К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

С. С. Калмыкова, В. И. Курилко

1. Задачи распространения электромагнитных волн в однородных волноводах в настоящее время исследованы достаточно подробно [1]. В значительно меньшей степени изучены вопросы рассеяния электромагнитных волн на неоднородностях диэлектрических волноводов, представляющие значительный теоретический и прикладной интерес. Дело в том, что в однородном диэлектрическом волноводе каждая плоская волна удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, так что задача сводится к решению некоторого трансцендентного уравнения, которым определяется зависимость волнового числа от частоты.

В случае волновода с резко изменяющимися вдоль направления распространения волны диэлектрическими свойствами граничные условия на скачке диэлектрических постоянных могут быть удовлетворены только суперпозицией плоских волн. Для определения амплитуд этих волн приходится решать систему интегральных уравнений, что значительно усложняет возможности аналитического исследования характеристик решения.

Впервые строгие решения задач рассеяния были получены М. А. Леонтовичем, Г. А. Гринбергом и В. А. Фоком при изучении береговой рефракции [2], а также Л. А. Вайнштейном при исследовании излучения из открытого конца волновода [3]. В этих работах существенно использовалось то обстоятельство, что свойства среды в направлении распространения волны оставались неизменными, а разрывы имели место лишь в граничных условиях на бесконечно тонких поверхностях внутри структуры.

2. Ниже мы рассмотрим задачу о рассеянии поверхностной волны на скачке тензора диэлектрических постоянных цилиндрического анизотронного диэлектрического волновода ($r \leqslant a$):

$$\dot{\varepsilon}(z>0,\ r<a) = (\varepsilon_{\parallel}^{(1)}, \varepsilon_{\perp}^{(1)}); \quad \dot{\varepsilon}(z<0,\ r<a) = (\varepsilon_{\parallel}^{(2)}, \varepsilon_{\perp}^{(2)}).$$

При этом будем предполагать, что однородные участки волновода разделены бесконечно тонкой идеально проводящей диафрагмой ($z=0$, $0 \leqslant r \leqslant a$). Пространство между рассматриваемым волноводом и проводящим кожухом (радиуса $в$) заполнено вакуумом $\dot{\varepsilon} \equiv 1$. Со стороны $z>0$ распространяется аксиально-симметричная поверхностная E-волна с характеристическим числом $\gamma = \frac{\omega}{V_ф}$, которое определяется решением дисперсионного уравнения бесконечного волновода с диэлектрическими постоянными, тождественно равными $\dot{\varepsilon}^{(1)}$. Будем искать решения уравнений Максвелла в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= e^{-i\gamma z} + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,[I_0(vb)\,K_1(va) + I_1(va)\,K_0(vb)]\,e^{itz}dt; \\ E_z &= qe^{-i\gamma z} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} H(t)\,[I_0(va)\,K_0(vb) - K_0(va)\,I_0(vb)]\,e^{itz}\,dt. \end{aligned} \qquad (1)$$

$$-\infty < z < +\infty; \quad r = a + 0.$$

$$\left.\begin{aligned}
H_\varphi^n &= 2A_n\cos\gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\, J_1(\beta_n a)\, e^{itz}dt\\
E_z^n &= 2qA_n\cos\gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta_n}{k\varepsilon_{\parallel}^{(n)}} h_n(t)\, J_0(\beta_n a)\, e^{itz}\,dt\\
E_r^n &= 2\frac{i\gamma}{k\varepsilon_{\perp}^{(n)}} A_n\sin\gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{k\varepsilon_{\perp}^{(n)}} h_n(t)\, J_1(\beta_n a)\, e^{itz}dt
\end{aligned}\right| r = a - 0, \qquad (2)$$

