УДК 621.317

С. Ю. ЛАПУНОВ, канд. техн. наук, *А. Г. СКОРОДУМОВ*

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В области радиоизмерений на ВЧ и СВЧ широко распространены измерительные задачи, связанные с определением относительных безразмерных величин, таких, как коэффициенты передачи, преобразования, усиления. При решении этих задач отношение двух одноименных физических величин (напряжений, мощностей) выступает в явном виде и является мерой, определяющей измеряемые величины. Такие измерения широко распространены в медицине, в частности при разработке методов дозиметрии в ВЧ- и СВЧ-терапии. Погрешность определения отношения физических величин зависит от нелинейности измерительных преобразователей (ИП), которая в конечном итоге и определяет точность измерений. При решении подобных измерительных задач перспективными методами повышения точности измерений являются структурные методы. Запишем зависимость входной физической величины y от выходного сигнала ИП x в виде $y = Sx + F(x)$ (1), где S — коэффициент преобразования ИП; $F(x)$ — систематическая погрешность нелинейности При определении отношения y_i/y_j по отношению выходных сигналов ИП основной вклад в погрешность измерений вносит функция $F(x)$, максимальное значение которой может быть существенным [1]. Снижение значений $F(x)$ до уровня десятых долей процента может быть достигнуто путем введения поправок, поскольку $F(x)$ — закономерно изменяющаяся функция. Погрешность определения отношения двух одноименных физических величин в этом случае определяется точностью и правильностью определения функции $F(x)$. Известные методы определения функции $F(x)$ включают в себя подачу на вход исследуемого ИП последовательности мер физической величины y: y_1, $y_2, \ldots y_N$, измерение соответствующих им значений выходной величины x: $x_1, x_2, \ldots x_N$, обработку результатов измерений методом наименьших квадратов в целях определения параметров функции $F(x)$[2]. При использовании известных методов в диапазонах ВЧ и СВЧ необходимо применять сложную аппаратуру, имеющую в своем составе набор мер физической величины y. Между тем можно избежать использования подобной аппаратуры, если воспользоваться предлагаемым методом повышения точности ИП.

Метод определения параметров функции $F(x)$ с использованием измерителя выходного сигнала ИП x, делителя физической величины y с коэффициентом деления K и набора N неградуированных уровней физической величины y сводится к следующему [3]. На вход ИП подается некоторое неградуированное значение входной величины y_1 и измеряется значение выходного сигнала x_1. Согласно (1) запишем $y_1 = Sx_1 + F(x_1)$. Затем с помощью делителя физической величины y изменяется значение входной величины y_1 в K раз и вновь измеряется выходная величина x_1. Тогда $y_1' = Sx_1' + F(x_1')$ или $\frac{y_1}{K} = Sx_1' + F(x_1')$. Исключив неизвестное y_1, получим

$$K = \frac{Sx_1 + F(x_1)}{Sx_1' + F(x_1')} \qquad (2)$$

или $S(Kx_1' - x_1) = F(x_1) - KF(x_1')$. Подобная процедура повторяется N раз, поэтому в общем виде можно записать $S(Kx_i' - x_i) = F(x_i) - KF(x_i')$. Для определения значений $F(x)$ в любой точке шкалы измерителя выходного сигнала ИП используется N неградуированных уровней физической величины y. Единственным требованием к ним является стабильность за время измерения пары x_i, x_i'. Систематическую погрешность нелинейности запишем в виде обобщенного многочлена степени $N - 1$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N-1} C_i \varphi_i.$$

Параметры функции $F(x)$ — коэффициенты $C_1, C_2, \ldots C_{N-1}$ обобщенного многочлена — определяются из решения системы уравнений вида

$$\begin{aligned} S(Kx_1' - x_1) &= \sum_{i=1}^{N-1} C_i [\varphi_i(x_1) - K\varphi_i(x_1')] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S(Kx_N' - x_N) &= \sum_{i=1}^{N-1} C_i [\varphi_i(x_N) - K\varphi_i(x_N')]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Возможны четыре практически важных случая решения системы (3).

