

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ

Катюшин Е.А., Рачков Д.С., Семеняка А.В., Зарицкий В.И.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

61166, Харьков, пр. Ленина, 14, ХНУРЭ, НИЦ ИИРЭСТ, тел. (057) 702-11-38,

E-mail: evgeniy-ns@ukr.net

The feasibility of using adaptive lattice filters as a universal basis for modeling random processes of various physical nature is grounded.

Введение. При разработке систем пространственной, временной, пространственно-временной обработки сигналов требуется моделировать векторные случайные процессы (СП) с заданными статистическими характеристиками. Компонентами этих векторов являются случайные отсчеты $y_{\ell}^{(i)}$ комплексных амплитуд входных воздействий в ℓ -м ($\ell \in 1, M$) канале приема в i -м интервале разрешения по дальности. В качестве входных воздействий каналов приема могут выступать шумовые излучения одного или нескольких источников, разнесенных в пространстве, пассивные помехи от местности или искусственных диполей, отражения от метеообразований и т.п. Для многих практических задач векторы входных воздействий в элементах разрешения по дальности можно полагать комплексными гауссовыми случайными векторами. Их статистические свойства полностью определяются корреляционной матрицей (КМ) или энергетическим спектром межканальных флуктуаций отсчетов. В зависимости от особенностей входных воздействий и структуры каналов приема КМ может иметь специфическую структуру. В частности, КМ междупериодных флуктуаций стационарных пассивных помех при постоянном интервале зондирования может считаться теплицевой. Такой же спецификой структуры может обладать КМ точечных источников шумовых излучений на выходах линейной эквидистантной антенной решетки с идентичными элементами. Такие КМ полностью определяются своим первым или последним столбцом, элементы которых образуют корреляционную последовательность (КП), преобразование Фурье которой определяет энергетический спектр соответствующего процесса.

Реальные процессы характеризуются широким разнообразием форм спектров или КМ. Поэтому в расчетах обычно используют те или иные модели, которые при относительной простоте позволяют формировать и анализировать СП с разнообразными достаточно сложными КМ или спектрами. К их числу в первую очередь относятся авторегрессионные (АР) модели различного целого порядка $p \geq 1$, в которых текущее значение

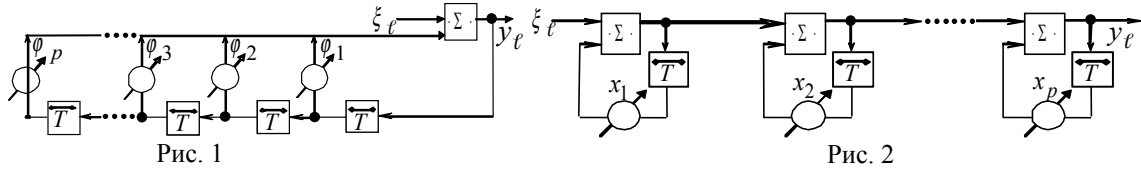
$$y_{\ell} = \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{\ell-i} + \xi_{\ell}, \quad (1)$$

представляет собой линейную комбинацию своих P предыдущих значений с коэффициентами φ_i и текущего отсчета ξ_{ℓ} гауссового стационарного белого шума с нулевым средним и единичной дисперсией [1]. Выбором порядка и параметров модели можно моделировать процессы с $n \leq p$ -модальными спектрами мощности, необходимость в которых возникает в различных приложениях.

Доклад посвящен обоснованию рациональных методов моделирования АР-процессов с различными энергетическими спектрами или КМ.

- 1. Моделирование АР-процессов с использованием БИХ-фильтров.** Очевидный способ моделирования, непосредственно вытекающий из определения (1), показан на рис. 1. Здесь отсчеты моделируемого АР-процесса формируются в результате преобразования независимых отсчетов белого шума ξ_{ℓ} , $\ell = 1, 2, \dots$ в P -звенном рециркуляторе с коэффициентами усиления φ_i , $i \in 1, p$ в цепях обратной связи. Разновидность этой схемы показана на рис. 2. Здесь искомые

отсчеты получаются преобразованием отсчетов белого шума в P последовательно соединенных однозвенных рециркуляторах с коэффициентами усиления $x_i, i \in 1, p$ в цепях обратной связи.