где индекс n принимает значения 1, 2, которые соответствуют областям $z > 0$ и $z < 0$, причем $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, а

$$v(t) = (t^2 - k^2)^{1/2};\quad \beta_n(t) = \left[\frac{\varepsilon_{\parallel}^{(n)}}{\varepsilon_{\perp}^{(n)}}(\varepsilon_{\perp}^{(n)}k^2 - t^2)\right]^{1/2};\quad k = \frac{\omega}{c};$$

$$q \equiv Z_\perp(\gamma);\quad Z_n(t) = \frac{i\beta_n}{k\varepsilon_{\parallel}^{(n)}}\cdot\frac{J_0(\beta_n a)}{J_1(\beta_n a)}.$$

Первое слагаемое в выражении для полей в области $r < 0$, $z > 0$ соответствует приближению геометрической оптики, второе слагаемое, представленное в виде суперпозиции плоских волн, учитывает отклонения от геометрической оптики.

В качестве граничных условий используем равенство тангенциальных компонент полных полей на поверхности диэлектрического волновода:

$$\left.\begin{aligned}
&E_z^{(1)}(r = a - 0) - E_z(r = a + 0) \equiv H_\varphi^{(1)}(r = a - 0) - H_\varphi(r = a + 0) \equiv 0;\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z > 0;\\
&E_z^{(2)}(r = a - 0) - E_z(r = a + 0) \equiv H_\varphi^{(2)}(r = a - 0) - H_\varphi(r = a + 0) \equiv 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z < 0,
\end{aligned}\right. \qquad (3)$$

а также условия обращения в ноль тангенциальных компонент электрического поля на поверхности идеально проводящей диафрагмы:

$$\left.\begin{aligned}
E_r^{(1)}(z = 0) &= 0\\
E_r^{(2)}(z = 0) &= 0
\end{aligned}\right\} 0 < r < a. \qquad (4)$$

Подставляя поля (2) в граничные условия (3), получим следующие соотношения для определения $H(t)$ и $h_{1,2}(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,\Delta_{10}(t)\,e^{itz}\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\, J_1(\beta_1 a)\, e^{itz}\,dt + e^{i\gamma z}\\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} H(t)\,\Delta_{00}(t)\,e^{itz}\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta_1}{k\varepsilon_{\parallel}^{(1)}} h_1(t)\, J_0(\beta_1 a)\, e^{itz}\,dt + qe^{i\gamma z}
\end{aligned}\right\} z > 0.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{10}(t) &= I_1(va)\,K_0(vb) + K_1(va)\,I_0(vb),\\
\Delta_{00}(t) &= I_0(va)\,K_0(vb) - I_0(vb)\,K_0(va).
\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,\Delta_{10}(t)\,e^{itz}vt + e^{-itz} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t)\, J_1(\beta_2 a)\, e^{itz}\,dt\\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iv}{k} H(t)\,\Delta_{00}(t)e^{itz}dt + qe^{-i\gamma z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\beta_2}{k\varepsilon_{\parallel}^{(2)}} h_2(t)\, J_0(\beta_2 a)\, e^{itz}\,dt
\end{aligned}\right\} z < 0.$$

Согласно [4] из этих соотношений неизвестные амплитуды $H(t)$, $h_{1,2}(t)$ могут быть выражены через граничные значения на контуре $Imt = 0$ функций, аналитичных в верхней (+) и нижней (—) полуплоскостях комплексной переменной t:

$$J_1(\beta_1 a)\, h_1(t) = \frac{1}{D_1}\left\{\psi^+ - Z_0\varphi^+ - \frac{Z_0 - q}{2\pi i\,(t-\gamma)}\right\}; \qquad (6а)$$

$$J_1(\beta_2 a)\, h_2(t) = \frac{1}{D_2}\left\{\xi^- - Z_0\chi^- - \frac{Z_0 - q}{2\pi i\,(t+\gamma)}\right\}; \qquad (6в)$$

$$\Delta_{10}(t)\, H(t) = \frac{1}{D_2}\left\{\xi^- - Z_0\chi^- - \frac{Z_2 - q}{2\pi i\,(t+\gamma)}\right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{D_1}\left\{\psi^+ - Z_1\varphi^+ - \frac{Z_1 - q}{2\pi i\,(t-\gamma)}\right\}; \quad D_{1,2} = Z_0 - Z_{1,2};\ Z_0 = \frac{iv}{k}\cdot\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{0m}}. \qquad (6с)$$