В случае известного коэффициента преобразования ИП S и коэффициента деления K делителя физической величины y (3) представляет собой систему из N линейных уравнений с $N-1$ неизвестными, решив которую относительно коэффициентов C_i, получим однозначное выражение для функции $F(x)$.

Если неизвестен коэффициент преобразования ИП, но известно значение K, то (3) представляет собой также линейную систему из N уравнений с $N-1$ неизвестными. Однако в этом случае могут быть найдены коэффициенты обобщенного многочлена функции $F(x)/S$.

При известном коэффициенте преобразования исследуемого ИП и неизвестном значении K (3) является системой из N нелинейных уравнений с N неизвестными. В этом случае определяются коэффициенты обобщенного многочлена функции $F(x)$.

В случае, когда и S, и K неизвестны, (3) представляет собой систему из N нелинейных уравнений с N неизвестными, решив которую, найдем параметры функции $F(x)/S$.

Определив параметры $F(x)$ либо $F(x)/S$, можно вычислить отношение y_i/y_j, используя измеренные значения x_i, x_j по формуле

$$y_i/y_j = \left[Sx_i + \sum_{n=1}^{N-1} C_n\varphi_n(x_i)\right] / \left[Sx_j + \sum_{n=1}^{N-1} C_n\varphi_n(x_j)\right].$$

Значительный интерес представляет выбор оптимального с точки зрения минимизации погрешности аппроксимации коэффициента деления K делителя физической величины y. Для этого (1) перепишем в виде $y = Sx[1+f(x)]$, где $f(x) = F(x)/Sx$. Для большинства измерительных задач можно допустить, что $\max|f(x)| \leqslant 0{,}1$. Следовательно, (2) можно записать как

$$K = \frac{x_i[1+f(x_i)]}{x_i'[1+f(x_i')]}.$$

Обозначим $\frac{x_i}{x_i'} = K_i$. Тогда $K = K_i\frac{1+f(x_i)}{1+f(x_i')}$, или $K = K_i[1+f(x_i)] \times [1-f(x_i')]$. Пренебрегая произведением $f(x_i)f(x_i')$ как малой второго порядка, получаем

$$K = K_i[1+f(x_i)-f(x_i')].$$

Вследствие монотонности функции $f(x)$ $K = K_i\left[1+f(x_i)-f\left(\frac{x_i}{K}\right)\right]$.

Вводя обозначение $\bar{K}_i = \frac{1}{K_i}$, вычисляем

$$\bar{K}_i = \frac{1}{K} + \frac{f(x_i)-f\left(\frac{x_i}{K}\right)}{K}.$$

Так как K_i в общем виде — функция x,

$$K(x) = \frac{1}{K} + \frac{f(x)-f\left(\frac{x}{K}\right)}{K}. \qquad (4)$$

Будем искать $f(x)$ в виде отрезка ряда Тейлора степени n:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим

$$K(x)=\frac{1}{K}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K^i-1}{K^{i+1}}. \tag{6}$$

Из экспериментальных данных, которые могут быть получены в результате проведения измерений по описанному алгоритму, имеем возможность определить $K(x)$ в виде отрезка ряда Тейлора степени n,

$$K(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x_i.$$

Соотношение (6) справедливо только при условии $b_i=a_i\frac{K^i-1}{K^{i+1}}$. Выразим a_i через b_i. Получим $a_i=b_i\frac{K^{i+1}}{K^i-1}$. Среднее квадратическое отклонение a_i определится через среднее квадратическое отклонение b_i в виде

$$\sigma(a_i)=\sigma(b_i)\frac{K^{i+1}}{K^i-1}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что при K, стремящемся к единице, а также при K, стремящемся к бесконечности, среднее квадратическое отклонение a_i стремится к бесконечности. Определим K, минимизирующее (7), из соотношения $(i+1)K^i(K^i-1)-iK^{i-1}K^{i+1}=0$. Откуда $K_{i\,\text{мин}}=\sqrt[i]{i+1}$ (8). Следовательно, для каждого a_i из (8) имеется свое оптимальное значение K, например, $K_{i\,\text{мин}}=2{,}00$, $i=1$; $K_{i\,\text{мин}}=1{,}59$, $i=3$; $K_{i\,\text{мин}}=1{,}29$, $i=10$.