Формирующие фильтры (ФФ) рис. 1, 2 эквивалентны, если значения x_i совпадают с корнями характеристического уравнения (ХУ)

$$P(x) = x^p - \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot x^{p-i}, \quad (2)$$

коэффициентами которого служат значения ϕ_i . Формируемые отсчеты процесса будут иметь физически обоснованную положительно определенную КМ, если корни ХУ (2) будут удовлетворять условию $|x_i| < 1, i \in 1, p$, обеспечивающему устойчивость как каждого из однозвенных рециркуляторов рис.2, так и их совокупности в целом.

Хорошо известные в литературе процессы с "типичными корреляционными последовательностями" соответствуют частному случаю равенства $x_i = x_0, i \in 1, p; |x_0| < 1$ всех P корней ХУ. В этом случае, однако, моделируются процессы только с унимодальными спектрами мощности.

Необходимые параметры ФФ могут задаваться различными способами.

1. По заданной нормированной КП (НКП) $\rho(v), v \in 0, \dots, p$ формируются элементы $\phi_{ij} = \rho(i-j), \phi_{ij} = \phi_{ji}^*, i, j \in 1, p+1$ эрмитовой теплицевой $(p+1) \times (p+1)$ КМ $\Phi^{(p+1)} = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^{p+1}$. Коэффициенты ФФ рис. 1 равны $\phi_i = -\alpha_i, i \in 1, p$, где $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=0}^p = \Psi_{11}^{-1} \cdot \Psi_1$, а $\Psi_1 = \{\psi_{i1}\}_{i=1}^{p+1}$ – первый столбец матрицы $\Psi = (\Phi^{(p+1)})^{-1}$, обратной КМ АР-процесса.

2. Непосредственно по заданному вектору весов $\phi = \{\phi_i\}_{i=1}^p$ ФФ рис. 1

3. Непосредственно по корням $x = \{x_i\}_{i=1}^p$ ХУ (2)

В первых двух случаях необходимо убеждаться в позитивности задаваемой КП, для чего может потребоваться, в частности, отыскивать корни ХУ (2). Практически более удобно начинать моделирование именно с задания этих корней $|x_i| < 1, i \in 1, p$, модули и фазы которых задают соответственно ширину и расположение на частотной оси i -й ($i \in 1, p$) моды спектра моделируемого процесса.

Однако использовать БИХ ФФ рис. 1, 2 для непосредственного моделирования АР-процессов практически нецелесообразно из-за переходных процессов, длительность которых увеличивается с ростом порядка и корреляции отсчетов моделируемого процесса. Этот недостаток можно устранить, перейдя к формирующим КИХ-фильтрам с матричной импульсной характеристикой (МИХ), пропорциональной левому треугольному корню КМ моделируемого процесса.

2. Моделирование АР-процессов с использованием КИХ-фильтров. Предлагаемая методика моделирования комплексного гауссового случайного вектора $y = \{y_\ell\}_{\ell=1}^M$ с нулевым средним значением и заданной $M \times M$ КМ Φ_M основана на преобразовании [2]

$$y = T \cdot \xi \quad (3)$$

¹ Здесь и ниже звездочка (*) – символ эрмитового сопряжения.

M -мерного вектора гауссового белого шума $\xi = \{\xi_\ell\}_{\ell=1}^M \sim CN(0, \mathbf{I}_M)$ с нулевым средним и единичной $M \times M$ КМ $\mathbf{I}_M$ в фильтре с МИХ $\mathbf{T}$ – корнем заданной $M \times M$ КМ Φ_M в представлении $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \Phi_M$. Сформированный по (3) вектор $\mathbf{y} = \{y_\ell\}_{\ell=1}^M$ также гауссов и имеет требуемую КМ $\overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^*} = \overline{\mathbf{T} \cdot \xi \cdot \xi^* \cdot \mathbf{T}^*} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{I}_M \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \Phi_M^2$.

