УДК 681.3;681.5:007

Н. В. АЛИПОВ, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ [0,1]

При синтезе переключательных цепей теории интеллекта [1] появляется необходимость в разработке элемента узнавания буквы. Подобная ситуация возникает и при аналого-цифровом преобразовании информации: точка, отображающая аналоговый сигнал, узнается (процесс узнавания сводится к процессу формирования координаты этой точки). К процессу узнавания (поиска) сводится не только процесс аналого-цифрового преобразования, но и процессы поиска неисправного элемента в дискретном устройстве преобразования информации; поиска данных [2]; составления помехоустойчивых вопросников [3]; генерации методов защиты информации и избыточных представлений двоичных чисел.

В некотором смысле процесс поиска точки на отрезке [0, 1] является универсальным (результаты теории поиска точки на отрезке [0, 1], как уже отмечалось, имеют применение в различных областях науки и техники) и реализует операцию узнавания из теории интеллекта [1]. К настоящему времени теория поиска точки на отрезке [0, 1] развита только для тестов, свободных от помех (теория префиксных и алфавитных кодов) [3], и «не создано оснований более широкой теории, которая охватывала бы результаты Кифера с результатами, относящимися к стахостической аппроксимации» [3].

В статье приводится решение задачи синтеза помехоустойчивых к импульсным помехам алгоритмов поиска точки на отрезке [0, 1]. Для того чтобы сформировать эту задачу, опишем процесс поиска точки в терминах теории поиска [3] и введем ряд понятий и определений.

Под экспериментом или тестом [3] будем понимать выяснение истинности предиката $P\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}^{j}_{\rho}\}$, где $\overset{\circ}{x}$ — координата искомой точки $\overset{\circ}{x} \in [0, 1]$; x^j_ρ — координата некоторой другой точки x^j_ρ (эталонной точки, $x^j_\rho \in [0, 1]$); j — номер шага алгоритма, $j = \overline{1, i}$, $\rho = \overline{1, k}$; k — количество одновременно выполняемых экспериментов; i — длина поиска (количество шагов алгоритма).

Шагом алгоритма назовем совокупность следующих действий, реализующих на отрезке времени Δt (где Δt — длительность шага) осуществление k экспериментов и выделение нового интервала неопределенности относительно x. Формирование нового интервала неопределенности и координат точек экспериментов (эталонных точек) на j-м шаге реализуется решающими функциями d^1_j и d^2_j и функцией, которая в теории поиска называется стратегией поиска S_j [3].

Функция S_j однозначно задается разбиением исходного полуоткрытого интервала неопределенности $\left[\tilde{x}^{j-1}_{q(j-1)-1}, \tilde{x}^{j-1}_{q(j-1)}\right)$ эталонными точками x^j_ρ на $(k+1)$ новый полуоткрытый интервал:

$$A_j = \left\{\left[\tilde{x}^{j-1}_{q(j-1)-1}, x^j_1\right), [x^j_1, x^j_2), \ldots, \left[x^j_k, \tilde{x}^{j-1}_{q(j-1)}\right)\right\}.$$

Поэтому при синтезе помехоустойчивых алгоритмов поиска будем вместо S_j строить разбиения A_j. По результатам k экспериментов создается множество их значений (формируется выходной сигнал) $Z = \{1, 2, \ldots, k+1\}$ по следующей схеме:

$$Z = \begin{cases} 1, & P\{\overset{\circ}{x} \geqslant x_1^j\} = 0; \\ 2, & P\{\overset{\circ}{x} \geqslant x_1^j\} = 1, \ P\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}_2^j\} = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \rho, & P\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}_{\rho-1}^j\} = 1, \ P\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}_\rho^j\} = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k+1, & P\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}_k^j\} = 1. \end{cases}$$

Значение эксперимента определяется разбиением A_j, которое в свою очередь зависит от x и количества одновременно проводимых экспериментов k. Эту зависимость представим в виде

$$\mathrm{E}_{A_{j(x,k)}} = \rho \leftrightarrow x \in [x_{\rho-1}^j, \ x_\rho^j).$$

Эффективность алгоритма поиска оценим длиной интервала неопределенности относительно x, полученного на последнем шаге алгоритма. В общем случае длина интервала неопределенности зависит от x и алгоритма, поэтому в качестве оценки некоторого, к примеру z_2-го алгоритма, возьмем

$$L_{z_2} = \max_{x \in [0,1]} \{l_i(x, \ z_2), \tag{1}$$

где $l_i(x, z_2)$ — длина интервала неопределенности относительно x, полученного на последнем i-м шаге z_2-го алгоритма. Для оптимального помехоустойчивого алгоритма должно выполняться условие

$$L_{z_1} = \min_{z_2 \in M_1} \max_{x \in [0,1]} \{l_i(x, \ z_2)\};$$
$$\varphi(i, \ k) = 1/L_{z_1}. \tag{2}$$

Здесь M_1 — множество возможных алгоритмов.

