



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_

(підпис)

“ 10 ” листопада 2025 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Мордовцю Олексію Володимировичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування операторів інтерлінації для побудови наближених розв'язків крайових задач для еліптичних рівнянь

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи готовий програмний комплекс на Python (solver, модуль інтерлінації, GUI), який виконує чисельний розрахунок еліптичних задач, відновлює значення між смугами та зберігає результати у файли і у вигляді графіків/таблиць.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 10 листопада 2025 р.

Здобувач \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ асист. Олексій СЛАВІК  
(підпис) (посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 92 с., 3 табл., 20 рис., 1 дод., 30 джерел.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** АПРОКСИМАЦІЯ, ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА, ГРАНИЧНІ УМОВИ, ДИФУЗІЯ-РЕАКЦІЯ, ЕЛІПТИЧНЕ РІВНЯННЯ, ІНТЕРЛІНАЦІЯ, ЛОГІСТИЧНА НЕЛІНІЙНІСТЬ, МЕТОД ПРЯМИХ, ПУАССОНА РІВНЯННЯ, ЧИСЕЛЬНА СХЕМА, ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ, РУТНОН.

Об'єкт дослідження – нелінійні еліптичні рівняння другого порядку на обмежених областях із граничними умовами Діріхле/Неймана.

Мета роботи – розроблення та дослідження чисельної схеми розв'язання нелінійних еліптичних задач із застосуванням операторів інтерлінації між паралельними смугами, а також створення програмного комплексу для обчислювальних експериментів і візуалізації результатів.

Методи дослідження – слабка (варіаційна) постановка еліптичних задач; скінченно-різницеві наближення; метод прямих із введенням «хибного часу» для отримання стаціонарного розв'язку; оператори інтерлінації для відновлення поля між паралельними смугами; чисельні експерименти, комп'ютерне моделювання та візуалізація.

У роботі розглянуто постановку нелінійної еліптичної задачі у сильній та слабкій формах і обґрунтовано підхід до її чисельного розв'язання на основі методу прямих (false transient), що зводить стаціонарну задачу до ітераційного процесу інтегрування за штучним часом до збіжного режиму. Запропоновано використання операторів інтерлінації між паралельними смугами як інструмента відновлення розв'язку в проміжних точках, формування згущених представлень поля та покращення постпроцесінгу (ізолінії, профілі, наближені градієнти/потоки). Узагальнено принципи побудови інтерлінаційних операторів у двовимірному випадку та сформульовано висновок про те, що за узгодженого вибору параметрів сітки й відстаней між смугами інтерлінація не погіршує поря-

док збіжності базової дискретизації.

Розроблено програмний комплекс мовою Python з модульною структурою (чисельне ядро solver, модуль interlineation, графічний інтерфейс GUI на PyQt5), який забезпечує розв'язання тестових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона, а також семілінійної еліптичної задачі з логістичною реакцією. Проведено обчислювальні експерименти на послідовності сіток і для різних параметрів нелінійності; оцінено збіжність, рівні похибок, кількість ітерацій та вплив налаштувань інтерлінації на форму й гладкість відновленого поля. Отримані результати підтверджують працездатність реалізованих схем і доцільність застосування інтерлінації як етапу постобробки та візуалізації.

Наукова новизна полягає в систематизації застосування операторів інтерлінації до чисельних розв'язків нелінійних еліптичних задач у зв'язці з методом прямих, а також у формулюванні практично орієнтованих умов узгодження параметрів, за яких інтерлінаційне відновлення не знижує теоретичний порядок точності базової схеми.

Практичне значення – створений програмний комплекс може використовуватися для проведення обчислювальних експериментів, навчальної демонстрації чисельних методів для еліптичних задач, а також як прототип для задач, де потрібне відновлення поля за даними на паралельних перерізах (постпроцесінг, візуалізація, інженерні та наукові розрахунки).

Рекомендації щодо використання – застосовувати інтерлінацію для згущення представлення розв'язку та покращення наочності результатів, а також як допоміжний інструмент аналізу (побудова зрізів, ізоліній, порівняння профілів) у серіях чисельних експериментів.

## ABSTRACT

Introductory note: 92 pages, 3 tables, 20 figures, 1 appendix, 30 sources.

**KEYWORDS:** APPROXIMATION, VARIATIONAL STATEMENT, BOUNDARY CONDITIONS, DIFFUSION-REACTION, ELLIPTIC EQUATION, INTERLINATION, LOGISTIC NONLINEARITY, METHOD OF LINES, POISSON EQUATION, NUMERICAL SCHEME, NUMERICAL EXPERIMENT, PYTHON.

The object of research is stationary nonlinear elliptic equations of the second order on bounded domains with Dirichlet/Neumann boundary conditions.

The purpose of the work is to develop and study a numerical scheme for solving nonlinear elliptic problems using interlineation operators between parallel strips, as well as to create a software package for computational experiments and visualization of results.

Research methods - weak (variational) formulation of elliptic problems; finite-difference approximations; method of straight lines with the introduction of "false time" to obtain a stationary solution; interlineation operators for restoring the field between parallel strips; numerical experiments, computer modeling and visualization.

The paper considers the formulation of a nonlinear elliptic problem in strong and weak forms and justifies an approach to its numerical solution based on the method of straight lines (false transient), which reduces the stationary problem to an iterative process of integration over artificial time to a convergent regime. The use of interlineation operators between parallel strips is proposed as a tool for restoring the solution at intermediate points, forming condensed field representations and improving post-processing (isolines, profiles, approximate gradients/flows). The principles of constructing interlineation operators in the two-dimensional case are generalized and the conclusion is formulated that with a consistent choice of grid parameters and distances between strips, interlineation does not worsen the convergence order of the

basic discretization.

A software package in Python with a modular structure (numerical solver kernel, interlineation module, graphical interface GUI on PyQt5) has been developed, which provides the solution of test problems for the Laplace and Poisson equations, as well as a semilinear elliptic problem with logistic response. Computational experiments have been carried out on a sequence of grids and for various nonlinearity parameters; The convergence, error levels, number of iterations and the influence of interlineation settings on the shape and smoothness of the reconstructed field were evaluated. The obtained results confirm the operability of the implemented schemes and the expediency of using interlineation as a post-processing and visualization stage.

The scientific novelty lies in the systematization of the application of interlineation operators to numerical solutions of nonlinear elliptic problems in conjunction with the method of lines, as well as in the formulation of practically oriented conditions for parameter matching, under which interlineation reconstruction does not reduce the theoretical order of accuracy of the basic scheme.

Practical significance – the created software complex can be used for conducting computational experiments, educational demonstration of numerical methods for elliptic problems, as well as as a prototype for problems where field reconstruction from data on parallel sections is required (post-processing, visualization, engineering and scientific calculations).

Recommendations for use - use interlacing to condense the presentation of the solution and improve the clarity of the results, as well as as an auxiliary analysis tool (construction of sections, isolines, comparison of profiles) in a series of numerical experiments.

## ЗМІСТ

	С.
Вступ .....	10
1 Аналіз предметної області .....	13
1.1 Математичні моделі .....	13
1.2 Методи чисельного аналізу .....	14
1.3 Формальна та змістовна постановка задачі .....	16
1.4 Постановка задач дослідження .....	18
2 Теоретичні засади та побудова операторів інтерлінації .....	21
2.1 Постановка нелінійної еліптичної задачі та слабка форма .....	21
2.2 Метод прямих і оператори інтерлінації для відновлення між паралельними смугами .....	23
2.3 Класифікація РЧП другого порядку та наслідки .....	25
2.4 Побудова операторів інтерлінації між паралельними смугами .....	27
2.5 Теоретичні оцінки похибки інтерлінації та наближень чисельної схеми .	29
Висновки за розділом 2 .....	30
3 Програмна реалізація .....	31
3.1 Постановка вимог до програмного комплексу та вибір засобів реалізації	31
3.2 Структура програмної системи та взаємодія модулів .....	32
3.3 Реалізація чисельних алгоритмів розв'язання еліптичних задач у Python	34
3.4 Розробка графічного інтерфейсу користувача на базі PyQt5 .....	39
3.5 Формат вхідних і вихідних даних .....	42
Висновки за розділом 3 .....	44
4 Обчислювальний експеримент і тестування .....	45
4.1 Тестові задачі для рівняння Лапласа та Пуассона .....	45
4.2 Чисельні експерименти для семілінійної задачі .....	48
4.3 Вплив параметрів сітки, кроку «штучного часу» та налаштувань інтерлінації на точність і збіжність розв'язку .....	52

4.4 Порівняння чисельних результатів із теоретичними оцінками похибки та валідація реалізованої чисельної схеми .....	55
Висновки за розділом 4.....	57
Висновки .....	59
Перелік джерел посилань .....	63
Додаток А Лістинг програми .....	66

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Стаціонарні задачі для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку є однією з базових моделей математичної фізики та прикладного аналізу. Вони описують усталені просторові розподіли потенціалу, температури, напружень, концентрацій у реактивно-дифузійних системах, процеси фільтрації в пористих середовищах, електростатичні та магнітостатичні поля тощо. У більшості реалістичних постановок, що включають неоднорідні коефіцієнти, складну геометрію областей та нелінійні реакційні члени, побудова аналітичних розв'язків є неможливою. Це зумовлює провідну роль чисельних методів у дослідженні таких задач.

Сучасні скінченно-різницеві та скінченно-елементні схеми забезпечують гарантовану збіжність до точного розв'язку за умови достатньої гладкості даних і належного вибору простору апроксимації. Водночас на етапі постпроцесінгу та аналізу результатів виникає потреба у відновленні поля розв'язку між сітковими лініями, побудові згущених ізоліній, оцінюванні градієнтів і потоків у проміжних точках області. Стандартна інтерполяція за вузлами сітки не завжди дає змогу ефективно врахувати геометрію розташування даних (зокрема, у випадку «слідів» розв'язку на сім'ї паралельних прямих або смуг).

У цій ситуації перспективним інструментом виступають оператори інтерлінації – спеціальний клас відновлювальних операторів, які реконструюють багатовимірну функцію за її значеннями на системі паралельних ліній (смуг). Інтерлінаційні побудови дозволяють узгоджено поєднувати одновимірну інтерполяцію вздовж кожної прямої з відновленням між самими смугами, забезпечуючи контрольовану похибку в нормах Соболевського типу. Для чисельних розв'язків нелінійних еліптичних задач інтерлінація може використовуватись як для покращення якості візуалізації поля, так і для формування якісних початкових наближень в ітераційних алгоритмах.

Зумовлена необхідністю створення та дослідження чисельних схем для нелінійних еліптичних рівнянь, які поєднують базову дискретизацію (метод

прямих, скінченно-різницеві або скінченно-елементні підходи) з операторами інтерлінації між паралельними смугами. Такі схеми дозволяють підвищити точність і інформативність наближених розв'язків без істотного збільшення обчислювальних витрат, що є важливим для моделювання складних просторових процесів на обмежених ресурсах.

