

Т.Е. РЕМАЕВА, А.Г. НЕРУХ, *д-р физ.-мат наук*, А.В. РУЖИЦКИЙРАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН МАЛЫМ ДЕФОРМИРУЮЩИМСЯ
ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЛИПСОИДОМ

В настоящее время большой интерес представляют исследования рассеяния электромагнитной волны объектом, поверхность которого изменяется во времени. Это относится, например, к топологическим изменениям падающих капель дождя и их фрагментации [1] или к направленной подвижности клеток в физиологических процессах [2]. Инструменты, порожденные исследованиями в биологических науках, позволяют манипулировать одиночной клеткой, что вызвало значительный интерес в различных аспектах биомедицинских исследований [3]. Специальный интерес представляют перестраиваемые резонаторы, в которых резонансная частота регулируется размером, формой, температурой или приложенным электрическим полем. Такие резонаторы могут быть сделаны из нематических жидких кристаллов [4]. В некоторых случаях размеры частиц сравнимы с длиной волны, в других случаях они намного меньше, что позволяет рассматривать явление в приближении квазистатики. Во многих случаях исследуемые частицы могут быть моделированы сравнительно простыми геометрическими формами, среди которых наиболее привлекательным является трехосный эллипсоид.

В данной работе рассеяние электромагнитных волн эллипсоидом с изменяющимися во времени размерами рассмотрено в приближении квазистатики с помощью метода интегральных уравнений [5]. Приближение квазистатики выполняется, если все размеры эллипсоида a_1, a_2, a_3 намного меньше длины волны λ : $a_i \ll \lambda$, $i=1, 2, 3$. Тогда поле внутри эллипсоида можно представить в виде разложения в ряд Рэлея $\vec{E} = \vec{E}^{(0)}(t, \vec{r}) + \vec{E}^{(1)}(t, \vec{r}) + \vec{E}^{(2)}(t, \vec{r}) + \dots$, где n -е слагаемое пропорционально n -й степени отношения размеров эллипсоида и длины волны, $\vec{E}^{(n)} \sim (a_i / \lambda)^n$. Нулевая аппроксимация этого ряда удовлетворяет уравнению

$$\vec{E}^{(0)}(t, \mathbf{r}) = \vec{E}_0(t) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{4\pi\varepsilon} \text{grad div} \int_{V(t)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vec{E}^{(0)}(t, \mathbf{r}') dV, \quad (1)$$

где ε и ε_1 – диэлектрическая проницаемость среды вне и внутри эллипсоида соответственно. Так как нулевой член разложения для падающего поля $E_0(t)$ не зависит от пространственных координат, то и внутреннее поле также не зависит от пространственных координат [6]. Согласно методу интегральных уравнений, поле в дальней зоне определяется интегралом

$$\vec{E}_{sc}^{(0)}(t, \mathbf{r}) = \vec{E}_0(t, \mathbf{r}) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{4\pi\varepsilon} \left(\text{grad div} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1}{r} \int_{V(t-r/v)} \vec{E}^{(0)}(t', \mathbf{r}') dV. \quad (2)$$

Вначале рассмотрим временное смещение всего эллипсоида в направлении, которое определяется вектором $\xi(t) = \eta(t)\xi_0$, $\xi_0 = (d_1\vec{e}_x + d_2\vec{e}_y + d_3\vec{e}_z)$. Так как при смещении эллипсоид не меняет своих размеров, то внутреннее поле определяется формулой [7]

$$\vec{E}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \frac{4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon)I_{0i}} \vec{E}_{0i}^{(0)} e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где
$$I_{0i} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s)\Delta(s)}, \quad \Delta(s) = \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)} \quad (4)$$

и \vec{E}_{0i} – составляющая падающего поля вдоль соответствующей оси.