Значение $l_i(x, z_2)$ зависит от длин интервалов неопределенности относительно x, полученных на j-м шаге алгоритма, т. е. от $l_j(x, z_2)$. В свою очередь $l_j(x, z_2)$ определяется распределением точек экспериментов x_ρ^j (разбиением A_j) в исходном полуоткрытом интервале $\left[\tilde{x}_{q(j-1)-1}^{j-1}, \ \tilde{x}_{q(j-1)}^{j-1}\right)$. Каждое такое распределение дает согласно соотношению (1) свой максимально возможный интервал неопределенности

$$l_{\alpha\rho}^j = \max_{\rho_1 = \overline{0,k}} l_{\alpha\rho_1}^j,$$

где α — номер распределения точек экспериментов x_ρ^j в исходном интервале; $\rho = \overline{0, \ k}$; $l_{\alpha\rho_1}^j = \overset{\circ}{x}_{\rho_1}^j - \overset{\circ}{x}_{\rho_1-1}^j$; $\overset{\circ}{x}_{\rho_1}^j \in [0, \ 1]$. С учетом соотношения (2) для j-го шага оптимального алгоритма поиска должно иметь место условие

$$l_{\alpha}^{j} = \min_{\alpha_1} \max_{\rho_1=\overline{0,k}} l_{\alpha_1 \rho_1}. \qquad (3)$$

Распределение точек экспериментов в исходном интервале, удовлетворяющее для любого $j \leqslant i$ условию (3), назовем α-набором.

Алгоритмические методы подавления помех (помехоустойчивые алгоритмы поиска) основаны на учете особых проявлений помех той или иной группы. Так, при синтезе помехоустойчивых к аддитивным импульсным помехам алгоритмов используется то обстоятельство, что для них характерно наличие интервалов времени, в которых их амплитуда равна нулю, т. е. $\xi(t)=0$; при синтезе помехоустойчивых к аддитивным синусоидальным помехам алгоритмов — такая их особенность: $\xi(t) = -\xi(t+\Delta t)$.

Мы рассматриваем помехоустойчивые к аддитивным импульсным помехам алгоритмы. Случайные импульсные помехи описываются такой совокупностью параметров, как $al_i(x, z_1)$ — максимально возможное абсолютное значение случайного возмущения $\xi(t)$; $l\Delta t$ — максимально возможная длительность случайного импульса; нΔt — минимально возможный интервал между двумя соседними импульсами [4].

Условно случайную импульсную последовательность, содержащую импульсы одной полярности, обозначим через A_1 (a, l, н); последовательность, в состав которой входят разнополярные импульсы,— через $A_2(a,\ l,$ н).

Проявление импульсной помехи на алгоритмическом уровне обнаруживается путем сравнения значений экспериментов, выполненных на соседних шагах алгоритма. Действительно, если, к примеру, $l=1$, н $\neq 0$ и $x_q^j = x_q^{j+1}$, где $q=\overline{1,\ k}$, $j<i$, то в результате реализации этих экспериментов получаем один из исходов:

а) $E_{A_{(j+1)}(x,k)} = E_{A_j(x,k)}$; *б)* $E_{A_{(j+1)}(x,k)} \neq E_{A_j(x,k)}$.

Исход *а* возможен в отсутствие помехи на j-м и $(j+1)$-м шагах алгоритма (длительность помехи не превосходит длительность шага алгоритма); исход *б* свидетельствует о действии помехи на j-м или $(j+1)$-м шаге алгоритма (для одних и тех же точек значения экспериментов различны). Повторное выполнение экспериментов в одних и тех же точках, которое в работе [4] названо принципом «повторных сравнений», хотя и обнаруживает проявление импульсной помехи, однако ведет к значительной временной избыточности (длина поиска увеличивается более чем в два раза). Обнаружить действие помехи можно и другим способом, заключающимся в следующем. Пусть на j-м шаге алгоритма имеет место равенство

$$E_{A_j(x,k)} = \rho. \qquad (4)$$

Тогда на $(j+1)$-м шаге эксперименты совершаются в точках, удовлетворяющих соотношениям

$$x_1^{j+1} \leqslant x_{\rho-1}^j;\ x_{\rho-1}^j < x_2^{j+1} < \ldots < x_{k-1}^{j+1} < x_\rho^j \leqslant x_k^{j+1}.$$