Последнее равенство (6с) дает граничную задачу для определения неизвестных функций ψ^+, φ^+, ξ^- и χ^-. Недостающие соотношения между этими функциями могут быть определены из граничных условий (4)*:

$$\psi^+(t) = -\xi^-(-t), \quad \varphi^+(t) = -\chi^-(-t),$$
$$\psi^+(-t) = -\xi^-(t), \quad \varphi^+(-t) = -\chi^-(t). \qquad (7)$$

При этом было использовано граничное условие Зоммерфельда конечности магнитного и интегрируемости электрического поля вблизи края идеально проводящей диафрагмы. Таким образом, окончательно граничная задача для определения неизвестных амплитуд плоских волн принимает вид

$$\frac{1}{D_1}\left\{Z_1\varphi_1^+ - \psi_1^+ + \frac{\gamma}{\pi i}\frac{Z_1 - q}{t^2-\gamma^2}\right\} = \frac{1}{D_2}\left\{Z_2\varphi_1^- - \psi_1^- - \frac{\gamma}{\pi i}\frac{Z_2 - q}{t^2-\gamma^2}\right\}, \qquad (8)$$

где

$$\psi_1^+ = \psi^+ + \frac{q}{2\pi i\,(t+\gamma)}; \quad \varphi_1^+ = \varphi^+ + \frac{1}{2\pi i\,(t+\gamma)};$$
$$\varphi_1^-(t) = \varphi_1^+(-t); \quad \psi_1^-(t) = \psi_1^+(-t);$$
$$\Delta_{10}(t)\, H(t) = \frac{1}{D_1}\left\{Z_1\varphi_1^+ - \psi_1^+ + \frac{\gamma}{\pi i}\frac{Z_1 - q}{t^2-\gamma^2}\right\}.$$

Частный случай этого соотношения ($\varepsilon_1 = 1$, $Z_2 = 0$) был получен и иссследован Джонсом при рассмотрении рассеяния электромагнитных волн на проводящей полосе конечной толщины в плоском волноводе с проводящими стенками [6]. При этом в работе Джонса было показано, что соответствующая граничная задача эквивалентна бесконечной системе алгебраических уравнений, если коэффициенты задачи имеют особенности типа полюса. Решение этой системы даже при наличии малого параметра удается найти только численно.

Ниже мы покажем, что задача (8) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма. Действительно, заменив t на $-t$ в (8) и используя формулы Сохоцкого — Племеля, для неизвестной функции

$$\psi_1(t) \equiv \psi_1^+(t) - \psi_1^-(t)$$

---

* Требование симметрии амплитуд $h_n(t)$, из которого вытекают соотношения (7), является лишь необходимым условием выполнения граничных условий (4). Мы предполагаем, что оно является также и достаточным, хотя строгое доказательство проведено только для прямоугольного клина [5].

получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(t')\,dt'}{t'-t} + \frac{Z_0(t)}{2}\left[\frac{Z_1(t)}{D_1(t)} + \frac{Z_2(t)}{D_2(t)}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{Z_0(t')} - \frac{1}{Z_0(t')}\right]\frac{\psi_1(t')\,dt}{t'-t} =$$

$$= -\frac{\gamma Z_0(t)}{t^2-\gamma^2}\left[\frac{Z_2(t)-q}{D_2(t)} + \frac{Z_1(t)-q}{D_1(t)}\right]. \tag{9}$$