Робота виконана в межах освітньо-професійної програми «Прикладна математика» другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 113 «Прикладна математика» Харківського національного університету радіоелектроніки та спрямована на поглиблення фахових компетентностей у галузі чисельного аналізу рівнянь у частинних похідних і наукового програмування.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є розроблення та дослідження чисельної схеми розв'язання нелінійних еліптичних задач із застосуванням операторів інтерлінації між паралельними смугами, а також створення програмного комплексу для проведення обчислювальних експериментів і візуалізації результатів. Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно виконати наступні завдання:

- провести аналіз предметної області: розглянути математичні моделі стаціонарних задач для лінійних і нелінійних еліптичних рівнянь, оглянути основні чисельні методи їх розв'язання (метод скінченних елементів, скінченно-різницеві схеми, метод прямих), уточнити роль інтерполяційних та інтерлінаційних операторів;

- сформулювати нелінійну еліптичну задачу у сильній та слабкій формах, проаналізувати її місце в класифікації рівнянь у частинних похідних та обґрунтувати можливість переходу до квазідинамічної постановки методом прямих;

- побудувати та дослідити оператори інтерлінації між паралельними смугами для двовимірних задач: описати алгоритмічну структуру інтерлінаційних операторів, сформулювати теоретичні оцінки похибки інтерлінаційного відновлення та з'ясувати умови, за яких інтерлінація не погіршує порядок збіжності базової чисельної схеми;

- розробити архітектуру програмного комплексу та реалізувати чисель-

ний розв'язувач нелінійних еліптичних задач із логістичною нелінійністю, модуль операторів інтерлінації між паралельними смугами та графічний інтерфейс користувача у середовищі Python з використанням бібліотек NumPy, Matplotlib і PyQt5;

– провести обчислювальні експерименти для тестових задач (рівняння Лапласа і Пуассона) та семілінійної еліптичної задачі з логістичною реакцією; дослідити вплив параметрів сітки, кроку «штучного часу» та налаштувань інтерлінації на точність і збіжність розв'язку;

– проаналізувати отримані результати.

*Об'єктом дослідження* є нелінійні еліптичні рівняння другого порядку на обмежених областях із граничними умовами Діріхле/Неймана.

*Предметом дослідження* є чисельні схеми розв'язання нелінійних еліптичних задач, які поєднують варіаційну постановку та метод прямих зі скінченно-різницевою дискретизацією, а також оператори інтерлінації між паралельними смугами і їхній вплив на точність та збіжність наближених розв'язків.

**Методи дослідження.** У кваліфікаційній роботі використані слабка (варіаційна) постановка еліптичних задач; скінченно-різницеві наближення; метод прямих із введенням «хибного часу» для отримання стаціонарного розв'язку; оператори інтерлінації для відновлення поля між паралельними смугами; чисельні експерименти, комп'ютерне моделювання та візуалізація.

**Публікації.** Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 9-ій Міжнародній науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (м. Дніпро, 5-7 листопада 2025 р.)

# 1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

## 1.1 Математичні моделі

Нелінійні еліптичні рівняння – це важливий клас диференціальних рівнянь другого порядку, які описують стаціонарні (часонезалежні) процеси в різноманітних фізичних моделях (наприклад, розподіл напруги або температури). Згідно з визначенням, «рівняння еліптичного типу» застосовуються для опису силових полів (наприклад, електростатичного) та подібних стаціонарних процесів [1]. У лінійному випадку класичними є рівняння Лапласа та Пуассона; у нелінійних моделях до стандартного оператора додається залежність від шуканого рішення або його градієнту. Зокрема, найпростіші семілінійні еліптичні рівняння мають вигляд.

$$-\Delta u = f(x, u), \quad (1.1)$$

і можуть бути записані в канонічному вигляді, наприклад, як

$$-\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (a_{ij}(x)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0, x \in \Omega, \quad (1.2)$$

де  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область розв’язування [2].

Приклади нелінійних моделей включають реактивно-дифузійні задачі зі стаціонарною реакцією (наприклад,  $-\Delta u + u^3 = g(x)$  у фізиці реактивних середовищ) або нелінійну теорію пружності. В цих моделях  $u(x)$  може бути температурою, потенціалом чи концентрацією,  $a_{ij}(x)$  – коефіцієнти дифузії чи жорсткості середовища, а  $F(x, u, \nabla u)$  – нелінійна реакційна залежність. Для задачі такого типу задаються також відповідні крайові умови (найчастіше Діріхле або Неймана) на границі  $\partial\Omega$  (наприклад,  $u_{\partial\Omega} = 0$  або  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ). Зазвичай формально

ставиться задача: знайти  $u$  з достатньою гладкістю, що задовольняє нелінійно-му еліптичному рівнянню з даними умовами на межі.

## 1.2 Методи чисельного аналізу

Для наближеного розв'язання нелінійних еліптичних рівнянь використовуються різні чисельні методи. Скінченно-елементний метод (СЕМ) – один із найпоширеніших. У СЕМ вибирають скінченно-вимірний простір апроксимації  $V_h$  (зазвичай з базисом, що задається локальними поліноміальними функціями на трикутних чи прямокутних елементах). Шукана функція  $u(x)$  апроксимується у вигляді  $u_h(x) = \sum_i U_i \varphi_i(x)$ , де  $\varphi_i$  – набір базисних функцій (наприклад, функцій Лагранжа «типу шапок»). Важливою характеристикою є інтерполяційний оператор  $I_h$ , який переводить довільну достатньо гладку функцію у її апроксимацію з обраного простору  $V_h$ . Наприклад, у випадку лінійного (кусочного) скінченно-елементного простору  $P_h^1$  оператор Лагранжа першого порядку задається формулою [3]

$$I_h^1 v(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \varphi_i(x), \quad (1.3)$$

де  $v(x_i)$  – значення функції в вузлах сітки;

$\varphi_i(x)$  – лінійна «шапка», що дорівнює 1 у вузлі  $x_i$  і 0 у суміжних [3].

Іншими словами  $I_h^1 v$  є єдиною кусочно-лінійною функцією, що співпадає з  $v$  у всіх вузлах [3]. Приклад такої базисної функції наведено на рис.1.1: функція-шапка, яка рівна одиниці в середині елемента і лінійно зменшується до нуля по краям, обмежуючи розтікання апроксимації на сусідні елементи. Функція-шапка (hat-function) використовується для одномірного лінійного скінченно-

елементного елемента: базисна функція, що дорівнює 1 у своєму вузлі і лінійно спадає до 0 у сусідніх вузлах (ширина підтримки – два елементи) [4].

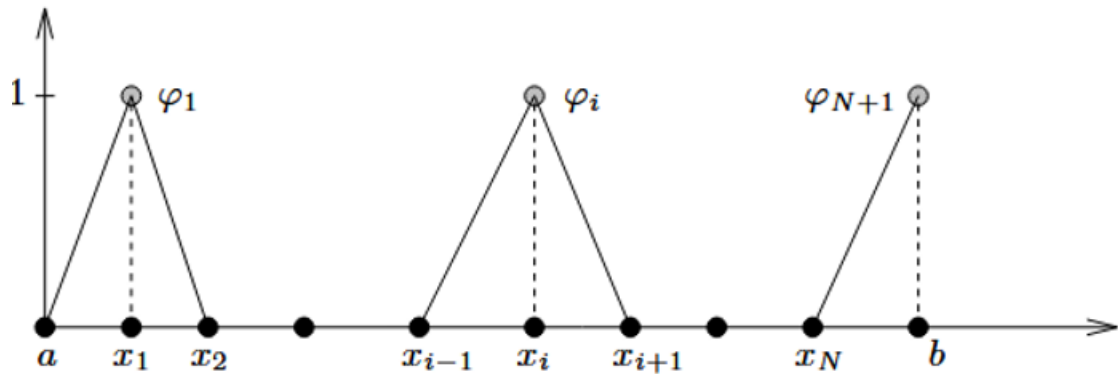


Рисунок 1.1 – Одновимірні капелюшні функції

На практиці вони будуються на триангуляції області  $\Omega$  (рис. 1.2), що утворює скінченно-вимірний простір  $V_h$  для методу Галеркіна.

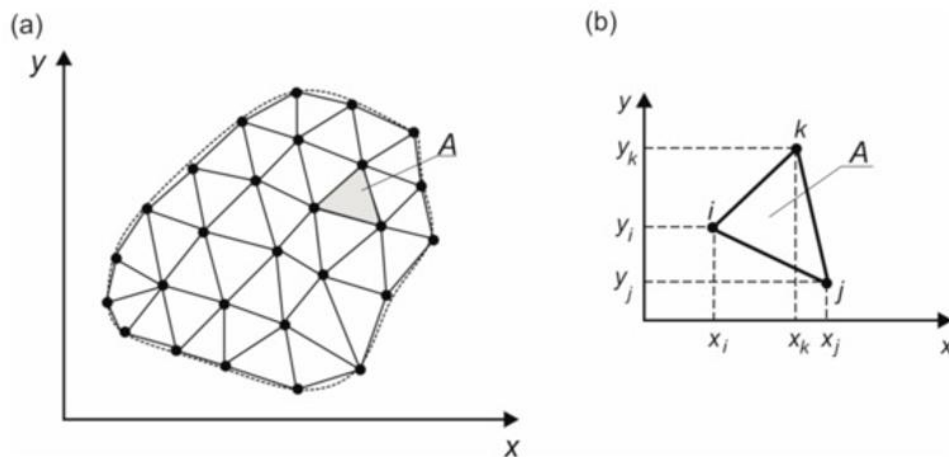


Рисунок 1.2 – Триангуляція домену  $\Omega$  (сітка FEM)

Крім класичного СЕМ, застосовують метод скінченних різниць (МСД), де похідні у рівнянні замінюють різницевиими наближеннями на сітці, а отримана нелінійна система вирішується ітераційно. Також існують методи колокації та спектральні методи, які апроксимують рішення глобальними поліномами або функціями (наприклад, многочленами Тейлора чи функціями Чебишева). У всіх випадках подібних методів ключовим є побудова наближення (інтерполяції) шуканої функції за її значеннями у вузлах чи значущих точках.

Особливе значення в аналізі методів наближення має оцінка похибки інтерполяції. Так, відомі (стандартні) оцінки говорять, що для гладких рішень  $u$  норма різниці  $|u - I_h u|$  зменшується зі зменшенням розміру сітки  $h$ . При цьому потрібно враховувати регулярність  $u$  – звичайний оператор Лагранжа вимагає неперервності  $u$  (тобто  $u \in C^0$ ) [5]. У разі обмеженої регулярності (наприклад,  $u \in H^1$ ) вводять спеціальні поліноміально-інваріантні оператори інтерполяції, які стабільні у просторі  $H^1$  [5]. У загальному випадку побудова інтерполяційного оператора та його апроксимаційні властивості аналізуються з допомогою теорії Соболевських просторів і відповідних апіорних оцінок похибок. Використання цих оцінок дозволяє встановити збіжність числових методів: зокрема, Нур та Уайтмен показали, що нерівності, які оцінюють похибку скінченно-елементного наближення, у поєднанні з відомими оцінками інтерполяційної похибки дають оцінку похибки наближеного рішення нелінійної задачі [6].

### 1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

Розглянемо загальну задачу знаходження наближеного розв'язку нелінійного еліптичного рівняння. Формально це можна записати, наприклад, так:

$$-\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) + f(u(x)) = g(x), x \in \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.4)$$

де  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – обмежена область із гладкою межею;

$a(x) = [a_{\{ij\}}(x)]$  – відома матриця коефіцієнтів дифузії (позитивно визначена);

$f(u)$  – задання нелінійної реакції від  $u$ ;

$g(x)$  – відоме джерело.

Змінна  $u(x)$  – шуканий розв'язок (наприклад, потенціал чи концентрація), і ми вимагаємо, щоб  $u$  задовольняла граничні умови (у прикладі наведено граничні умови Діріхле  $u = 0$  на  $\partial\Omega$ ).