При этом, если справедливо выражение $y_1 = \left[P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_1^{j+1}\right\} = 1\right] \wedge \left[P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_k^{j+1}\right\} = 0\right]$, то справедливым будет и соотношение $E_{A(j+1)(x,k)} = \rho$, которое свидетельствует об исходе *а*. Другие значения предикатов $P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_1^{j+1}\right\}$, $P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_k^{j+1}\right\}$ устанавливают истинность соотношения исхода *б* и тем самым — проявление помехи на j-м или $(j+1)$-м шаге алгоритма. Этот подход к обнаружению помех на проверку значения эксперимента, образованного на j-м шаге алгоритма, затрачивает только два эксперимента и по этой причине обладает меньшей избыточностью, чем первый подход.

Возможен и подход [5], состоящий в том, что на j-м шаге алгоритма при истинности соотношения (4) формируем относительно x новый полуоткрытый интервал неопределенности $[x_{\rho-1}^{j,1}, x_\rho^{j,2})$, для которого

$$x_{\rho-1}^{j,1} = \begin{cases} x_{\rho-1}^j - ah, & x_{\rho-1}^j - ah \geqslant \tilde{x}_{q(j-1)-1}^{j-1} \\ \tilde{x}_{q(j-1)-1}^{j-1}, & x_{\rho-1}^j - ah < \tilde{x}_{q(j-1)-1}^{j-1}; \end{cases}$$

$$x_\rho^{j,2} = \begin{cases} x_\rho^j + ah, & x_\rho^j + ah \leqslant \tilde{x}_{q(j-1)}^{j-1}; \\ \tilde{x}_{x(j-1)}^{j-1}, & x_\rho^j + ah > \tilde{x}_{q(j-1)}^{j-1}, \end{cases} \tag{5}$$

где $h = l_t(x, z_1)$.

Затем в этом интервале на $(j+1)$-м шаге алгоритма выбираем точки экспериментов так, чтобы для некоторых из них выполнялись неравенства

$$x_{q_1}^{j+1} > x_{\rho-1}^j;\ x_{q_2}^{j+1} < x_\rho^j;\ q_1 \neq q_2,\ q_1,\ q_2 = \overline{1,\ k}.$$

В этом случае при истинности выражения

$$y_2 = \left[P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_{q_1}^{j+1}\right\} = 1\right] \wedge \left[P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_{q_2}^{j+1}\right\} = 0\right] \tag{6}$$

устанавливаем справедливость соотношения (4) и полагаем $x_{\rho-1}^{j,1} = x_{\rho-1}^j$; $x_\rho^{j,2} = x_\rho^j$.

Для других значений предикатов $P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_{q_1}^{j+1}\right\}$, $P\left\{\overset{\circ}{x} \geqslant \overset{\circ}{x}{}_{q_2}^{j+1}\right\}$ формируем согласно равенствам (5) относительно x новый полуоткрытый интервал неопределенности. Расширение интервала неопределенности, выполненное согласно равенствам (5), позволяет организовать на последующих шагах алгоритма коррекцию случайного возмущения, действовавшего на j-м шаге, а сравнение значений экспериментов, формируемых выражениями

4) и (6), уменьшить неопределенность, обусловленную преобразованиями (5).

Расширение возможных интервалов неопределенности для j-го шага алгоритма поиска приводит к их взаимному пересечению. Поэтому процесс коррекции случайных возмущений возможен тогда и только тогда, когда возможные интервалы неопределенности пересекаются между собой. Этот подход, названный в работе [5] принципом «пересечения», совмещает процесс обнаружения помехи с процессами коррекции случайного возмущения и уменьшения длины интервала неопределенности относительно x и по этой причине требует для реализации меньшей временной избыточности, чем другие.

На основании введенных понятий, описания процесса поиска x, критерия оптимальности, принципа «пересечения» задачу синтеза помехоустойчивых алгоритмов поиска $x \in [0, 1]$ сформулируем в таком виде: область поиска — отрезок $[0, 1]$; координата искомой точки x в процессе поиска не изменяется; на процесс поиска аддитивно накладывается случайное возмущение, обусловленное действием A_ν $(a, l, н)$-последовательности $(\nu = 1,2)$.

Поиск x осуществляется алгоритмом, состоящим из i шагов и выполняющим одновременно k экспериментов. Эксперименты на j-м шаге описываются разбиением $\boldsymbol{A}_j$, которое в свою очередь задается α-набором. Множеством значений экспериментов, свободных от ошибок, является множество Z.