Предположим, что падающее поле имеет компоненты $\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)$, $\vec{B}_0 = (0, B_0, 0)$. Тогда поле, рассеянное эллипсоидом, вибрирующим по закону $\eta = 2\eta_0 \cos \Omega t$

$$\vec{E}_{sc} = \frac{a_1 a_2 a_3}{3} \frac{4\pi\epsilon(\epsilon_1 - \epsilon)}{4\pi\epsilon + (\epsilon_1 - \epsilon)I_{01}} \left[\vec{n} \left[\vec{E}_0 \vec{n} \right] \right] \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{i\omega(t-r/v)}}{r} + i\eta_0 \sqrt{\epsilon} \left[\left[\vec{E}_0 \vec{\xi}_0 \right] \vec{n} \right] \left\{ \frac{(\omega + \Omega)^2 \Omega}{c^3} e^{i(\omega + \Omega)(t-r/v)} - \frac{(\omega - \Omega)^2 \Omega}{c^3} e^{i(\omega - \Omega)(t-r/v)} \right\} \quad (5)$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$. Отсюда видно, что дополнительные гармоники с частотами $(\omega \pm \Omega)$ пропорциональны третьей степени волнового числа, тогда как поле с главной частотой пропорционально второй степени волнового числа.

Рассмотрим деформацию эллипсоида, которая может быть описана вектором $\xi(t, \vec{r})$, определенным в каждой точке эллипсоида, включая его поверхность. Вектор $\xi(\vec{r}) = d_1(t)x\vec{e}_x + d_2(t)y\vec{e}_y + d_3(t)z\vec{e}_z$ соответствует изменению размеров эллипсоида во времени, рис. 1.

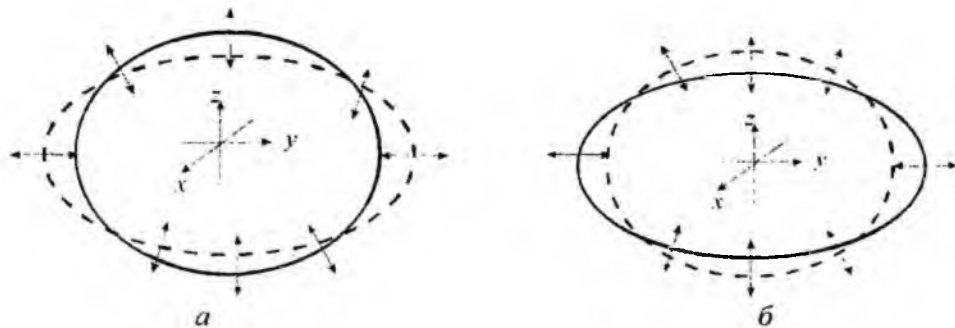


Рис. 1. Временные деформации эллипсоида: каждая ось эллипсоида осциллирует независимо со своей собственной частотой

Для вычислений внутреннего поля воспользуемся формулой [8]

$$\int_{V(t)} \bar{A} dV = \int_{V_0} \bar{A} dV + \oint_{S_0} \bar{A}(\xi d\vec{s}) \quad (6)$$

которая верна для малых деформаций $|\xi| \ll a_i$. В данной формуле V_0 и S_0 – недеформированный объем и площадь эллипсоида, соответственно, а ξ – вектор деформации, рис. 2.

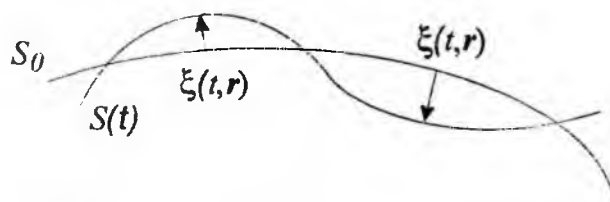


Рис. 2. Геометрия деформации эллипсоида

Чтобы получить формулу (6), необходимо представить радиус-вектор в каждой точке деформированного эллипсоида в форме $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{\boldsymbol{\xi}}$ где $\bar{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки недеформированного эллипсоида. Так как деформации малы, то можно разложить каждую координату вектора $\bar{\mathbf{A}}$ в ряд Тейлора

$$A_i(\bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{\boldsymbol{\xi}}) = A_i(\bar{\mathbf{r}}_0) + \left(\nabla A_i(\bar{\mathbf{r}}_0), \bar{\boldsymbol{\xi}} \right) = A_i(\bar{\mathbf{r}}_0) + \nabla \left(A_i(\bar{\mathbf{r}}_0), \bar{\boldsymbol{\xi}} \right) - A_i(\nabla, \bar{\boldsymbol{\xi}}). \quad (7)$$

