

УДК: 519.87:517.2

МЕТОДОЛОГІЯ ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЧНИХ ТА ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

Коваленко К.В.

e-mail: kristina.kovalenko@nure.ua

Науковий керівник – канд. пед. наук, доц. Ситникова Ю.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

This paper explores the role of the derivative as a fundamental optimisation tool in modern economic and technological systems. The relevance of the work stems from the need to improve the accuracy of management decisions in conditions of limited resources. The purpose of this study is to compare classical methods (Lagrange, CCT) with modern gradient-based approaches in machine learning. As a result, it was found that the effectiveness of the mathematical model depends directly on the correctness of the sensitivity analysis using partial derivatives. The results can be used to design intelligent decision support systems.

Проблема знаходження зв'язку між фундаментальною математикою та прикладними задачами залишається в центрі уваги багатьох науковців та розробників, оскільки ефективність сучасних систем залежить від точності знайдених рішень. А як відомо, поєднання диференціального числення та системного аналізу дозволяє не просто описувати стан об'єкта, а й керувати його ефективністю. Таким чином, в сучасних умовах ми змушені шукати відповіді на питання оптимізації через математичні моделі, де центральне місце займає поняття похідної.

Метою даної роботи є дослідження методології застосування похідних для розв'язання оптимізаційних задач у складних системах. Об'єктом вивчення став апарат диференціювання та його роль у процесах прийняття управлінських та технічних рішень.

Зрозуміло, що мова йде про аналіз швидкості зміни процесів та їхньої реакції на зовнішні подразники. Будь-яка система, починаючи з виробничого ланцюга і закінчуючи системами автоматичного керування, може бути представлена у вигляді цільової функції. Більшість авторів (зокрема, Ю. Зайченко) наголошують, що саме похідна є тим потужним інструментом, який дозволяє визначити критичні точки системи [1].

У сучасній науковій літературі існують різні підходи до класифікації методів оптимізації. За критерієм наявності обмежень їх поділяють на методи безумовної та умовної оптимізації [4]. До методів безумовної оптимізації належать дослідження функції за допомогою першої та другої похідної, а також градієнтні методи (найшвидшого спуску, спряжених градієнтів). Методи умовної оптимізації включають метод множників Лагранжа (для обмежень-

рівностей), методи штрафних функцій, умови Каруша-Куна-Таккера (для обмежень-нерівностей). Для функції однієї змінної $f(x)$ необхідною умовою існування локального екстремуму є рівність нулю першої похідної: $f'(x^*) = 0$. Достатньою умовою слугує знак другої похідної: якщо $f''(x^*) > 0$, то точка x^* є точкою мінімуму, а якщо $f''(x^*) < 0$, то x^* – точка максимуму. У багатовимірному випадку аналогом першої похідної виступає градієнт, який у випадку функції n змінних $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ має вигляд $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, а необхідною умовою є рівність $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ [2].

Сучасним та ефективним підходом до розв'язання задач з обмеженнями є метод множників Лагранжа. Для задачі мінімізації $f(\mathbf{x})$ за обмежень типу рівності $g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m, m < n$ функція Лагранжа має вигляд:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}),$$

де λ_i – множники Лагранжа, $i = 1, 2, \dots, m$. Необхідні умови стаціонарності записуються як система, розв'язок якої дає точки «підозрілі» на екстремум. У сфері економіки цей метод є особливо ефективним для оптимізації виробництва та розподілу ресурсів $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$, та $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ [3].

Як бачимо предметом аналізу є швидкість зміни певних процесів. Тобто будь-яка технічна характеристика або фінансовий показник подаються у вигляді функції, і головне завдання – це дослідити її на екстремум. Більшість авторів (зокрема, Ю. Зайченко) наголошують, що саме похідна дозволяє визначити точки локального та глобального максимуму чи мінімуму, що є критичним для інтелектуальних систем прийняття рішень [1]. Для простих моделей достатньо аналізу першої похідної $f'(x^*) = 0$ та перевірки знаку другої похідної $f''(x^*) > 0$, проте реальні системи вимагають дослідження частинних похідних. Зазначимо, що аналіз багатовимірних функцій може бути складним через велику кількість факторів. Дану проблему вирішують за допомогою градієнта, тобто такого вектору, складовими якого є частинні похідні за кожною змінною [4]. Як зазначає О. Ковальчук, градієнтні методи є найбільш ефективними для задач великої розмірності, оскільки вони вказують напрямок найшвидшого зростання функції [2]. Це дозволяє крок за кроком наближатися до оптимального стану системи. Важливим елементом дослідження є методика використання похідної в умовах обмежених ресурсів. У таких випадках метод множників Лагранжа дозволяє інтегрувати обмеження безпосередньо в диференціальну модель:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}),$$

де $f(\mathbf{x})$ – цільова функція; $g_i(\mathbf{x})$ – набір функцій-обмежень, які дорівнюють нулю; λ_i – набір множників для кожного конкретного обмеження,

$i = 1, 2, \dots, m$. У такій моделі частинні похідні за змінними $\mathbf{x}$ та множниками λ стають основою для розв'язання задач стаціонарності. Дослідження О. Світличної підтверджують, що такий підхід є незамінним для моделювання працемістких виробничих процесів, де потрібно знайти баланс між капіталом та трудовими ресурсами [3].

Особливе значення похідна має у сучасних ІТ-технологіях. Так, у машинному навчанні навчання нейронних мереж зводиться до мінімізації функції втрат, а алгоритм зворотного поширення помилки (backpropagation) повністю базується на ланцюговому правилі диференціювання:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial w_{ij}},$$

де L – функція витрат; w_{ij} – вага зв'язку між нейронами; z_j – зважена сума входів нейрона; a_j – активація нейрону (результат функції активації). Завдяки цьому ми отримуємо можливість коригувати кожен ваговий коефіцієнт системи, забезпечуючи високу точність прогнозування. Це ще раз підтверджує, що сучасні інтелектуальні технології мають під собою суворий математичний фундамент [1, 2].

Підсумовуючи результати дослідження, можна зазначити, що диференціальний аналіз – це база для розуміння стійкості систем. Похідна дозволяє не лише знаходити екстремуми, а й оцінювати чутливість рішення до змін параметрів. Беручи до уваги універсальність цього інструменту, можна стверджувати, що методологія на основі похідних забезпечує високу точність прогнозування результатів у технічних та економічних системах.

Перспективою подальшого дослідження є вивчення дробових похідних та їх застосування в моделюванні систем із «пам'яттю», де майбутній стан залежить від усієї історії розвитку процесу.

Список використаних джерел:

1. Зайченко Ю. П. Методи оптимізації в інтелектуальних системах прийняття рішень. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2023. № 2. С. 45–58.
2. Ковальчук О. Я. Порівняльний аналіз градієнтних методів у задачах великої розмірності. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2022. Т. 138. № 1. С. 112–125.
3. Світлична О. С. Математичне моделювання працемістких виробничих процесів засобами диференціального аналізу. *Економіка та прогнозування*. 2024. № 4. С. 89–101.
4. Zhang S. Gradient Descent Algorithm Optimization and its Application in Linear Regression Model. *Academic Journal of Natural Science*. 2024. Vol. 1, no. 1. P. 1–5. <https://doi.org/10.5281/zenodo.13753916>.