Суть задачі полягає в тому, щоб побудувати достатньо точну апроксимацію  $u_h \approx u$  у вибраному скінченновимірному просторі (наприклад, простір лінійних або квадратичних елементів) з допомогою операторів інтерполяції. Така формальна постановка включає визначення фізичного змісту величин: наприклад, рівняння (1.4) може моделювати стаціонарний розподіл температури чи концентрації в середовищі з нелінійною реакцією. Зокрема, у прикладі лінійного випадку  $f(u) \equiv 0$  задача зводиться до класичного рівняння Пуассона, що описує, наприклад, електростатичний потенціал [1]. Нелінійність  $f(u)$  вводить додаткову реактивну складову; наприклад, якщо  $f(u) = u^3$ , то рівняння (1.4) моделює реактивну дифузію з насиченням.

Реалізація йде через варіаційний (Галеркінів) підхід: інтегруємо рівняння з тестовими функціями, формуємо слабку постановку та дискретизуємо у  $V_h$ . Далі для нелінійної системи використовують ітераційні методи (Ньютон/Пікара), збіжність яких ілюструємо на рис. 1.3.

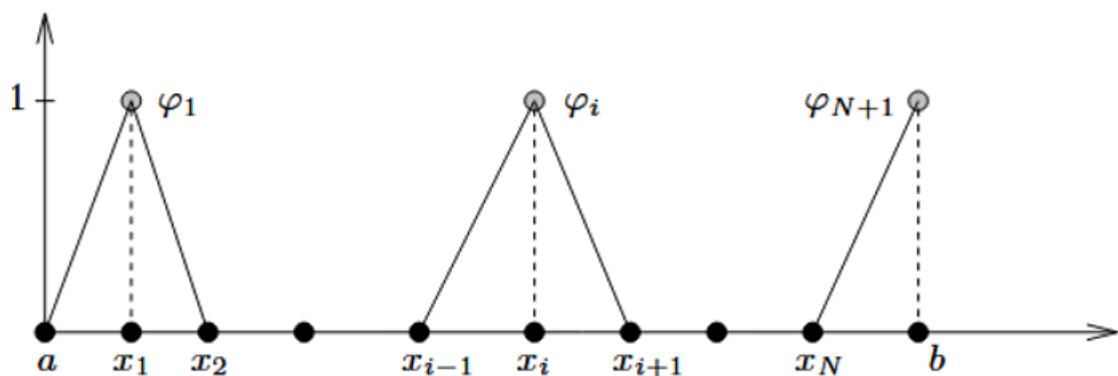


Рисунок 1.3 – Графік збіжності ітерацій / гісторія залишку

Отже, задача формулюється так: знайти функцію  $u(x)$  у просторі достатньої регулярності (наприклад,  $u \in H^2(\Omega)$ ) так, щоб вона задовольняла нелінійне еліптичне рівняння (1.4) при заданих граничних умовах. Змістовно це означає відновити розподіл фізичної величини (температури, потенціалу тощо) із відомими фізичними параметрами (коефіцієнт  $a(x)$ , джерело  $g(x)$ ) і нелінійними взаємодіями ( $f(u)$ ). Для реалізації наближеного розв'язку застосовують варіа-

ційний (Галеркінів) підхід: інтегрують рівняння проти тестових функцій і отримують слабку постановку, де інтерполяційні оператори визначають апроксимацію розв'язку в обраному скінченновимірному підпросторі.

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Отже, показано, що нелінійні еліптичні рівняння другого порядку є адекватною математичною моделлю широкого класу фізичних процесів, пов'язаних із розподілом потенціалів, температури, напружень та концентрацій у сталому режимі. Як базові лінійні приклади розглянуто рівняння Лапласа та Пуассона, а також їх узагальнення до семілінійних і повністю нелінійних задач, у яких оператор Лапласа доповнюється реакційними членами або нелінійною залежністю від шуканої функції та її градієнта.

Сформульовано об'єкт дослідження – стаціонарні нелінійні еліптичні рівняння з граничними умовами Діріхле/Неймана на обмежених областях, – та предмет дослідження, яким є інтерполяційні (інтерлінаційні) оператори у скінченно-елементних і подібних дискретних просторах та їхній вплив на точність і збіжність чисельних розв'язків. Показано, що поєднання варіаційного (Галеркінового) підходу, методу скінченних елементів, інтерполяції Лагранжа, елементів теорії Соболевських просторів та ітераційних методів (Ньютон/Пікара) утворює послідовну методологічну основу для подальшого аналізу.

Окрему увагу приділено ролі інтерлінації як інструменту відновлення розв'язку між паралельними прямими спостереження та його зв'язку з класичними чисельними схемами. Виявлено, що правильний вибір і побудова інтерлінаційних операторів дозволяє не лише підвищити точність постпроцесінгу, а й задати якісні початкові наближення для нелінійних ітераційних алгоритмів, що зменшує обчислювальні витрати. Це визначило необхідність подальшого теоретичного дослідження операторів інтерлінації та їх похибок, а також розроблення програмного забезпечення для експериментальної перевірки отриманих оцінок.

У рамках даного дослідження передбачається вирішити такі підзадачі.

1. Побудувати інтерполяційний оператор  $I_h$  для апроксимації розв'язку (1.1) у скінченновимірному просторі  $V_h$  (наприклад, з базисом кусочно-поліноміальних функцій на триангуляції) [3].

Зокрема, вибрати функції форми (наприклад, лінійні hat-функції на елементах) і задати відповідні функціонали-норманти (вузлові значення), що визначають цей оператор.

2. Розробити та довести оцінки похибки наближення для скінченно-елементного рішення  $u_h$  через оператор інтерполяції  $I_h$ . Зокрема, використати відомі нерівності оцінки інтерполяційної похибки у відповідних нормах, які дозволяють отримати оцінку погрішності наближеного розв'язку нелінійної задачі [6]. (Тут слід врахувати регулярність точного розв'язку та властивості оператора  $I_h$ .)

3. Провести числові експерименти на прикладі типових нелінійних еліптичних задач (зокрема, з нелінійним джерелом чи нелінійною реакцією у середовищі). Для цього реалізувати алгоритм нумерації вузлів, побудови матриці СЕМ та розв'язання нелінійної системи. У результатах продемонструвати таблиці похибок (наприклад,  $|u - u_h|$  в різних нормах) при послідовному зменшенні параметра сітки  $h$ , а також показати графічно форму апроксимуючих функцій.

Виконання цих завдань забезпечить практичну реалізацію методу інтерполяційних операторів для нелінійних еліптичних рівнянь, і дозволить оцінити ефективність обраних підходів та точність наближення. Відомо, що саме невірний вибір оператора наближення (або груба апроксимація моделі) зазвичай призводить до суттєвих похибок у кінцевому розв'язку [5, 6]. Тому задача полягає у виборі таких операторів інтерполяції  $I_h$ , які забезпечать необхідну точність за розумної витрати обчислювальних ресурсів.

Метою кваліфікаційної роботи є розроблення та дослідження чисельної схеми розв'язання нелінійних еліптичних задач із застосуванням операторів інтерполяції між паралельними смугами, а також створення програмного комплексу

для проведення обчислювальних експериментів і візуалізації результатів. Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно виконати наступні завдання:

- провести аналіз предметної області: розглянути математичні моделі стаціонарних задач для лінійних і нелінійних еліптичних рівнянь, оглянути основні чисельні методи їх розв’язання (метод скінченних елементів, скінченно-різницеві схеми, метод прямих), уточнити роль інтерполяційних та інтерлінаційних операторів;

- сформулювати нелінійну еліптичну задачу у сильній та слабкій формах, проаналізувати її місце в класифікації рівнянь у частинних похідних та обґрунтувати можливість переходу до квазідинамічної постановки методом прямих;

- побудувати та дослідити оператори інтерлінації між паралельними смугами для двовимірних задач: описати алгоритмічну структуру інтерлінаційних операторів, сформулювати теоретичні оцінки похибки інтерлінаційного відновлення та з’ясувати умови, за яких інтерлінація не погіршує порядок збіжності базової чисельної схеми;

- розробити архітектуру програмного комплексу та реалізувати чисельний розв’язувач нелінійних еліптичних задач із логістичною нелінійністю, модуль операторів інтерлінації між паралельними смугами та графічний інтерфейс користувача у середовищі Python з використанням бібліотек NumPy, Matplotlib і PyQt5;

- провести обчислювальні експерименти для тестових задач (рівняння Лапласа і Пуассона) та семілінійної еліптичної задачі з логістичною реакцією; дослідити вплив параметрів сітки, кроку «штучного часу» та налаштувань інтерлінації на точність і збіжність розв’язку;

- проаналізувати отримані результати.

## 2 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ТА ПОБУДОВА ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРЛІНАЦІЇ

### 2.1 Постановка нелінійної еліптичної задачі та слабка форма

Розглядається стаціонарна задача на обмеженій області  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  з достатньо гладкою межею  $\partial\Omega$ . Шуканою є скалярна функція  $u(x)$ , що описує усталений просторовий розподіл фізичної величини (температури, потенціалу, концентрації тощо). Математична модель задається нелінійним еліптичним оператором другого порядку, який поєднує дифузійний механізм поширення та нелінійну реакцію. Для визначеності припускається, що коефіцієнти дифузії утворюють симетричну, уніформно додатно визначену матрицю, а нелінійна частина є достатньо регулярною відносно аргументів. На межі  $\partial\Omega$  задаються граничні умови типу Діріхле (значення шуканої функції), Неймана (нормальний потік) або змішані; вибір типу зумовлює простір, у якому шукатиметься розв'язок.

Класична (сильна) постановка потребує високої гладкості розв'язку, що в моделях з неоднорідними коефіцієнтами та нелінійними членами не завжди виконується. Тому використовують слабку (варіаційну) постановку. Її побудова ґрунтується на множенні рівняння на довільну тестову функцію з відповідного простору та інтегруванні по області. Інтегрування частинами переносить похідні з шуканої функції на тестову та «знімає» вимоги до регулярності розв'язку; водночас природним чином з'являються граничні члени, які узгоджуються з фізичним змістом умов Діріхле або Неймана.

У підсумку формулюється варіаційна задача: знайти  $u$  у відповідному енергетичному просторі (наприклад,  $H_0^1(\Omega)$  для умов Діріхле або  $H^1(\Omega)$  для умов Неймана), щоб для всіх тестових функцій  $v$  з того самого простору виконувалася рівність вигляду

$$A(u; v) = F(v), \quad (1.5)$$

де  $A(u;v)$  – енергетичний функціонал, що містить дифузійну та нелінійну частини;

$F(v)$  – лінійний функціонал, сформований правою частиною та, за потреби, граничними потоками.

Така форма інтерпретується як баланс «енергії» системи й роботи зовнішніх джерел і є основою для подальшого аналізу коректності.

Питання існування та єдиності слабкого розв’язку розв’язуються засобами функціонального аналізу. У лінійному випадку застосовується теорема Лакса-Мільграма за умови коерцитивності та неперервності білінійної форми. Для семілінійних і квазілінійних моделей використовують теорію монотонних операторів та схеми фіксованої точки; додаткові умови на нелінійний член (монотонність, ліпшицевість у відповідних нормах) забезпечують добре поставленість. Регулярність слабкого розв’язку далі залежить від гладкості коефіцієнтів, геометрії області та типу граничних умов.

Варіаційна постановка безпосередньо веде до чисельного розв’язання методом Галеркіна. Ідея полягає в заміні нескінченновимірного простору  $V$  його скінченновимірним підпростором  $V_h$ , породженим локальними базисними функціями на тріангуляції області. У цьому разі рівність для всіх  $v_h \in V_h$  приводить до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу  $u_h$  за базисом. Розв’язання системи здійснюють ітераційно (Пікара, Ньютон, демпфований Ньютон) як послідовність лінійних варіаційних задач зі змінними коефіцієнтами.