Под действием A_ν $(a, l, н)$ — последовательности вместо $E_{\boldsymbol{A}_j}$ будем наблюдать случайные величины

$$Y_{\boldsymbol{A}_j[x, A_\nu(a,l,н), k]} = Y_j \in \psi = \{1, 2, \ldots, k+1\}.$$

На основании решающих функций d_j^1 и d_j^2 выделяются относительно x новые полуоткрытые интервалы неопределенности:

$$d_j^1 : Y_j \to \boldsymbol{A}_j^1; \; [x_{q_{j-1}}^{j,1}, x_{q_j}^{j,2}) \subset \boldsymbol{A}_j^1;$$

$$d_j^2 : \{Y_{j-l-1}, Y_{j-l}, \ldots, Y_j\} \to \boldsymbol{A}_{j-l-1},$$

где $q_j = \overline{1, k+1}$, $j \leqslant i$. Случайные значения Y_j считаются независимыми.

Требуется для заданных параметров A_ν $(a, l, н)$ — последовательности и алгоритма, для которых имеют место неравенства:

$$a \geqslant 0; \; н > 0; \; l \geqslant 0; \; i > 1; \; k \geqslant 1,$$

построить помехоустойчивый алгоритм поиска (найти такие d_j^1, d_j^2, $\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{A}_j^1$ и α-наборы), удовлетворяющий (удовлетворяющие) минимаксному критерию оптимальности (2).

Решение задачи синтеза помехоустойчивых алгоритмов осуществим путем исследования конечного числа исходов, возникающих в процессе формирования устройства поиска. Это позволит нам определить функции d_j^1, d_j^2 и построить для каждого шага алгоритма α-наборы.

Функция d_j^1 устанавливает отображение $d_j^1: Y_j \to A_j^1$ на основании только одной случайной Y_j (решение о новом полуоткрытом интервале неопределенности принимается без учета значений экспериментов, реализованных на предыдущих шагах алгоритма). Подобная ситуация возникает всегда после выполнения первого шага алгоритма, а также при выполнении $(j+z)$-го шага, для которого $z < l$.

Пусть $A_1(a, l,$ н)-последовательность содержит только импульсы положительной полярности (в статье рассматриваются такие случайные возмущения). Тогда в зависимости от шага алгоритма функцию d_j^1 строим на основании следующих утверждений.

1. Если на первом шаге алгоритма в точках $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{\ldots}^1, \ldots, x_k^1$ выполнены эксперименты и получен один из исходов:

$$a)\ x(t_1) \leqslant x_1^1;\quad б)\ x_{q-1}^1 \leqslant x(t_1) < x_q^1,$$

где $q = \overline{2, (k+1)}$; $x(t_1) = \overset{\circ}{x} + \xi(t_1)$; t_1 — момент начала работы алгоритма, то для исхода a новым полуоткрытым интервалом неопределенности является $[0, x_1^1)$, для исхода $б$ — $[x_{q-1}^{1,1}, x_q^1)$, для которого

$$x_{q-1}^{1,1} = \begin{cases} x_{q-1}^1 - ah, & x_{q-1}^1 - ah \geqslant 0; \\ 0, & x_{q-1}^1 - ah < 0. \end{cases}$$

Действительно, поскольку для исхода a имеют место соотношения $\overset{\circ}{x} + \xi(t_1) \leqslant x_1^1$; $\xi(t_1) \geqslant 0$, то истинным будет и неравенство $\overset{\circ}{x} \leqslant \overset{\circ}{x}{}_1^1$, что и доказывает справедливость отображения $d_1^1: 1 \to [0, x_1^1)$. Истинность отображения $d_1^1: q \to [x_{q-1}^{1,1}, x_q^1)$ устанавливаем, используя принцип «пересечения».

Если предположить, что для $A_1(a, l,$ н)-последовательности существует оптимальный i-шаговый помехоустойчивый алгоритм поиска, разбивающий исходный интервал неопределенности на $\psi_l^1(i, k)$ равных частей, то полуоткрытый интервал $[0, x_1^1)$ будет содержать $\psi_l^1(i-1, k)$ таких частей. Отсюда для координаты точки первого эксперимента выполняется равенство

$$x_1^1 = h\psi_l^1(i-1, k). \tag{7}$$

2. Если в результате выполнения j-го шага алгоритма установлено, что $x(t_j) \in [x_{q-1}^j, x_q^j)$, а на $(j+z_3)$-м его шаге в точках $x_{\gamma_1}^{j+z_3} \in (x_{q-1}^j, x_q^j)$, для которых $\gamma_1 = \overline{1, k}$; $z_3 < l$; $l \geqslant 1$, выполнены эксперименты и получен исход

