

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Задрикіну Сергію Олександровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Відновлення розривної внутрішньої структури 3D тіла за допомогою інтерфлотації функцій

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель розривного 3D тіла

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Першина Ю.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 59 с., 17 рис., 1 дод., 17 джерел.

РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, РОЗРИВНИЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ СПЛАЙН,
РОЗРИВНИЙ ІНТЕРФЛЕТАЦІЙНИЙ СПЛАЙН, ЯВИЩЕ ГІБСА.

Об'єкт дослідження – процес реконструкції розривної внутрішньої структури тривимірного тіла з прямокутним розбиттям області визначення

Мета роботи – побудова та тестування алгоритму реконструкції функцій трьох змінних за допомогою інтерфлетації функції, ректангулюючи область визначення функції.

Методи дослідження – методи теорії наближення функцій багатьох змінних, методи наближення операторами сплайн-інтерфлетації функції трьох змінних.

В даній роботі проведено аналіз літературних джерел, присвячених методам та алгоритмам відновлення розривних функцій. Обрано метод розв'язання задачі з огляду існуючих експериментальних даних (проекції вздовж систем площин). Створено та реалізовано алгоритм реконструкції розривної внутрішньої структури тривимірного тіла на основі інтерфлетації функцій. Робота алгоритму перевірена двох тестових функціях. Алгоритм дозволяє уникнути явище Гібса.

ABSTRACT

Introductory note: 59 pages, 17 figures, 1 appendix, 17 sources.

DISCONTINUOUS INTERFLATATION SPLINE, DISCONTINUOUS INTERPOLATION SPLINE, DISCONTINUOUS FUNCTION, GIBBS PHENOMENON.

Object of research – the process of reconstructing the discontinuous internal structure of a three-dimensional body with a rectangular division of the definition area.

Purpose of work – construction and testing of the algorithm for the reconstruction of three variables functions by means of function interpolation, rectangling the area of the function definition.

Methods of research – methods of the theory of functions approximation of many variables, methods of approximation by spline-interflatation operators of three variables functions.

This work includes an analysis of literary sources devoted to methods and algorithms for restoring discontinuous functions. The method of solving the problem was chosen based on a review of existing experimental data (projections along systems of planes). An algorithm for the reconstruction of the discontinuous internal structure of a three-dimensional body based on functions interflatation was created and implemented. The operation of the algorithm is verified by two test functions. The algorithm avoids the Gibbs phenomenon.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Математичні моделі розривних процесів	11
1.2 Алгоритм реконструкції розривної функції з використанням значень функції у вузлах заданої сітки та виявлення ліній розриву	13
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	21
1.4 Постановка задач дослідження	23
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	24
2.1 Прикладні задачі, що приводять до інтерфлетації функцій	24
2.2 Інтерфлетация функцій	25
2.3 Побудова розривного сплайну інтерполяційного типу для відновлення розривної функції трьох змінних	27
2.4 Побудова розривного сплайну інтерфлетаційного типу	33
Висновки за розділом 2	37
3 Програмна реалізація	39
3.1 Система комп'ютерної математики MathCad	39
3.2 Алгоритм розв'язання задачі реконструкції функції від трьох змінних з розривами першого роду	40
3.3 Опис програми	41
Висновки за розділом 3	42
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	43
4.1 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції розривним інтерполяційним сплайном	43
4.2 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції розривним інтерфлетаційним сплайном	49
Висновки за розділом 4	51
Висновки	52

	7
Перелік джерел посилання	53
Додаток А Лістинг програми	55

ВСТУП

Актуальність теми. Відновлювання розривних функцій є актуальною задачею для багатьох галузей математики, фізики, інженерії та комп'ютерних наук, оскільки багато практичних задач описуються функціями, що містять розриви або стрибки. Наведемо декілька прикладів задач, в яких необхідно вміти відновлювати розривні функції. При моделюванні реальних природних та інженерних процесів виникають стрибки або розриви, наприклад, у механіці (ударні хвилі, процеси зіткнень), в електричних колах (перехідні процеси), в термодинаміці (переходи між фазами), в економічних моделях (різкі зміни в цінах або попиті), при дослідженні складу кори Землі (перехід від однієї складової кори до іншої), в комп'ютерній томографії (різні органи мають різну щільність) тощо. Для чисельного моделювання таких процесів потрібно вміти наближувати розривні функції.

Для багатьох чисельних методів, таких як методи скінченних елементів або методи обробки сигналів, необхідно наближувати розривні функції для того, щоб розв'язувати рівняння, що описують фізичні або інженерні системи. Використання таких наближень дозволяє обробляти функції, які не є неперервними, але на які можна накласти ефективні методи чисельного аналізу.

В обробці сигналів і зображень часто зустрічаються дискретизації або стрибки. Розриви можуть виникати через обмеження в якості передавання даних або через стиснення. У таких випадках наближення розривних функцій дозволяє зберігати значущу інформацію при мінімізації втрат даних.

У задачах оптимізації, особливо в умовах дискретності або розривних змін, таких як оптимізація вартості чи планування ресурсів (де є стрибки витрат або вигод на певних рівнях), важливо мати можливість моделювати та наближати розривні функції для подальшого аналізу та прийняття рішень. Розривні функції часто зустрічаються в теорії катастроф та інших нелінійних теоріях, які вивчають раптові зміни в системах. У таких випадках наближення розривних функцій дозволяє вивчати стійкість систем і прогнози їх поведінки.

У задачах, пов'язаних з машинним навчанням, особливо в контексті обробки великих даних або навчання на даних з розривами, можна використовувати наближення розривних функцій для кращої генералізації моделей, особливо в випадках, коли дані містять стрибки (наприклад, в прогнозуванні фінансових ринків, в медичних застосуваннях тощо).

В економічних моделях часто є ситуації, коли спостерігаються різкі зміни в показниках, наприклад, зміна цін, ставки відсотків, податків тощо. Наближення розривних функцій може бути корисним для моделювання таких стрибків і для побудови моделей прогнозування.

Взагалі наближення розривних функцій є важливим інструментом для аналізу, моделювання та вирішення практичних задач у багатьох галузях науки і техніки, де важливо працювати з функціями, що мають розриви або стрибки, і при цьому отримувати точні або приблизні розв'язання.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є побудова та тестування алгоритму наближення функцій трьох змінних за допомогою інтерфлетації функції. Для досягнення поставленої мети під час проходження професійної практики необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Відновлення розривної внутрішньої структури 3D тіла»;
- розробити алгоритми наближення розривної функції трьох змінних з використанням прямокутних елементів та оператора інтерфлетації;
- створити програми в системі комп'ютерної математики MathCad та протестувати алгоритм відновлення розривної функції трьох змінних за допомогою інтерфлетації функцій.

Об'єктом дослідження є процес наближення розривних функцій розривними сплайнами з прямокутним розбиттям області визначення.

Предметом дослідження є розривні сплайни інтерфлетаційного типу.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії наближення функцій однієї та багатьох змінних, методи наближення операторами сплайн-інтерфлетації функції трьох змінних.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, були представлені на тринадцятій Міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні системи та технології ІСТ-2024» [1], а також на восьмій Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Студенти та молодь – для майбутнього країни» [2].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичні моделі розривних процесів

Задачі апроксимації функцій займають провідне місце в прикладній математиці. Існує думка, що практично всі прикладні задачі є задачами теорії наближення функцій. Вирішення багатьох теоретичних і прикладних задач потребує заміни одних функціональних залежностей іншими, більш зручними для реалізації конкретної задачі [3]. Така заміна відбувається за умови виконання низки вимог до об'єкта, що наближається, його форми та властивостей. До них відносяться: клас функцій, тип вхідних даних, точність апроксимації, обчислювальні витрати, тип кінцевого результату та багато іншого. Для опису характеристик такої заміни введено поняття критерію якості, що включає аналіз виконаної роботи з апроксимації функції та отриману точність апроксимації. Йдеться про сукупні обчислення вихідної функції, попередньо витрачені на її аналіз приналежності до того чи іншого класу, фактичні витрати на саму апроксимацію, а також витрати на перерахунок, якщо не вдається досягти бажаного результату відразу. При цьому інформація про характер вихідної функції може бути відсутня, а сама функція може бути перенесена в категорію функцій з особливостями.

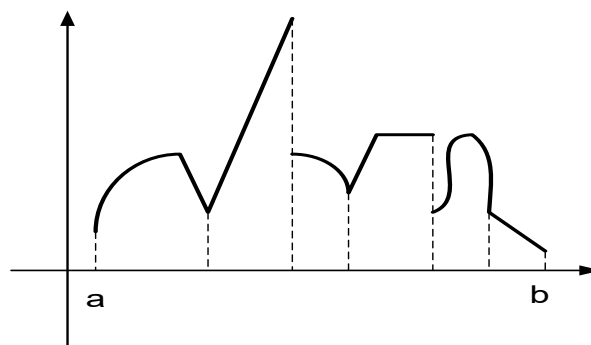


Рисунок 1.1 – Функція з особливостями

На рис. 1.1 зображена функція, що задана на відрізку $[a, b]$, яка має різні типи особливостей, які необхідно враховувати при апроксимації для підвищення точності наближення.

На практиці в багатьох технічних задачах виникає потреба досліджувати об'єкти, які математично описуються функціями, що мають особливості, наприклад, розриви першого роду. Такі проблеми виникають, зокрема, з дистанційними методами дослідження, коли виникає потреба дослідити тіло, не розрізаючи його. Наприклад, у задачах комп'ютерної томографії [4] доводиться відновлювати внутрішню структуру тіла людини, яка складається з органів різної щільності; в дефектоскопії важливим завданням є виявлення тріщин у промислових виробках методами неруйнівного контролю, а також визначення відхилень внутрішньої структури виробу від стандарту. За останні 30 років томографічні методи відновлення неоднорідних просторових фізичних характеристик набули широкого поширення в різних галузях, у тому числі в такій важливій, як медична діагностика. На сьогоднішній день комп'ютерна томографія – цілком сформований напрямок науки, зі своїм спектром завдань і методів їх вирішення. У томографії розроблено велику кількість обчислювальних методів, алгоритмів і програмних засобів, спрямованих на відновлення внутрішньої структури об'єкта. Вони добре працюють при відновленні об'єктів із гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів із розривними характеристиками. Тому задача створення методів наближення функцій з розривами є актуальним.

Апроксимація розривних функцій раніше детально не розглядалася, існують лише підходи до розв'язування такого типу задач, які працюють для часткових випадків. Так, наприклад, з'явилися різні базисні сплайни на основі апроксимації Попова Б.А. [5], В.Л. Атомарні функції Рвачова [6], барицентричні інтерполяційні сплайни [7] та багато інших. Усі вони зосереджені на теоретичній стороні апроксимації, а не на прикладній, тобто враховують особливості функції, обумовлюючи її щоразу різними вимогами до неї. Але сама ідея апроксимації має суто прикладний характер.

Для апроксимації розривних функцій існує метод апроксимації тригонометричними сумами Фур'є, що викликає в розривних точках явище Гібса. Феномен Гібса – це особлива поведінка одновимірного ряду Фур'є під час розкладання розривної періодичної функції та зведення доданків за умови використання скінченної кількості доданків [8]. Було розроблено багато фільтрів для його зменшення, але вони не можуть повністю подолати це явище. Авторами [9] запропоновано методи реконструкції розривних ліній за допомогою вейвлетів. Існують роботи, в яких пропонується використовувати пряме і зворотне перетворення Радона для реконструкції розривів в комп'ютерній томографії. Автор статті [10] здійснили подальший розвиток цієї методології та інструментарію алгоритмічної реконструкції розривів у комп'ютерній томографії, запропонували підходи, які дозволяють відновлювати не лише набір розривів, але й значення стрибків за допомогою перетворення Радона. Ні фільтри, ні згадані методи не забезпечують повного усунення феномену Гібса, а тільки пом'якшують його.