Если среда внутри эллипсоида несжимаема, то $(\nabla, \bar{\boldsymbol{\xi}}) = 0$, и формула (7) упрощается

$$A_i(\bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{\boldsymbol{\xi}}) = A_i(\bar{\mathbf{r}}_0) + \nabla \left(A_i(\bar{\mathbf{r}}_0), \bar{\boldsymbol{\xi}} \right). \quad (8)$$

Интегрируя (8) по объему эллипсоида и используя интегральную теорему Гаусса

$$\oint_{s_0} \nabla \left(A_i, \bar{\boldsymbol{\xi}} \right) dV = \oint_{s_0} A_i(\bar{\boldsymbol{\xi}} d\bar{\mathbf{s}}), \text{ получаем формулу (6).}$$

Подставляя выражение для вектора деформации $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{r}}) = d_1(t)x\bar{\mathbf{e}}_x + d_2(t)y\bar{\mathbf{e}}_y + d_3(t)z\bar{\mathbf{e}}_z$ в (6)

и, интегрируя, получим

$$\oint_{s_0} \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} (\bar{\boldsymbol{\xi}} d\bar{\mathbf{s}}) = -\frac{1}{2} \left(a_1^2 d_1(t) I_{01} + a_2^2 d_2(t) I_{02} + a_3^2 d_3(t) I_{03} \right) + \frac{1}{2} \left(x^2 I_{\xi_1}(t) + y^2 I_{\xi_2}(t) + z^2 I_{\xi_3}(t) \right), \quad (9)$$

где I_{ξ_i} – коэффициенты деполяризации [7], определяемые в данном случае формулами

$$I_{\xi_i}(t) = 2 \left(d_1(t) I_{1i} + d_2(t) I_{2i} + d_3(t) I_{3i} \right), \quad I_{ii} = \frac{3}{2} I_{0i} - \frac{1}{a_i^4} A_{ii}, \quad I_{ij} = \frac{a_i^2}{2a_j^2} I_{0i} - \frac{1}{a_j^2} A_{ij}, \quad A_{ii} = \int_{\Gamma} \frac{\kappa_i^4}{J} d\Gamma,$$

$$A_{ij} = \int_{\Gamma} \frac{\kappa_i^2 \kappa_j^2}{J} d\Gamma, \quad J = \frac{\kappa_1^2}{a_1^2} + \frac{\kappa_2^2}{a_2^2} + \frac{\kappa_3^2}{a_3^2}, \quad \kappa_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \kappa_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \kappa_3 = \cos \theta, \quad d\Gamma = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Внутреннее поле в приближении первого порядка точности по малому параметру $|\bar{\boldsymbol{\xi}}| \ll a_i$

$$\bar{\mathbf{E}}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{E}}_{0i}^{(0)} e^{i\omega t} \frac{4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) I_{0i}} \left[1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{4\pi\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) I_{0i}} I_{\xi_i}(t) \right]. \quad (10)$$

При осцилляции осей эллипсоида $d_1(t) = d_1 \cos \Omega_1 t$, $d_2(t) = d_2 \cos \Omega_2 t$, $d_3(t) = d_3 \cos \Omega_2 t$ с малыми частотами, $\Omega_i / \omega \ll 1$, рассеянные поля в дальней зоне определяются выражением (2):

$$\bar{\mathbf{E}} = E_0 \left(\cos \theta \cos \varphi \bar{\mathbf{e}}_\theta - \sin \varphi \bar{\mathbf{e}}_\varphi \right) P \frac{\omega^2}{rc^2} \left(1 + 2S(t - r/v) \right) e^{i\omega(t - r/v)}, \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = E_0 \left(\sin \varphi \bar{\mathbf{e}}_\theta + \cos \theta \cos \varphi \bar{\mathbf{e}}_\varphi \right) \frac{P\omega^2}{rc^2} \left(1 + 2S(t - r/v) \right) e^{i\omega(t - r/v)}. \quad (12)$$

Здесь коэффициент $P = 4\pi a_1 a_2 a_3 \varepsilon (\varepsilon_1 - \varepsilon) / 3 [4\pi\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) I_{01}]$ такой же, как и для невозмущенного эллипсоида. Деформация эллипсоида учитывается функцией

$$S(t) = d_1(t) + d_2(t) + d_3(t) + (\varepsilon_1 - \varepsilon) I_{\xi_1}(t) / (4\pi\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) I_{01}). \quad (13)$$