В роли матрицы $\mathbf{T}$ может выступать, в частности, нижний треугольный множитель Холецкого матрицы Φ_M [2], совпадающий с МИХ настроенного соответствующим образом решетчатого фильтра (РФ), схема которого показана на рис. 3, а ($M = 5$) [3]. Он строится из однотипных элементарных решетчатых фильтров (ЭРФН) – двухвходовых весовых сумматоров с перекрестными связями (рис. 3, б).

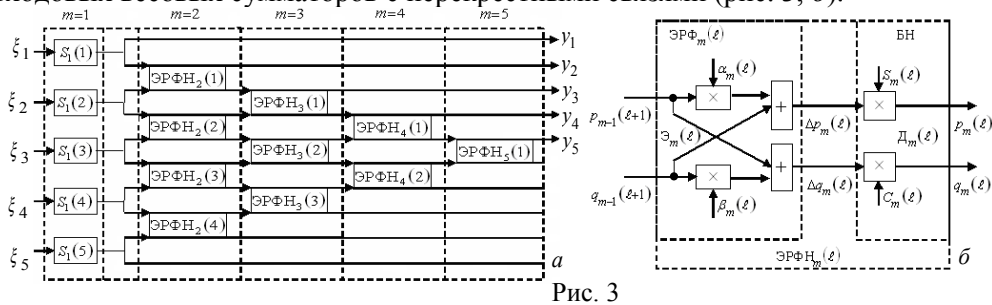


Рис. 3

Элементы вектора (3) формируются на M верхних выходах настроенного РФ при подаче на его входы элементов вектора шума $\xi = \{\xi_\ell\}_{\ell=1}^M$.

На основе РФ АР – процессы с теплицевыми КМ формируются по заданному вектору $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^P$ корней ХУ (2) по следующему алгоритму.

1) Отыскиваются элементарные симметрические функции (ЭСФ) [4] этих корней, определяющие P -мерный вектор $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^P$ коэффициентов ХУ (2).

2) По этому вектору строится $(p+1)$ -мерный вектор $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=0}^p$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_i = -\varphi_i$, $i \in 1, p$, определяющий первую и, тем самым, последнюю строку матрицы $\mathbf{H}$ – корня матрицы $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{H}^* \mathbf{H} = \mathbf{N} \mathbf{N}^* = \Phi_M^{-1}$, обратной теплицевой КМ искомого вектора.

3) По этой последней строке определяются параметры ЭРФН РФ с МИХ $\mathbf{H}$, по которым по методике [3] определяются параметры ЭРФН РФ рис. 3, а с МИХ $\mathbf{T} = \mathbf{H}^{-1}$.

4) Вектор шума $\xi = \{\xi_\ell\}_{\ell=1}^M$ преобразуется в настроенном таким образом РФ, искомым вектор $\mathbf{y} = \{y_\ell\}_{\ell=1}^M$ формируется на его M верхних выходах.

АР – процессы с заданными нетеплицевыми КМ, например, для систем междупериодной обработки сигналов на фоне пассивных помех в импульсных РЛС с вобуляцией интервалов зондирования или для систем пространственной обработки на основе ФАР произвольной конфигурации, настраивается по следующему алгоритму.

1) По заданной нетеплицевой КМ отыскиваются параметры ЭРФН РФ с МИХ $\mathbf{H}$. Как показано в [3], в этом случае в процессе настройки на нижних выходах соответствующего РФ формируется матрица $\mathbf{T} = \mathbf{H}^{-1}$, которую можно непосредственно использовать в (3). Если требуемое число векторов $\mathbf{y} = \{y_\ell\}_{\ell=1}^M$ велико, целесообразен второй шаг.

2) По матрице $\mathbf{T} = \mathbf{H}^{-1}$ в целом отыскиваются параметры ЭРФН РФ с МИХ $\mathbf{T}$ [3], который используется при выполнении шага 4 предыдущего алгоритма.