$$x(t_{j+z_3}) \in (x_{\gamma_2-1}^{j+z_3}, x_{\gamma_2}^{j+z_3}),$$

где $\gamma_2 = \overline{1, k+1}$; $x_0^{j+z_3} = x_{q-1}^j$, то для полуоткрытого интервала неопределенности относительно $\overset{\circ}{x}$ имеет место соотношение

$$x \in [x_{\gamma_2-1}^{j+z_3,1},\ x_{\gamma_2}^{j+z_3}),$$

для которого

$$x_{\gamma_2-1}^{j+z_3,1} = \begin{cases} x_{\gamma_2-1}^{j+z_3} - ah, & x_{\gamma_2-1}^{j+z_3} - ah \geqslant x_{q-1}^{j,1}; \\ x_{q-1}^{j,1}, & x_{\gamma_2-1}^{j+z_3} - ah < x_{q-1}^{j,1}. \end{cases}$$

Действительно, поскольку $z_3 < l$ и, как следует из определения $A_1(a,\ l,\ н)$-последовательности, ее действие может не окончиться к моменту завершения $(j+z_3)$-го шага алгоритма, то истинность отображения $d_{j+z_3}^1: \gamma_2 \to [x_{\gamma_2-1}^{j+z_3,1},\ x_{\gamma_2}^{j+z_3})$ устанавливаем, исходя из принципа «пересечения».

Приведенные выше утверждения позволяют для любого шага алгоритма построить функцию d_j^1. В отличие от d_j^1 функция d_j^2 по совокупности случайных значений $Y_{j-l-1},\ Y_{j-l}, \ldots, Y_j$ на j-м шаге алгоритма проверяет правильность разбиения интервала неопределенности, выполненного на $(j-l-1)$-м шаге и этим самым реализует принцип «повторных сравнений». Такая проверка возможна только на $(j+z_2)$-м шаге, для которого $z_2 \geqslant l$.

Функция d_j^2 определяется параметрами н и l случайной импульсной последовательности и расположением составляющих α-набора в полуоткрытом интервале $[x_{q-1}^{j-l+1,1},\ x_q^{j-l+1})$. Составляющие α-набора могут располагаться либо только в интервале $(x_{q-1}^{j-l+1},\ x_q^{j-l+1})$, либо в интервале $(x_{q-1}^{j-l+1,1},\ x_q^{j-l+1})$, а параметры н и l могут быть связаны одним из неравенств: $l >$ н; $l \leqslant$ н.

Поэтому для задания d_j^2 необходимо рассмотреть всевозможные варианты, образованные расположением составляющих α-набора и параметрами $A_1(a,\ l,\ н)$-последовательности. Из четырех возможных таких вариантов в статье рассмотрим только два:

$$1)\ x_{q_1}^j \in (x_{q-1}^{j-l+1},\ x_q^{j-l+1}),\ l \leqslant н;$$

$$2)\ x_{q_1}^j \in (x_{q-1}^{j-l+1,1},\ x_q^{j-l+1}),\ l \leqslant н,\ q_1 = \overline{1,\ k},$$

характерных для тех случайных импульсных последовательностей, из которых максимально возможная длительность случайного импульса меньше минимального интервала между двумя соседними импульсами.

Для этих вариантов функцию d_j^2 задают на основании следующих утверждений.

3. Если в результате выполнения j-го шага алгоритма установлено, что $x(t_j) \in [x_{q-1}^j,\ x_q^j)$, а на $(j+z)$-м шаге в точках $x_{\gamma_1}^{j+z} \in (x_{q-1}^j,\ x_q^j)$, где $\gamma_1 = \overline{1,\ k}$, $l \geqslant 1$; $l \leqslant$ н; $z \geqslant l$; $z \leqslant$ н, выполнены эксперименты и получен один из исходов:

$$а)\ x(t_{j+z}) < x_1^{j+z};\quad б)\ x(t_{j+z} \in [x_{\rho-1}^{j+z},\ x_\rho^{j+z}),$$

где $\rho = \overline{2,\ k+1}$, то для этих исходов соответственно имеем:

$$x \in [x_{q-1}^{j,1},\ x_1^{j+z});\ x \in [x_{q-1}^j,\ x_\rho^{j+z}).$$

Справедливость соотношения для исхода a устанавливаем на основании утверждения 2. Для исхода $б$, если предположить, что $\xi(t_j) \neq 0$, то, как это следует из свойств A_1 (a, l, н)-последовательности, $\xi(t_{j+z}) = 0$. А поскольку $\xi(t_{j+z}) = 0$, то $x(t_{j+z}) < x_1^{j+z}$, что противоречит условиям исхода $б$, следовательно, $\xi(t_j) = 0$, что и доказывает истинность соотношения для исхода $б$.

