить энергию реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7 \rightarrow \text{Li}$, происходящей в результате взаимодействия медленных нейтронов с ядрами бора, находящимися в покое. Найти также кинетические энергии T продуктов реакции.

Дано: m_{Li} ; m_{He} ; m_n ; c .

Q – ? T – ?

Анализ и решение

Ядерная реакция имеет вид



Как видно из (12.13), ядро бора, поглотившее медленный нейтрон, превращается в промежуточное ядро $^{11}_5\text{B}$. Последнее переходит в возбужденное состояние, после чего излучает α -частицу (ядро гелия ^4_2He) и превращается в ^7_3Li , то есть ядро лития.

Найдем энергию реакции

$$Q = c^2 (\sum m - \sum m'). \quad (12.14)$$

$\sum m$ и $\sum m'$ – суммы масс покоя частиц до и после реакции, соответственно.

Перепишем (12.14) в виде

$$Q = c^2 \left[(m_{^{10}\text{B}} + m_n) - (m_{^7\text{Li}} + m_{^4\text{He}}) \right],$$

где m_n – масса нейтрона.

Заменим массы покоя ядер атомов на массы покоя собственно атомов ($m = m_0, m' = m'_0$).

Тогда $Q = 2,8$ МэВ.

Найдем кинетические энергии продуктов реакции, то есть ядра лития ^7_3Li и α -частицы. Закон сохранения релятивистской энергии в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sum m_0 c^2 + \sum E_K &= \sum m'_0 c^2 + \sum E'_K, \\ c^2 (\sum m_0 - \sum m'_0) + \sum E_K &= \sum E'_K. \end{aligned} \quad (12.15)$$

В последнем соотношении учтем (12.14) и получим

$$Q + \sum E_K = \sum E'_K.$$

Нейтроны имеют малую скорость, поэтому $\sum E_K = 0$. Сумму кинетических энергий продуктов реакции можно представить как

$$E_{KLi} + E_{KHe} = Q \quad (12.16)$$

Суммарный импульс частиц до реакции равен нулю. Согласно закону сохранения импульса и после реакции суммарный импульс должен быть равен нулю

$$\vec{p}_{Li} + \vec{p}_{He} = 0.$$

Откуда модули импульсов

$$|\vec{p}_{Li}| = |\vec{p}_{He}|.$$

От импульсов частиц реакции перейдем к их кинетическим энергиям. Поскольку для классической частицы

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

откуда

$$p = \sqrt{2mE_K},$$

тогда

$$\sqrt{2m_{Li}E_{KLi}} = \sqrt{2m_{He}E_{KHe}},$$

или

$$m_{Li}E_{KLi} = m_{He}E_{KHe}. \quad (12.17)$$

Из уравнений (12.16) и (12.17), получим

$$E_{KLi} = \frac{Qm_{He}}{m_{Li} + m_{He}}; \quad E_{KHe} = \frac{Qm_{Li}}{m_{Li} + m_{He}}.$$

Подставив значения m_{He} , m_{Li} получим

$$E_{KLi} = \frac{4Q}{11} = 1,02 \text{ МэВ}, \quad E_{KHe} = \frac{7Q}{11} = 1,78 \text{ МэВ}.$$

12.6 Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Хлор представляет собой смесь двух изотопов с относительными атомными массами $A_{r1} = 34,969$ и $A_{r2} = 36,966$. Вычислить

относительную атомную массу A_r хлора, если массовые доли w_1 и w_2 первого и второго изотопов соответственно равны 0,754 и 0,246.

Ответ: $A_r = 35,439$.

Задача 2. Бор представляет собой смесь изотопов с относительными атомными массами $A_{r_1} = 10,013$ и $A_{r_2} = 11,009$. Определить массовые доли w_1 и w_2 первого и второго изотопов в естественном боре. Относительная атомная масса A_r бора равен 10,811.

Ответ: $w_1 = 0,186$; $w_2 = 0,184$.

Задача 3. Определить массу ядра лития, если масса нейтрального атома лития равна 7,01601 а.е.м.

Ответ: $m_{яLi} = 7,01436$ а.е.м.

