УДК 519.6:621.395.74

И. В. Гребенник, А. Ю. Хабаров

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ РАБОТ В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1. Введение

Задача планирования выполнения работ на заданный период времени является актуальной для многих предприятий. Специфика технологических процессов и критериев их оценки порождает большое разнообразие постановок задач эффективного планирования работ [1]. В ряде случаев известные модели, использующиеся в календарном планировании, не являются адекватными реальным практическим задачам. Следовательно, возникает проблема разработки новых математических моделей указанного класса и использования их в системах поддержки принятия решений, ориентированных на различные предметные области. Одним из путей построения математических моделей задач планирования работ в различных постановках является использование результатов геометрического проектирования [2].

Целью настоящей работы является разработка класса математических моделей оптимизационных задач планирования работ на основе конструктивных средств геометрического проектирования и применение указанных моделей в интеллектуальных системах поддержки принятия решений.

Как следует из [2], задачи геометрического проектирования связаны с преобразованием геометрической информации. При этом модели геометрического проектирования могут использоваться и в более широком классе случаев, т. е. в задачах, не использующих непосредственно преобразование геометрической информации. К задачам указанного типа можно отнести задачи эффективного планирования работ, суть которых состоит в следующем.

2. Постановка задачи

Пусть имеется множество работ P_i, $i \in J_n$, связанных определенной технологической последовательностью, которые необходимо выполнить в течение периода времени T. Для каждой работы P_i заданы продолжительность Δt_i и потребности в ресурсах различных видов $g_i^j, i \in J_n, j \in J_k$. На ресурсы G_j накладываются ограничения вида $G_j \le G_j^{\max}$, $j \in J_k$. Необходимо определить моменты времени начала всех работ t_i, $i \in J_n$, с учетом технологической последовательности и ограничений на ресурсы таким образом, чтобы все работы были выполнены к концу планового периода и чтобы выбранный критерий достиг своего экстремального значения.

3. Математическая модель

Для решения данной задачи построим следующую математическую модель. Каждой работе P_i поставим в соответствие параллелепипед Π_i вида

$$\Pi_i = \{x \in R^{k+1} : 0 \le x_j \le g_i^j,\ j \in J_k,\ 0 \le x_{k+1} \le \Delta t_i\}. \quad (1)$$

Будем считать точку с координатами $(0, 0, \ldots, 0) \in R^{k+1}$ полюсом параллелепипеда Π_i. Рассмотрим параллелепипед Π_0 следующего вида:

$$\Pi_0 = \{x \in R^{k+1} : 0 \le x_j \le G_j^{\max},\ j \in J_k,\ 0 \le x_{k+1} \le T\}. \quad (2)$$

Длины ребер параллелепипеда Π_0 соответствуют объемам имеющихся ресурсов $G_j^{\max}$ и длине периода времени T. Транслируем параллелепипед вида (1) на вектор $U^i \in R^{k+1}$, тогда его описание примет вид:

$$\Pi_i(U^i) = \{x \in R^{k+1} : 0 \le x_j - u_i^j \le g_i^j,\ j \in J_k,\ 0 \le x_{k+1} - t_i \le \Delta t_i\}. \quad (3)$$

Полюс параллелепипеда $\Pi_i(U^i)$ находится в точке $U^i \in R^{k+1}$.

Разместим параллелепипеды Π_i в параллелепипеде Π_0, учитывая условия непересечения и последовательность размещения, определяемую технологической последовательностью выполнения работ P_i. Для этого укажем координаты полюса каждого параллелепипеда $\Pi_i(U^i)$, транслированного на вектор U^i, $i \in J_n$. Вектор $U = (U^1, U^2, \ldots, U^n) \in R^N$, где $N = (k+1) \cdot n$, однозначно определяет размещение параллелепипедов и, следовательно, последовательность выполнения работ.

Среди всевозможных размещений параллелепипедов Π_i, удовлетворяющих условиям непересечения, допустимой последовательности выполнения работ и, возможно, еще каким-либо ограничениям, необходимо выбрать такое размещение, которое доставит экстремум выбранному критерию. Если в качестве критерия эффективности выбран минимум времени выполнения всего комплекса работ, то математическая модель задачи сводится к модели задачи размещения параллелепипедов вида [3–5]:

$$F(U, t) = t \to \min_{(U, t) \in D \subset R^{N+1}}, \quad (4)$$

$$U \in R^N,\ t = \max_{i \in J_n} t_i + \Delta t_i, \quad (5)$$

где D — область допустимых решений, которая описывается соотношениями $\Phi_{ij}(U^i, U^j) \ge 0$, $i \in J_{n-1}$, $j \in J_n$, $i < j$; $\Phi_{0i}(U^0, U^i) \ge 0$, $i \in J_n$; $t_i + \Delta t_i \le T$.