Були розроблені та досліджені методи інтерполяції, апроксимації та інтегріації для наближення розривних функцій однієї змінної [11] і двох змінних, використовуючи прямокутне розбиття [12], розбиття на трикутні елементи [13], проекції вздовж заданої системи ліній [14].

1.2. Алгоритм реконструкції розривної функції за використанням значень функції у вузлах заданої сітки та виявлення ліній розриву

Наведемо метод та алгоритм знаходження ліній розриву функції двох змінних [11], використовуючи її значення в заданій системі вузлів.

Будемо вважати, що досліджувана розривна функція $f(x, y)$ від двох змінних, повністю розміщена а одиничному квадраті $D = [0, 1]^2$ та задане деяке розбиття на прямокутні елементи (взагалі кажучи, прямокутники)

$\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$. Причому ліній розриву функції досліднику невідомі. Як інформацію про функцію маємо її односторонні значення (інтерполяційні дані) у вузлах заданої прямокутної сітки. В кожній точці задано чотири односторонніх значення

$$C_{i,j}^{++} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x,y), \quad C_{i,j}^{-+} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i-0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x,y),$$

$$C_{i,j}^{+-} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x,y), \quad C_{i,j}^{--} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i-0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x,y).$$

Зробимо нумерацію заданих інтерполяційних даних (матриці C) як показано на рис. 1.2.

Тобто як експериментальні дані про функцію виступає матриця значень $C_{p,\ell}$, $p = \overline{1, n \cdot m}$, $\ell = \overline{1, 4}$ розривної функції $f(x, y)$, де p – номер прямокутного елемента.

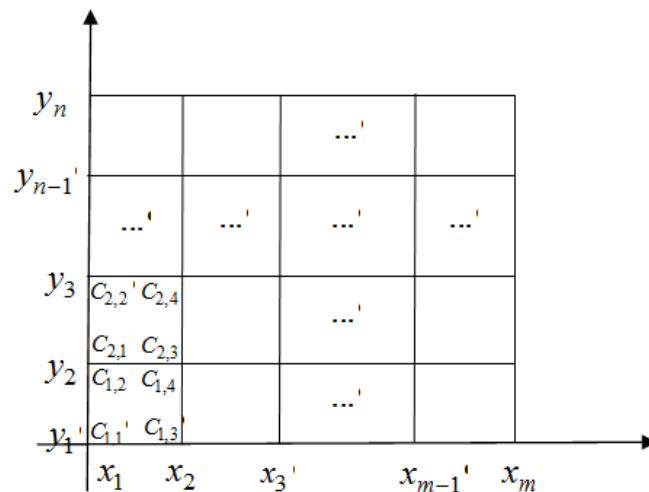


Рис. 1.2 – Формування матриці невідомих інтерполяційних значень розривної функції

Важливим поняттям для визначення ліній розриву є поняття ε -неперервності розривної функції двох змінних.

Означення 1.1. Функція $f(x, y)$ називається ε -неперервною на лінії

$x = x_q$, якщо виконується нерівність $\left| \lim_{x \rightarrow x_q + 0} f(x, y) - \lim_{x \rightarrow x_q - 0} f(x, y) \right| < \varepsilon, \forall y$, ана-

логічно, якщо виконується нерівність $\left| \lim_{y \rightarrow y_s + 0} f(x, y) - \lim_{y \rightarrow y_s - 0} f(x, y) \right| < \varepsilon, \forall x$, то

функція $f(x, y)$ називається ε -неперервною на лінії $y = y_s$.

Означення 1.2. Функцію $f(x, y)$ називається ε -неперервною в точці (x_q, y_s) , якщо виконуються всі чотири нерівності з означення 1.1 в точці (x_q, y_s)

$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon.$$

Означення 1.3. Якщо $f(x, y) \in \varepsilon$ -неперервною $\forall (x, y) \in \Pi_{i,j}$, то будемо її називати ε -неперервною в усьому прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$.

Розглянемо випадок знаходження положення ліній розриву розривної функції, лінійної за кожною змінною. Введемо поняття розривного інтерполяційного сплайну.

Означення 1.4. Розривним кусково-білінійним інтерполяційним сплайном на прямокутній сітці називається сплайн $S(x, y)$ вигляду

$$S(x, y) = p_{ij}(x, y) = C_{i,j}^{++} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{-+} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} +$$

$$+C_{i,j+1}^{+-} \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C_{i+1,j+1}^{--} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},$$

$$(x,y) \in \Pi_{i,j}, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n-1}. \quad (1.1)$$

Причому для функція $S(x,y) = p_{ij}(x,y)$, $(x,y) \in \Pi_{i,j} \subset D$, яка є розривною функцією, білінійною в кожному з елементів розбиття, задовольняє інтерполяційні властивості в кожному прямокутному елементі, тобто виконуються співвідношення:

$$\lim_{x \rightarrow x_{i+1}-0} S(x,y) = p_{ij}(x_{i+1},y), \quad \lim_{x \rightarrow x_i+0} S(x,y) = p_{ij}(x_i,y)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_{i+1}-0} S(x,y) = p_{ij}(x,y_{j+1}), \quad \lim_{y \rightarrow y_j+0} S(x,y) = p_{ij}(x,y_j), \quad (x,y) \in \Pi_{i,j}.$$

Зауваження. Якщо на деякій границі прямокутних елементів розбиття односторонні значення співпадають, наприклад $C_{i,j}^{++} = C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-} = C_{i,j+1}^{--} = f(x_i,y)$, $y_{j-1} \leq y \leq y_j$, то в такому випадку на відріжку $x = x_i$ розривний сплайн $S(x,y)$ буде неперервною функцією для кожного y , $y_j \leq y \leq y_{j+1}$. Якщо ж для всіх точок області D відповідні односторонні границі в точках (x_i, y_j) рівні між собою та дорівнюють відповідним значенням $f(x_i, y_j)$, то $S(x,y) \in C(D)$, то отримаємо класичний неперервний інтерполяційний сплайн на вказаній сітці вузлів.

Теорема 1.1. Якщо $f(x,y) \in C^{-1}[0;1]$ (простір розривних функцій) має одну точку розриву першого роду, яку можна представити у вигляді

$$x^* = \frac{m}{2^k}, y^* = \frac{p}{2^k}, m, k, p \in N, m < 2^k, p < 2^k,$$

то її можна виявити за не більше ніж за k ітерацій.

Причому кількість ітерацій k , за яку можна виявити одну точку розриву з похибкою ε , дорівнює

$$k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$$

Викладемо алгоритм знаходження ліній ε -розриву (тобто ліній шириною ε) по крокам.

Оскільки вхідні значення функції у вузлах заданої сітки можуть бути задані неточно, то використовуються згладжуючі (апроксимаційні) сплайни. Їх і будемо використовувати для цього алгоритму.

Крок 1. Будується розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i, y_j) , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ за формулою (1.1) з невідомими параметрами $C_{k,\ell}$, $k = \overline{1, (m-1) \cdot (n-1)}$, $\ell = \overline{1, 4}$, які знаходяться методом найменших квадратів з умови:

– в дискретній формі

$$\begin{aligned} J(C) = & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{m-1} (f(x_k + 0, y_\ell + 0) - S_k(x_k + 0, y_\ell + 0))^2 + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{m-1} (f(x_k - 0, y_\ell + 0) - S_k(x_k - 0, y_\ell + 0))^2 + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{m-1} (f(x_k + 0, y_\ell - 0) - S_k(x_k + 0, y_\ell - 0))^2 + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{m-1} (f(x_k - 0, y_\ell - 0) - S_k(x_k - 0, y_\ell - 0))^2 \rightarrow \min_C; \end{aligned}$$

– в інтегральній формі

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset D} \iint_{\Pi_{i,j}} [f(x,y) - p_{ij}(x,y,C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C. \quad (1.2)$$

Підставимо знайдені коефіцієнти у формулу (1.1) та отримаємо розривний сплайн, що складається з взагалі кажучи різних функцій $\Pi_{i,j}$.

Крок 2. Знаходяться інтервали, на яких

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} (f(u,v) - S(u,v))^2 dt \neq 0, \quad k, \ell = \overline{1, n-1}.$$

Обчислюємо довжину інтервалів $d_k = x_{k+1} - x_k$, $g_\ell = y_{\ell+1} - y_\ell$ та перевіряємо виконання умови ε -неперервності, тобто, якщо $d_k < 2\varepsilon$, $g_\ell < 2\varepsilon$, то інтервали $(x_k, x_{k+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}) \in \varepsilon$ -прямокутником точок розриву (ε -розрив) і ітераційний процес закінчено. Якщо ж умови не виконуються, то знайдені прямокутні елементи, саме ті, в яких не виконуються умова, ділимо на чотири частини, якщо не виконується одна з нерівностей, то прямокутний елемент ділимо на дві частини. Інші інтеграли будуть дорівнювати нулю, бо $f(x)$ є кусково-лінійною функцією, а лінійна апроксимація наближує такі функції точно. Отримаємо нову систему вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. В якості вузлів розривного сплайну обираємо кутові точки області визначення розривної функції та точки ε -розриву (x_m, y_z) , $m = \overline{1, M}$, $z = \overline{1, Z}$, враховуючи $C_{m,z}^{\pm, \pm} = f(x_m \pm \varepsilon, y_z \pm \varepsilon)$, $m = \overline{1, M}$, $z = \overline{1, Z}$. Сукупність знайдених точок ε -розриву створюють лінії ε -розриву.

Зауваження. Прямокутні елементи, на які розбивається область визначення розривної функції, можуть мати довільно малі висоти і довжини, тобто можуть вироджуватися в лінії (одновимірний випадок).

Наведемо модифікований алгоритм виявлення ліній розриву для випадку нелінійної функції двох змінних. Оскільки наближувати її будемо білінійним

розривним сплайном, то окрім значення ε , знадобиться точність наближення δ .

Крок 1. Будується розривний сплайн апроксимаційного типу на заданих вузлах (x_i, y_j) , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ за формулою (1.1), який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $p_{ij}(x, y, C)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k, \ell}$, $k = \overline{1, (m-1) \cdot (n-1)}$, $\ell = \overline{1, 4}$. І знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайна з умови (1.2). Знайдені коефіцієнти підставляємо у сплайн (1.1) та отримуємо розривний сплайн, що складається з функцій $p_{ij}(x, y)$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Крок 2. На кожному прямокутному елементі розбиття $\Pi_{i, j}$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$ обчислюємо значення

$$J_{ij}^* = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{ij}(x, y), \quad J_{ij}(x, y) = |f(x, y) - p_{ij}(x, y)|.$$

Крок 3. Видаляємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн є ε -неперервним та на яких задовольняється точність наближення δ . Прямокутні елементи, що залишилися $\Pi_{r, q}$, $r = \overline{1, n1}$, $q = \overline{1, n2}$, ділимо на рівні чотири прямокутника, вводячи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента, поділяючи відрізки навпіл (рис. 1.3). Наприклад, якщо ділимо $\Pi_{u, v}$, $u < m$, $v < n$, то вводимо до розгляду лінії всередині $\Pi_{u, v}$:

$$x = x^*, \quad y_v < y < y_{v+1}; \quad y = y^*, \quad x_u < x < x_{u+1}; \quad (1.3)$$

$$x^* = x_u + \frac{x_{u+1} - x_u}{2}, \quad y^* = y_v + \frac{y_{v+1} - y_v}{2}.$$