Индекс уравнения [7] равен нулю, поэтому согласно [8] оно эквивалентно следующему уравнению Фредгольма:

$$\psi_1(t) + \frac{1}{2(\pi i)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0(t')\,dt'}{t'-t}\left[\frac{Z_0(t')}{D_1(t')} + \frac{Z_2(t')}{D_2(t')}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{Z_0(t'')} - \frac{1}{Z_0(t')}\right]\frac{\psi_1(t'')\,dt''}{t''-t'} =$$

$$= -\frac{\gamma}{(\pi i)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0(t')\,dt'}{(t'-t)\cdot(t'^2-\gamma^2)}\cdot\left[\frac{Z_2(t')-q}{D_2(t')} + \frac{Z_1(t')-q}{D_1(t')}\right]. \tag{10}$$

Это уравнение может быть в общем случае решено численно, а при наличии малого параметра — и аналитически.

3. Применим полученные выше общие соотношения для решения конкретной задачи о согласовании плазменного волновода с коаксиальным. В этом случае в формулах предыдущего раздела следует устремить $\varepsilon_{\parallel}^{(1)}$ к бесконечности ($Z_1 \to 0$), а тензор $\hat{\varepsilon}^{(2)}$ положить равным тензору диэлектрических проницаемостей плазмы. Строго говоря, при произвольной величине постоянного магнитного поля, параллельного оси волновода, необходимо было бы учитывать гиротропию плазмы. Однако последняя оказывается существенной только при частотах, близких к гирочастоте электрона $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ [9], так что пренебрежение гиротропией возможно, если рабочая частота велика либо мала по сравнению с гирочастотой. В первом случае $\varepsilon_{\parallel}^{(2)} = \varepsilon_{\perp}^{(2)} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}\right.$, n — плотность плазмы, во втором случае $\varepsilon_{\parallel}^{(2)} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, $\varepsilon_{\perp}^{(2)} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2}$.

Исследуем прежде всего дисперсионное уравнение плазменного волновода:

$$\frac{\varepsilon_{\parallel} v}{\beta}\frac{J_1(\beta a)}{J_0(\beta a)} - \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{00}} = 0;$$

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}(\varepsilon_{\perp} k^2 - t^2); \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel}^{(2)}.$$

Это уравнение имеет вещественные решения, соответствующие объемным волнам (поля которых осциллируют по радиусу волновода) только в случае сильного магнитного поля ($\omega_1\omega_0 \ll \omega_H$). Волновые числа этих волн определяются соотношением

$$\gamma_m^2 = \varepsilon_{\perp} k^2\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\varepsilon_{\parallel} k^2 a^2}\right), \tag{11}$$

где λ_m — корни уравнения

$$\frac{\varepsilon_{\parallel} p_m a}{\lambda_m}\frac{J_1(\lambda_m)}{J_0(\lambda_m)} - \frac{\Delta_{10}(\gamma_m)}{\Delta_{00}(\gamma_m)} = 0, \tag{11a}$$

$$p_m = (\gamma_m^2 - k^2)^{1/2}.$$

Из соотношений (11) видно, что при большой погонной плотности плазмы $\left(\frac{\omega_0^2 a^2}{c^2} \gg 1\right)$ фазовые скорости этих волн в широком диапазоне частот, за исключением узкой полосы вблизи $\omega \sim \omega_0$ с шириной порядка $\frac{c^2}{\omega_0^2 a^2} \ll 1$, слабо зависят от частоты. Если, кроме того, магнитное поле достаточно велико, так что $\varepsilon_\perp - 1 \ll 1$, то фазовые скорости этих волн близки к скорости света.

Рассмотрим задачу о возбуждении этих волн основной волной коаксиальной линии (ТЕМ-волной), для которой $q = 0$ и $\gamma = k$.