$t_i \geq \max\{b_{ik}(t_k + \Delta t_k)\}$, $i, k \in J_n$. Здесь $\Phi_{ij}(U^i, U^j)$ — Ф-функция параллелепипедов $\Pi_i(U^i)$, $\Pi_j(U^j)$; $\Phi_{0i}(U^0, U^i)$ — Ф-функция параллелепипеда $\Pi_i(U^i)$ и объекта $\Pi_0^* = (R^{k+1} \setminus cl\Pi_0) \cup fr\Pi_0$ [6]. Отметим, что указанная математическая модель может рассматриваться как в идеализированной, так и в интервальной постановке [5, 6].

В качестве критерия оптимизации в задаче планирования работ можно выбрать также максимум эффекта от выполнения работ. В этом случае для каждого параллелепипеда $\Pi_i(U^i)$ задается функция $f(U^i)$, характеризующая размещение параллелепипеда Π_i в точке (U^i). Тогда критерий оптимизации представляет собой некоторую функцию от $f(U^i)$, $i \in J_n$.

Таким образом, построенная математическая модель позволяет моделировать и решать различные задачи эффективного планирования работ в описанном классе задач методами геометрического проектирования. К данному классу задач можно отнести следующую задачу планирования работ, описанную в [7], которая возникает при долгосрочном планировании развития действующего предприятия электросвязи.

4. Применение математической модели в системе поддержки принятия решений при планировании развития сети электросвязи

На предварительных этапах проектирования развития сети электросвязи сформировано множество работ, которые необходимо выполнить в течение заданного периода. Сформированные работы представляют собой агрегаты, внутри которых возможна дальнейшая декомпозиция на составные части и их распараллеливание. Предполагается, что в каждый момент времени может выполняться не более одной работы-агрегата.

После декомпозиции глобальной цели на отдельные работы (группы работ) необходимо произвести планирование их реализации в течение заданного периода, разделенного на несколько отдельных этапов. В начале каждого этапа производится выделение материальных средств для выполнения некоторого набора работ в течение этого этапа и последующих, если часть работ являются переходящими. В конце этапа определяется доход, получаемый от выполнения работ на этом этапе и предыдущих этапах. Затем этот доход распределяется (возможно, с привлечением внешних инвестиций или не полностью) между работами следующего этапа. Целью планирования является распределение работ по этапам периода развития таким образом, чтобы максимизировать доход на последнем этапе.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую учитывать технологическую последовательность работ, разное число и продолжительность этапов реализации проекта, возможность накопления предприятием собственных средств для финансирования работ, привлечение на любом из этапов внешних инвестиций с различными способами возврата кредитов и процентов по ним. Особенностью постановки задачи является заведомо большая продолжительность планового периода по сравнению с длиной критического пути, определяемого для аналогичного списка работ методами теории управления проектами, что дает возможность гибкого построения плана в зависимости от внешних условий (схем кредитования, постоянных доходов и расходов).

Формально описанная задача представляется следующим образом. Исходными данными являются: n — количество работ; T — длительность периода развития, $T > 0$; $\Delta T = \{\Delta t_i\}$ — продолжительности выполнения работ, $\Delta t_i > 0, i \in J_n$; $C = \{c_i\}$ — стоимости выполнения работ, $c_i \geq 0, i \in J_n$; m — количество этапов в периоде планирования, длительность этапа $\Delta t = T / m$; $B = \{b_{ik}\}$ — порядок выполнения работ, причем $b_{ik} = 1$, если работа k предшествует работе i и $b_{ik} = 0$ в противном случае, $i, k \in J_n$; s_0 — фиксированные доходы в начале каждого этапа; e_0 — фиксированные расходы в конце каждого этапа; $W = \{w_i\}$ — единовременный доход от выполнения i-й работы, $w_i \geq 0, i \in J_n$; $V = \{v_i\}$ — средний постоянный доход на каждом этапе от выполнения i-й работы, $v_i \geq 0, i \in J_n$; $E = \{e_i\}$ — средние дополнительные затраты на каждом этапе при выполнения i-й работы, $i \in J_n$; $R_0 \geq 0$ — стартовый капитал в начале периода.

Переменными модели являются: $T = \{t_i\}$ — моменты начала работ, $t_i \geq 0, i \in J_n$; $S = \{s_j\}$ — дополнительные средства, привлекаемые в начале этапов, $s_j \geq 0$, $j \in J_m$.