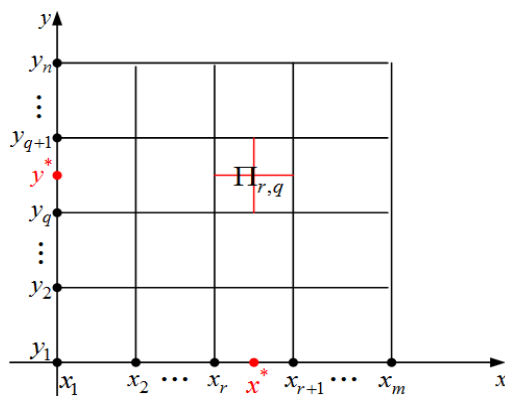


Рисунок 1.3 – Формування нового набору прямокутних елементів, де функція не є \mathcal{E} -неперервною

Крок 4. Використовуючи нову систему прямокутників, будемо апроксимаційні сплайни за формулами (1.1) та (1.2). Перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x \in [0,1] \\ y \in [0,1]}} |f(x,y) - S(x,y)| < \delta, \text{ де } \delta - \text{ задана точність наближення. Якщо ця умова}$$

виконана, то отримали набір відрізків (1.3), з яких і буде складатися лінія розриву. Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Приклад. Нехай в області $G = [0,1] \times [0,1]$ задана функція (рис.1.4)

$$f(x,y) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 0,4, \quad 0 \leq y \leq 0,4; \\ 0, & 0,4 < x \leq 1, \quad 0,4 < y \leq 1. \end{cases}$$

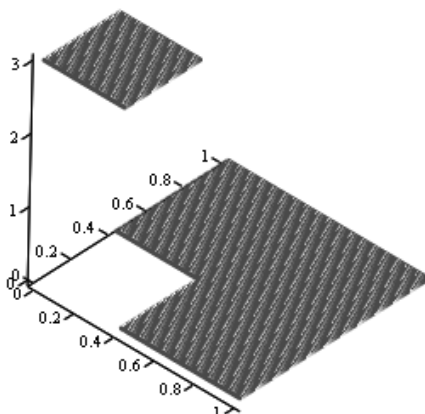


Рисунок 1.4 – Графік тестової функції $f(x,y)$

Ця функція є розривною на лініях $x = 0.4$, $y = 0.4$. Обираємо прямокутну сітку так, щоб вона не співпадала з лінією розриву заданої функції $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 1$. В якості початкового наближення оберемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Побудуємо апроксимаційний сплайн (1.1) на заданій сітці вузлів та задамо точність наближення $\varepsilon = 0.01$. На рис. 1.5 наведені деякі проміжні результати наближення розривної функції та зображення сітки наближувачого сплайну для даного результату.

Тобто отримали розривний сплайн (рис. 1.5), який наближує задану розривну функцію з точністю 0,01. Також отримали відрізки, на яких дана функція має розрив.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглянемо елемент $\Pi_{ijk} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p}$. В якості вхідних даних будемо використовувати сліди функції вздовж границь цього елемента:

$$\begin{aligned} \varphi 1_i^-(y, z) &= \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y, z), \quad \varphi 1_{i-1}^+(y, z) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y, z), \\ \varphi 2_j^-(x, z) &= \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y, z), \quad \varphi 2_{j-1}^+(x, z) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\varphi z_k^-(x, y) = \lim_{z \rightarrow z_k - 0} f(x, y, z), \varphi z_{k-1}^+(x, y) = \lim_{z \rightarrow z_k + 0} f(x, y, z).$$

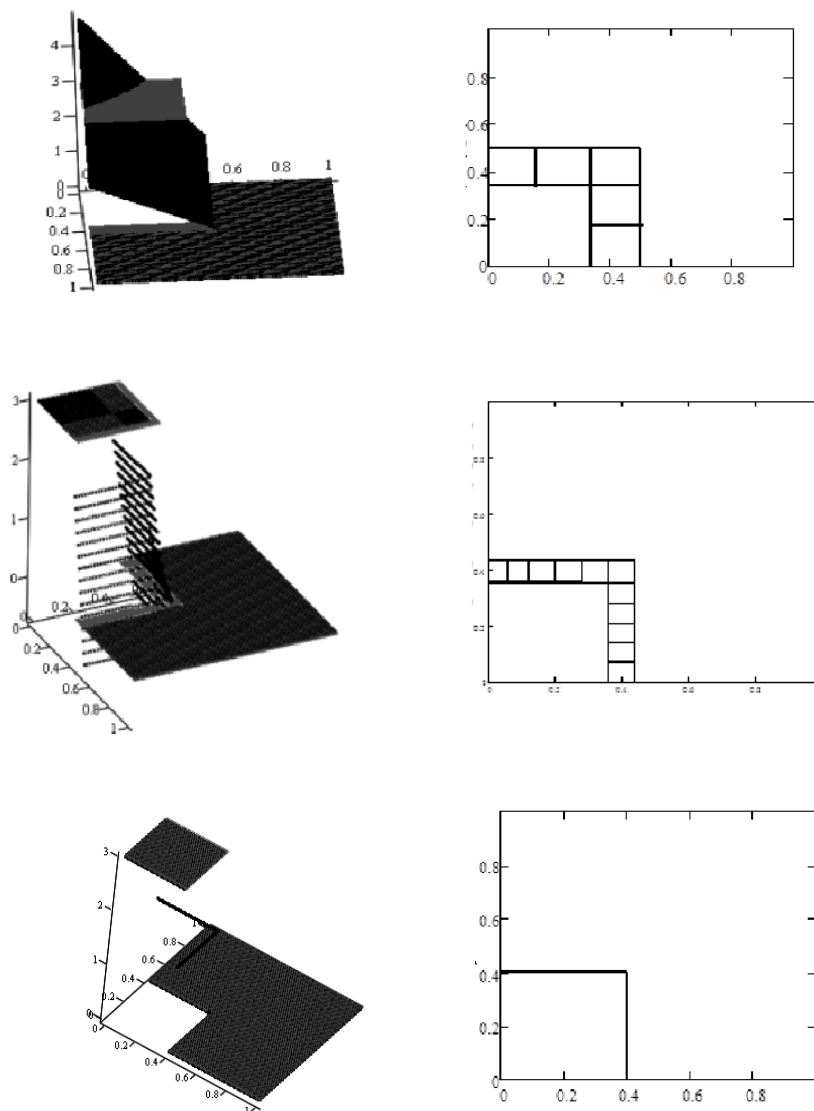


Рисунок 1.5 – Результати відновлення розривної функції

В якості вхідних даних беруться рівняння площин, які обираються дослідником, та сліди шуканої функції, що лежать на заданих площинах. Оскільки ми маємо справу з розривними функціями, то вхідні дані представляються у вигляді односторонніх границь вздовж заданої системи площин.

За вказаними даними потрібно побудувати таку функцію $B(x, y)$, що в кожному елементі розбиття вона буде мати, взагалі кажучи, різний аналітичний вигляд, та таку, яка задовольняє, наприклад, наступним умовам, які називають-

ся інтерлінаційними:

$$B(x, y, z)|_{x=x_i \pm 0} = \varphi 1_i^{\pm}(y, z),$$

$$B(x, y, z)|_{y=y_j \pm 0} = \varphi 2_j^{\pm}(x, z),$$

$$B(x, y, z)|_{z=z_k \pm 0} = \varphi 3_k^{\pm}(x, y).$$

1.4 Постановка задач дослідження

З огляду проведеного аналізу математичних моделей розривних процесів можна зробити висновок, що актуальною є задача відновлення розривної внутрішньої структури тривимірних тіл із заданими односторонніми слідами вздовж заданої системи взаємно перпендикулярних площин. Тому, метою кваліфікаційної роботи є побудова та тестування алгоритму наближення функцій трьох змінних за допомогою інтерфлетації функції. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Відновлення розривної внутрішньої структури 3D тіла»;
- дослідити методи та алгоритми наближення розривної функції двох та трьох змінних з використанням прямокутних елементів та нових інформаційних операторів (інтерлінації та інтерфлетації);
- розробити алгоритм наближення розривної функції використовуючи оператори розривної сплайн-інтерфлетації;
- створення програм в системі комп'ютерної математики MathCad та тестування алгоритму відновлення розривної функції трьох змінних за допомогою інтерфлетації функцій.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Прикладні задачі, що приводять до інтерфлетації функцій

Наведемо найпоширеніші задачі, що наведені в роботі [16] та які приводять до інтерфлетації та можуть виникати і різних галузях науки і техніки.

В теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ в останні десятиліття інтенсивно розвиваються методи, за допомогою яких можна побудувати, дослідити та застосувати такі оператори, які реконструюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за використання заданих слідів функції та, можливо, слідів їх частинних похідних до якогось порядку N на M ($M \geq 2$) m -вимірних ($0 \leq m < n$) поверхнях в R^n . У випадку $m = 0$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках (полюсах) і такі оператори наближення називаються операторами інтерполяції (inter – між, pol – полюс, точка). У випадку $m = 1$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами f та її частинних похідних $\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$, $s = s_1 + \dots + s_n$, $1 \leq s \leq N$ на M лініях і такі оператори будемо

називати операторами інтерлінації (inter – між, line – лінія). У випадку $n \geq 3$, $2 \leq m < 3$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами f та $\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$,

$s = s_1 + \dots + s_n$, $1 \leq s \leq N$ на M поверхнях в R^n ($n \geq 3$) і такі оператори наближення будемо називати операторами інтерфлетації (inter – між, flat – поверхня плоска). В закордонній літературі для оператори інтерфлетації та інтерфлетації називаються “blending function interpolation” – мішана інтерполяція функцій, тому і ми будемо інколи ці оператори так називати. В Україні в останні роки для цих операторів встановилися своя назва – нові інформаційні оператори (тому що інформація, яка поступає на вхід оператора, не є класичною).

Враховуючи, що інтерлінації є природним узагальненням інтерполяції, в

теорії інтерлінації використовується термінологія з теорії інтерполяції (інтерполююча функція – інтерлінуюча функція – інтерфлетуюча функція, вузли інтерполяції – лінії інтерлінації – поверхні інтерфлетації тощо).

Одним із застосувань інтерфлетації є наближення функцій трьох змінних за допомогою проєкцій або томограм, що надходять з комп'ютерного томографа. Така задача виникає при аналізі отриманих томограм, який проводився після того, як пацієнт залишив томограф, коли лікареві для уточнення діагнозу потрібно отримати зображення внутрішньої структури тіла пацієнта в інших перетинах (в інших площинах).

Серед технічних задач, що приводять до нових інформаційних операторів, відмітимо наступні:

- картографія дна океану за даними гідролокації;
- побудова поверхні космічного тіла за даними радіолокації;
- проектування корпусів літаків, суден, автомобілів та деякі інші;
- комп'ютерна томографія;
- сейсмічна томографія.

2.2 Інтерфлетація функцій

В цьому підрозділі дамо визначення оператора інтерфлетації функцій кількох змінних [17].

Нехай $n, M \in \mathbb{N}$; – задані числа; $\Pi_k, k = \overline{1, M}$ – задані m -вимірні ($0 \leq m < n$) множини в R^n ; $\phi_{k,s}(x)|_{\Pi_k} = L_{k,s}f(x)|_{\Pi_k}, k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ – задані сліди деякої послідовності операторів $L_{k,s}f(x), k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ на множинах $\Pi_k, k = \overline{1, M}$. Часто позначають $L_{k,0}f(x) = f(x)$. Скалярозначна функція $f(x)$ може бути невідомою. Оператори $L_{k,s}f(x)$ можуть бути частинними похідни-

ми $L_{k,s} f(x) \Big|_{\Pi_k} = \frac{\partial^s f}{\partial v_k^s} \Big|_{\Pi_k}$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, N}$ (тут v_k – вектор нормалі до Π_k ,

якщо $n \geq 2$, $1 \leq m \leq n-1$). Диференціальні оператори $L_{k,s} f(x)$ можуть мати також більш загальний вигляд.