Найдем поток энергии в дальней зоне, определяемый вектором Пойнтинга $\Pi = \varepsilon_0 c^2 [\mathbf{E}, \mathbf{B}]$, усредненным по периоду падающей волны $2\pi/\omega$. Он представляется функцией во времени

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2 P^2 \omega^4}{2r^2 v c^4} (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \bar{e}_r \{1 + 4S(t-r/v) + 4S^2(t-r/v)\} \quad (14)$$

В случае, когда сфера трансформируется в эллипсоид ($a_1 = a_2 = a_3 = a$), все величины в (14) легко вычисляются: $I_{01} = 4\pi/3$, $P = a^3 \varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)/(\varepsilon_1 + 2\varepsilon)$, $I_{\varepsilon 1} = (3d_1 + 4d_2 + 4d_3)2\pi/5$,

$$S(t) = [(19\varepsilon_1 + 11\varepsilon)d_1(t) + (22\varepsilon_1 + 8\varepsilon)(d_2(t) + d_3(t))]/10(\varepsilon_1 + 2\varepsilon) \quad (15)$$

Изменение во времени поперечника рассеяния для различных деформаций осей эллипсоида показано на рис. 3. Рис. 3, а, б отображают зависимость поперечника рассеяния от времени, когда вектор смещения оси, параллельный падающему электрическому полю, постоянный, а векторы смещения по другим осям изменяются по гармоническому закону. Рис. 3, в, д отображают обратную ситуацию, когда изменяется именно ось, параллельная падающему электрическому полю, а две другие постоянны.