4. Если $z_1 >$ н и в результате j-го и $(j + z_1)$-го шагов алгоритма получен исход $x(t_j) \in [x_{q-1}^j, x_q^j)$, $x(t_{j+z_1}) \in [x_{\gamma_3-1}^{j+z_1}, x_{\gamma_3}^{j+z_1})$, для которого $\gamma_3 = \overline{1,\ k+1}$, $x_0^{j+z_1} = x_{q-1}^j$, то независимо от значения переменной γ_3 имеем соотношение

$$x \in [x_{\gamma_3-1}^{j+z_1, 1},\ x_{\gamma_3}^{j+z_1}),$$

где

$$x_{\gamma_3-1}^{j+z_1, 1} = \begin{cases} x_{\gamma_3-1}^{j+z_1} - ah, & x_{\gamma_3-1}^{j+z_1} - ah \geqslant x_{q-1}^{j, 1}; \\ x_{q-1}^{j, 1}, & x_{\gamma_3-1}^{j+z_1} - ah < x_{q-1}^{j, 1}. \end{cases}$$

Действительно, поскольку $z_1 >$ н, то, исходя из свойств A_1 (a, l, н)-последовательности, записываем неравенства $\xi(t_j) > 0$; $\xi \times \times (t_{j+z_1}) > 0$, которые могут быть истинными.

Из истинности этих неравенств следует справедливость соотношения $x \leqslant x_{q-1}^j$, устанавливающего непротиворечивость выражения для полуоткрытого интервала неопределенности относительно x.

Принцип «повторных сравнений» (ПС) позволяет обнаружить импульсную помеху только в том случае, когда сопоставляются значения экспериментов на таких шагах алгоритма, которые разнесены во времени не более чем на н шагов. Для второго варианта расположения составляющих α-набора справедливо утверждение (приводится без доказательства).

5. Если на j-м шаге алгоритма установлено, что $x(t_j) \in [x_{q-1}^j$ $x_q^j)$, а в результате выполнения экспериментов $(j + z_2)$-го шага алгоритма в точках, для которых справедливо соотношение

$$x_{q-1}^{j,1} < x_1^{j+z_2} < \ldots < x_{\gamma_1}^{j+z_2} \leqslant x_{q-1}^j < x_{\gamma_1+1}^{j+z_2} < \ldots < x_k^{j+z_2} < x_q^j,$$

возник один из исходов:

$$a_1)\ x(t_{j+z_2}) < x_1^{j+z_2};\ a_2)\ x(t_{j+z_2}) \in [x_{\gamma_2-1}^{j+z_2},\ x_{\gamma_2}^{j+z_2});$$

$$a_3)\ x(t_{j+z_2}) \in [x_{\gamma_1}^{j+z_2},\ x_{\gamma_1+1}^{j+z_2});\ a_4)\ x(t_{j+z_2}) \in [x_{\Delta-1}^{j+z_2},\ x_{\Delta}^{j+z_2}),$$

где $\gamma_2 = \overline{2,\ \gamma_1}$; $\Delta = \overline{(\gamma_1 + 2),\ (k+1)}$, то при условии, что $z_2 < l$ и $l \leqslant$ н, для исхода a_1 имеет место соотношение

$$\mathring{x}_1^{j+z_2} = \mathring{x}_{q-1}^{j,1} + h\psi_l^1(i - j - z_2,\ k),$$

а для всех других исходов — выражения

$$x \in [x_{\Delta_1-1}^{j+z_2, 1},\ x_{\Delta_1}^{j+z_2}),\ \text{где}\ \Delta_1 = \overline{2,\ k+1};$$

$$x_{\Delta_1-1}^{j+z_2,1}=\begin{cases}x_{\Delta_1-1}^{j+z_2}-ah, & x_{\Delta_1-1}^{j+z_2}-ah\geqslant x_{q-1}^{j,1};\\ x_{q-1}^{j,1}, & x_{\Delta_1-1}^{j+z_2}-ah<x_{q-1}^{j,1}.\end{cases}$$

При условии, что $l\leqslant н$, $l\leqslant z_2\leqslant н$, для исходов a_1 и a_2 справедливо выражение

$$\overset{\circ}{x}{}_{\beta}^{j+z_2}-\overset{\circ}{x}{}_{\beta-1}^{j+z_2}=h\,(k+1)^{н-z_2}\psi_l^1(i-j-н,\ k),$$