Означення 2.1. Оператори $O(\{\phi_{k,s}\}; x) = O(\{L_{k,s}\}; \{\Pi_k\}; \{\phi_{k,s}\}; x)$ називатимемо операторами інтерфлетації, якщо

$$L_{l,q} O(\{\phi_{k,s}\}; x) \Big|_{\Pi_l} = \phi_{l,q}(x) \Big|_{\Pi_l}, \quad l = \overline{1, M}, \quad q = \overline{0, N}.$$

Очевидно, оператори $O(\{\phi_{k,s}\}; x)$ відновлюють (можливо наближено) функції $f(x)$ багатьох змінних за допомогою вказаної інформації. У випадку $m = 0$ множини $\Pi_k \in R^n$ є точками в R^n і сліди $\phi_{k,s}(x) \Big|_{\Pi_k}$ є значеннями функції $f(x)$ та її похідних в точках Π_k . Тоді оператори $O(\{\phi_{k,s}\}; x)$ називають інтерполяційними операторами на M точках.

Якщо $m = 1$, $n \geq 2$, то множини Π_k є лініями в R^n і $O(\{\phi_{k,s}\}; x)$ називатимемо операторами інтерлінації.

У випадку $2 \leq m \leq n-1$, $n \geq 3$, $O(\{\phi_{k,s}\}; x)$ будемо називати операторами інтерфлетації.

Якщо оператори $O(\{\phi_{k,s}\}; x)$ лінійно залежать від слідів $\phi_{k,s}(x)$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{1, N}$, тобто

$$O(\{\phi_{k,s}\}; x) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^N L_{k,s}(\phi_{k,s}; \{\Pi_k\}; x) h_{k,s}(x),$$

де $h_{k,s}(x) = h_{k,s}(\{\Pi_k\}; \{L_{k,s}\}; x)$ – деякі допоміжні функції, що не залежать від наближуваної функції $f(x)$, а залежать лише від параметрів геометричних

об'єктів $\{\Pi_k\}$ і від типу операторів $L_{k,s}$, сліди яких $\phi_{k,s}$ використовують для наближення.

Такі оператори називаються лінійними операторами інтерфлетації. В іншому випадку їх називають нелінійними операторами інтерфлетації, або просто нелінійними інтерфлетантами.

Означення 2.2. Якщо допоміжні функції $h_{k,s}(\{\Pi_k\};\{L_{k,s}\};x)$ є раціональними, поліноміальними, тригонометричними функціями, або сплайнами, то таку інтерфлетацію називають відповідно раціональною, поліноміальною, тригонометричною, сплайн - інтерфлетацією.

Це означення повністю поширюється на випадок довільної системи поверхонь в R^n різної розмірності.

Зауважимо, що сліди $\phi_{k,s}(x)$ є функціями m змінних (параметрів), бо стільки змінних (параметрів) потрібно для визначення точки на m -вимірній поверхні Π_k .

Наведемо методи відновлення розривної функції розривними функціями інтерфлетаційного та для порівняння інтерполяційного типу. Різниця між ними закладається у використанні різної вхідної інформації.

2.3 Побудова розривного сплайну інтерполяційного типу

для відновлення розривної функції трьох змінних

Припустимо розривна внутрішня структура тривимірного тіла описується розривною функцією від трьох змінних $f(x,y,z)$. Без обмеження загальності будемо вважати, що шуканий тривимірний об'єкт повністю лежить в одиничному кубі $D = [0,1]^3$. Введемо прямокутну сітку $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$, $0 = z_1 < z_2 < \dots < z_k = 1$, яка розбиває область на

елементарні прямокутні елементи (паралелепіеди) (рис. 2.1 а)

$$\Pi_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}], \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}.$$

Вважаємо, що на кожній з площин, які є спільними для двох сусідніх паралелепіедів, функція $f(x, y, z)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в кожній точці (x_i, y_j, z_k) може бути задано вісім різних односторонніх значень наближуваної функції (рис. 2.1 б)

$$C_{i,j,k}^{+++} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0 \\ z \rightarrow z_k + 0}} f(x, y, z), \quad C_{i,j,k}^{-++} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0 \\ z \rightarrow z_k + 0}} f(x, y, z), \quad C_{i,j,k}^{+-+} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j - 0 \\ z \rightarrow z_k + 0}} f(x, y, z),$$

$$C_{i,j,k}^{++-} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0 \\ z \rightarrow z_k - 0}} f(x, y, z), \quad C_{i,j,k}^{+--} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j - 0 \\ z \rightarrow z_k - 0}} f(x, y, z), \quad C_{i,j,k}^{-+-} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0 \\ z \rightarrow z_k - 0}} f(x, y, z),$$

$$C_{i,j,k}^{--+} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j - 0 \\ z \rightarrow z_k + 0}} f(x, y, z), \quad C_{i,j,k}^{---} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j - 0 \\ z \rightarrow z_k - 0}} f(x, y, z).$$

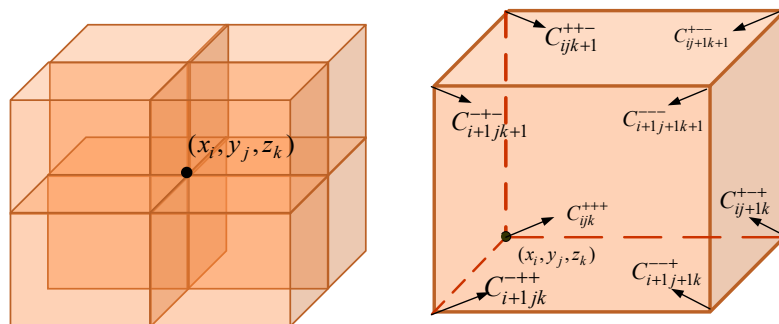


Рисунок 2.1 – Графічне зображення:

а) – розбиття тривимірної області на прямокутні елементи;

б) – односторонніх границь в (i, j, k) -ому прямокутному елементі

Означення 2.3. Розривний інтерполяційний сплайн, лінійний по кожній змінній, побудований на прямокутній сітці, це сплайн вигляду

$$S(x, y, z) = p(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{i,j,k}^{+++} \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} \frac{z-z_{k+1}}{z_k-z_{k+1}} + C_{i+1,j,k}^{-++} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} \frac{z-z_{k+1}}{z_k-z_{k+1}} + \\
&+ C_{i,j+1,k}^{+-+} \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \frac{z-z_{k+1}}{z_k-z_{k+1}} + C_{i,j,k+1}^{++-} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} \frac{z-z_k}{z_{k+1}-z_k} + \\
&+ C_{i,j,k}^{+--} \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \frac{z-z_k}{z_{k+1}-z_k} + C_{i+1,j,k+1}^{-+-} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} \frac{z-z_k}{z_{k+1}-z_k} + \\
&= C_{i+1,j+1,k}^{- - +} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \frac{z-z_{k+1}}{z_k-z_{k+1}} + C_{i+1,j+1,k+1}^{- - -} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \frac{z-z_k}{z_{k+1}-z_k}. \\
&\quad (x, y, z) \in \Pi_{i,j,k}, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, s-1}. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Легко можна довести, що функція $S(x, y, z) = p_{ijk}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Pi_{i,j,k} \subset D$ є розривною функцією, білінійною в кожному з елементів розбиття з наступними інтерполяційними властивостями:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow x_{i+1}-0} S(x, y, z) = p_{ijk}(x_{i+1}, y, z), \quad \lim_{x \rightarrow x_i+0} S(x, y, z) = p_{ijk}(x_i, y, z), \\
&\lim_{y \rightarrow y_{i+1}-0} S(x, y, z) = p_{ijk}(x, y_{j+1}, z), \quad \lim_{y \rightarrow y_j+0} S(x, y, z) = p_{ijk}(x, y_j, z), \\
&\lim_{z \rightarrow z_{k+1}-0} S(x, y, z) = p_{ijk}(x, y, z_{k+1}), \quad \lim_{z \rightarrow z_k+0} S(x, y, z) = p_{ijk}(x, y, z_k), \quad (x, y, z) \in \Pi_{i,j,k}.
\end{aligned}$$

Якщо для всіх точок області D відповідні односторонні границі в точках (x, y, z) рівні між собою та дорівнюють відповідним значенням $f(x_i, y_j, z_k)$, то розривний сплайн стає неперервним і буде класичним білінійним сплайном на вказаній сітці вузлів.

Визначимо вигляд залишку наближення функції розривним лінійним інтерполянтом.

$$RS(x, y, z) = f(x, y, z) - S(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= f(x, y, z) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 f(x, y, z) h_i(x) h_j(y) h_k(z) = \\
&= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 h_i(x) h_j(y) h_k(z) \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y \int_{z_k}^z f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!} \times \\
&\quad \times \frac{(z_k - \psi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi d\eta d\psi.
\end{aligned}$$

Оскільки маємо справу з елементом $\Pi_{i,j,k}$, то враховуючи властивості інтегралу

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i+1}}^x f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) \frac{(x_i - x)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi &= - \int_x^{x_{i+1}} f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) \frac{(x_i - x)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi, \\
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) \frac{(x_i - x)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi &= \\
= \int_{x_i}^x f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) \frac{(x_i - x)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi - \int_x^{x_{i+1}} f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) \frac{(x_i - x)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi,
\end{aligned}$$

можемо сформулювати наступну теорему про інтегральний вигляд наближення розривної функції розривним інтерліантом.

Теорема 2.1. Якщо $u = f(x, y, z)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i, y_j, z_k) та $f(x, y, z) \in C^{(r,r,r)}(\Pi_{i,j,k})$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{1, s-1}$, $r = 1, 2$, то залишок наближення функції $f(x, y, z)$ білінійним поліномом

$$S(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 f(x_i, y_j, z_k) h_i(x) h_j(y) h_k(z),$$

$$h_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad h_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

в кожному паралелепіпеді $\Pi_{i,j,k}$ матиме вигляд

$$RS(x, y, z) =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f^{(r,r,r)}(\xi, \eta, \psi) G_1(x, \xi) G_2(y, \eta) G_3(z, \psi) d\xi d\eta d\psi, (x, y, z) \in \Pi_{i,j,k}, (2.2)$$

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} h_1(x) \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq \xi \leq x \leq x_{i+1}; \\ -h_2(x) \frac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq x \leq \xi \leq x_{i+1}; \end{cases}$$

$$G_2(y, \eta) = \begin{cases} h_1(y) \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq \eta \leq y \leq y_{j+1}; \\ -h_2(y) \frac{(y_{j+1} - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq y \leq \eta \leq y_{j+1}; \end{cases}$$

$$G_3(z, \psi) = \begin{cases} h_1(z) \frac{(z_k - \psi)^{r-1}}{(r-1)!}, & z_k \leq \psi \leq z \leq z_{k+1}; \\ -h_2(z) \frac{(z_{k+1} - \psi)^{r-1}}{(r-1)!}, & z_k \leq z \leq \psi \leq z_{k+1}. \end{cases}$$

Оцінимо похибку наближення. Покладемо у формулі (2.1)

$$C_{ijk}^{+++} = f(x_i + 0, y_j + 0, z_k + 0), \quad C_{ijk}^{+-+} = f(x_i + 0, y_j - 0, z_k + 0),$$

$$C_{ijk}^{-++} = f(x_i - 0, y_j + 0, z_k + 0), \quad C_{ijk}^{++-} = f(x_i + 0, y_j + 0, z_k - 0),$$

$$C_{ijk}^{--+} = f(x_i - 0, y_j - 0, z_k + 0), \quad C_{ijk}^{+--} = f(x_i + 0, y_j - 0, z_k - 0),$$

$$C_{ijk}^{-+-} = f(x_i - 0, y_j + 0, z_k - 0), \quad C_{ijk}^{---} = f(x_i - 0, y_j - 0, z_k - 0).$$

