МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАРУШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО БАЛАНСА В ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Альджаафрех М. Р., Наумейко И.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

В работе проведено исследование проблемы сосуществования двух видов в замкнутой и открытой экосистемах. Аналогичная модель описывает конкуренцию и кооперацию в системах любых взаимодействующих акторов без последействия, в частности, в экономике. Модель описана известной детерминированной системой из 2-х нелинейных дифференциальных уравнений [1], с использованием математического аппарата качественной теории дифференциальных уравнений. Показано, что модель предсказывает хаотические движения вблизи периодического решения.

Численные эксперименты с исходной и с преобразованной системами типа Вольтерра показывают, что синусоидальное воздействие на популяцию, например путем изменения скорости размножения одного или обоих видов, вследствие сезонных изменений пищевого рациона, приводят к хаотической динамике системы.

Аналогичные исследования проведены для дискретной модели, описывающей малые популяции. Результаты качественно совпадают с полученными для непрерывной модели.

Пользуясь вычислительными и графическими возможностями интегрированной математической среды MathCad, удалось численно подтвердить и наглядно представить хаотическую динамику системы, как в непрерывном случае (большие популяции), так и в дискретном случае, причем, в полном соответствии с теорией, для системы из двух уравнений хаос можно получить лишь вводя возмущение – третью ось, время. Для дискретных систем хаос возможен, как показано на Рис. 4.6, и в отсутствии возмущения.

Рассмотрим модель Лотка-Вольтерра с частотой возмущения Ω, близкой к частоте предельного цикла системы без возмущений. Пусть абсолютная скорость размножения жертв имеет периодическую составляющую m sinψ, где ψ = Ω, Ω = const, m = const, и при t = 0, ψ 0 = 0, x*, y* – координаты нетривиальной стационарной точки – центра для невозмущенной системы.

Уравнения запишутся так:

$$\begin{cases} d\xi/dt = -\gamma_1(x_*\eta + \xi\eta) + m\sin\Omega t \\ d\eta/dt = \gamma_2(y_*\xi + \xi\eta) \end{cases} . \qquad (1)$$

Случай невозмущенной системы – решение и фазовая траектория системы (1):

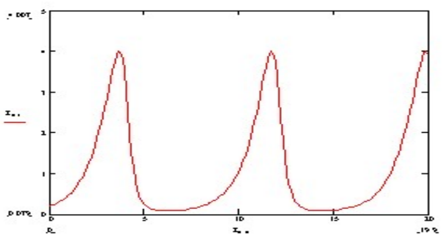

Рис. 1.

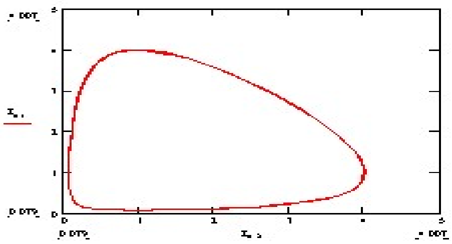

Рис. 2.

Для сравнения рассматриваются варианты синусоидальных возмущений с амплитудой m=0.15 и частотами Ω=1 и π/5. Соответствующий график и его проекция подтверждают появление хаотических колебаний вблизи предельного цикла [2].

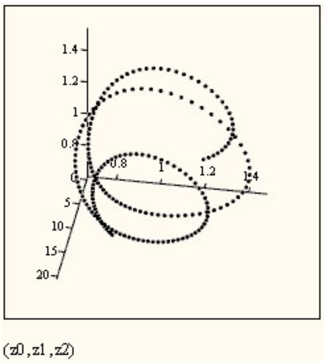

Рис. 3.

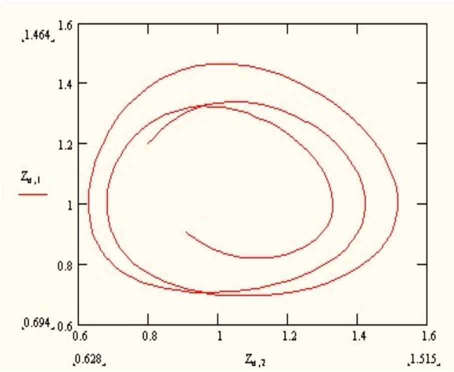

Рис. 4.

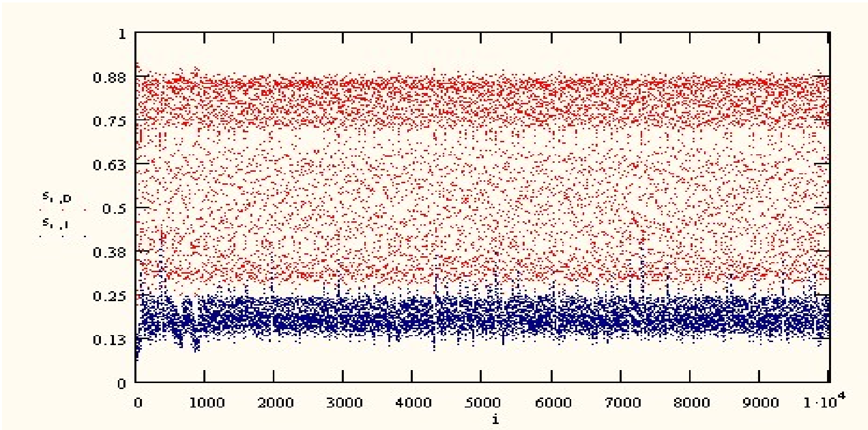

Рис. 5. Вверху рисунка – динамика «жертв», внизу – «хищников».

На рис.5 представлен случай малых популяций и результаты решения рекуррентного аналога системы Лотки-Вольтерра – дискретный вариант фазового портрета хаотической динамики обобщенной системы «хищник-жертва».

Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.

Альджаафрех, М. Р. Неустойчивость динамического балланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части [Текст] / М. Р. Альджаафрех // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014.– Т. 2, № 4 (68).– С 47–50.