где $\beta=\overline{1,\ \gamma_1}$; для исхода a_3 — соотношение $x\in[x_{\gamma_1}^{j+z_2,1},\ x_{\gamma_1+1}^{j+z_2})$, где

$$x_{\gamma_1}^{j+z_2,1}=\begin{cases}x_{q-1}^{j}, & x_{\gamma_1}^{j+z_2}=x_{q-1}^{j};\\ x_{\gamma_1}^{j+z_2}, & x_{\gamma_1}^{j+z_2}<x_{q-1}^{j},\end{cases}$$

$$\overset{\circ}{x}{}_{\gamma_1+1}^{j+z_2}-\overset{\circ}{x}{}_{\gamma_1}^{j+z_2}=\begin{cases}h\psi_l^1(i-j-z_2,\ k), & x_{\gamma_1}^{j+z_2}=x_{q-1}^{j};\\ h\psi_l^1(i-j-z_2,\ k)-\Delta_3, & x_{\gamma_1}^{j+z_2}<x_{q-1}^{j};\end{cases}$$

$\Delta_3\geqslant h$; для исхода a_4 — выражение $x\in[x_{\Delta-1}^{j+z_2,1},\ x_{\Delta}^{j+z_2})$, где

$$x_{\Delta-1}^{j+z_2,1}=\begin{cases}x_{\Delta-1}^{j+z_2}-ah, & x_{\Delta-1}^{j+z_2}-ah\geqslant x_{q-1}^{j};\\ x_{q-1}^{j}, & x_{\Delta-1}^{j+z_2}-ah<x_{q-1}^{j}.\end{cases}$$

Итак, утверждения 3 — 5 позволяют нам для любого шага алгоритма построить функцию d_j^2.

В процессе работы алгоритма, как уже отмечалось, необходимо наряду с уменьшением длины интервала неопределенности относительно x осуществить также проверку правильности его выделения, причем эта проверка выполняется не на каждом шаге, а только на определенных. Так, если полуоткрытый интервал неопределенности выделили на j-м шаге, а длительность помехи не превышает l, то такую проверку можно делать, начиная с $(j+z)$-го шага, для которого $z\geqslant l$ (только в этом случае оканчивается действие случайного возмущения). Из предложения ПС следует также то, что максимальное значение z, при котором можно реализовать проверку правильности формирования на j-м шаге интервала неопределенности, ограничена сверху параметром случайного возмущения н.

Поэтому для z справедливо такое соотношение:

$$l\leqslant z\leqslant н. \tag{8}$$

Реализация принципа «повторных сравнений» (расположение некоторых составляющих α- набора левее точки x_{q-1}^{j}) приводит к снижению эффективности алгоритма (в интервале $(x_{q-1}^{j},\ x_q^{j})$ размещаются не все k составляющих α-набора). Поэтому проверку следует проводить только в особых случаях. Очевидным является тот факт (см. соотношение (8)), что при $z<l$ проверка не выполняется. Для такого случая размещение составляющих α-набора выполним на основании следующего утверждения.

6. Если в результате j-го шага алгоритма установлено, что $x \in [x_{q-1}^{j,1}, x_q^j)$, и имеют место соотношения: $l \leqslant н$, $z < l$, то на $(j + z)$-м шаге составляющие α-набора распределяются таким образом, чтобы $x_{q-1}^j < x_1^{j+z} < x_2^{j+z} < \ldots < x_k^{j+z} < x_q^j$. Для других значений переменной z необходимо осуществить распределение составляющих α-набора по интервалам $(x_{q-1}^{j,1}, x_{\gamma_0}^{j+z_1})$, $(x_{q-1}^j, x_{\gamma_0}^{j+z_1})$, где $\gamma_0 = \overline{1, k+1}$. Это распределение реализуется посредством утверждения (приводится без доказательства).

7. Если $x \in [x_{q-1}^{j,1}, x_{\gamma_0}^{j+z})$ и при выполнении следующего $(j + z + 1)$-го шага алгоритма имеют место соотношения:

$$l \leqslant z + 1 \leqslant н; \ l \leqslant н;$$

$$\left|\overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j} - \overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j,1}\right| < h\left\{\left(k\psi_l^1 (i-j-н,\ k) \sum_{n=2}^{н-z} (k+1)^{н-z-n}\right) + \psi_l^1 \times \right.$$

$$\left. \times (i-j-н,\ k)\right\} - h,$$

то распределить составляющие α-набора в интервале $(x_{q-1}^j, x_{\gamma_0}^{j+z})$, в противном случае распределить составляющие α-набора в интервале $(x_{q-1}^{j,1}, x_{\gamma_0}^{j+z})$ следующим образом:

$$\overset{\circ}{x}{}_{\beta_2}^{j+z+1} = \overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j,1} + \beta_2 h (k+1)^{н-z-1} \psi_l^1 (i-j-н,\ k),$$

где $\beta_2 = \overline{1, \beta}$; β — первое целое число, для которого

$$\overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j} - \overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j,1} \leqslant h\left\{\psi_l^1 (i-j-н,\ k) \left[\beta (k+1)^{н-z-1} + \sum_{n=2}^{н-z} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times (k+1)^{н-z-n}\right] + \psi_l^1 (i-j-н,\ k) - 1\right\}.$$

Для частного случая помехоустойчивых алгоритмов $(i - j = l)$ составляющие α-набора распределяются согласно утверждению.