1. При низких частотах $\left(\frac{c}{\omega_0} = \delta \ll a < b \ll \lambda\right)$ в наиболее существенной области $k \sim t \ll \frac{1}{\delta}$ импеданс плазменного волновода Z_2 мал, так что решение интегрального уравнения задачи

$$\psi_1(t) + \frac{1}{2(\pi i)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt'\,(t'-t)^{-1}}{Z_0^{-1}(t') - Z_2^{-1}(t')}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{Z_0(t'')} - \frac{1}{Z_0(t')}\right]\frac{\psi_1(t'')\,dt''}{t''-t'} = -\frac{k}{(\pi i)^2 a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt'\,(t'-t)^{-1}}{(t'^2-k^2)\left[Z_0^{-1}(t') - Z_2^{-1}(t')\right]} \tag{10a}$$

можно найти методом интеграции. В нулевом приближении, пренебрегая вторым слагаемым в левой части (10а), найдем

$$\psi_{10}^{+}(t) = \frac{1}{\pi i a}\sum_m \frac{\gamma_m a}{(\gamma_m + t)(\gamma_m^2 - k^2)}\left\{\frac{1}{v_m^2} - \frac{2\Delta_{10}(v_m)}{v_m^2 a\Delta_{00}(v_m)} - \frac{\Delta_{10}^2(v_m)}{v_m^2\Delta_{00}(v_m)} + \frac{1}{v_m^4 a^2\Delta_{00}^2(v_m)} + \frac{\varepsilon_\parallel^2}{\varepsilon_\perp\beta_m^2}\left[1 - \frac{2J_1(\beta_m a)}{\beta_m a J_0(\beta_m a)} + \frac{J_1^2(\beta_m a)}{J_0^2(\beta_m a)}\right]\right\}^{-1}. \tag{11в}$$

Наибольший вклад в (11), как легко видеть, дают слагаемые, для которых $\lambda_m < \frac{a}{\delta}$. Поля соответствующих волн слабо убывают от поверхности плазменного волновода, поэтому они дают существенный вклад в граничные условия в плоскости $z = 0$.

Из (11) и (6с) для коэффициента отражения R коаксиальной волны и амплитуд T_m возбуждаемых в плазменном волноводе волн получим в нулевом приближении следующие выражения:

$$R = -\frac{\delta}{2a\ln\frac{b}{a}}\left\{1 - \frac{2}{3}(\varepsilon_\perp - 1)^{1/2}\right\}\left[1 + O\left(\frac{\delta}{a}, \varepsilon_\perp - 1\right)\right], \tag{12}$$

$$T_m = \begin{cases} \dfrac{2}{\left(\lambda_m^2 + \ln^{-2}\dfrac{b}{a}\right)}\dfrac{1}{\ln\dfrac{b}{a}} & \lambda_m^2 \gg (\varepsilon_\perp - 1)\dfrac{a^2}{\delta^2} \\ \dfrac{2}{\lambda_m^2\ln\dfrac{b}{a}}\left[\dfrac{\lambda_m^2\delta^2}{(\varepsilon_\perp - 1)a^2}\right]^2 & \lambda_m^2 \ll (\varepsilon_\perp - 1)\dfrac{a^2}{\delta^2}, \end{cases} \tag{13}$$

где $\lambda_1\left(\varepsilon_\perp = \ln\frac{b}{a} = 1\right) = 1{,}25$.

Таким образом, в случае большой погонной плотности плазмы ($\delta \ll a$) возбуждение плазменного волновода коаксиальным на низких частотах ($a < b \ll \lambda$) оказывается весьма эффективным. При $\varepsilon_{\perp} = \ln \frac{b}{a} = 1$ основная часть (до 80%) падающей мощности уходит в первую гармонику.