Звертаємо увагу, що в цьому випадку оператор $p_{ijk}(x, y, z)$ можна зобразити у вигляді $p_{ijk}(x, y, z) = p_{ijk} f(x, y, z) = E1_i E2_j E3_k f(x, y, z)$, де

$$E1_i f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}, y),$$

$$E2_j f(x, y) = \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} f(x, y_{j+1}),$$

$$E3_k f(x, y, z) = \frac{z - z_{k+1}}{z_k - z_{k+1}} f(x, y, z_k) + \frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k} f(x, y, z_{k+1}).$$

Тому

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - p_{ijk} f(x, y, z) &= (I - E1_i E2_j E2_k) f(x, y, z) = \\ &= \left((I - E1_i) + (I - E2_j) + (I - E3_k) - (I - E1_i)(I - E2_j) - (I - E1_i)(I - E3_k) - \right. \\ &\quad \left. - (I - E2_j)(I - E3_k) + (I - E1_i)(I - E2_j)(I - E3_k) \right) f(x, y, z) = \\ &= (R1 + R2 + R3 - R1R2 - R1R3 - R2R3 + R1R2R3) f(x, y, z), \\ R1 f(x, y, z) &= (I - E1_i) f(x, y, z), \quad R2 f(x, y, z) = (I - E2_j) f(x, y, z), \\ R3 f(x, y, z) &= (I - E3_k) f(x, y, z). \end{aligned}$$

Оцінимо похибку наближення в нормі $C(D)$ через оцінки в $C(\Pi_{i,j,k})$

$$\begin{aligned} \|f - p_{ijk} f\|_{C(D)} &= \|R1 f + R2 f + R3 f - R1R2 f - R1R3 f - R2R3 f + R1R2R3 f\|_{C(D)} = \\ &= O(\Delta_1^r) + O(\Delta_2^r) + O(\Delta_3^r) + O(\Delta_1^r \Delta_2^r) + O(\Delta_1^r \Delta_3^r) + \\ &\quad + O(\Delta_2^r \Delta_3^r) + O(\Delta_1^r \Delta_2^r \Delta_3^r), \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq i < m-1} (x_{i+1} - x_i), \quad \Delta_2 = \max_{0 \leq j < n-1} (y_{j+1} - y_j), \quad \Delta_3 = \max_{0 \leq k < s-1} (z_{k+1} - z_k).$$

При малих Δ_1 та Δ_2 останніми чотирма доданками можна знехтувати.

Сформулюємо теорему про оцінку похибки наближення розривної тривимірної функції розривним тривимірним інтерполянтом.

Теорема 2.2. Якщо $f(x, y, z) \in C^{(r,r,r)}(\Pi_{i,j,k})$ і має розриви першого роду у деяких точках (або у всіх) (x_i, y_j, z_k) , то існують такі значення $C_{i,j,k}^{+++}, C_{i,j,k}^{-++}, C_{i,j,k}^{+--}, C_{i,j,k}^{+-+}, C_{i,j,k}^{--+}, C_{i,j,k}^{+--}, C_{i,j,k}^{-+-}, C_{i,j,k}^{+++}$, що

$$\|f(x, y, z) - S(x, y, z)\|_{C(D)} = O(\Delta_1^r + \Delta_2^r + \Delta_3^r),$$

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq i < m-1} (x_{i+1} - x_i), \Delta_2 = \max_{0 \leq j < n-1} (y_{j+1} - y_j), \Delta_3 = \max_{0 \leq k < s-1} (z_{k+1} - z_k),$$

$$\forall f(x, y, z) \in C^{(r,r,r)}(\Pi_{i,j,k}), \forall \Pi_{i,j,k} \subset D, \Delta_p \rightarrow 0, r=1,2, p=1,2,3.$$

2.4 Побудова розривного сплайну інтерфлетаційного типу

В цьому підрозділі покажемо побудову розривного сплайну інтерфлетаційного типу, який в якості експериментальних даних використовує сліди невідомої функції вздовж системи заданих площин.

Нехай досліджуване тіло повністю покриває область $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, що поділена прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$, $z_0 = 0 < z_1 < z_2 < \dots < z_p = 1$ на елементарні прямокутні елементи (паралелепієди).

Розглянемо елемент $\Pi_{ijk} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p}$. В якості вхідних даних будемо використовувати сліди функції вздовж границь цього елемента:

$$\varphi 1_i^-(y, z) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y, z), \varphi 1_{i-1}^+(y, z) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y, z),$$

$$\varphi 2_j^-(x, z) = \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y, z), \varphi 2_{j-1}^+(x, z) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y, z),$$

$$\varphi 3_k^-(x, y) = \lim_{z \rightarrow z_k - 0} f(x, y, z), \varphi 3_{k-1}^+(x, y) = \lim_{z \rightarrow z_k + 0} f(x, y, z).$$

Означення 2.4. Розривним інтерфлетаційним поліноміальним сплайном в області D відповідним заданому розбиттю на підобласті Π_{ijk} будемо називати наступну функцію:

$$L(x, y, z) = L_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) \in \Pi_{ijk},$$

$$L_{ijk}(x, y, z) = L1_{ijk}(x, y, z) + L2_{ijk}(x, y, z) + L3_{ijk}(x, y, z) - L12_{ijk}(x, y, z) -$$

$$-L13_{ijk}(x, y, z) - L23_{ijk}(x, y, z) + L123_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \subset D, \quad (2.3)$$

$$L1_{ijk}(x, y, z) = \varphi 1_{i-1}^+(y, z) \cdot h_i(x) + \varphi 1_i^-(y, z) \cdot h_{i-1}(x),$$

$L2_{ijk}(x, y, z), L3_{ijk}(x, y, z)$ – визначаються аналогічно;

$$L12_{ijk}(x, y, z) = \varphi 12_{i-1, j-1}^{++}(z) h_i(x) h_j(y) + \varphi 12_{i-1, j}^{+-}(z) h_i(x) h_{j-1}(y) +$$

$$+ \varphi 12_{i, j-1}^{-+}(z) h_{i-1}(x) h_j(y) + \varphi 12_{i, j}^{--}(z) h_{i-1}(x) h_{j-1}(y),$$

$L13_{ijk}(x, y, z), L23_{ijk}(x, y, z)$ – визначаються аналогічно;

$$L123_{ijk}(x, y, z) = C_{i-1, j-1, k-1}^{+++} h_i(x) h_j(y) h_k(z) +$$

$$+ C_{i-1, j-1, k}^{++-} h_i(x) h_j(y) h_{k-1}(z) + C_{i-1, j, k-1}^{+-+} h_i(x) h_{j-1}(y) h_k(z) +$$

$$+ C_{i, j-1, k-1}^{-++} h_{i-1}(x) h_j(y) h_k(z) + C_{i-1, j, k}^{+--} h_i(x) h_{j-1}(y) h_{k-1}(z) +$$

$$+ C_{i, j-1, k}^{-+-} h_{i-1}(x) h_j(y) h_{k-1}(z) + C_{i, j, k-1}^{--+} h_{i-1}(x) h_{j-1}(y) h_k(z) +$$

$$+ C_{i, j, k}^{---} h_{i-1}(x) h_{j-1}(y) h_{k-1}(z),$$

де

$$h_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}, \quad h_{i-1}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

$$\varphi_{i-1j-1}^{++}(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i-1}+0 \\ y \rightarrow y_{j-1}+0}} f(x, y, z), \quad C_{i-1,j-1,k-1}^{+++} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i-1}+0 \\ y \rightarrow y_{j-1}+0 \\ z \rightarrow z_{k-1}+0}} f(x, y, z),$$

функції $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ та C знаходяться аналогічно.

Теорема 2.3. Якщо

$$\varphi_{i-1}^+(y_{j-1}, z_{k-1}) = \varphi_{j-1}^+(x_{i-1}, z_{k-1}) = \varphi_{k-1}^+(x_{i-1}, y_{j-1}) = C_{i-1j-1k-1}^{+++},$$

$$\varphi_i^-(y_{j-1}, z_{k-1}) = \varphi_{j-1}^+(x_i, z_{k-1}) = \varphi_{k-1}^+(x_i, y_{j-1}) = C_{ij-1k-1}^{++-},$$

$$\varphi_{i-1}^+(y_j, z_{k-1}) = \varphi_j^-(x_{i-1}, z_{k-1}) = \varphi_{k-1}^+(x_{i-1}, y_j) = C_{i-1jk-1}^{++-},$$

$$\varphi_{i-1}^+(y_{j-1}, z_k) = \varphi_{j-1}^+(x_{i-1}, z_k) = \varphi_k^-(x_{i-1}, y_{j-1}) = C_{i-1j-1k}^{++-},$$

$$\varphi_i^-(y_j, z_{k-1}) = \varphi_j^-(x_i, z_{k-1}) = \varphi_{k-1}^+(x_i, y_j) = C_{ijk-1}^{--+},$$

$$\varphi_i^-(y_{j-1}, z_k) = \varphi_{j-1}^+(x_i, z_k) = \varphi_k^-(x_i, y_{j-1}) = C_{ij-1k}^{--+},$$

$$\varphi_{i-1}^+(y_j, z_k) = \varphi_j^-(x_{i-1}, z_k) = \varphi_k^-(x_{i-1}, y_j) = C_{i-1jk}^{+--},$$

$$\varphi_i^-(y_j, z_k) = \varphi_j^-(x_i, z_k) = \varphi_k^-(x_i, y_j) = C_{ijk}^{---},$$

то на границі елемента Π_{ijk} функція $L_{ijk}(x, y, z)$ задовольняє інтерфлетаційним властивостям, тобто

$$L_{ijk}(x, y, z) \Big|_{x=x_{i-1}} = \varphi_{i-1}^+(y, z), \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k,$$

$$L_{ijk}(x, y, z) \Big|_{y=y_{j-1}} = \varphi_{j-1}^+(x, z), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k,$$

$$L_{ijk}(x, y, z) \Big|_{z=z_{k-1}} = \varphi_{k-1}^+(x, y), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{l-1} \leq y \leq y_l.$$

Зауваження. Припускається, що розриви функції $L(x, y, z)$ можуть існувати лише на границях одного або декількох елементів.

Теорема 2.4. Якщо виконуються умови теореми 2.3, то для похибки на-

ближення такої розривної функції $f(x, y, z)$ відповідним розривним інтерфле-
таційним сплайном $L(x, y, z)$ буде виконуватись співвідношення

$$|f(x, y, z) - L(x, y, z)| = O(\Delta 1^2 \Delta 2^2 \Delta 3^2), (x, y, z) \in \Pi_{pls} \neq \Pi_{i,j,k},$$

$$\Delta 1 = \max_p (x_p - x_{p-1}), \Delta 2 = \max_l (y_l - y_{l-1}), \Delta 3 = \max_s (z_s - z_{s-1}),$$

за умови, що $f(x, y, z) \in C^{(2,2,2)}(\Pi_{ijk})$.

Приклад. Нехай $m = 2$, $n = 2$, $p = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $y_0 = 0$,
 $y_1 = 0,5$, $y_2 = 1$, $z_0 = 0$, $z_1 = 0,5$, $z_2 = 1$. Лінії утворюють вісім елементарних
прямокутних елементів Π_{ijk} , $i, j, k = \overline{1,2}$.