8. Если $i - j = l$ и $x \in [x_{q-1}^{j,1}, x_q^j)$, то оптимальным α-набором является набор, для которого

$$x_{\beta_1}^{j+1} = x_{\beta_1}^{j+2} = \ldots = x_{\beta_1}^{j+l};\ \overset{\circ}{x}{}_{\beta_1}^{j+1} = \overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j,1} + \left[\beta_1\left(\overset{\circ}{x}{}_q^j - \overset{\circ}{x}{}_{q-1}^{j,1}\right)\right] / (k + 1),\ \beta_1 = \overline{1, k},$$

а интервал неопределенности формируется следующим образом:

$$x \in [x_{\gamma_n-1}^{j+n}, x_{\gamma_n}^{j+n}],\ \text{где}\ \gamma_n - 1 = \min_{m=\overline{1,l}} \{\gamma_m - 1\},$$

$$x(t_{j+m}) \in [x_{\gamma_m-1}^{j+m}, x_{\gamma_m}^{j+m}).$$

Действительно, как следует из свойств $A_l(a, l, н)$-последовательности $\xi(t_{l+m})$ будет равно нулю н раз, а в остальных случаях $\xi(t_{j+m}) \neq 0$. Поэтому оценкой x будет наименьшее значение $x(t_{j+m})$. Оптимальность α-набора вытекает из того, что при неравномерном распределении составляющих α-набора в силу критерия (2) всегда получаем интервал неопределенности большей длины.

Из утверждения 8 мы непосредственно получаем

$$\psi_l^1(l+1,\ k) = k+1;$$
$$\psi_l^1(1,\ k) = \psi_l^1(2,\ k) = \ldots = \psi_l^1(l,\ k) = 1. \qquad (10)$$

Утверждения 6—8 устанавливают оптимальные закономерности распределения составляющих α-набора на различных шагах алгоритма. Оптимальное распределение составляющих α-набора на каждом шаге алгоритма, как это следует из критерия оптимальности (3), приводит к построению оптимального помехоустойчивого к $A_1(a,\ l,$ н)-последовательности алгоритма.

Построение i-шагового помехоустойчивого алгоритма поиска организуем путем построения дерева вариантов по такой схеме:

1°. Построить $(i-1)$-шаговый помехоустойчивый алгоритм. Определить согласно утверждению 1 точку первого эксперимента. Индексу j присвоить значение, равное единице.

2°. Сформировать возможный исход. Если все исходы сформированы, то перейти на п. 7°, иначе перейти на п. 3°.

3°. Используя утверждения 6—8, распределить составляющие α-набора в интервале неопределенности, затем на основании утверждений 1—5 сформировать новый интервал неопределенности.

4°. Положить $j=j+1$ и если $j \leqslant i$, то перейти на п. 5°, иначе перейти на п. 6°.

5°. Сформировать возможный исход на j-м шаге алгоритма. Если все исходы сформированы, то перейти на п. 6°. Иначе перейти на п. 3°.

6°. Положить $j=j-1$ и если $j=1$, то перейти на п. 2°. Иначе перейти на п. 5°.

7°. Местонахождения точек экспериментов для всех исходов найдены.

Приведенная схема построения помехоустойчивых к $A_1(a,\ l,$ н)-последовательности алгоритмов позволяет синтезировать алгоритм, являющийся решением сформулированной в статье задачи.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Математические средства.— Х.: Вища шк. 1984.— 140 с. 2. *Александров В. В., Арсентьев А. В., Горский Н. Д.* Некоторые вопросы построения рекурсивных структур данных.— Управляющие системы и машины, 1981, № 4, с. 3—7. 3. *Альсведе Р., Вегенер И.* Задачи поиска.— М.: Мир, 1982.— 355 с. 4. *Алипов Н. В.* Об одном подходе к построению оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования, нечувствительных к случайным импульсным последовательностям. — Тр. III Всесоюз. симпоз. Пробл. создания преобразователей формы информ. К., 1976, ч. 1, с. 77—81. 5. *Алипов Н. В.* Принцип