² Черта сверху – знак математического усреднения

На основе описанной методики разработан, реализован в пакете **Matlab** и протестирован программный комплекс (ПК) для решения широкого круга задач моделирования векторных АР – процессов с заданными статистическими характеристиками. На рис. 4 приведён пример тестирования ПК. Точный спектр АР – процесса порядка $p = 5$ с одним p -кратным корнем ХУ (2) $x_0 = 0.4874$ показан штрихпунктирной линией. Штриховой кривой показана спектральная функция (СФ) Кейпона [5] $S(f) = M^{-1} \cdot \mathbf{x}(f)^* \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(f)$, $\mathbf{x}(f) = \left\{ e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n} \right\}_{n=0}^{(M-1)}$, вычисленная по матрице $\Psi = \Phi_M^{-1}$, обратной истинной КМ моделируемого АР – процесса. Сплошной линией изображена оценочная СФ $S'(f) = M / \mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(f)$, построенная по матрице $\hat{\Psi} = \hat{\Phi}^{-1}$, обратной МП оценке

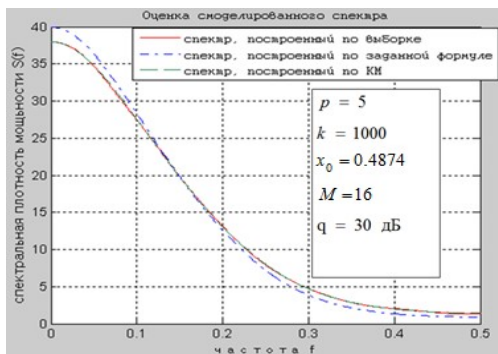


Рис 4

$\hat{\Phi} = k^{-1} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^*$ КМ общего вида. Здесь $\mathbf{Y} = \{ \mathbf{y}_i \}_{i=1}^k$ — $M \times k$ матрица, составленная из $k = 1000$ векторов $\mathbf{y}_i = \{ y_{\ell}^{(i)} \}_{\ell=1}^M$, сформированных ПК по первому из описанных выше алгоритмов. Спектры построены для заданного отношения сигнал/шум $q = 30 \text{ дБ}$. Видно, что оценочная СФ Кейпона [5] практически совпадает с СФ Кейпона [5] построенной по истинной КМ, что свидетельствует о правильности векторов моделируемого процесса, сформированных ПК.

Отличие вычисленных СФ от истинного спектра обусловлено особенностями метода Кейпона.

Выводы. Рассмотрены методы моделирования векторных гауссовых процессов авторегрессии произвольного порядка с заданными энергетическими спектрами или корреляционными матрицами (КМ) различного вида. Отмечены недостатки традиционных методов их формирования на основе БИХ фильтров, обусловленные переходными процессами, длительность которых растет с увеличением порядка и степени коррелированности моделируемого процесса. Показано, что этот недостаток может быть устранен при формировании АР – процесса путем преобразования вектора белого шума в КИХ – фильтре с матричной импульсной характеристикой (МИХ), пропорциональной левому корню требующейся КМ. Обоснована целесообразность использования в качестве этого корня треугольного сомножителя разложения Холецкого этой КМ. Функции формирующего фильтра требуемого процесса в этом случае могут выполнять решетчатые фильтры (РФ), возбуждаемые гауссовым вектором белого шума, сформированным соответствующим датчиком компьютера. Кратко описаны алгоритмы настройки РФ по заданным корням характеристического уравнения АР - процесса или его КМ, реализованные в специализированном программном комплексе моделирования. Приведены результаты тестирования, подтвердившие высокую эффективность разработанного метода моделирования.

Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. - М.: Мир, 1974.
2. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. - М. Сов. Радио, 1971.
3. Леховицкий Д.И. Моделирование пассивных помех импульсным РЛС на основе процессов авторегрессии произвольного порядка/Д.И. Леховицкий, И.Г. Кириллов // Системы обработки информации. Збірник наукових праць. — Х.: ХУПС, 2008. — Вип.3(70).— С. 90–101.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров. – М.: 1960, - 720 с

5. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения.–М.: Мир.-1990.