Задача 4. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы зеркальных ядер, полученных, если в ядрах ${}^3_2\text{He}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^{15}_8\text{O}$, протоны заменить нейтронами, а нейтроны – протонами. Привести символическую запись полученных ядер.

Ответ: ${}^3_1\text{H}$, ${}^7_3\text{Li}$, ${}^{15}_7\text{N}$.

Задача 5. Два ядра гелия ${}^4_2\text{He}$ слиплись в одно ядро. Процесс сопровождался выбросом протона. Определить, ядро какого элемента образовалось в результате преобразования (приведите символическую запись ядра).

Ответ: ${}^7_3\text{Li}$.

Задача 6. В ядре изотопа кремния ${}^{27}_{14}\text{Si}$ один из протонов превратился в нейтрон (β^+ -распад). Какое ядро получилось в результате такого преобразования?

Ответ: ${}^{27}_{13}\text{Al}$.

Задача 7. Ядро плутония ${}_{94}^{238}\text{Pu}$ испытало шесть последовательных α -распадов. Написать цепочку преобразований с указанием химических символов, массовых и зарядовых чисел промежуточных ядер и конечного ядра.

Ответ: ${}_{94}^{238}\text{Pu} \rightarrow {}_{92}^{234}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{230}\text{Th} \rightarrow {}_{88}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}_{86}^{222}\text{Rn} \rightarrow {}_{84}^{218}\text{Po} \rightarrow {}_{82}^{214}\text{Pb}$.

Задача 8. Определить дефект массы Δm и энергию связи ядра атома тяжелого водорода.

Ответ: $\Delta m = 0,00240 \text{ а.е.м.}; E_{\text{св}} = 2,23 \text{ МэВ}$.

Задача 9. Определить энергию $E_{\text{св}}$, которая освободилась при соединении одного протона и двух нейтронов в атомное ядро.

Ответ: $E_{\text{св}} = 8,49 \text{ МэВ}$.

Задача 10. Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона равна 7,72 МэВ. Определить массу m_a нейтрального атома, имеющего это ядро.

Ответ: $m_a = 3,01604 \text{ а.е.м.}$

Задача 11. Определить массу m_a нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра равна 26,3 МэВ.

Ответ: $m_a = 5,01258 \text{ а.е.м.}$ (атом лития ${}^5_3\text{Li}$).

Задача 12. Определить энергию E , которая освобождается при создании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}^4_2\text{He}$ массой $m = 1 \text{ г}$.

Ответ: $E = 682 \text{ ГДж}$.

Задача 13. Найти минимальную энергию E_{min} , необходимую для вырывания одного протона из ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$.

Ответ: $E_{\text{min}} = 7,55 \text{ МэВ}$.

Задача 14. Энергия связи E_{ce} ядра кислорода $^{18}_8O$ равна 139,8 МэВ, ядра фтора $^{19}_9F$ – 147,8 МэВ. Определить, какую минимальную энергию нужно затратить, чтобы оторвать один протон от ядра фтора.

Ответ: $E_{\min} = 8,0$ МэВ.

Задача 15. Какую наименьшую энергию связи E_{\min} необходимо затратить, чтобы разделить ядро 4_2He на две одинаковые частицы?

Ответ: $E_{\min} = 23,8$ МэВ.

Задача 16. Определить наименьшую энергию E_{\min} , необходимую для разделения ядра углерода $^{12}_6C$ на три одинаковые частицы.

Ответ: $E_{\min} = 7,26$ МэВ.

Задача 17. Какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния $^{225}_{87}Ac$ останется через 5 суток, 15 суток? Период полураспада актиния 10 суток.

Ответ: 0,71; 0,36.

Задача 18. Ядро изотопа кобальта $^{60}_{27}Co$ выбросило отрицательно заряженную β -частицу. В какое ядро превратилось ядро кобальта?

Ответ: $^{60}_{28}Ni$.

Задача 19. Определить зарядовое Z и массовое A число изотопа, который образуется из тория $^{232}_{90}Th$ после трех α - и двух β -преобразований.