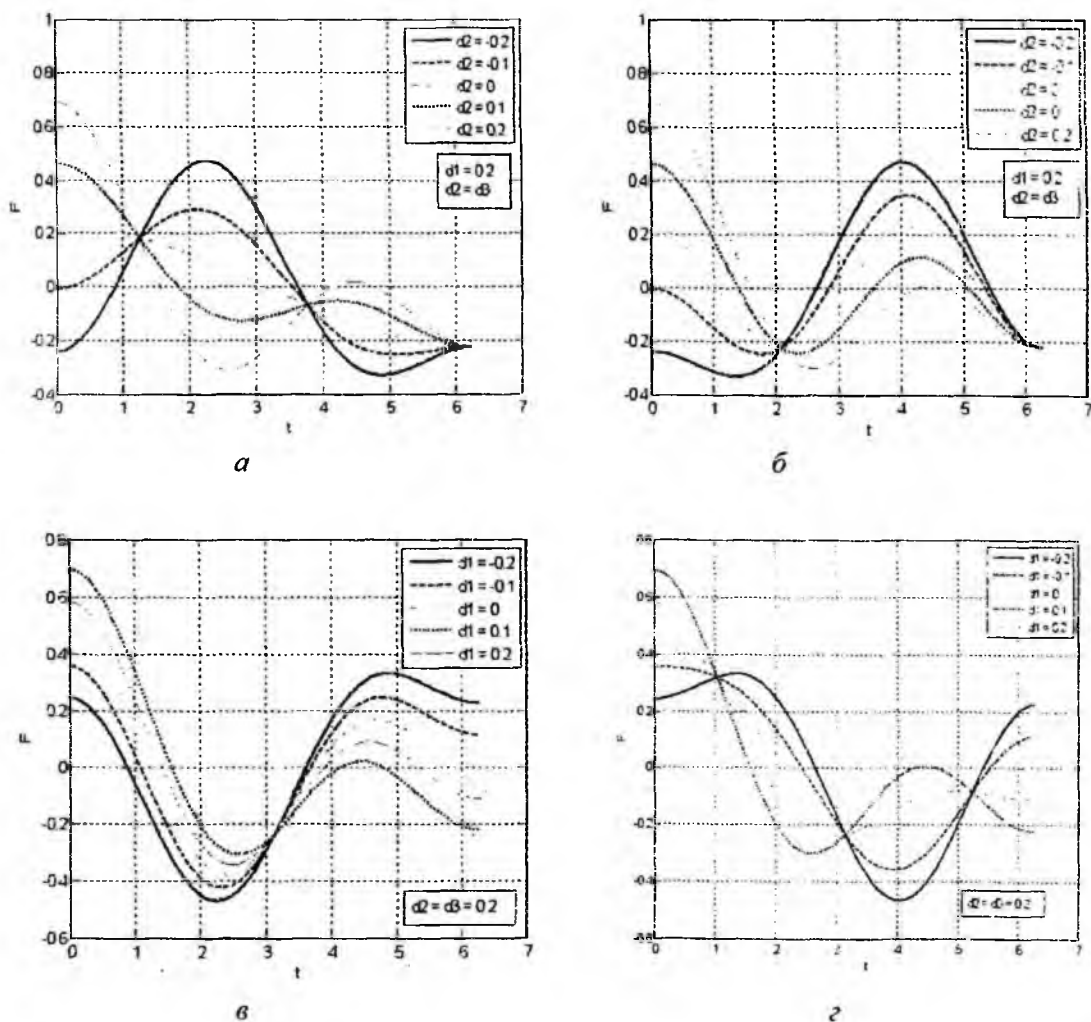


Рис. 3. Временные вариации поперечника сечения: а, б – вектор смещения, параллельный падающему электрическому полю, постоянный, две другие оси изменяются по гармоническому закону; в, г – обратная ситуация, когда изменяется именно ось, параллельная падающему электрическому полю, а две другие постоянны. Величина поперечника рассеяния дана в относительных единицах

Полученные результаты показывают, что величина возмущения поперечника рассеяния зависит от величины осцилляций осей эллипсоида. Величина возмущений поперечника рассеяния зависит также от формы невозмущенного объекта. Это хорошо видно на рис. 4, где приведены поперечники рассеяния для сферы, вытянутого и сплюснутого эллипсоидов. Первоначальная форма невозмущенного объекта не меняет характер возмущения, однако меняет его величину.