Таким образом, задавшись числом членов разложения, можно найти оптимальное значение K из (8).

Определим степень аппроксимирующего полинома и диапазон изменений переменной x. Для этого, воспользовавшись (7), (8), запишем

$$\sigma(a_i)_{\text{мин}}=\sigma(b_i)\frac{(i+1)^{\frac{i+1}{i}}}{i}.$$

Получим систему уравнений вида

$$\begin{gathered}K(x_1)=\frac{1}{K}+b_1x_1+\ldots+b_n x_1^n;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(x_n)=\frac{1}{K}+b_1x_{n+1}+\ldots+b_n x_{n+1}^n.\end{gathered} \tag{9}$$

Отметим, что в выражении (9) случайные погрешности содержит лишь член $K(x_i)$, причем случайные погрешности $K(x_i)$ и $K(x_j)$ некоррелированы. Коэффициенты $в_i$ определяются через элементы обратной матрицы выражения (9) в виде

$$b_l = \sum_{i=1}^{n+1} C_{ji}^{-1} K(x_i),$$

где C^{-1} — матрица, обратная C. Получим выражение для функции нелинейности в следующем виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{K^{i+1}}{K^i - 1} \sum_{j=1}^{N+1} C_{ij}^{-1} K(x_j) x^i,$$

откуда ее среднее квадратическое отклонение определится из соотношения

$$\sigma[f(x)] = \sqrt{\sum_{j=1}^{N+1} \sigma^2 [K(x_j)] \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{K^{i+1}}{K^i - 1} C_{ij} x_i \right)^2}. \qquad (10)$$

Вследствие того, что случайные погрешности всех значений $K(x_i)$ одинаковы, запишем (10) в виде

$$\sigma[f(x)] = \sigma[K/x] = \sqrt{\sum_{j=1}^{N+1} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{K^{i+1}}{K^i - 1} C_{ij} x^i \right)^2}. \qquad (11)$$

Используя (11), можно определить степень зависимости $\sigma[f(x)]$ от K, диапазона изменений x и степени аппроксимирующего полинома. Поскольку степень полинома является свойством исследуемого ИП, то для заданных N и диапазона x необходимо выбрать K, минимизирующее среднее квадратическое отклонение.

Рассмотрим влияние случайных погрешностей измерителя на точность аппроксимации. Для этого перепишем (3), введя для общности записи член a_0,

$$\begin{aligned} Kx_1' - x_1 &= \sum_{i=1}^{N-1} a_i [(x_1)^{i+1} - K(x_1')^{i+1}] + a_0 (1 - K); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (12) \\ Kx_N' - x_N &= \sum_{i=1}^{N-1} a_i [(x_N)^{i+1} - K(x_N')^{i+1}] + a_0 (1 - K). \end{aligned}$$

Поскольку отсчеты содержат случайную погрешность, обусловленную погрешностью измерителя x, запишем $x_i = x_{im} + \alpha_i$; $x_i' = x_{im}' + \alpha_i'$, где x_{im}, x_{im}' — математические ожидания отсчетов x_i, x_i'; α_i, α_i' — некоррелированные случайные величины, причем $|\alpha_i| \ll x_{im}$, $|\alpha_i'| \ll x_{im}'$.