Будемо задавати односторонні значення функції $f(x, y, z)$ в кутових точ-
ках кожного елемента Π_{ijk} наступною матрицею

$$C_{ijk} = \begin{pmatrix} f^{+++}(x_i, y_j, z_k) & f^{++-}(x_i, y_j, z_{k+1}) & f^{+-+}(x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) & f^{+++}(x_i, y_{j+1}, z_k) \\ f^{-++}(x_{i+1}, y_{j+1}, z_k) & f^{-++}(x_{i+1}, y_j, z_k) & f^{-+-}(x_{i+1}, y_j, z_{k+1}) & f^{---}(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$C_{000} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C_{100} = \begin{pmatrix} 3 & 5,5 & 4,5 & 2 \\ -1 & -2 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}, C_{010} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{001} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C_{110} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 2 & 1,5 \\ 4 & 1,5 & 2 & 4,5 \end{pmatrix}, C_{101} = \begin{pmatrix} -1,5 & 0 & 1 & -0,5 \\ 1,5 & 0 & 3 & 4,5 \end{pmatrix},$$

$$C_{011} = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}, C_{111} = \begin{pmatrix} 5,5 & 6 & 8 & 6,5 \\ 6 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розривний сплайн будемо будувати у вигляді функції

$$L(x, y, z) = \begin{cases} 2x + 2y - 8xy + 1, & (x, y, z) \in \Pi_{111} \\ -10x - 6y + 8 + 8xy + 5z, & (x, y, z) \in \Pi_{211} \\ -4xy + 2x + 2y + 2z - 1, & (x, y, z) \in \Pi_{121} \\ -8xy + 6z + 6y - 3, & (x, y, z) \in \Pi_{112} \\ 4xyz + z + y - x, & (x, y, z) \in \Pi_{221} \\ 2xy + 6zx + y - 3, & (x, y, z) \in \Pi_{212} \\ 2zy + y - 2x, & (x, y, z) \in \Pi_{122} \\ 4zy - 2xz + 5, & (x, y, z) \in \Pi_{222} \end{cases}$$

Задамо наближувану функцію у вигляді: $\forall (x, y, z) \in \Pi_{ijk}, i, j, k = \overline{1, 2}$

$$f(x, y, z) = L_{ijk}(x, y, z) + \frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)(y - y_{j-1})(y_j - y)(z - z_{k-1})(z_k - 1)}{6}.$$

Таким чином, в кожному з восьми паралелепіпедів наближувана функція має частинну похідну $|f^{2,2,2}(x, y, z)| \equiv 1, \forall (x, y, z) \in \Pi_{ijk}$. Тому, згідно з теорією, похибка наближення такої розривної функції, написаним вище розривним сплайном, буде задовольняти нерівності

$$\begin{aligned} \max_{(x, y, z) \in \Pi_{ijk}} |f(x, y, z) - L_{ijk}(x, y, z)| &\leq |f^{(2,2,2)}(\xi, \eta, \zeta)| \cdot \frac{\Delta i^2 \Delta j^2 \Delta k^2}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \\ &= 1 \cdot \frac{(0,5)^2 (0,5)^2 (0,5)^2}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1}{512} \approx 0,002. \end{aligned}$$

Висновки за розділом 2

При наближенні розривної функції неперервними конструкціями виникає явище Гібса, яке можна зменшити різними фільтрами, але повністю прибрати

неможна.

Оператори апроксимації Попова Б.А., атомарні функції Рвачова В.Л., ба-рицентричні інтерполяційні сплайни висвітлюють лише теоретичну сторону апроксимації, тобто враховують розриви функції, обумовлюючи її щоразу різ-ними вимогами до неї. Але сама ідея апроксимації має суто прикладний харак-тер.

Методи виявлення розривів за допомогою вейвлетів є надто трудомістки-ми.

Розроблені методи інтерполяції для функцій трьох змінних дозволяють відновити особливості функцій, але для дистанційних методів дослідження во-ни не діють, оскільки інформація в дистанційних методах дослідження задаєть-ся не в точках а на площинах.

Таким чином, актуальною є задача тестування та створення алгоритму реконструкції розривних функцій трьох змінних за допомогою розривних інте-рфлетаційних сплайнів, які є природнім математичним апаратом для вирішення такої задачі.

В розділі 2 розглядаються інтерполяційні методи наближення розривної функції трьох змінних та за допомогою них метод ідентифікації площин розри-ву. Також запропонована побудова розривного сплайн-інтерфлетанта для на-ближення розривної функції трьох змінних. Функція, що описує тривимірне ті-ло, може мати розриви першого роду на лініях чи площинах заданої системи елементарних прямокутних елементів (паралелепіпедів), що повністю покри-вають досліджуване тіло. В кожному з випадків наведені теореми про інтере-поляційні та інтерфлетаційні властивості відповідно та похибки наближення. Причому побудовані розривні інтерфлетаційні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної математики MathCad

Система комп'ютерної математики MathCad – це рішення для інженерних обчислень, яке одночасно дозволяє вести самі обчислення та записувати їх, знижуючи ризик появи дорогих помилок. MathCad дозволяє дослідникам проектувати, виконувати обчислення та записувати роботу у форматі, який легко читається. MathCad відрізняється надійністю, простотою використання і володіє всіма функціональними можливостями, необхідними для вирішення комплексних завдань, що вимагають застосування математичного апарату.

MathCad містить сотні операторів і вбудованих функцій для вирішення різних технічних завдань. Програма дозволяє виконувати чисельні і символні обчислення, проводити операції з скалярними величинами, векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші.

Серед можливостей MathCad є:

- розв'язання диференціальних рівнянь, в тому числі і чисельними методами;
- побудова двомірних і тривимірних графіків (в різних системах координат, контурні, векторні тощо);
- використання грецького алфавіту (верхній і нижній регістр) як в тексті, так і у рівняннях;
- символні обчислення;
- операції з векторами і матрицями;
- символне розв'язання систем рівнянь;
- згладжування кривих;
- виконання підпрограм;
- знаходження коренів функцій і поліномів;
- статистичні функції і розподіли ймовірностей;
- пошук власних значень і власних векторів;

– обчислення з розмірностями.

За допомогою MathCad інженери можуть документувати всі обчислення в процесі їх проведення.

Однією з переваг системи MathCad є також те, що вона може взаємодіяти з іншими системами: Excel, Matlab, AutoCad, Visual Basic тощо.

MathCad є простішою системою для освоєння, ніж традиційні мови програмування (наприклад, MATLAB або Python). Підходить для студентів, викладачів та професіоналів.

Програма часто використовується в компаніях, де потрібна відповідність стандартам якості розрахунків та документації. MathCad часто застосовується в інженерних та наукових розрахунках, таких як проектування, оптимізація, аналіз даних та створення технічних звітів.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі реконструкції функції від трьох змінних з розривами першого роду

Для тестування алгоритму використовуються тестові функції від трьох змінних з відомими розривами першого роду вздовж площин, які утворюють тривимірну прямокутну сітку (тобто границь елементів-паралелепіпедів). Причому розриви можуть бути не обов'язково між усіма елементарними паралелепіпедами.

Викладемо алгоритм:

- визначення тривимірної прямокутної сітки та введення експериментальних даних (слідів тестових функцій вздовж заданої системи площин, яка утворює прямокутну сітку);

- будуємо розривний інтефлетаційний сплайн, який в кожному елементарному паралелепіпеді буде мати, взагалі кажучи, різний аналітичний вигляд;

- порівнюємо отримані результати з точним розв'язком та з наближенням розривної функції класичним розривним інтерполяційним сплайном, побудова-

ним на основі значень функції у вузлах заданої сітки.

3.3 Опис програми

Для тестування використовуємо розривні функції від трьох змінних $f(x, y, z)$, яка (не обмежуючи загальності) повністю лежить в одиничному кубі $D = [0, 1]^3$. В якості експериментальних даних виступають односторонні значення вказаних функцій вздовж площин, що утворюють границі елементарних паралелепіпедів та які обирає наперед дослідник. Розбиття області можна брати як рівномірне, так і нерівномірне.

Далі визначаємо нумерацію прямокутних елементів – встановлюємо залежність номера паралелепіпеда від індексів однієї з його вершин. В кожному прямокутному елементі за формулою (2.3) будуємо інтерфлетаційні сплайни, які, взагалі кажучи, аналітично будуть відрізнятися один від одного. Збираємо всі побудовані сплайни в один розривний інтефлетаційний сплайн. Після цього порівнюємо отримане наближення з точною функцією та надаємо графічні інтерпретації результатів.

Для порівняння отриманого наближення в кожному прямокутному елементі, визначному для інтерфлетації, будуємо інтерполяційний сплайн. Але для нього потребуються інші дані – значення функції у вузлах заданої сітки, тому формуємо матрицю експериментальних даних. Збираємо отримані інтерполяційні сплайни в єдиний розривний інтерполяційний сплайн. Порівнюємо отримане наближення з точною функцією та з інтерфлетаційним сплайном. Надаємо графічні інтерпретації результатів.

Точність оцінюємо за допомогою обчислення максимальної похибки за модулем.

Висновки за розділом 3

У даному розділі наведено основні характеристики системи комп'ютерної математики MathCad, її переваги для використання. Також представлений алгоритм реконструкції розривної функції трьох змінних з розривами першого роду на площинах (не обов'язково на всіх), які утворені обраною дослідником тривимірною сіткою (рівномірною чи нерівномірною). В якості експериментальних даних беруться односторонні сліди шуканої функції вздовж заданої системи площин (зліва або справа). Завдяки таким даним, маємо використовувати природній математичний апарат – інтерфлотацію функцій трьох змінних, який застосовується для дослідження об'єктів за допомогою дистанційних методів. Використання цього нового інформаційного оператора дозволяє відновити розривну функцію від трьох змінних і отримати графічне зображення отриманих результатів наближення.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції розривним інтерполяційним сплайном

Оберемо рівномірну прямокутну сітку $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0,5$, $y_2 = 1$, $z_0 = 0$, $z_1 = 0,5$, $z_2 = 1$. Вона розбиває область на прямокутні елементи $\Pi_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$, $i, j, k = \overline{1,3}$. Нехай в області $D = [0,1]^3$ задана функція $f(x, y, z)$ з розривами першого роду у вузлах заданої прямокутної сітки (рис. 2.1 а).

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2, & (x, y) \in \Pi_{111}; \\ x^2 - y + z^2, & (x, y) \in \Pi_{211}; \\ 1, & (x, y) \in \Pi_{121}; \\ -x - y + z, & (x, y) \in \Pi_{112}; \\ x + y + z, & (x, y) \in \Pi_{221}; \\ y^2 - x + z^2, & (x, y) \in \Pi_{212}; \\ x - y + z, & (x, y) \in \Pi_{122}; \\ 2, & (x, y) \in \Pi_{222}. \end{cases}$$

Задана функція є розривною з розривами першого роду на площинах-границях заданих елементарних паралелепіпедів, а значить і у вузлових точках сітки.

Задамо експериментальні дані у вигляді матриці W – матриці односторонніх значень функції $f(x, y, z)$.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,75 \\ 0,25 & 1 & -0,25 & 0,5 & 0,5 & 1,25 & 0 & 0,75 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & -0,5 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0,5 & 1 & 1 & 1,5 & 1 & 1,5 & 1,5 & 2 \\ -0,25 & 0,5 & 0 & 0,75 & -0,75 & 0 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0,25 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Тут стовпці відповідають за номер прямокутного елемента, який нумеруємо у відповідності до рис. 4.1, а рядки – за номери вершин в кожному прямокутному елементі.

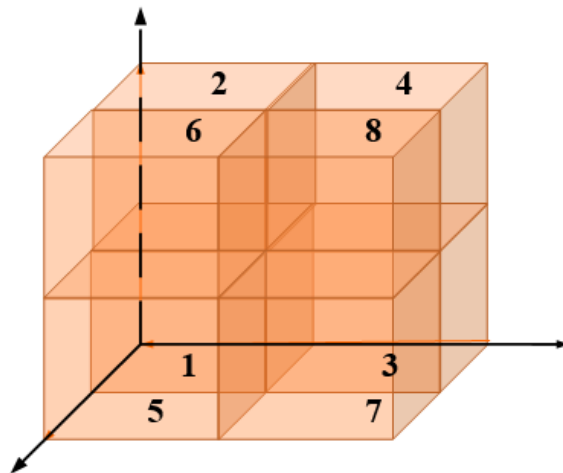


Рисунок 4.1 – Нумерація прямокутних елементів

Нумерація вузлів всередині кожного паралелепіпеда відбувається таким самим чином.