Ответ: $Z = 86$; $A = 220$, $^{220}_{86}Rn$.

Задача 20. Определить постоянные распада λ изотопов радия $^{219}_{88}Ra$ и $^{226}_{88}Ra$. Их периоды полураспада – $10^{-3}c$ и $1,62 \cdot 10^3$ лет.

Ответ: $700 c^{-1}$; $13,6 nc^{-1}$.

Задача 21. Постоянная распада рубидия ^{89}Rb равна $0,00077 \text{ c}^{-1}$.
Определить его период полураспада $T_{1/2}$.

Ответ: 15 мин.

Задача 22. Если период полураспада радия 1600 лет, то какая доля образца радия распадется после того, как пройдет 3200 лет?

Ответ: $3/4$.

Задача 23. Определить энергию Q α -распада ядра полония $^{210}_{84}\text{Po}$.

Ответ: $Q = 5,41 \text{ МэВ}$.

Задача 24. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

Ответ: В 9 раз.

Задача 25. Найти энергию E , которая высвобождается при делении всех ядер, содержащихся в уране-235 массой $m = 1 \text{ г}$.

Ответ: $E = 82 \text{ ГДж}$.

Задача 26. Ядро радона $^{220}_{86}\text{Rn}$, находившееся в состоянии покоя, выбросило частицу со скоростью $v = 16 \text{ Мм/с}$. В какое ядро превратилось ядро радона? Какую скорость v_1 оно получило вследствие отдачи?

Ответ: $^{216}_{84}\text{Po}$, $v_1 = 29 \text{ Мм/с}$.

Задача 27. Ядро углерода $^{14}_6\text{C}$ выбросило отрицательно заряженную β -частицу и антинейтрино. Определить полную энергию Q β -распада ядра.

Ответ: $Q = 0,156 \text{ МэВ}$.

Задача 28. Ядро атома радия $^{226}_{88}\text{Ra}$, что свободно покоится, испытывает α -распад. Энергия связи ядра равна $1731,6 \text{ МэВ}$, ядра $^{222}_{86}\text{Rn}$ – $1708,2 \text{ МэВ}$, α -частицы – $28,3 \text{ МэВ}$. Считая, что дочернее ядро радона $^{222}_{86}\text{Rn}$ образуется в невозбужденном состоянии, найти: а) скорость v_α образовавшейся частицы; б) скорость дочернего атома.

Ответ: а) $v_{\alpha} = 1,5 \cdot 10^7$ м/с; б) $v = 2,7 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 29. Сколько ядер урана-235 может делиться за $t = 1$ с, чтобы тепловая мощность P ядерного реактора равнялась 1 Вт?

Ответ: $N = 3,1 \cdot 10^{10}$.

Задача 30. Найти мощность P атомной электростанции, которая тратит 0,1 кг урана-235 в сутки, если КПД η станции составляет 16%.

Ответ: $P = 15$ МВт.

РЕКОМЕНДОВАНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Краткий курс физики: учебн. пособие / И.Н.Кибец, Е.Н.Коваленко, А.И.Рыбалка, В.А.Стороженко. – Харьков: компания СМІТ, 2015. – 328 с.
2. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: навч. посібник / Упоряд.: Українець М.І. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 164с.
3. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина II. Електрика та магнетизм: навч. посібник / І.М.Кібець, А.І.Рибалка, В.О.Стороженко. - Харків: Компанія СМІТ, 2009. – 424 с.
4. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина III. Оптика, том 1: навч. посібник / І.М.Кібець, А.І.Рибалка, В.О.Стороженко. - Харків: Компанія СМІТ, 2012. – 231 с.
5. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина III. Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла. Ядерна фізика., том 2: навч. посібник / І.М.Кібець, А.І.Рибалка, В.О.Стороженко. - Харків: Компанія СМІТ, 2013. – 303 с.
6. Чертов А.Г. Воробьёв А.А. Задачник по физике. – М.: 1981. – 496с.
7. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: 1982.
8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: 1988. – 416с.
9. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: 1982. – 420с.
10. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – М.: Высш. шк. 1999. – 591 с.