

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

А. Е. Божко

Х а р ь к о в

Синтез оптимального управления с помощью метода наименьших квадратов [2, 3] базируется на определении алгоритма управления в функции координат управляемого объекта и не дает в таком виде представления о переходном процессе исследуемой системы. В этом смысле более удобен принцип максимума Л. С. Понтрягина. Однако реализация управления, найденного по принципу максимума, затруднительна [3], что не наблюдается при реализации алгоритма оптимального управления с помощью метода наименьших квадратов.

В соответствии с этим методом решения оптимального управления для объекта, описываемого уравнением вида

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \\x_2 &= x_3 \\x_3 &= -C_1 x_1 - C_2 x_2 - C_3 x_3 - C_0 U, \quad |U| \leq 1\end{aligned}\tag{1}$$

где x_1, x_2, x_3 — фазовые координаты выходных параметров объекта управления,
 C_0, C_1, C_2, C_3 — коэффициенты,
можно получить алгоритм управления

$$U(x) = -\operatorname{sign}(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3),\tag{2}$$

где $k_i (i = 1, 2, 3)$ — коэффициенты, определяемые конструктивными параметрами объекта.

Считаем, что исследуемая система 3-го порядка представляет собой последовательное соединение аperiodического и колебательного звеньев с малым показателем затухания ($\xi < 1$). Примером технической реализации такой системы является любой вид электродинамического преобразователя вибрационного стенда.

Рассмотрим переходной процесс данной системы в общем виде при оптимальном управлении (2).

Пусть при начальном векторе $\bar{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ знак управления на первом интервале положителен, т. е. $U = +1$ (при общем решении равноценным является выбор начальных условий, чтобы $U = -1$).

Итак, подставим выражение

$$U = +1$$

в исходную систему уравнений (1) и будем искать закон изменения координат x_i ($i = 1, 2, 3$) во времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -C_1 x_1 - C_2 x_2 - C_3 x_3 - C_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Выразим выражение (3) в операторной форме

$$\begin{aligned} p x_1 - p x_{10} &= x_2; \\ p x_2 - p x_{20} &= x_3; \\ p x_3 - p x_{30} &= -C_3 x_3 - C_2 x_2 - C_1 x_1 - C_0. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате решения системы (4) методом подстановки получим

$$x_1(p) = \frac{x_{10}(p^3 + C_3 p^2 + C_2 p) + x_{20}(p^2 + C_3 p) + p x_{30} - C_0}{p^3 + C_3 p^2 + C_2 p + C_1}. \quad (5)$$

Знаменатель дроби (5) представляет собой левую часть характеристического уравнения исследуемой системы, имеющей корни p_1, p_2, p_3 (p_2, p_3 — комплексно-сопряженные корни с отрицательными вещественными частями).

В связи с этим (5) можно представить в виде

$$x_1(p) = \frac{x_{10} p^3 + (x_{10} C_3 + x_{20}) p^2 + (x_{10} C_2 + x_{20} C_3 + x_{30}) p - C_0}{(p + p_1)(p + p_2)(p + p_3)}, \quad (6)$$

где $p_i = -p_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Для определения оригинала изображения (6) воспользуемся таблицами [4]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{-x_{10}}{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)} [p_1^2(p_2 - p_3)e^{-p_1 t} + p_2^2(p_3 - p_1)e^{-p_2 t} + \\ &+ p_3^2(p_1 - p_2)e^{-p_3 t}] + \frac{x_{10} C_3 + x_{20}}{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)} [p_1(p_2 - p_3)e^{-p_1 t} + \\ &+ p_2(p_3 - p_1)e^{-p_2 t} + p_3(p_1 - p_2)e^{-p_3 t}] - \\ &- \frac{x_{10} C_2 + x_{20} C_3 + x_{30}}{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)} [(p_2 - p_3)e^{-p_1 t} + (p_3 - p_1)e^{-p_2 t} + \\ &+ (p_1 - p_2)e^{-p_3 t}] - \frac{C_0}{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(p_3 - p_1)} \left[\frac{p_2 - p_3}{p_1} e^{-p_1 t} + \right. \\ &\left. + \frac{p_3 - p_1}{p_2} e^{-p_2 t} + \frac{p_1 - p_2}{p_3} e^{-p_3 t} \right] - \frac{C_0}{p_1 p_2 p_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

В результате простых преобразований выражение (7) приводится к виду

$$x_1(t) = A e^{-p_1 t} + B e^{-p_2 t} + D e^{-p_3 t} + E, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -x_{10}dp_1^2b + hdp_1b - gdb - \frac{C_0db}{p_1}; \\ B &= -x_{10}dp_2^2c + hdp_2c - gdc - \frac{C_0dc}{p_2}; \\ D &= -x_{10}dp_3^2a + hdp_3a - gda - \frac{C_0da}{p_3}; \\ E &= -\frac{C_0}{p_1p_2p_3}; \quad a = p_1 - p_2; \quad b = p_2 - p_3; \quad c = p_3 - p_1; \\ d &= \frac{1}{abc}; \quad h = x_{10}C_3 + x_{20}; \quad g = x_{10}C_2 + x_{20}C_3 + x_{30}. \end{aligned}$$

Координаты $x_2(t)$ и $x_3(t)$ определяются в результате последовательного дифференцирования выражения (8), т. е.