З формулою (2.1) на вказаній сітці будемо розривний інтерполяційний сплайн $Interp(x, y, z)$, лінійний за кожною змінною. Зобразимо графічно тестову функцію $f(x, y, z)$, сплайн, яким наблизили її $Interp(x, y, z)$ та їхні лінії рівня

рис. 4.2 – 4.4. Оскільки функція від трьох змінних, то зобразимо перетин функції площиною $z = 0.4$

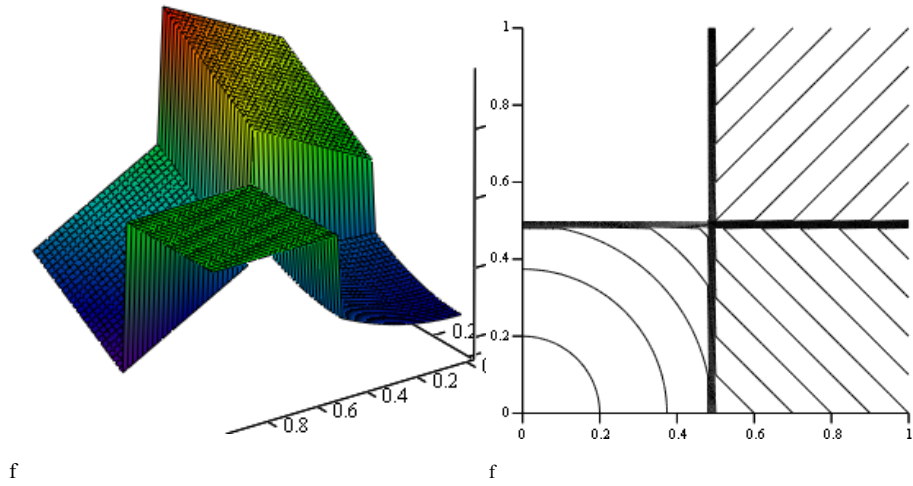


Рисунок 4.2 – Графічна інтерпретація графіка тестової функції $f(x, y; 0,4)$ та її ліній рівня

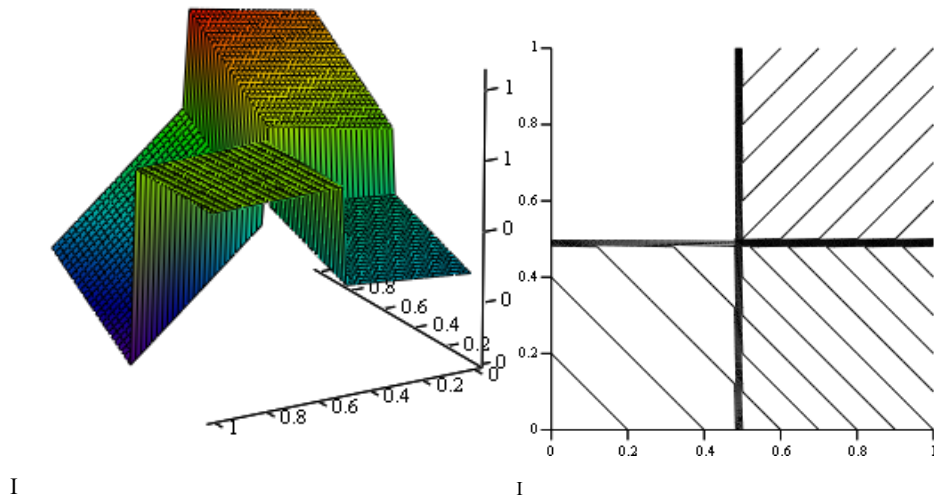


Рисунок 4.3 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерполянта $Interp(x, y, 0.4)$ та його ліній рівня

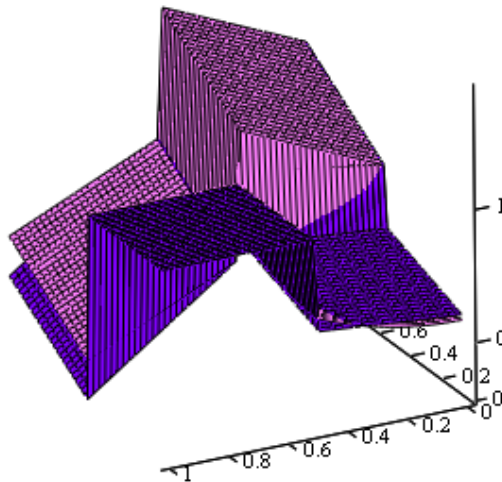


Рисунок 4.4 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерполянта $Interp(x; y; 0,4)$ та тестової функції $f(x; y; 0,4)$ одночасно

Зобразимо перетин функцій площиною $x + y + z = 2$

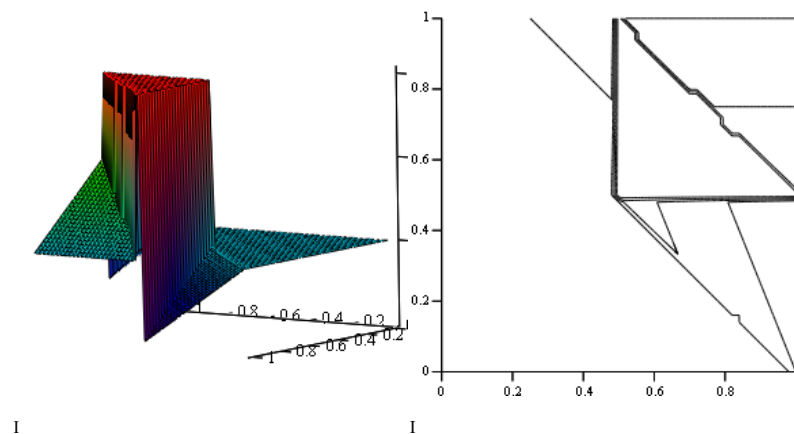


Рисунок 4.5 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерполянта $Interp(x, y, 2 - x - y)$ та його ліній рівня

Продемонструємо роботу алгоритму для тестової функції $g(x, y, z)$, яка має розриви не на кожній границі елементарних паралелепіпедів (рис. 4.5).

$$g(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2, & (x,y) \in \Pi_{111}; \\ x^2 + y^2 + z^2, & (x,y) \in \Pi_{211}; \\ x^2 + y^2 + z^2, & (x,y) \in \Pi_{121}; \\ x^2 + y^2 + z^2, & (x,y) \in \Pi_{112}; \\ x + y + z, & (x,y) \in \Pi_{221}; \\ y^2 - x + z^2, & (x,y) \in \Pi_{212}; \\ x - y + z, & (x,y) \in \Pi_{122}; \\ 2, & (x,y) \in \Pi_{222}. \end{cases}$$

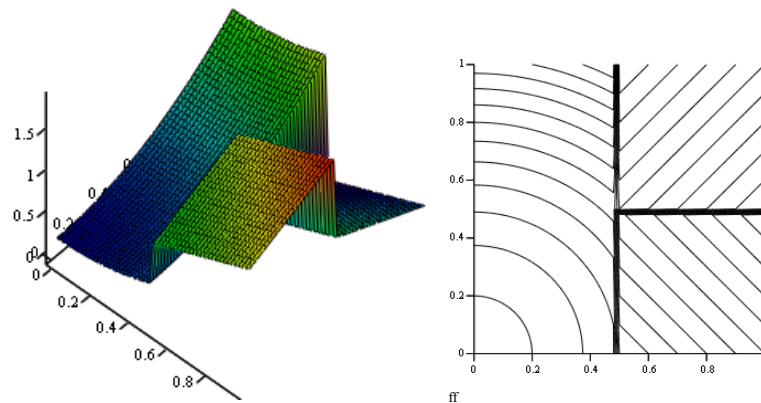


Рисунок 4.6 – Графічна інтерпретація графіка тестової функції $g(x; y; 0, 4)$ та її ліній рівня

Задамо експериментальні дані у вигляді матриці W – матриці односторонніх значень функції $g(x, y, z)$.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,75 \\ 0,25 & 1 & 0,5 & 1,25 & 0,5 & 1,25 & 0,75 & 1,5 \\ 0,25 & 0,5 & 1 & 1,25 & 0,5 & 0,75 & 1,25 & 1,5 \\ 0,5 & 1,25 & 1,25 & 2 & 0,75 & 1,5 & 1,5 & 2,25 \\ 0,5 & 1 & 1 & 1,5 & 1 & 1,5 & 1,5 & 2 \\ -0,25 & 0,5 & 0 & 0,75 & -0,75 & 0 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0,25 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

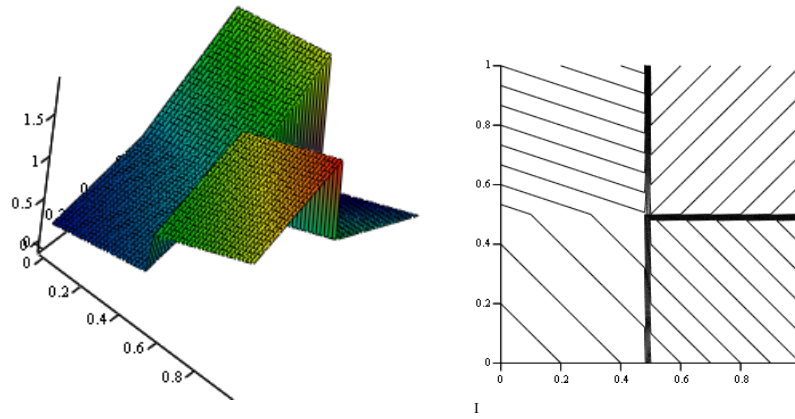


Рисунок 4.7 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерполянта $Interp(x, y; 0, 4)$ та його ліній рівня

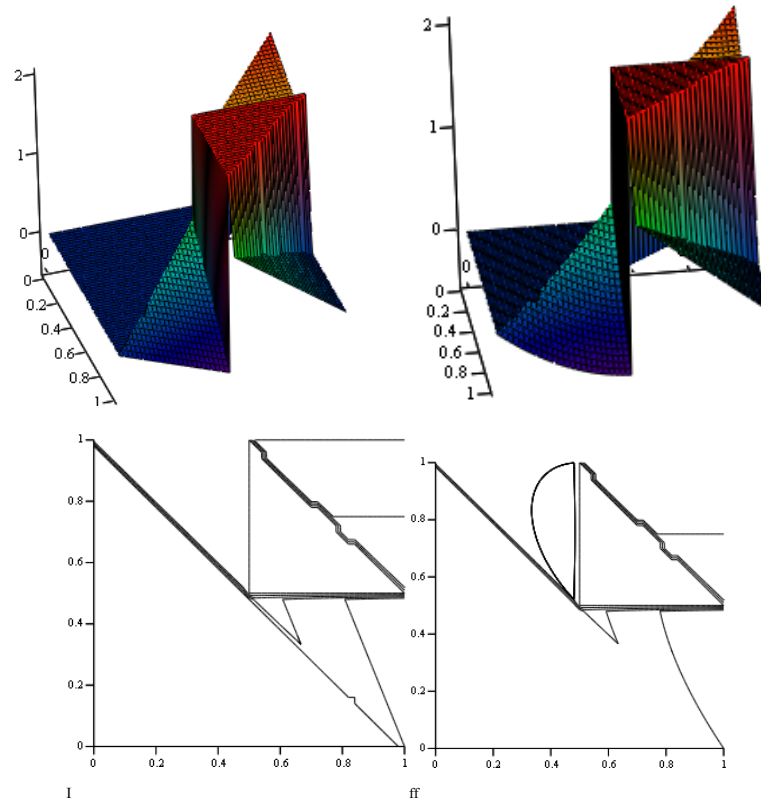


Рисунок 4.8 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерполянта $Interp(x, y, 2 - x - y)$, тестової функції $g(x, y, 2 - x - y)$ та їх ліній рівня

Наведемо оцінку похибки відновлення – максимальне відхилення наближеної функції $g(x, y, z)$ від побудованого розривного інтерполяційного

сплайну $Interp(x, y, z)$: $\max |f(x, y, z) - Interp(x, y, z)| \approx 0,1875$

4.2 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції розривним інтерфлетаційним сплайном

Для вказаних в розділі 4.1 тестових функцій та сітки розбиття області D побудуємо розривний інтефлетаційний сплайн $L(x, y, z)$ за формулою (2.3). В якості вхідних даних беремо значення функції-тесту на відповідних лініях. Представимо графічні результати.