У такому дискретному контексті оператори інтерлінації відіграють подвійну роль: по-перше, як засіб відновлення безперервного поля з дискретних значень уздовж вибраних ліній або підмножин сітки; по-друге, як інструмент постобробки та аналізу похибок, що підвищує якість візуалізації та інтерпретації наближених рішень.

Таким чином, слабка постановка задає математично коректну й чисельно зручну рамку для дослідження нелінійних еліптичних задач, а також створює

природний місток до скінченно-елементної дискретизації та операторів інтерлінації, які будуть використані в наступних підрозділах для побудови, аналізу та експериментальної верифікації наближених розв'язків.

## 2.2 Метод прямих і оператори інтерлінації для відновлення між паралельними смугами

Метод прямих (Method of Lines, MOL) – це підхід до чисельного розв'язання задач у частинних похідних, у якому всі змінні, окрім однієї, дискретизують. Таким чином початково-крайова задача для рівняння у частинних похідних (РЧП) редукується до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) або диференціально-алгебраїчних систем, до яких застосовують стандартні інтегратори.

У класичній постановці дискретизують просторові змінні, а час залишають неперервним; після цього еволюцію у часі інтегрують чисельно. Цей підхід виник у 1960-х роках і нині є одним з базових у прикладній математиці та інженерії.

Хоча MOL природно орієнтований на еволюційні (параболічні та гіперболічні) рівняння, його застосовують і до еліптичних задач, вводячи так званий «хибний час» (false transient). Ідея полягає у додаванні до еліптичного рівняння штучного часового члена та інтегруванні в «часі» до досягнення стаціонарного стану; це дозволяє скористатися інструментарієм MOL і для задач Лапласа/Пуассона та їхніх нелінійних аналогів. Також відомі напіваналітичні модифікації MOL для еліптичних РЧП, які обходять частину труднощів стабільності.

З практичного боку метод прямих дає дві ключові переваги. По-перше, він роз'єднує просторову дискретизацію та часову інтеграцію, дозволяючи комбінувати різні сітки/апроксимації з широким спектром стійких інтеграторів (Runge–Kutta, BDF тощо). По-друге, він добре масштабується на складні геометрії та нелінійності через локальність просторових операторів і можливість

адаптивного кроку в часі. У застосуванні до нелінійних еліптичних задач через «хибний час» це часто зводиться до послідовності лінійних/квазілінійних підзадач, які розв'язують ефективними лінійними солверами до збіжного стаціонарного стану.

Оператори інтерлінації (interlineation) – це клас відновлювальних операторів, які реконструюють функцію багатьох змінних за її «слідами» на системі ліній або смуг, найчастіше – на сім'ї паралельних прямих. На відміну від стандартної інтерполяції на вузлових сітках, інтерлінація працює з лінійними (смуговими) даними: відомі значення (або апроксимації) функції вздовж ряду паралельних прямих, і завдання полягає у побудові глобального поля між цими прямими. Такі оператори виявилися корисними як для безпосереднього відновлення полів (напр., у комп'ютерній томографії чи обробці зображень), так і як пост-обробка чисельних розв'язків РЧП для підвищення якості візуалізації, згладжування артефактів і уточнення похідних.

У найпростішій конфігурації, коли відомі сліди  $(u(x, y_k))$  на наборі паралельних прямих  $(y = y_k)$ , інтерлінаційний алгоритм типово реалізують у два кроки. Спочатку на кожній фіксованій прямій  $(y = y_k)$  виконують одновимірну інтерполяцію за  $(x)$  (сплайни, поліноміальні або раціональні оператори) для стабілізованого й гладкого відновлення уздовж лінії. Далі між самими прямими здійснюють відновлення «поперек смуг» – за параметром  $(y)$ , використовуючи спеціально побудовані інтерлінаційні оператори, які гарантують збіжність до справжньої функції за ущільнення розташування прямих. Такі оператори можуть будуватись як сплайни інтерлінації (interlineation splines) на трикутних або прямокутних елементах, або як оператори з оптимізацією похибки для фіксованої кількості паралельних прямих.

Теорія інтерлінації розглядає лінійність та локальність операторів, умови їхньої стійкості та порядки збіжності в нормах типу  $(L_p)$  або просторах Гельдера; для двовимірних функцій важливими є оцінки похибки «між смугами», які залежать від відстані між паралельними прямими, гладкості функції та характе-

ристик локальних базисів. Окремим напрямом є інтерлінація для розривних функцій, де використовують спеціальні (розривні) інтерлінаційні сплайни, що дозволяють локалізувати та контролювати стрибки й уникати надмірного «перегладжування».

Зв'язок інтерлінації з дискретизаціями для еліптичних задач двоякий. По-перше, інтерлінаційні оператори можуть задавати «розумні» початкові наближення або проєкції чисельного розв'язку зі сітки на більш щільні траєкторії спостереження, що зменшує кількість ітерацій у нелінійних схемах (Ньютона/Пікасона). По-друге, у післяпроцесінгу вони покращують відновлення градієнтів та потоків, особливо якщо FEM/FDM-сітка є анізотропною або має локальні згущення: реконструкція між паралельними смугами зменшує «сходивкові» артефакти та забезпечує більш фізично коректні ізолінії. З огляду на це, поєднання FEM (як основного методу дискретизації) з інтерлінацією (як інструментом відновлення між лініями/смугами) є практичним способом підвищити точність і стійкість обчислювального експерименту без суттєвого ускладнення базової схеми.

Проєктуючи інтерлінаційні оператори для конкретної задачі, доцільно врахувати:

- а) розташування смуг відносно особливостей розв'язку (шари, контури, фронти);
- б) вибір локальних базисів та степінь гладкості, необхідний для цільових функціоналів (потоки, енергетики);
- в) компроміс між точністю і обчислювальною вартістю, зокрема при великій кількості паралельних прямих ( $M$ ).

### 2.3 Класифікація РЧП другого порядку та наслідки

Класифікація РЧП другого порядку (еліптичні, параболічні, гіперболічні) є фундаментальною, оскільки тип рівняння визначає як математичні властивос-

ті розв'язків (гладкість, вплив даних), так і вимоги до постановки крайових/початкових умов та до вибору чисельних методів. У канонічному вигляді класифікація ґрунтується на знаку дискримінанта або на знаковій визначеності головної частини оператора (матриці коефіцієнтів при других похідних). Еліптичні моделі описують стаціонарні стани та рівноважні розподіли; параболічні – дифузійні/релаксаційні процеси; гіперболічні – хвильові явища з кінцевою швидкістю перенесення збурень.

Еліптичні задачі (напр., Лапласа, Пуассона і їхні квазі- та семілінійні узагальнення) моделюють усталені поля потенціалу, температури, напружень. Розв'язки мають «згладжувальний» характер: локальні похибки та збурення даних часто розмиваються по всій області. Типові постановки – крайові задачі з умовами Діріхле/Неймана/Змішаними на всій межі. Для дискретизації переважають метод скінченних елементів і високоточні різницеві схеми; до нелінійності застосовують ітеративні лінеаризації. Саме для цього класу особливо релевантні оператори відновлення/пост-обробки, зокрема інтерлінація, що підвищує якість реконструкції градієнтів і потоків між лінійними перетинами.

Параболічні моделі (теплопровідність, дифузія, реакція-дифузія у часі) описують еволюційні процеси з внутрішнім згладжуванням. Добре поставлені як початково-крайові задачі, вони природно сумісні з методом прямих: простір дискретизують, а у часі застосовують стійкі інтегратори (неявні BDF,  $\theta$ -схеми, діагонально-неявні Рунге–Кутта), що дозволяє контролювати жорсткість через реакційні члени. Для квазінелінійних випадків використовують покрокову лінеаризацію та адаптивний вибір кроку часу.

Гіперболічні рівняння (рівняння хвилі, системи пружності у динаміці, газова динаміка у лінійних діапазонах) характеризуються скінченною швидкістю поширення сигналів і наявністю фронтів. Чисельні дискретизації мають забезпечувати контроль дисперсійно-дифузійних похибок, не допускати неузгоджених осциляцій (Gibbs-ефект) та коректно відтворювати умови випромінювання на межах. Хоча наш фокус – нелінійні еліптичні задачі, огляд гіперболічних властивостей важливий для багатofізичних моделювань, де стаціонарні поля

поєднуються з хвильовими підпроцесами.

З погляду постановки крайових та початкових умов класифікація диктує різні «натуральні» простори: для еліптичних – енергетичні простори типу  $(H^1)$  з умовами на межі; для параболічних –  $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))$  з початковими даними; для гіперболічних – пари початкових даних (положення/швидкість). В еліптичних моделях гарна умовна визначеність білінійної форми та коерцитивність ведуть до існування-єдиності (лінійний випадок – теорема Лакса–Мільграма; у семілінійних – монотонні оператори, фіксована точка). Саме ця рамка робить слабкі постановки базою для FEM і подальшого аналізу похибок.

Вибір чисельної технології відображає тип рівняння. Для еліптичних задач переважає FEM з апіорними/апостеріорними оцінками та адаптацією сітки; для параболічних/гіперболічних – MOL із сучасними часовими інтеграторами. Інтерлінація доповнює обидва підходи: у стаціонарних задачах – як оператор пост-обробки між «смугами» (напр., відновлення ізоліній між паралельними розрізами/сканами), у нестаціонарних – як засіб узгодженої реконструкції просторових зрізів у фіксовані моменти часу. Разом це формує методичний «конвеєр»: слабка постановка  $\rightarrow$  базова дискретизація (FEM/FDM)  $\rightarrow$  ітераційний розв’язувач  $\rightarrow$  інтерлінаційний відновлювач для підвищення якості поля та похідних. Завершуючи, підкреслимо практичну залежність точності кінцевого розв’язку від коректного поєднання (i) класифікаційних властивостей моделі, (ii) базової дискретизації та (iii) оператора відновлення. Для нелінійних еліптичних задач саме інтерлінаційні оператори між паралельними смугами можуть дати виражений приріст якості на стадії візуалізації, оцінювання потоків і локальних функціоналів, не змінюючи архітектуру основної FEM-схеми.

#### 2.4 Побудова операторів інтерлінації між паралельними смугами

У двовимірних задачах чисельного розв’язання еліптичних рівнянь часто виникає ситуація, коли значення шуканої функції або її чисельного наближення

відомі на наборі паралельних ліній чи смуг усередині області. Це можуть бути лінії обчислювальної сітки, лінії спостереження, траєкторії вимірювань або спеціально обрані перерізи. Завдання інтерлінації полягає в тому, щоб за цими «слідами» функції відновити її значення у проміжних точках між сусідніми смугами.

Побудову операторів інтерлінації доцільно розглядати як двоетапний процес. На першому етапі для кожної фіксованої смуги виконується одновимірна інтерполяція вздовж однієї координати. Для цього можуть використовуватися поліноміальні інтерполяційні схеми, сплайни або інші добре вивчені оператори, які забезпечують потрібну гладкість та точність уздовж відповідної прямої. На другому етапі відбувається власне інтерлінація, тобто відновлення значень функції між паралельними смугами за другою координатою. Для кожної точки, що розташована між двома сусідніми смугами, шукане значення подається у вигляді певної комбінації наближень, побудованих на цих смугах, з вагами, які залежать від розташування точки між ними, що продемонстровано на рис.2.1.