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = -Ap_1e^{-p_1t} - Bp_2e^{-p_2t} - Dp_3e^{-p_3t}; \quad (9)$$

$$x_3(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = Ap_1^2e^{-p_1t} + Bp_2^2e^{-p_2t} + Dp_3^2e^{-p_3t}. \quad (10)$$

Приведем выражения (8) — (10) к наглядному графическому виду представлением комплексных величин в тригонометрической форме. Обозначим

$$p_{2,3} = \alpha \pm j\beta. \quad (11)$$

Тогда коэффициенты

$$\begin{aligned} a &= me^{-j\varphi}, \quad b = 2\beta e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad c = -me^{j\varphi}; \\ d &= -\frac{1}{2m^2\beta} e^{-j\frac{\pi}{2}}; \\ A &= \frac{1}{m^2} \left(x_{10}p_1^2 - hp_1 + g + \frac{C_0}{p_1} \right); \\ B &= \frac{1}{2\beta m} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} \left(-x_{10}n^2e^{2j\psi} + hne^{j\psi} - g - \frac{C_0}{n} e^{-j\psi} \right); \\ D &= \frac{1}{2\beta m} e^{-j(\varphi + \frac{\pi}{2})} \left(x_{10}n^2e^{-2j\psi} - hne^{-j\psi} + \frac{C_0}{n} e^{j\psi} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{a_1^2 + \beta^2}; \quad a_1 = p_1 - \alpha; \quad g = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{a_1}; \quad n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \\ \psi &= \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

После подстановки (11), (12) в (8) — (10) и некоторых преобразований с использованием формул Эйлера

$$\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x; \quad \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x$$

получим выражение координат x_i ($i = 1, 2, 3$) в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ae^{-p_1t} + e^{-\alpha t} [b_1 \sin(\beta t - \varphi_1) - b_2 \sin(\beta t - \varphi_2) + \\ &\quad + b_3 \sin(\beta t - \varphi_3) + b_4 \sin(\beta t - \varphi_4)]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -p_1 Ae^{-p_1t} - \alpha e^{-\alpha t} [b_1 \sin(\beta t - \varphi_1) - b_2 \sin(\beta t - \varphi_2) + \\ &\quad + b_3 \sin(\beta t - \varphi_3) + b_4 \sin(\beta t - \varphi_4)] + e^{-\alpha t} [b_1\beta \cos(\beta t - \varphi_1) - \\ &\quad - b_2\beta \cos(\beta t - \varphi_2) + b_3\beta \cos(\beta t - \varphi_3) + b_4\beta \cos(\beta t - \varphi_4)]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$x_3(t) = p_1^2 A e^{-p_1 t} + \alpha^2 e^{-\alpha t} \{ b_1 [\sin(\beta t - \varphi_1) + \beta_1 \cos(\beta t - \varphi_1)] - b_2 [\sin(\beta t - \varphi_2) + \beta \cos(\beta t - \varphi_2)] + b_3 [\sin(\beta t - \varphi_3) + \beta \cos(\beta t - \varphi_3)] + b_4 [\sin(\beta t - \varphi_4) + \beta \cos(\beta t - \varphi_4)] - \alpha e^{-\alpha t} \{ b_1 [\beta \cos(\beta t - \varphi_1) - \beta^2 \sin(\beta t - \varphi_1)] - b_2 [\beta \cos(\beta t - \varphi_2) - \beta^2 \sin(\beta t - \varphi_2)] + b_3 [\beta \cos(\beta t - \varphi_3) - \beta^2 \sin(\beta t - \varphi_3)] + b_4 [\beta \cos(\beta t - \varphi_4) - \beta^2 \sin(\beta t - \varphi_4)] \}, \quad (15)$$

где

$$b_1 = \frac{x_{10} n^2}{m \beta^2}, \quad b_2 = \frac{h n}{m \beta}, \quad b_3 = \frac{g}{m \beta};$$

$$b_4 = \frac{C_0}{n m \beta}; \quad \varphi_1 = \varphi + 2\psi; \quad \varphi_2 = \varphi + \psi; \quad \varphi_3 = \varphi; \quad \varphi_4 = \varphi - \psi.$$

Для вывода общей формулы моментов переключения управляющего воздействия необходимо полученные выражения координат $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) подставить в выражение под знаком sign уравнения (2). Момент переключения управления будет определяться моментом равенства нулю выражения под знаком sign .

