УДК 530.191

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ РОЗМІРНОСТЕЙ

Жезлова А.С.
Науковий керівник – к.ф.-м.н. Онищенко А.А.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. фізики,
м. Харків, Україна
e-mail: anhelina.zhezlova@nure.ua

This work is devoted to the study of various methods and approaches to the estimation of fractal dimensions, which play an important role in determining the complexity and structure of objects in physics, mathematics, biology, chemistry, biochemistry, medicine, electronics, materials science, signal and image processing, computer networks, and many others. The report analyzes several methods of calculating these dimensions. A description and explanation of the principle of operation is provided for each of them.

Поняття «фрактал» вперше введено видатним американським вченим Б. Мандельбротом в 1975 р. в книзі [1], що була опублікована французькою мовою. Сам термін «фрактал» походить від латинського слова fractus – фрагментований, неправильний за формою, дроблений, ламаний, розбитий. Саме на базі розглянутого визначного досягнення Б. Мандельброта на сьогодні сформовано так звану фрактальну парадигму [2], у межах якої встановлено, що фрактальність є однією з фундаментальних властивостей навколишнього світу. Фрактальні структури виявлено у самих різних галузях людської діяльності: у фізиці, астрономії, електроніці, обробці сигналів, комп'ютерних мережах, хімії, фізичній хімії, біології, фізіології, психіатрії, біофізиці, біохімії, медицині [3].

Основною числовою характеристикою будь-якого фрактала є фрактальна розмірність D [4]. На сьогодні існує велика кількість методів оцінювання фрактальних розмірностей, в рамках доповіді зупинимось на найпростіших, які дозволять зрозуміти підхід та принципи оцінювання розмірностей. Так, для математичних фракталів автор терміна «фрактальна розмірність» Б. Мандельброт у переважній більшості випадків ототожнював її з розмірністю Хаусдорфа-Безіковича D_{HB}, тобто $D = D_{HB}$. Існує наступний спрощений алгоритм: нехай досліджуваний об'єкт перебуває у евклідовому просторі з розмірністю E. Покриємо цей об'єкт E-вимірними «кулями» радіуса l. Нехай для цього нам потрібно не менше, ніж $N(l)$ таких куль.

Тоді за досить малих l величина $N(l)$ підкоряється степеневому законові:

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D} \tag{1}$$

Величина D є саме фрактальною розмірністю даного об'єкта. Вона дорівнює його розмірності Хаусдорфа-Безіковича: $D = D_{HB}$.

Формулу (1) можна переписати у вигляді:

$$D = -\lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} \tag{2}$$

Формулу (2) зазвичай на практиці й використовують для визначення фрактальної розмірності D. Цю фрактальну розмірність інколи називають об'ємною розмірністю множини. Важливо, що величина D є локальною характеристикою даного об'єкта.

Для обчислення розмірностей фізичних фракталів, з якими на практиці мають справу дослідники, відрізняються від математичних фракталів. Для фізичних фракталів є недоцільним використовувати розмірність Хаусдорфа-Безіковича D_{HB} у вигляді фрактальної розмірності D. Фрактальна розмірність кількісно описує степінь заповнення фракталом простору, в який його занурено. Отже, розглянемо кілька методів, які дозволяють обчислити розмірність фізичних фракталів. Одним цікавим та простим методом є метод визначення кореляційної розмірності, яка має локальний характер. Існує декілька алгоритмів обчислення, але найбільш ефективним вважається алгоритм Грассбергера-Прокаччи. Згідно йому кореляційна розмірність D_G задається співвідношенням:

$$D_G = \lim_{r \to 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \tag{3}$$

Ще один метод дозволяє визначити інформаційну розмірність. Покриємо досліджувану множину точок N кулями з радіусом ε. Кількість точок множини в кожній окремій комірчині дорівнює N_i. Ймовірність точки потрапити у дану комірку складає:

$$P_i = \frac{N_i}{N_0}, \qquad i = \overline{1, N}, \qquad \sum_{i=1}^{N} P_i = 1, \tag{4}$$

де N_0 – загальна кількість точок у вихідній досліджуваній множині.

Інформаційну розмірність можна визначити за допомогою залежності, яка має вигляд:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i.}{\log \varepsilon}. \qquad (5)$$

Встановлено, що $D_G \le D_I \le D_C, \le D_{HB}$, тобто інформаційна та кореляційна розмірності обмежують ємнісну розмірність знизу, а остання – розмірність Хаусдорфа-Безіковича.

Хоча різні методи відрізняються по використаним в них підходах, але більшість з них вкладається в наступний алгоритм який складається з трьох кроків:

1) Вимірюється деяка кількісна характеристика сигналу з використанням масштабної величини.

2) Будується графік залежності логарифму цієї характеристики від логарифму масштабної величини.

3) З використанням отриманого кутового коефіцієнту лінійної регресії оцінюється величина фрактальної розмірності, або пов'язаною з нею величиною.

Список використаних джерел:

1. Mandelbrot B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. Flammarion, 1989. 196 p.

2. Яновський В. В. Фрактали. Виникнення нової парадигми у фізиці.// Universitates. 2003. № 3. С. 32 – 47.

3. Brambila F., ed. Fractal Analysis. Applications in Health Sciences and Social Sciences. InTech, 2017. 216 p.

4. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Fractal Analysis of the Fractal Ultra-Wideband Signals // Problems of Atomic Science and Technology. Series 'Plasma Electronics and New Methods of Acceleration'. 2015. No. 4(98), Iss. 9. P. 248 – 251. (Scopus)

5. Лазоренко О. В., Онищенко А. А., Чорногор Л. Ф. Метод коригуючої функції для фрактального аналізу // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 210. С. 177 – 187.