Коэффициенты при неизвестных a_i в системе (12) являются элементами матрицы C

$$C_{ji} = (x_j)^{i+1} - K(x'_j)^{i+1},$$

или

$$C_{ji} = (x_{im} + \alpha_j)^{i+1} - K(x'_{im} + \alpha_j)^{i+1}.$$

Разделим C_{ji} на структурную и систематическую составляющие. Воспользовавшись малостью случайных погрешностей

$$C_{ji} = [(x_{jm})^{i+1} - K(x'_{jm})^{i+1}] + [(i+1)(x_{jm})^i\alpha_j - (i+1)K(x'_{jm})^i\alpha'_j],$$

получаем систему уравнений вида $C(d + \Delta d) = l + \Delta l$, в которой погрешности содержат только правые части (свободные члены). Вектор приведенных погрешностей имеет вид

$$\Delta l_j = \alpha_j\left[-1 - \sum_{i=1}^{N-1}(x_{jm})^i(i+1)\right] + \alpha'_j\left[K + \sum_{i=1}^{N-1}(x_{jm})^i(i+1)K\right]. \quad (13)$$

Случайные погрешности коэффициентов a_i можно записать так:

$$\Delta d = C^{-1}\Delta l. \quad (14)$$

Дисперсия j-го элемента вектора Δd с учетом выражения (14) имеет следующий вид:

$$\sigma^2(\Delta d_j) = \sum_{i=1}^{N}(C_{ji}^{-1})^2\sigma^2(\Delta l_i),$$

где $\sigma^2(\Delta l_i)$ — дисперсия приведенной погрешности Δl_i, определяемая из выражения (13),

$$\sigma^2(\Delta l_i) = \sigma^2(\alpha_i)\left\{\left[1 + \sum_{i=1}^{N-1}(i+1)(x_{jm})^i\right]^2 + \left[K + K\sum_{i=1}^{N-1}(i+1)(x_{jm})^i\right]^2\right\}. \quad (15)$$

При этом предполагается, что среднее квадратическое отклонение всех случайных погрешностей одинаково. Из выражения для функции нелинейности

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i x^{i+1}$$

ясно, что a_0 представляет собой аддитивную погрешность измерителя x (погрешность нуля).

Поскольку $a_j = \sum_{i=1}^{N} C_{ji}^{-1} l_i$, выражение для $f(x)$ примет вид

$$f(x) = \sum_{m=1}^{N} C_{Nm} l_m + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N} C_{im}^{-1}\Delta l_m x^{i+1}.$$

Тогда случайная составляющая $f(x)$ определится как

$$\Delta f(x) = \sum_{m=1}^{N} C_{Nm}^{-1} \Delta l_m + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N} C_{im}^{-1} \Delta l_m x^{i+1},$$

или

$$\Delta f(x) = \sum_{m=1}^{N} \Delta l_m [C_{Nm}^{-1} + \sum_{i=1}^{N-1} C_{im}^{-1} x^{i+1}].$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение $f(x)$ может быть определено через погрешность измерителя x

$$\sigma[f(x)] = \sqrt{\sum_{m=1}^{N} \sigma^2 (\Delta l_m) (C_{Nm}^{-1} + \sum_{i=1}^{N-1} C_{im}^{-1} x^{i+1})^2}. \qquad (16)$$

Областью применения предложенного метода повышения точности высокочастотных измерительных преобразователей могут быть антенные измерения [3]. Он может быть использован при поверке цифровых измерительных приборов [4] и для повышения точности средств измерений отношения мощностей СВЧ.

Список литературы: 1. *Жилинскас Р.-П.П.* Измерители отношения. М., 1975. 320 с. 2. *Алиев Т. М., Сейдель Л. Р.* Автоматическая коррекция погрешностей цифровых измерительных приборов. М., 1975. 216 с. 3. *А. с. 1218347 СССР.* Способ определения коэффициента нелинейности антенного преобразователя / Лапунов С. Ю., Скородумов А. Г. // Открытия. Изобретения. 1986. №10 .С. 227. 4. *А. с. 127030 СССР.* Способ поверки цифровых измерительных устройств и устройство для его осуществления / Лапунов С. Ю., Скородумов А.Г. // Открытия. Изобретения. 1986. № 46. С. 168.

Поступила в реколлегию 30.03.87