В результате данной подстановки после проведения несложных, но громоздких вычислений, получаем выражение в функции времени под знаком sign , позволяющее определять моменты переключения управления U .

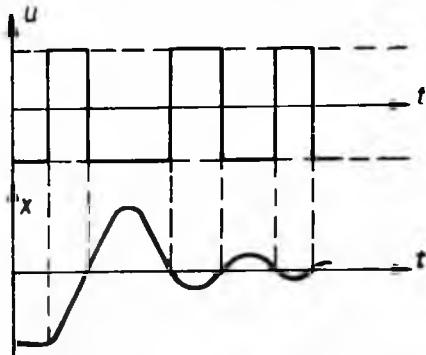


График переходного процесса системы при оптимальном управлении.

$$A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) = 0, \quad (16)$$

где

$$A_1 = k_1 A - k_2 A p_1 + k_3 A p_1^2; \quad A_2 = \sqrt{B_1^2 + D_1^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{D_1}{B_1}; \quad B_1 = k_1 (b_3 - b_1) + k_2 (\alpha b_1 - \alpha b_3 - \beta b_2 - \beta b_4) + k_3 (-b_1 - \beta b_2 + b_3 - \beta b_4) \alpha^2 + \alpha \beta (-b_1 \beta + b_2 + \beta b_3 + b_4);$$

$$D_1 = k_1 (b_2 + b_4) + k_2 (-\alpha b_2 - \alpha b_4 - \beta b_1 + \beta b_3) + k_3 (\alpha^2 \beta b_1 + \alpha^2 b_2 + \alpha^2 b_3 \beta + \alpha^2 b_4 + \alpha b_2 \beta^2 - \alpha b_3 \beta + \alpha b_4 \beta^2).$$

Окончательный вид оптимального управления исследуемой системы в функции времени представим как

$$U(t) = -\text{sign} [A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \varphi)]. \quad (17)$$

Таким образом функция под знаком sign является суммой затухающих экспоненты и синусоиды с периодом $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

Графики изменения этой функции и управления U представлены на рисунке.

Переходный процесс системы под действием управляющего воздействия происходит следующим образом. На первом интервале под действием управления U система начинает разгоняться, имея тенденцию к перерегулированию. Но при переходе функции под знаком sign через нуль управление U меняет знак и не дает развиваться системе большого перерегулирования. На третьем интервале управление U повторяет действие разгона системы, а на четвертом ограничивает перерегулирование и т. д. С каждым интервалом длительность полуволны уменьшается, т. е. увеличивается частота переключения U .

Полученный алгоритм оптимального управления (17) экспериментально реализован на аналоговой ВМ и показал, что при данном управлении время переходного процесса на порядок уменьшается по сравнению с неоптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Летов. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. 22, № 4, 1961.
2. И. П. Лыткин. О синтезе оптимального управления при помощи метода наименьших квадратов. Сб. «Оптимальные системы автоматического управления» под ред. А. М. Летова, Изд-во «Наука», 1966.
3. Ю. Н. Соколов. Синтез оптимального управления объектов проветривания шахт. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1966.
4. С. Г. Гинзбург. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. Изд-во «Советское радио», 1959.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ РЕАЛИЗАЦИИ И ВЫБОР ШАГА КВАНТОВАНИЯ ПРИ ВЕРОЯТНОСТНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ФЛОТОПРОЦЕССА

В. И. Салыга, Н. Р. Хаджиков

Х а р ь к о в

Промышленный флотопроецесс представляет собой сложный стохастический объект, исследовать который можно вероятностными методами теории автоматического управления. При определении статистических характеристик большую роль играет правильность выбора времени наблюдения T и шага квантования $\Delta\tau$ случайного процесса.

В работах [1, 2] на основании анализа длительных реализаций было установлено, что изменения параметров, описывающих флотопроецесс, могут рассматриваться как стационарные случайные процессы, удовлетворяющие условию эргодичности. Нахождение статистических характеристик в этом случае удобно производить на ЦВМ по следующим формулам:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$R_{xx}^*(m\Delta\tau) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (x_i - m_x^*)(x_{i+m} - m_x^*). \quad (2)$$

Как видно из (2), погрешность при вычислении корреляционной функции обуславливается ограниченностью времени наблюдения и дискретизацией процесса.

В то же время реальный стохастический процесс всегда имеет некоторую нестационарность. В связи с этим использование чрезмерно длинных реализаций приведет к ошибкам, так как расчетные формулы основаны на эргодической гипотезе. Кроме того, большой объем исходных данных увеличивает трудоемкость или машинное время расчетов, а также вероятность случайных ошибок.

Выбор значений T и $\Delta\tau$ в каждом конкретном случае зависит от частотных характеристик случайного процесса. При конечном времени наблюдения на точность определения $R_{xx}^*(m\Delta\tau)$ в основном влияют низкие частоты спектра ω_n , а при нахождении шага дискретности $\Delta\tau$ — выс-