Ограничениями модели являются: $t_i + \Delta t_i \leq T$, $i \in J_n$ — все работы должны завершиться к концу периода; $t_i \geq \max\{b_{ik}(t_k + \Delta t_k)\}$, $i, k \in J_n$ — все работы должны выполняться в технологической последовательности; $R_j \geq 0$, $j \in J_m$ — сумма средств на каждом этапе должна быть неотрицательной, с учетом кредитов; проценты по кредитам должны быть возвращены к концу периода или невозвращенный остаток вычитается из суммы последнего этапа.

Конкретизируем модель (4)–(5) для приведенной выше задачи планирования. Поскольку в задаче все ресурсы выражены в денежном эквиваленте, т. е. $k = 1$, то каждой работе P_i можно поставить в соответствие прямоугольник $\Pi_i \subset R^2$, соответствующий параллелепипеду (1) вида

$$\Pi_i = \{x \in R^2 : 0 \le x_1 \le c_i, 0 \le x_2 \le \Delta t_i\}. \qquad (6)$$

Его длина равна продолжительности работы Δt_i, а высота — стоимости выполнения работы c_i. Параллелепипеду Π_0 вида (2) соответствует прямоугольник

$$\Pi_0 = \{x \in R^2 : 0 \le x_1 \le C_{\max}, 0 \le x_2 \le T\}. \qquad (7)$$

Период планирования T разбит на m одинаковых этапов, которые влияют на оценку эффекта от выполнения работ и не ограничивают установление сроков начала и окончания работ. Возможность привлечения дополнительных ресурсов s_j на j-м этапе позволяет нарушить ограничение и увеличить высоту прямоугольника Π_0 (или уменьшить высоту прямоугольника Π_i) в пределах j-го этапа. В связи с тем, что на предварительном этапе работы агрегированы и в каждый момент времени может выполняться только одна работа-агрегат, прямоугольники Π_i размещаются в прямоугольнике Π_0 в одну линию. Трансляции прямоугольников Π_i вида (6) выполняются только в одном направлении, вектор трансляций U^i в этом случае определяется значением t_i, $U^i = (0, t_i) \in R^2$. В результате трансляции получим прямоугольник вида:

$$\Pi_i(U^i) = \{x \in R^2 : 0 \le x_1 \le c_i, 0 \le x_2 - t_i \le \Delta t_i\}. \qquad (8)$$

Для каждого прямоугольника $\Pi_i(U^i)$ определим функцию $f_j(t_i, \Delta t_i, s_j)$ — эффект от размещения полюса прямоугольника Π_i в точке $(0, t_i)$ на j-м этапе. В соответствии с условием задачи, под эффектом j-го этапа понимается сумма средств, полученных на этом этапе, которая может быть истрачена или накоплена на последующих этапах. Целевая функция представляет собой максимизацию эффекта последнего этапа.

Таким образом, рассматриваемый вариант задачи планирования работ в терминах геометрического проектирования может быть представлен следующим образом. Разместить прямоугольники Π_i, $i \in J_n$, вида (6) в прямоугольнике Π_0 вида (7) с учетом заданной последовательности при условии непересечения таким образом, чтобы функция $f_m(t_n, \Delta t_n, s_m)$ приняла максимальное значение.

Математическая модель задачи примет следующий вид:

$$F(U, t) = f_m(t_n, \Delta t_n, s_m) = R_m \to \max_{(U,\,S) \in D \subset R^{N+m}}, \qquad (9)$$

$$U \in R^N,\ t = \max_{i \in J_n} t_i + \Delta t_i, \qquad (10)$$

где $N = 2n$, $S = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in R^m$, D — область допустимых решений, которая описывается соотношениями

$$\Phi_{ij}(U^i, U^j) \ge 0,\ i \in J_{n-1},\ j \in J_n,\ i < j, \qquad (11)$$

$$\Phi_{0i}(U^0, U^i) \ge 0,\ i \in J_n, \qquad (12)$$

$$t_i + \Delta t_i \le T, \qquad (13)$$

$$t_i \ge \max\{b_{ik}(t_k + \Delta t_k)\},\ i, k \in J_n, \qquad (14)$$

$$R_j \ge 0,\ j \in J_m. \qquad (15)$$

Здесь $\Phi_{ij}(U^i, U^j)$ — Ф-функция прямоугольников $\Pi_i(U^i)$, $\Pi_j(U^j)$ вида (8), $\Phi_{0i}(U^0, U^i)$ — Ф-функция параллелепипеда $\Pi_i(U^i)$ и объекта $\Pi_0^* = (R^2 \setminus cl\,\Pi_0) \cup fr\,\Pi_0$. Функция $f_j(t_i, \Delta t_i, s_j)$ с учетом условия задачи примет вид:

$$f_j(t_i, \Delta t_i, s_j) = R_j = R_{j-1} + (s_0 - e_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\left(w_i + \frac{v_i}{2} - \frac{e_i}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)}\left(w_i + \frac{v_i}{2} - c_i - \frac{e_i}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(3)}(v_i - e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(4)}(-c_i) + s_j + \sum_{y=1}^{j-1}\sum_{z} K_{yz}, \qquad (16)$$