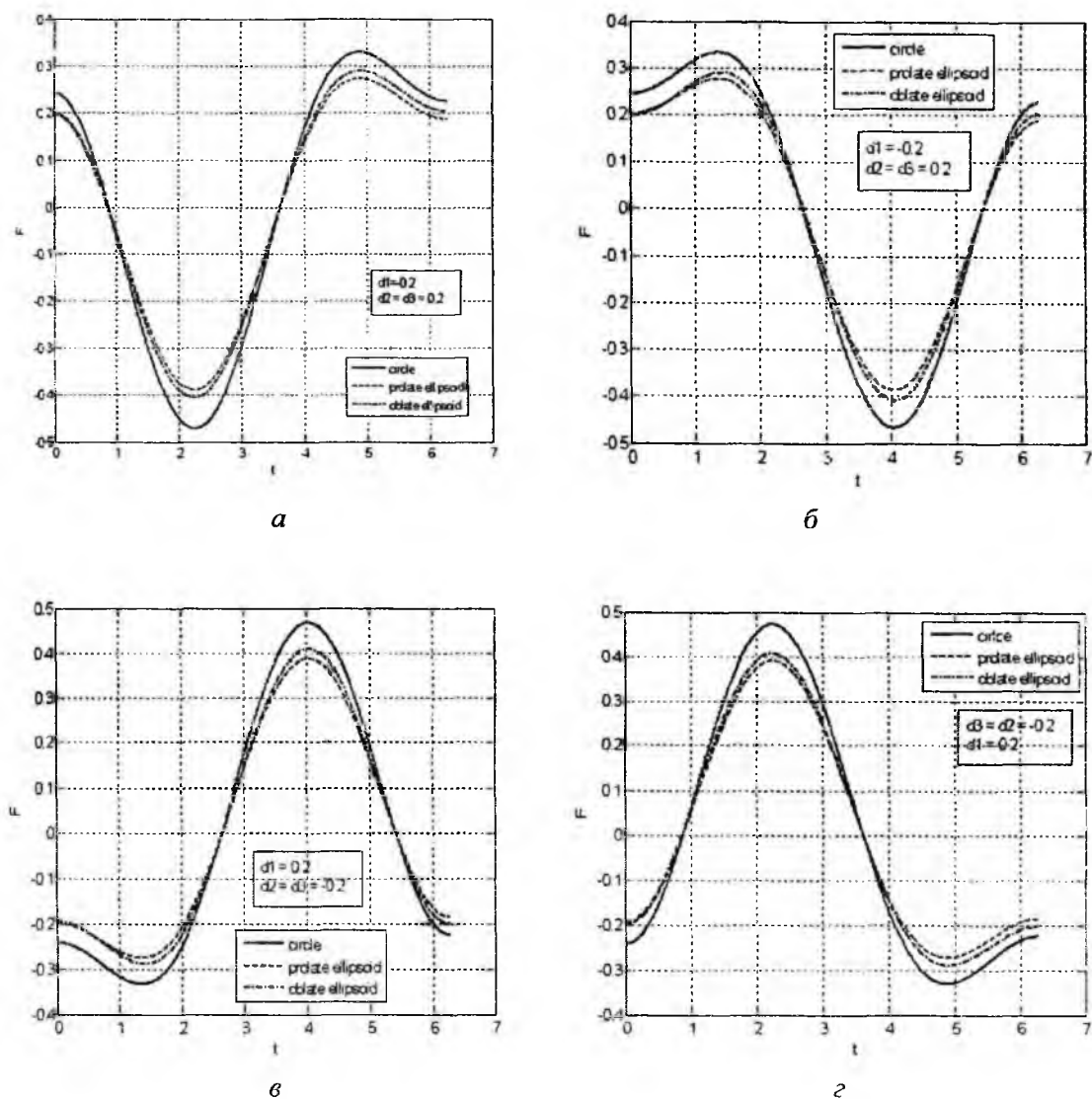


Рис. 4. Зависимость поперечника рассеяния от времени для сферы, вытянутого и сплюснутого эллипсоидов: *a*, *б* – вектор смещения, параллельный падающему электрическому полю, постоянный, две другие оси изменяются по гармоническому закону; *в*, *г* – обратная ситуация, когда изменяется именно ось, параллельная падающему электрическому полю, а две другие постоянны. Величина поперечника рассеяния дана в относительных единицах

Таким образом, с помощью метода интегральных уравнений рассмотрено рассеяние электромагнитной волны эллипсоидом с изменяющимися во времени размерами. Рассмотрен случай, когда размеры эллипсоида намного меньше длины волны, что дает возможность представить внутреннее поле с помощью ряда Рэлея. Получены зависимости поперечников рассеяния от времени для случаев возмущений, вызванных деформацией поверхностей сферы, вытянутого и вогнутого эллипсоидов.

Список литературы: 1. *Villermaux E., Bossa B.* Single-drop fragmentation determines size distribution of raindrops // *Nature Physics*. – 2009. – Vol. 5. – No. 9. P. 697-702. 2. *Mahmud G., Campbell C.J., Bishop K.J.M., Komarova Y.A., Chaga O., Soh S., Huda S., Kandere-Grzybowska K., Grzybowski B.A.* Directing cell motions on micropatterned ratchets // *Nature Physics*. – 2009. – Vol. 5. – No. 9. P. 606-612. 3. *Yen-Heng Lin, Wang-Ying Lin, Gwo-Bin Lee* Image-driven cell manipulation // *IEEE Nanotechnology Magazine*. – 2009. – Vol. 3. – No. 3. P. 6-11. 4. *Humar M., Ravnik M., Pajk S., Musevic I.* Electrically tunable liquid crystal optical microresonators // *Nature Photonics*. – 2009. – Vol. 3. – No. 10. P. 595-600. 5. *Нерух А.Г., Хиженяк Н.А.* Современные проблемы макроскопической нестационарной электродинамики. – Харьков: Тест-Радио, 1991. 6. *Сретенский Л.Н.* Теория потенциала Ньютона // Москва: Гостехиздат, 1946. 7. *Хиженяк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. – Киев: Наук. думка, 1986. 8. *Хиженяк Н.А., Лысенко О.Е.* Журнал технической физики. – 1970. – Т. 40, №. 12. – с. 2581.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники,
Национальный научный центр "Институт метрологии"

Поступила в редколлегию 11.02.2011