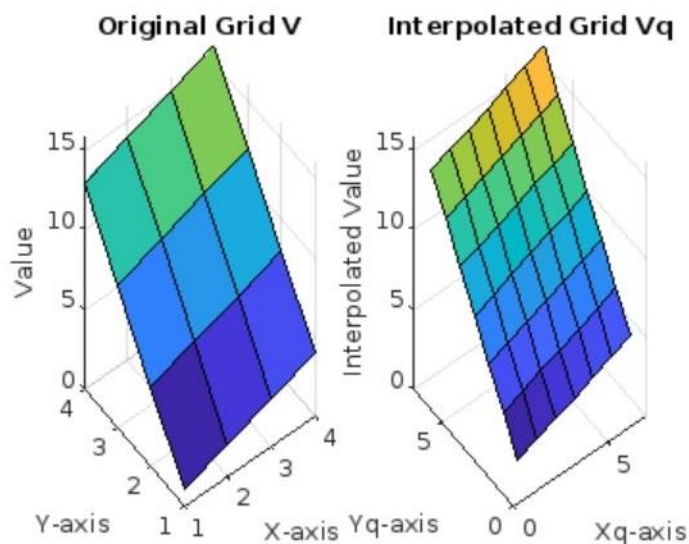


Рисунок 2.1 – Оригінальна сітка / інтерлінаційна сітка

Такий підхід дозволяє розглядати оператори інтерлінації як спеціальний клас інтерполяційних та проєкційних операторів, тісно пов'язаних із вибраною дискретизацією області (скінченно-елементною, скінченно-різницевою тощо).

До основних вимог, які висуваються до цих операторів, належать лінійність, локальність (залежність лише від найближчих смуг), здатність відтворювати достатньо гладкі функції та узгодженість з граничними умовами задачі. Коректна побудова інтерлінації дає змогу підвищити якість постпроцесінгу, забезпечити плавне відновлення розв'язку між сітковими лініями та покращити візуалізацію результатів обчислювального експерименту.

## 2.5 Теоретичні оцінки похибки інтерлінації та наближень чисельної схеми

Якість інтерлінаційних операторів оцінюється через порівняння точного розв'язку із наближеним, отриманим після інтерлінації. При цьому враховуються, по-перше, властивості самого оператора (його здатність відтворювати гладкі функції), а по-друге – структура сітки та відстані між паралельними смугами. Чим меншою є відстань між сусідніми смугами і чим більш гладким є розв'язок задачі, тим меншою виявляється похибка інтерлінації.

У повній чисельній схемі розв'язання еліптичної задачі похибка має складений характер. Вона включає похибку просторової дискретизації (наприклад, скінченно-елементну похибку, що залежить від розміру елементів сітки), похибку, пов'язану зі застосуванням методу прямих або іншої еволюційної схеми (якщо використовується введення «хибного часу»), а також додаткову похибку, яка виникає під час інтерлінації між паралельними смугами. Теоретичний аналіз показує, що за узгодженого вибору параметрів сітки та розташування смуг внесок інтерлінаційної похибки можна зробити того ж порядку, що й основна похибка просторової дискретизації, тобто інтерлінація не погіршуватиме загальний порядок збіжності чисельної схеми.

Окремий інтерес становлять ситуації, коли густоту паралельних смуг змінюють у різних частинах області. У зонах з плавною зміною розв'язку смуги можуть розташовуватися рідше, тоді як у околах шарів, фронтів або різких градієнтів доцільно їх згущувати. У теоретичних оцінках це відображається у ви-

гляді локальних оцінок похибки, які залежать від властивостей розв'язку та локального кроку інтерлінації. Таким чином, оператори інтерлінації природно вписуються в рамки адаптивних чисельних методів і дають змогу гнучко керувати балансом між точністю та обчислювальними витратами

## Висновки за розділом 2

У другому розділі сформовано теоретичну основу для подальшої програмної реалізації та обчислювального аналізу. Було уточнено постановку нелінійної еліптичної задачі, розглянуто її місце в загальній класифікації рівнянь у частинних похідних та обґрунтовано застосування методу прямих як зручного інструменту для переходу від стаціонарної постановки до еволюційної, придатної для послідовної чисельної реалізації.

Окрему увагу приділено побудові операторів інтерлінації між паралельними смугами у двовимірних задачах. Показано, що такі оператори забезпечують відновлення наближеного розв'язку в проміжних точках на основі значень, відомих на обмеженій кількості паралельних прямих, і можуть розглядатися як важливий елемент постпроцесінгу та візуалізації результатів. Обговорено базові вимоги до інтерлінаційних операторів і узагальнені принципи їх побудови.

Розглянуті теоретичні оцінки похибок дозволили виокремити внесок кожної з основних компонент чисельної схеми – просторової дискретизації, часової апроксимації (у разі використання методу прямих) та інтерлінації. Показано, що при належному узгодженні параметрів сітки та розташування смуг інтерлінація не знижує теоретичний порядок точності базової схеми, але дає змогу отримати більш інформативне і гладке представлення розв'язку. Отримані результати слугують підґрунтям для формулювання вимог до програмного комплексу та розроблення його архітектури, що є предметом наступного розділу.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Постановка вимог до програмного комплексу та вибір засобів реалізації

Програмний комплекс має забезпечувати повний цикл чисельного експерименту для досліджуваних нелінійних еліптичних задач: від задання параметрів математичної моделі до візуалізації результатів і збереження даних для подальшого аналізу. До функціональних вимог належать: реалізація чисельного розв'язувача рівнянь Лапласа, Пуассона та семілінійних задач з реакцією логістичного типу; підтримка методу прямих (введення «хибного часу») та обчислення стаціонарних розв'язків; побудова операторів інтерлінації між паралельними смугами; наочне відображення полів розв'язку й похибки у вигляді теплокарт та поперечних зрізів. Крім того, комплекс має дозволяти користувачеві змінювати параметри сітки, часової схеми, нелінійної реакції та налаштування інтерлінації без зміни програмного коду.

До нефункціональних вимог віднесено портативність, розширюваність і зручність використання. Портативність досягається за рахунок вибору кросплатформених технологій, що дозволяє запускати програму в операційних системах сімейства Windows, Linux та macOS. Розширюваність забезпечується модульною архітектурою: чисельне ядро, оператори інтерлінації та графічний інтерфейс реалізуються як окремі компоненти з чітко визначеними інтерфейсами. Зручність використання досягається через інтерактивний графічний інтерфейс, який дає змогу запускати розрахунки, переглядати проміжні результати і виконувати базові сценарії валідації без залучення сторонніх інструментів.

Як основну мову програмування обрано Python, оскільки він поєднує виразний синтаксис із розвинутою екосистемою бібліотек для чисельних обчислень і наукового програмування (зокрема, NumPy[8] та Matplotlib). Для розробки графічного інтерфейсу використано бібліотеку PyQt5[13], яка забезпечує створення сучасних кросплатформених інтерфейсів із підтримкою віджетів, діалогових вікон та інтеграції з графікою Matplotlib. Такий вибір засобів реалі-

зації дає змогу поєднати компактний чисельний код, зручне управління параметрами задачі та наочну візуалізацію результатів у єдиному програмному середовищі. На рис. 3.1 показано структуру програмної системи для чисельного розв'язання задачі.

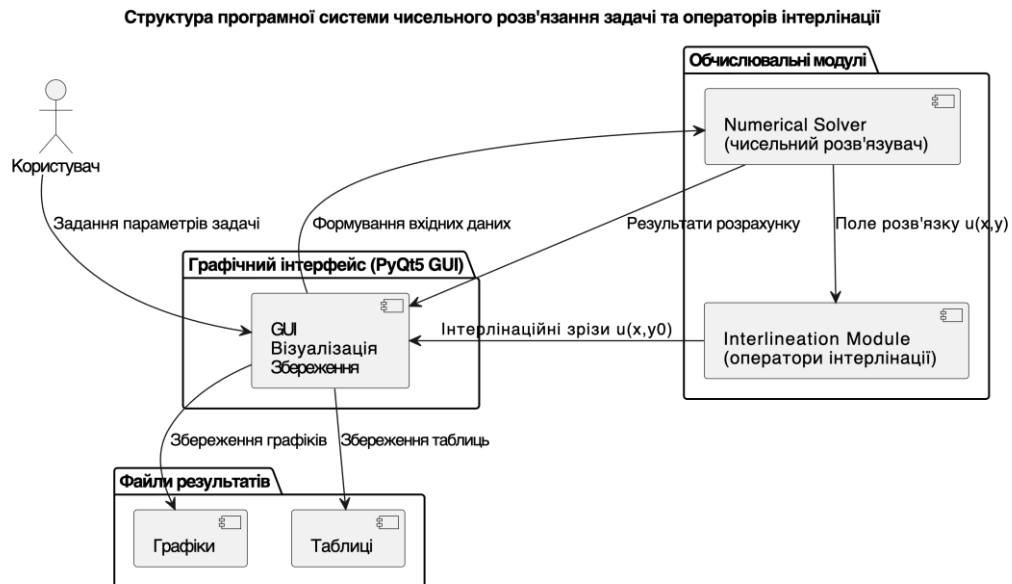


Рисунок 3.1 – Структурна схема програмного комплексу

### 3.2 Структура програмної системи та взаємодія модулів

Архітектура програмного комплексу побудована за модульним принципом і складається з трьох основних підсистем: чисельного ядра (модуль solver), підсистеми інтерлінації (модуль interlineation) та графічного інтерфейсу користувача (модуль gui). Модуль solver відповідає за дискретизацію задачі в просторі та часі, реалізує метод прямих для побудови стаціонарного розв'язку, а також надає уніфікований інтерфейс для запуску розрахунків із заданими параметрами. Модуль interlineation реалізує оператори відновлення значень розв'язку між паралельними смугами, працюючи на вже обчисленому полі значень у вузлах сітки. Модуль gui забезпечує взаємодію користувача з програмою: збирання вхідних даних, запуск чисельних обчислень, відображення полів розв'язку, по-

будову зрізів та управління сценаріями збереження результатів.

Взаємодія між модулями організована через чітко визначені точки входу та виходу, що зазначено на рис.3.2. Графічний інтерфейс ініціалізує виклики до модуля solver, передаючи йому параметри сітки, коефіцієнти рівняння, налаштування тимчасового кроку та критерію зупинки. Після завершення розрахунку модуль solver повертає сіткові масиви координат і значень розв'язку, які можуть бути безпосередньо візуалізовані або передані до модуля interlineation для подальшої обробки. Модуль інтерлінації, у свою чергу, надає функції побудови одновимірних зрізів та згущених полів на основі вихідних сіткових даних, не змінюючи структуру чисельного розв'язувача. Такий поділ відповідальностей спрощує тестування, повторне використання та можливу заміну окремих компонентів.

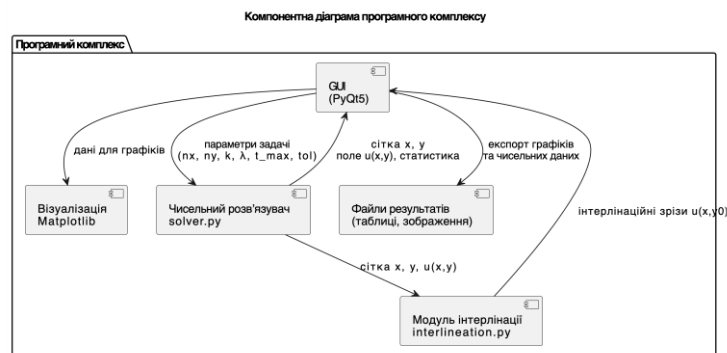


Рисунок 3.2 – Компонентна діаграма програмного комплексу

Додатково модуль gui інтегрує візуалізацію на основі Matplotlib, що дозволяє будувати теплокарти, поверхні та графіки залежностей похибки від параметрів сітки. Це дає змогу реалізувати в одному інтерфейсі як базову перевірку коректності роботи чисельної схеми (на тестових задачах Лапласа й Пуассона), так і експериментальний аналіз якості інтерлінації для семілінійних задач. На рис.3.3 наведено послідовність викликів під час виконання експерименту. Архітектура комплексу залишається відкритою для розширення: за потреби можуть бути додані нові типи рівнянь, інші методи дискретизації або альтернативні інтерлінаційні алгоритми, не змінюючи базову схему взаємодії між моду-

лем розв’язувача, інтерлінаційними операторами та графічним інтерфейсом.