где

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{если } t_i < \Delta t\cdot(j-1) \\ & \text{и } \Delta t\cdot(j-1) < t_i + \Delta t_i \le \Delta t\cdot j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— работа начата на этапе до j, закончена на j-м этапе;

$$a_i^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \ge \Delta t\cdot(j-1) \text{ и } t_i + \Delta t_i \le \Delta t\cdot j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— работа начата и закончена на j-м этапе;

$$a_i^{(3)} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i + \Delta t_i < \Delta t\cdot(j-1); \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— работа начата и закончена на этапе до j;

$$a_i^{(4)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta t\cdot(j-1) \le t_i < \Delta t\cdot j \text{ и } t_i + \Delta t_i > \Delta t\cdot j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— работа начата на j-м этапе и будет закончена на этапе после j;

K_{yz} — функция, определяющая для j-го этапа порядок выплаты z-го кредита, полученого на y-м этапе. Характеризует возврат внешних инвестиций за предыдущие $(j-1)$ этапов.

Функция (16) эффекта j-го этапа не является гладкой, вид функции K_{yz} зависит от конкретной ситуации на рынке банковских услуг.

Для решения задачи (9) (10) выберем методы комплексов и штрафных функций, поскольку они хорошо проявляют себя на функциях сложного вида [8]. Метод штрафных функций удачно справляется с «овражным» эффектом, а метод комплексов показывает быструю сходимость. Выбранные методы предусматривают генерацию стартовой точки, удовлетворяющей системе ограничений.

Традиционно задачи планирования решаются с использованием аппарата теории управления проектами [9]. Однако в данной постановке задача имеет особенности, позволяющие применить для ее решения иной подход: максимизируется эффект последнего этапа; период развития заведомо длиннее критического пути реализуемого проекта; производится перераспределение средств после каждого этапа; учитываются доходы и расходы от выполнения работ; возможность привлечения внешних средств на любом из этапов; на этапах происходит накопление денег для последующего вложения в производство.

Тем не менее, при расчетах используются элементы традиционных методов календарного планирования. Это необходимо для определения ранних и поздних сроков начала работ с целью корректного задания диапазонов изменения переменных t_i.

Математическая модель (9)–(15) и метод решения задачи планирования работ реализованы программно и включены в комплекс программ «Феодосийский вариант-32», предназначенный для решения задач проектирования, эксплуатации и развития проводных сетей электросвязи. Данный комплекс программ в настоящее время используется в подразделениях ОАО «Укртелеком».

5. Заключение

Отличие рассмотренной в статье задачи планирования работ от традиционных задач календарного планирования привело к необходимости построения новой математической модели и привлечения аппарата теории геометрического проектирования.

Построенная в работе математическая модель задачи эффективного планирования работ и приведенные методы ее анализа могут быть использованы при разработке интеллектуальных систем поддержки принятия решений, ориентированных на различные предметные области, в которых применяются указанные подходы.

Список литературы: 1. *Танаев В. С., Шкурба В. В.* Введение в теорию расписаний. — М.: Наука, 1975. — 256 с. 2. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с. 3. *Стоян Ю. Г., Галата А. Я.* О плотной упаковке параллелепипедов произвольных размеров в параллелепипеде наименьшего объема // Кибернетика. — 1972. — № 2. — С. 81–86. 4. *Stoyan Yu. G., Yas'kov G. N.* Mathematical Model and Solution Method of Optimization Problem of Placement of Rectangles and Circles taking into account Special Constraints // Int. Trans. Opr. Res. — 1998. — No. 1. — P. 45–57. 5. *Новожилова М. В., Романова Т. Е.* Фактор неопределенности временного параметра при управлении проектами // Проблемы машиностроения. — 2001. — Т. 4, № 3–4. — С. 79–84. 6. *Романова Т. Е.* Математическая модель оптимизационной задачи размещения параллелепипедов с учетом погрешностей исходных данных // Радиоэлектроника и информатика — 2002. — № 2. — С. 42–45. 7. *Гребенник И. В., Хабаров А. Ю.* Модель задачи эффективного планирования работ на заданный период // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. — 2003. — Вып. 123. — С. 44–53. 8. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике: В 2-х кн. — М.: Мир, 1986. — Кн. 2. — 320 с. 9. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций: В 2-х кн. — М.: Мир, 1985. — Кн. 2. — 496 с.

Поступила в редколлегию 12.09.2006