2. В окрестности плазменной частоты, при выполнении неравенств $\frac{\delta^2}{a^2} = \left| \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right| \ll 1$ импеданс плазменного волновода не мал. В этом случае, естественно, плазменный волновод плохо согласован с коаксиальным, так что основная часть падающей мощности возвращается обратно в коаксиал в виде собственных волн коаксиального волновода. Однако оценка порядка величины амплитуд возбуждаемых в этом случае волн представляет значительный практический интерес для выяснения возможностей вывода энергии из плазменного волновода при возбуждении его пучком заряженных частиц, когда основная часть энергии высокочастотных колебаний сосредоточена вблизи плазменной частоты [10].

Учитывая малость параметра $|\varepsilon_{\parallel}|$ в этом случае, уравнение (10а) удобно записать в следующем виде:

$$D(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(t')\,dt'}{t'-t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D(t')\psi_1(t')\,dt'}{t'-t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{Z_2(t')} - \frac{1}{Z_2(t)}\right] \frac{\psi_1(t')\,dt'}{t'-t} =$$

$$= -\frac{2k}{\pi i a} \frac{1}{t^2 - k^2}; \quad D(t) = \frac{1}{Z_0(t)} - \frac{1}{Z_2(t)}. \tag{10в}$$

Пренебрегая последним членом в левой части (10в), получим интегральное уравнение для ψ_{10}, которое эквивалентно следующей граничной задаче:

$$f^+(t) = D(t)\,\psi_{10}^-(t) - \frac{k}{2\pi i a (t^2 - k^2)}. \tag{14}$$

Отсюда с точностью до величин порядка $|\varepsilon_{\parallel}|^{1/2}$ находим следующие выражения для амплитуд магнитного поля (на границе $r = a$ плазменного волновода) возбуждаемых волн:

$$T_m = \begin{cases} -\frac{2}{\lambda_m}\mu & \lambda_m \ll \frac{a}{\delta}\mu \\ \frac{i\mu}{\lambda_m}\left[\frac{\mu a}{\delta \lambda_m}\right]^{1/2} & \lambda_m \gg \frac{a}{\delta}\mu, \quad \mu = |\varepsilon_{\parallel}|^{1/2}. \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда можно сделать вывод, что плазменный волновод на частотах $\omega \sim \omega_0$ (при $\delta \ll a$) слабо связан с коаксиальным. Следовательно, отрезок плазменного волновода, ограниченный с обеих сторон коаксиальным кабелем, может служить эндовибратором.

В заключение следует отметить, что граничная задача (8) и интегральное уравнение (10) могут быть применены к решению задачи о проводящей диафрагме в волноводе с проводящими стенками. Из (8), в частности, при $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = 1$ для плоского волновода, в котором высота диафрагмы равна половине высоты волновода, можно найти явное решение, в полном соответствии с результатом работы [11]. Кроме того, с помощью интегрального уравнения (10) можно найти в электростатическом приближении ($a \ll \lambda$) аналитическое решение (в виде ряда по степеням a/λ задачи о проводящей диафрагме произвольных размеров в волноводе, а также задачи о сочленении двух плоских волноводов [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, «Сов. радио», М. 1955.
2. Исследования по распространению радиоволн. Сб. II, Изд-во АН СССР, М., 1946.
3. Л. А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных и звуковых волн. «Сов. радио», М., 1953.
4. И. М. Рапопорт. ДАН СССР, 59, 1403 (1948).
5. С. С. Калмыкова, В. И. Курилко. ДАН СССР, 154, № 5 (1964).
6. Jones D. S. Proc. Roy. Soc., A—217, 153—175 (1953); Philos. Trans. Roy. Soc., A—247, 499—528 (1955); Б. Нобл. Метод Винера — Хопфа, ИЛ, М., 1962.
7. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
8. И. Н. Векуа. Сообщ. АН Груз. ССР, 11, 697 (1941).
9. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко. ЖТФ, 29, 549 (1959).
10. Я. Б. Файнберг. Атомная энергия, 6 (1961).
11. Л. А. Вайнштейн. ЖТФ, 25, 841 (1955).
12. D. S. Williams. IRE Trans., AP—5, 191, 244 (1957).