Спочатку продемонструємо результати відновлення розривної тестової функції $f(x, y, z)$ розривним оператором інтерфлетації $L(x, y, z)$ та зобразимо їх перетини площинами $z = 4$, $x + y + z = 2$.

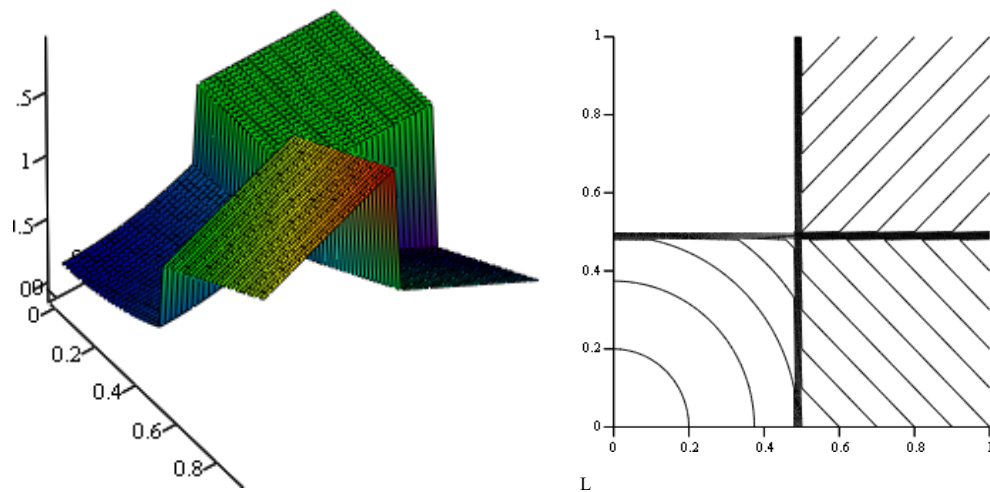


Рисунок 4.9 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерфлетант $L(x; y; 0, 4)$ для тестової функції $g(x, y, z)$ та його ліній рівня

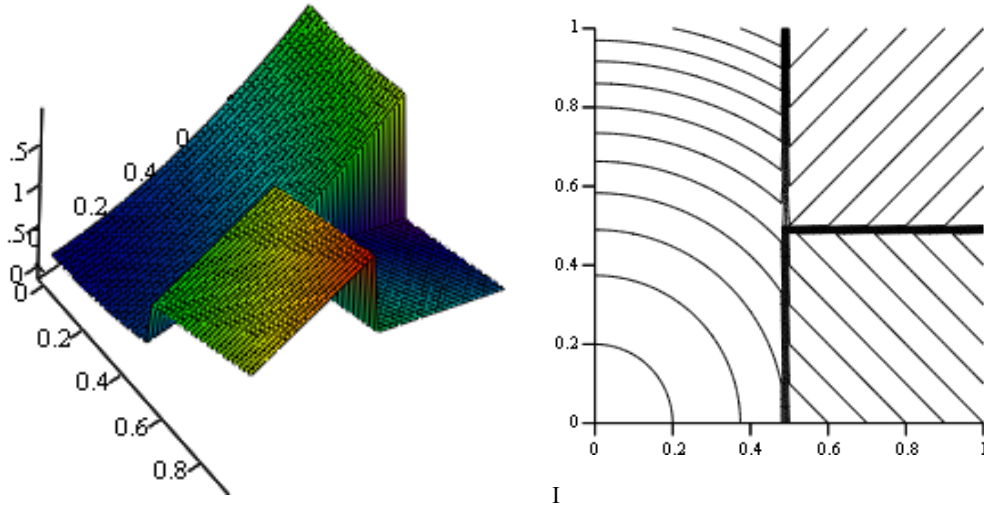


Рисунок 4.10 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерфлетанта $L(x, y; 0, 4)$ для тестової функції $g(x, y, z)$ та його ліній рівня

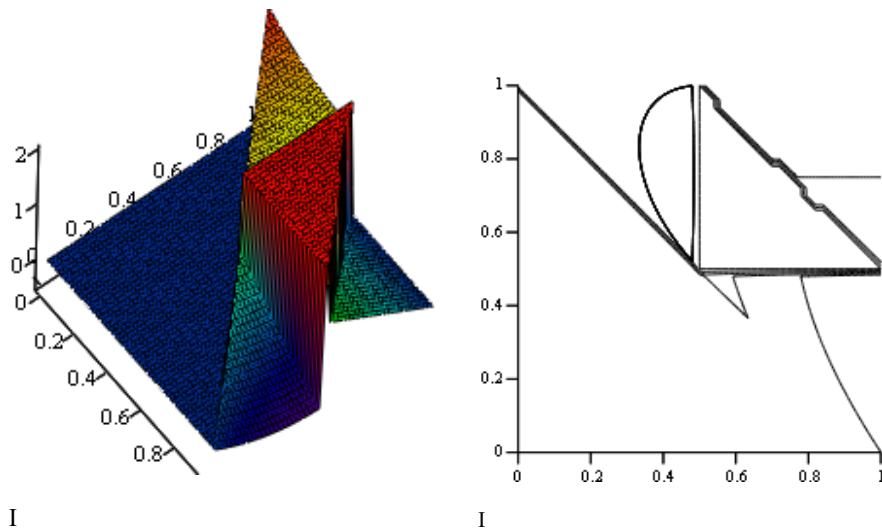


Рисунок 4.11 – Графічна інтерпретація графіка розривного інтерфлетанта $L(x, y, 2 - x - y)$ для тестової функції $g(x, y, z)$ та його ліній рівня

Наведемо оцінку похибки відновлення – максимальне відхилення наближеної функції $g(x, y, z)$ від побудованого розривного інтерполяційного сплайну $Interp(x, y, z)$: $\max |f(x, y, z) - Interp(x, y, z)| = 0$

Висновки за розділом 4

У даному розділі проводиться тестування алгоритму реконструкції розривної функції трьох змінних за допомогою оператора розривної інтерфлетації на прикладі двох тестових функцій, одна з яких має розриви на всіх границях заданої прямокутної сітки, а друга – не на всіх границях. Розривна Інтерфлетация будується на основі заданих слідів функції вздовж ліній заданого розбиття. Результати порівнювалися з точними функціями та оператором розривної інтерполяції, який використовує значення шуканої функції у вузлах заданого розбиття.

Запропонований алгоритм реконструкції розривної функції від трьох змінних пропонується використовувати для моделювання тіл, що мають розривну внутрішню структуру, та для дослідження яких використовуються дистанційні методи. В результаті чисельного експерименту можна зробити висновок, що метод інтерфлетації розривної функції показує більш точний результат, ніж метод інтерполяції розривної функції. Алгоритм дозволяє уникати явище Гібса.

ВИСНОВКИ

В процесі виконання кваліфікаційної роботи було проведено попередній аналіз літературних джерел, що стосуються наближенню розривних функцій, а також огляд сучасного стану та актуальності поставленої задачі.

В результаті даної роботи запропоновано алгоритм для реконструкції розривної внутрішньої структури тривимірного тіла на основі інтерфлетації функцій. Цей метод дає змогу наблизити функцію з розривами першого роду точніше, ніж це робить розривна інтерполяція функцій трьох змінних та уникати явище Гібса.

Цей алгоритм було перевірено на двох тестових функціях, одна з яких має розриви на всіх границях елементарних паралелепіпедів, на які розбивається область, що покриває тіло, заданими площинами розбиття; інша тестова функція має розриви не на всіх площинах-границях елементарних паралелепіпедів.

Розроблений алгоритм відновлення розривної функції трьох змінних, коли про функцію відомі її сліди вздовж заданих площин може бути використаний для моделювання тривимірних об'єктів, які досліджуються дистанційними методами, а також для побудови алгоритму виявлення площин розриву для розривної функції трьох змінних.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Iuliia Pershyna, Serhiy Zadrykin. Approximation of Spatial Discontinued Functions by Discontinued Spline-Interflatants. *13-а Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ICT-2024»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків 26-28 листопада 2024 р.). Харків : ХНУРЕ, 2024. С. 80–81.
2. Першина Ю. І., Задрикін С. О. Наближення просторових розривних функцій за допомогою розривних сплайн – інтерфлетантів. *VIII міжнародна науково-практична конференція здобувачів вищої освіти та молодих учених «Студенти та молодь – для майбутнього країни»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків 14-15 листопада 2024 р.). Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2024. С. 56–57.
3. Larry Schumaker L. Spline Functions: Computational Methods. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 2015. 411 p.
4. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій. Монографія. Київ : Наукова думка, 2008. 160с.
5. Попов Б. А. Рівномірні наближення сплайнами. Київ : Наукова думка, 1989. 372 с.
6. Brysina I. V., Makarichev V. O. Atomic functions and their generalizations in data processing: function theory approach. *Radio electronic and computer systems*, 2018, №3(87), P. 4-10.
7. Bos L., De Marchi S., Hormann K., Klein G. On the Lebesgue constant of barycentric rational interpolation at equidistant nodes. *Numerische Mathematik*, 2012, № 121, Iss. 3. P. 461–471.
8. Olevska Yu. B., Olevskiy V. I., Shapka I. V., and Naumenko T. S. Application of two-dimensional Padé-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon, *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and*

Natural Sciences: proceedings. New York, American Institute of Physics, Melville, NY, 2018, pp. 060014-1–060014-8.

9. Suresh V., Koteswarao S. Rao, Thiagarajan G., and Das R.P. Denoising and detecting discontinuities using wavelets. *Indian Journal of Science and Technology*, 2016. № 9(19), P. 1-4.

10. Louis A. K. Feature Reconstruction in Inverse Problems. *Inverse Problems*, 2011. Vol. 27. № 6.

11. Lytvyn O.M., Pershina I.I., Lytvyn O.O., Kulyk S.I.: Mathematical modeling of discontinuous processes in a computer tomography by means of discontinuous splines. 7th World Congress on Industrial Process Tomography: proceedings (2–5 September 2013). 2014. Krakow. Poland. pp. 441-450.

12. Литвин О.М., Першина Ю.І., Пасічник В.О. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ». 2015. № 6(1115). С.67-76.

13. Lytvyn O.N., Pershina Y.I., Sergienko I.V. Estimation of discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements). *Cybernetics and Systems Analysis*, 2014. Vol 50. №4, pp. 594–602.

14. Approximation of Discontinuous Functions of Two Variables by Discontinuous Interpolation Splines Using Triangular Elements / Mezhujev V., Lytvyn, O.M., Pershyna I., Nechuiviter O. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2020, Vol. 14. № 1. pp. 75–89.

15. Pershyna I. Mathematical Modeling of 2D Discontinuous Objects by New Information Operators. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023. № 762, pp. 393–404.

16. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 504 с.

17. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія. Київ : Наукова думка, 2017. 314 с.