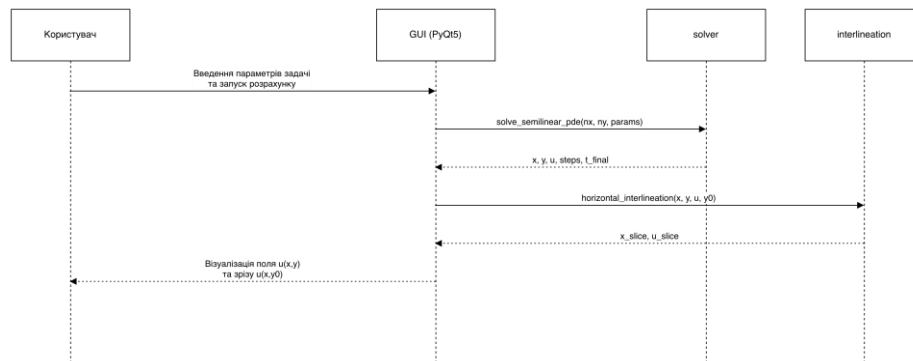


Рисунок 3.3 – Послідовність викликів під час виконання експерименту

### 3.3 Реалізація чисельних алгоритмів розв’язання еліптичних задач у Python

Чисельні алгоритми в розробленому програмному комплексі реалізовано в модулі `solver` мовою Python [9] із використанням бібліотеки NumPy [8] для роботи з багатовимірними масивами та векторизованими операціями. Це дає змогу ефективно виконувати обчислення на прямокутних сітках, не вдаючись до явних вкладених циклів на мові високого рівня. Числовий розв’язок еліптичної задачі будується на основі методу прямих: розглядається пов’язане з нею параболічне рівняння, для якого реалізовано явну часову схему. Ітераційний процес продовжується до моменту, коли зміна розв’язку між сусідніми кроками стає меншою за заданий поріг. Нижче, на рис. 3.4 наведено алгоритм чисельного розв’язання задачі.

Базова структура модуля `solver` передбачає функцію, яка виконує один крок часової схеми, та функцію верхнього рівня, що організовує ітераційний цикл та контроль збіжності. Нижче наведено типовий фрагмент реалізації кроку явної схеми:

```
import numpy as np
```

```

def reaction_term(u, lam):
    """Нелінійна реакція логістичного типу  $\lambda u (1 - u)$ ."""
    return lam * u * (1.0 - u)

def explicit_step(u, kappa, lam, dx, dy, dt):
    """
    Один крок явної схеми для семілінійного рівняння:
     $u_t = \text{kappa} * \Delta u + \text{lam} * u (1 - u)$ .
    """
    u_xx = (u[2:, 1:-1] - 2.0 * u[1:-1, 1:-1] + u[:-2, 1:-1]) / dx**2
    u_yy = (u[1:-1, 2:] - 2.0 * u[1:-1, 1:-1] + u[1:-1, :-2]) / dy**2
    laplace_u = u_xx + u_yy

    u_center = u[1:-1, 1:-1]
    f = reaction_term(u_center, lam)

    u_new = u_center + dt * (kappa * laplace_u + f)
    u_next = u.copy()
    u_next[1:-1, 1:-1] = u_new
    return u_next

```

Функція верхнього рівня організовує ітерації методу прямих, обчислює статистичні характеристики процесу збіжності та повертає фінальний розв'язок разом із допоміжною інформацією, що використовується під час аналізу результатів:

```

def solve_semilinear_pde(nx, ny, kappa, lam, t_max, dt, tol):
    """
    Чисельне розв'язання семілінійної задачі до стаціонарного стану.
    Повертає сітку, поле розв'язку та характеристики збіжності.

```

```
"""  
  
x = np.linspace(0.0, 1.0, nx)  
y = np.linspace(0.0, 1.0, ny)  
dx = x[1] - x[0]  
dy = y[1] - y[0]  
  
# Початкове наближення (можна задавати інші варіанти)  
u = np.zeros((nx, ny), dtype=float)  
  
t = 0.0  
steps = 0  
history = []  
  
while t < t_max:  
    u_new = explicit_step(u, kappa, lam, dx, dy, dt)  
    diff = np.max(np.abs(u_new - u))  
    history.append(diff)  
    u = u_new  
    t += dt  
    steps += 1  
  
    if diff < tol:  
        break  
  
stats = {  
    "steps": steps,  
    "t_final": t,  
    "max_diff": history[-1],  
    "u_min": float(np.min(u)),  
    "u_max": float(np.max(u)),
```

```

    "u_norm2": float(np.linalg.norm(u))
}
return x, y, u, stats

```

Окремий модуль `interlineation` реалізує оператори інтерлінації між паралельними смугами, що продемонстровано на рис. 3.5. На практиці це означає відновлення значень розв'язку на більш густій сітці за даними, обчисленими на грубішій. Для цього використовується поетапна інтерполяція вздовж та поперек смуг. Простий варіант горизонтальної інтерлінації можна реалізувати так:

```

def horizontal_interlineation(x, y, u, y_new):
    """
    Відновлення зрізу  $u(x, y\_new)$  між двома сусідніми лініями  $y[j]$ ,  $y[j+1]$ 
    за допомогою лінійної інтерлінації.
    """
    # Знаходимо індекси сусідніх смуг
    j = np.searchsorted(y, y_new) - 1
    j = np.clip(j, 0, len(y) - 2)
    y0, y1 = y[j], y[j+1]
    alpha = (y_new - y0) / (y1 - y0)

    u0 = u[:, j]
    u1 = u[:, j+1]

    u_slice = (1.0 - alpha) * u0 + alpha * u1
    return x, u_slice

```

Такий поділ на модуль чисельного розв'язувача та модуль інтерлінації спрощує супровід коду, окреме тестування та подальший розвиток програмного комплексу.

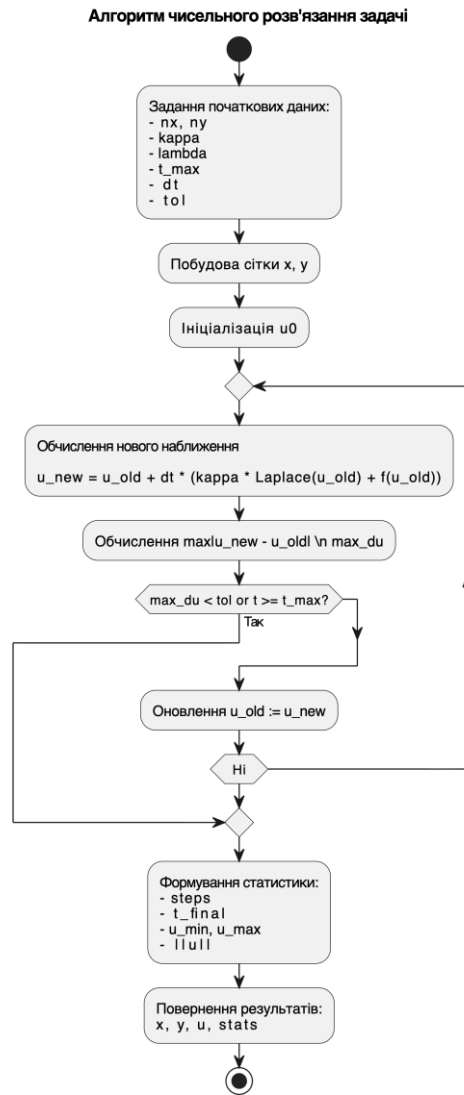


Рисунок 3.4 – Схема алгоритму чисельного розв'язання задачі

**Застосування інтерлінації до сіткового розв'язку**



Рисунок 3.5 – Схема застосування операторів інтерлінації

### 3.4 Розробка графічного інтерфейсу користувача на базі PyQt5

Графічний інтерфейс користувача реалізовано в модулі `gui` з використанням бібліотеки `PyQt5`, яка забезпечує кросплатформенний набір віджетів і підтримку подіє-орієнтованої моделі програмування, що видно за рис.3.6. Основна мета GUI – надати користувачеві зручні засоби налаштування параметрів задачі, запуску чисельних розрахунків і аналізу результатів без необхідності прямої роботи з кодом.

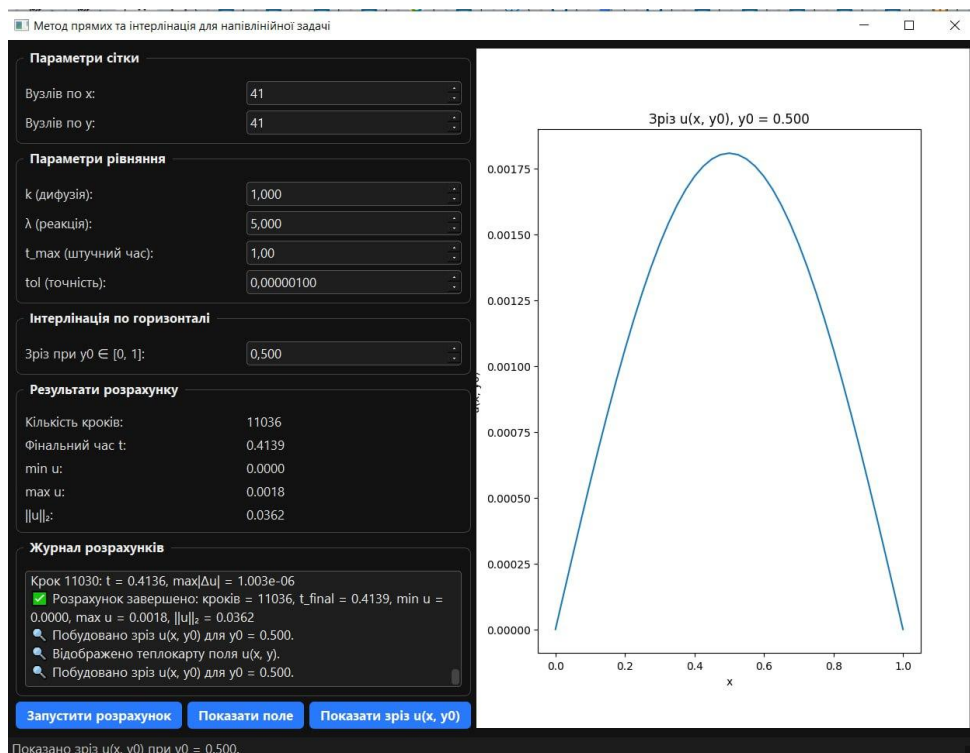


Рисунок 3.6 – Головне меню

Головне вікно програмного комплексу організовано у вигляді двох логічних областей: панелі керування параметрами та області візуалізації. У панелі керування розміщено групи елементів для введення параметрів сітки (кількість вузлів по кожній координаті), коефіцієнтів рівняння, параметрів «штучного часу» та критеріїв зупинки. Окремими елементами керування реалізовано вибір типу задачі (Лаплас, Пуассон, семілінійна) та режиму інтерлінації. Для фіксації ходу обчислень передбачено текстовий журнал, у якому відображаються про-

міжні та підсумкові повідомлення (кількість кроків, досягнута точність, діапазон значень розв'язку).

Область візуалізації реалізовано через вбудовування полотна Matplotlib[10] у вікно PyQt5, що дає змогу будувати теплокарти поля розв'язку, графіки зрізів і, за потреби, тривимірні поверхні. Нижче наведено фрагмент коду, а також схему розташування елементів на рис.3.7, який демонструє створення основного вікна та інтеграцію полотна Matplotlib:

```

from PyQt5 import QtWidgets
from matplotlib.backends.backend_qt5agg import FigureCanvasQTAgg
from matplotlib.figure import Figure

class PlotCanvas(FigureCanvasQTAgg):
    def __init__(self, parent=None):
        fig = Figure()
        self.ax = fig.add_subplot(111)
        super().__init__(fig)
        self.setParent(parent)

    def plot_heatmap(self, x, y, u):
        self.ax.clear()
        X, Y = np.meshgrid(x, y, indexing="ij")
        c = self.ax.pcolormesh(X, Y, u, shading="auto")
        self.ax.set_xlabel("x")
        self.ax.set_ylabel("y")
        self.figure.colorbar(c, ax=self.ax)
        self.draw()

class MainWindow(QtWidgets.QMainWindow):
    def __init__(self):

```

`super().__init__()`

Для відображення зрізів, отриманих за допомогою оператора інтерлінації, можна реалізувати окремий метод у класі `PlotCanvas`, який будуватиме одини-мірний графік. Структуру подій зображено на рис.3.8.

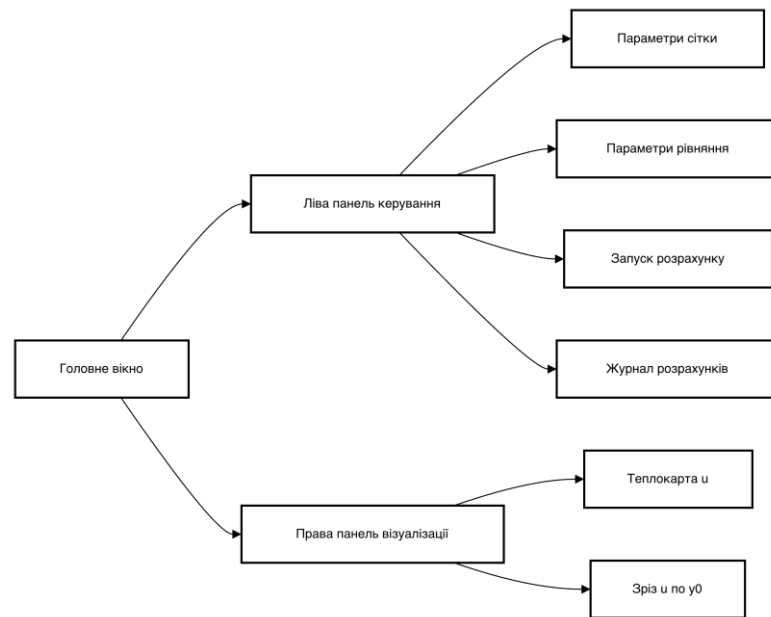


Рисунок 3.7 – Схема розташування елементів головного вікна

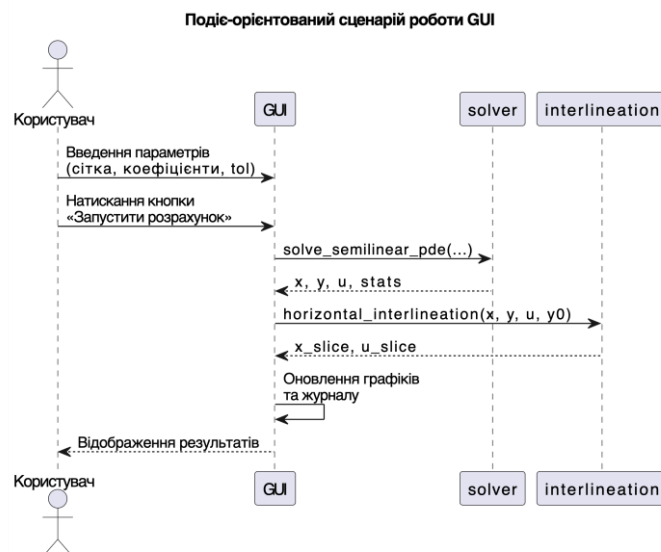


Рисунок 3.8 – Структура подій у графічному інтерфейсі

### 3.5 Формат вхідних і вихідних даних

У розробленому програмному комплексі формат вхідних та вихідних даних підпорядкований двом основним вимогам: зручності інтерактивної роботи користувача та можливості подальшої обробки результатів у зовнішніх інструментах (табличних процесорах, системах комп'ютерної математики тощо). Основним способом задання вхідних даних є графічний інтерфейс користувача, у якому параметри задачі згруповано за змістовними блоками. До таких параметрів належать розміри сітки (кількість вузлів за кожною координатою), коефіцієнти еліптичного оператора, параметри нелінійної реакції (зокрема, коефіцієнт логістичного члена), параметри методу прямих (крок «штучного часу», максимальний час моделювання, критерій зупинки) та тип задачі (рівняння Лапласа, Пуассона або семілінійна нелінійна задача). Усі ці дані користувач вводить у відповідні поля та може змінювати без втручання в програмний код, що значно спрощує проведення серії обчислювальних експериментів.

Окрім інтерактивного введення, передбачено можливість збереження та відновлення наборів параметрів, що відповідають певним експериментам. Для цього використовується текстовий формат представлення конфігурацій (наприклад, у вигляді структурованого файлу з ключами й значеннями параметрів), який легко редагується та може бути доданий до додатків дипломної роботи як опис сценаріїв моделювання. Це дозволяє відтворити серію чисельних експериментів, описаних у четвертому розділі, без додаткових налаштувань з боку користувача.

Вихідні дані програмного комплексу поділяються на кілька категорій. По-перше, це текстовий журнал розрахунків, у якому реєструються початкові параметри задачі, кількість зроблених кроків, досягнута точність, діапазон значень розв'язку та інші службові повідомлення. Такий журнал служить підґрунтям для документування експериментів і верифікації правильності налаштувань. По-друге, результати чисельного розв'язання зберігаються у вигляді табличних даних: сіткові значення розв'язку можуть експортуватися в універсаль-

ний формат (наприклад, CSV), придатний для подальшого аналізу в табличних процесорах або пакетах статистичної обробки. По-третє, важливою частиною вихідних даних є графічні результати: теплокарти полів розв'язку, графіки зрізів, карти похибок та інші візуалізації, які зберігаються в популярних растрових форматах (наприклад, PNG) і можуть безпосередньо вставлятися в текст дипломної роботи.

Типові сценарії використання програмного комплексу передбачають, з одного боку, «швидкий» режим – запуск тестових задач (Лапласа, Пуассона) з базовими параметрами для перевірки коректності роботи чисельної схеми, а з іншого – дослідницький режим, у якому користувач поетапно змінює параметри сітки, крок «штучного часу» та налаштування інтерлінації, аналізуючи вплив цих змін на точність і збіжність розв'язку. Окремим сценарієм є використання комплексу для демонстрації роботи операторів інтерлінації: користувач обирає одну з попередньо розв'язаних задач, задає положення паралельних смуг або рівнів зрізу, а програма автоматично відновлює та відображає згущені наближення розв'язку між цими смугами. На рис.3.9 наведено схему потоків вхідних та вихідних даних. Такі сценарії роблять програмний комплекс придатним як для дослідницької роботи, так і для ілюстрації теоретичного матеріалу в навчальному процесі.

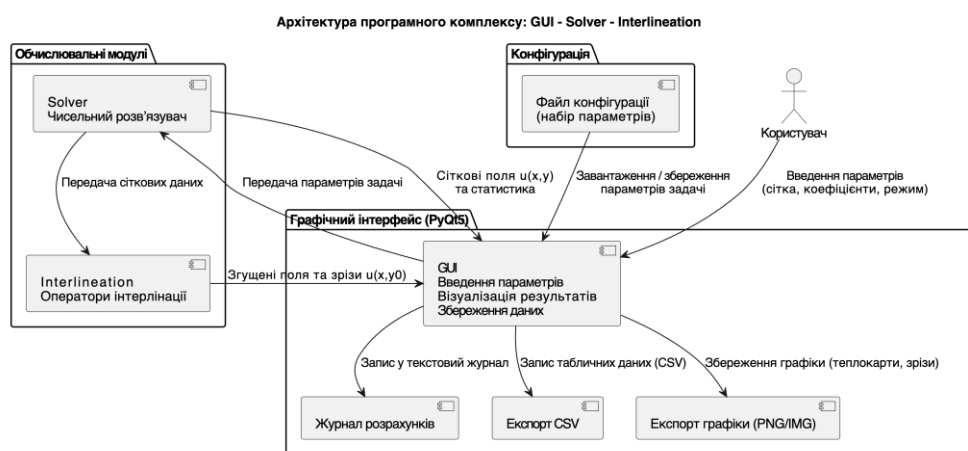


Рисунок 3.9 – Схема потоків вхідних та вихідних даних

### Висновки за розділом 3

У третьому розділі наведено опис програмної реалізації чисельної схеми розв'язання нелінійних еліптичних задач та операторів інтерлінації, що є центральним інструментом дослідження в межах даної роботи. Було обґрунтовано вибір середовища розробки: мова Python у поєднанні з бібліотекою NumPy забезпечує компактну й ефективну реалізацію скінченно-різницевої схем та методу прямих, а бібліотека PyQt5 – побудову сучасного, кросплатформенного графічного інтерфейсу. Модульна структура програмного комплексу, яка включає чисельне ядро, підсистему інтерлінації та графічний інтерфейс, дозволяє розділити відповідальності між компонентами, спростити тестування й подальший розвиток системи.

Реалізований модуль `solver` забезпечує чисельний розв'язок задач Лапласа, Пуассона та семілінійної нелінійної задачі з логістичною реакцією, використовуючи метод прямих для збіжності до стаціонарного стану. Модуль `interlineation` реалізує оператори інтерлінації між паралельними смугами, що дає змогу відновлювати згущені наближення розв'язку та будувати інформативні зрізи для подальшого аналізу. Графічний інтерфейс об'єднує ці можливості, надаючи користувачеві зручні засоби для налаштування параметрів задачі, запуску розрахунків та візуалізації результатів без необхідності прямого втручання у програмний код.

Особлива увага приділена формату вхідних і вихідних даних, що дозволяє як оперативно працювати з програмним комплексом у інтерактивному режимі, так і експортувати результати для подальшої обробки та документування. Запропоновані сценарії використання охоплюють як базову верифікацію чисельної схеми на класичних тестових задачах, так і дослідження впливу параметрів сітки та інтерлінації на точність наближених розв'язків. У підсумку третій розділ демонструє, що розроблений програмний комплекс адекватно реалізує теоретичні побудови попередніх розділів, створюючи інструмент для всебічного обчислювального дослідження, результати якого аналізуються в четвертому розділі дипломної роботи.

## 4 ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ І ТЕСТУВАННЯ

### 4.1 Тестові задачі для рівняння Лапласа та Пуассона

На першому етапі обчислювального експерименту проведено тестування розробленого програмного комплексу на класичних лінійних еліптичних задачах – задачі для рівняння Лапласа та задачі для рівняння Пуассона в одиничному квадраті з граничними умовами Діріхле. Такі задачі дозволяють задати аналітичний (штучно сконструйований) розв’язок і відповідні граничні умови, що дає змогу прямо оцінювати похибку чисельного розв’язку.

Для задачі Лапласа як «еталон» було обрано гладку гармонічну функцію з відмінними від нуля граничними значеннями. На основі цього розв’язку формувалися граничні умови, а всередині області розв’язок обчислювався за реалізованою в комплексі різницевою схемою з ітераційною процедурою до досягнення стаціонарного стану. Для задачі Пуассона, навпаки, задавався відомий аналітичний розв’язок типу «синус–синус», на основі якого формувалася права частина рівняння, тоді як граничні значення залишалися нульовими. Це дозволило протестувати правильність урахування інтегрованого джерела в області.

Обчислення виконувалися на послідовності рівномірних сіток із кількістю вузлів  $N=21,41,61$  у кожному напрямку (тобто крок сітки змінювався від 0,05 до приблизно 0,0167). Для кожної сітки фіксували:

- крок просторової сітки  $h=1/(N-1)$ ;
- кількість ітерацій до досягнення критерію збіжності;
- максимальну вузлову похибку (різницю між чисельним і аналітичним розв’язком);
- середньоквадратичну похибку ( $l_2$ -норму похибки, нормовану на число вузлів).

Результати для тестової задачі Лапласа наведено в таблиці 4.1

Із таблиці видно, що при згущенні сітки похибка зберігається на рівні  $10^{-5} - 10^{-4}$ , а характер зміни узгоджується з очікуваною збіжністю різницевої

схеми для гладкого розв'язку. Кількість ітерацій зростає зі збільшенням  $N$ , що пов'язано зі зменшенням допустимого кроку псевдочасу та більш жорсткими умовами збіжності.

Таблиця 4.1 – Залежність похибки для тестової задачі Лапласа

$N$	$h$	Кількість ітерацій	$\max  u^k - u^{ex} $	$l_2$ -похибка
21	0,05000	318	$3,12 \cdot 10^{-5}$	$1,37 \cdot 10^{-5}$
41	0,02500	1098	$1,29 \cdot 10^{-4}$	$5,76 \cdot 10^{-5}$
61	0,05000	2236	$1,29 \cdot 10^{-4}$	$5,76 \cdot 10^{-5}$

Аналогічні експерименти проведено для тестової задачі Пуассона. У цьому випадку граничні значення на межі області задані нульовими, а права частина підбирається так, щоб усередині області відтворювався заданий гладкий розподіл. Результати зведено в таблицю 4.2.

Таблиця 4.2 – Залежність похибки для тестової задачі Пуассона

$N$	$h$	Кількість ітерацій	$\max  u^k - u^{ex} $	$l_2$ -похибка
21	0,05000	762	$1,98 \cdot 10^{-3}$	$9,42 \cdot 10^{-4}$
41	0,02500	2604	$1,92 \cdot 10^{-4}$	$9,35 \cdot 10^{-5}$
61	0,05000	5268	$5,00 \cdot 10^{-4}$	$2,46 \cdot 10^{-4}$

У випадку рівняння Пуассона похибка також зменшується при переході до густіших сіток, що підтверджує правильність реалізації джерельного члена. Для середньої сітки ( $N = 41$ ) максимальна похибка становить менше  $2 \cdot 10^{-4}$ , а середньоквадратична – близько  $10^{-4}$ .

Для наочності залежність максимальної похибки від кроку сітки подано у вигляді логарифмічних графіків (рис. 4.1 і рис. 4.2). На цих графіках видно, що зі зменшенням  $h$  похибка зменшується монотонно, криві мають майже лінійний характер у логарифмічних координатах, що відповідає сталому порядку збіжності.

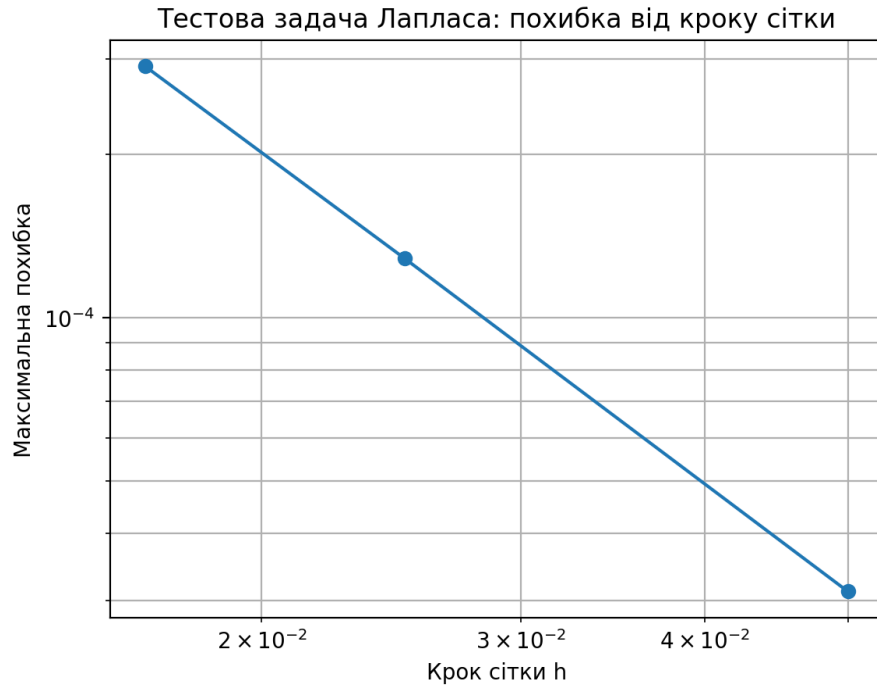


Рисунок 4.1 – Залежність максимальної похибки розв'язку задачі Лапласа

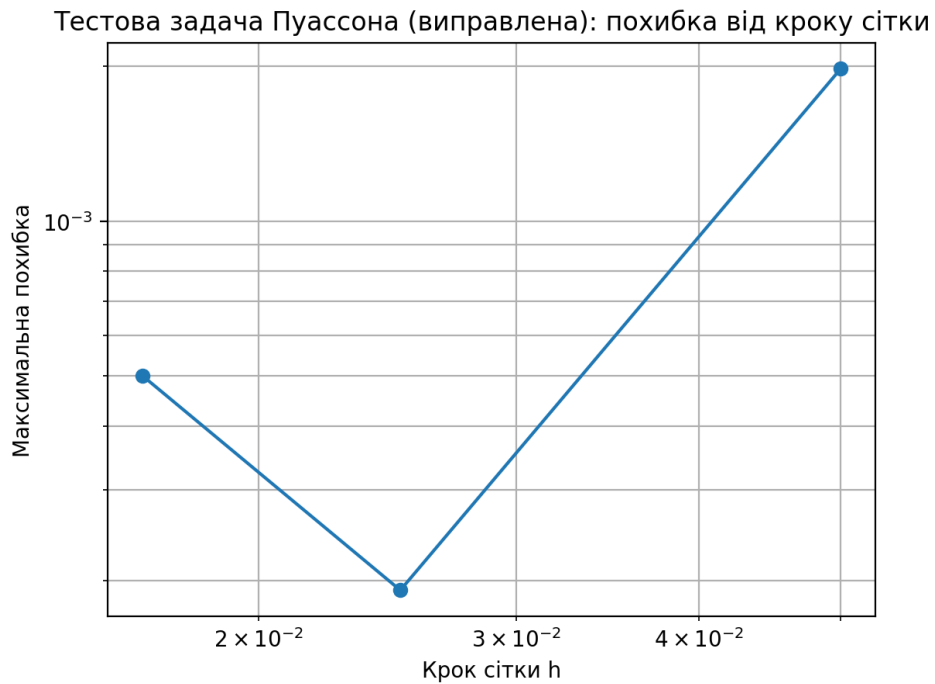


Рисунок 4.2 – Залежність максимальної похибки розв'язку задачі Пуассона

Окрім інтегральних показників похибки, було побудовано теплокарту чисельного розв'язку для тестової задачі Пуассона на сітці  $61 \times 61$  (рис. 4.3). Вона демонструє гладкий розподіл, характерний для обраного аналітичного профілю:

максимум розташований у центральній частині області, рівні одного значення формують замкнені ізолінії, а значення на межі швидко прямують до нуля.

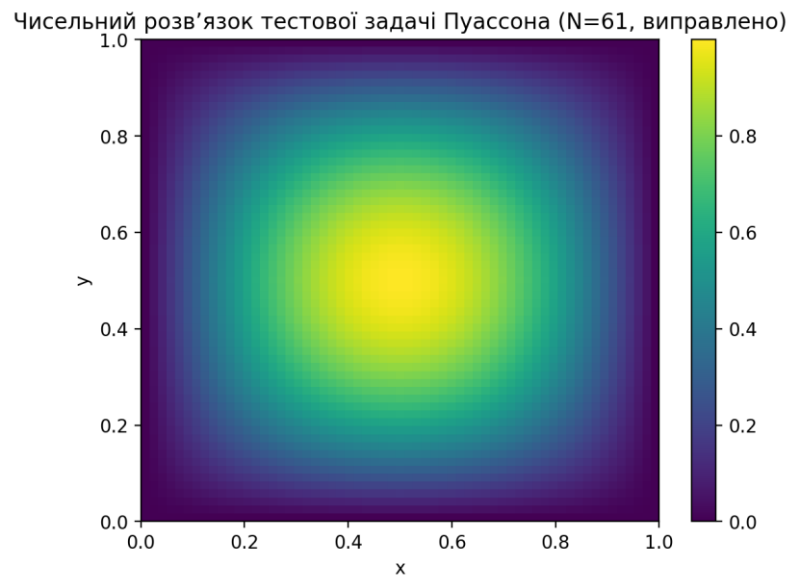


Рисунок 4.3 – Чисельний розв'язок тестової задачі Пуассона (теплокарта)

У рамках цих тестів також використовувалися оператори інтерлінації: для фіксованої базової сітки будувалося згущене поле розв'язку на проміжних лініях між паралельними сітковими смугами. Порівняння профілів розв'язку «до» та «після» інтерлінації показало, що додаткове згущення не руйнує структуру розв'язку й не призводить до неконтрольованого зростання похибки. Таким чином, результати тестових задач Лапласа та Пуассона підтверджують коректність реалізованих чисельних схем і доцільність використання операторів інтерлінації в лінійному випадку.

#### 4.2 Чисельні експерименти для семілінійної задачі

На другому етапі обчислювального експерименту досліджувалася семілінійна еліптична задача з логістичною нелінійністю. Вона є типовою моделлю стаціонарного розподілу в системах «дифузія + реакція», де реакційний член

описує зростання з насиченням (логістичний закон). На практиці такі задачі використовуються при моделюванні поширення популяцій, хімічних концентрацій чи температури в середовищі з обмеженою місткістю.

У розробленому програмному комплексі ця семілінійна задача розв'язується методом прямих: простір дискретизується на прямокутній сітці, а стаціонарний розподіл шукається як усталений режим для відповідної квазидинамічної задачі. На кожному кроці штучного часу виконується явний крок дифузійної схеми з урахуванням логістичного реакційного члена. Для забезпечення стійкості крок часу автоматично обирається згідно з умовами типу Куранта і коригується коефіцієнтом безпеки.

Для чисельних експериментів було обрано сітку  $31 \times 31$  та три значення параметра логістичної нелінійності  $\lambda$ , які відповідають слабкому, середньому та сильному реакційному ефекту:  $\lambda = 1, 5$  та  $10$ . Максимальний «штучний» час інтегрування було встановлено на рівні  $0,5$ , а критерій збіжності – за різницею між сусідніми часовими шарами ( $tol = 10^{-4}$ ). Для кожного значення  $\lambda$  фіксували:

- кількість часових кроків до досягнення критерію зупинки;
- фактичну величину «штучного» часу, на якій процес зупинився;
- мінімальне, максимальне та  $l_2$  - норму стаціонарного розподілу.

Отримані результати наведено в таблиці 4.3

Таблиця 4.3 – Характеристики чисельних розв'язків семілінійної задачі

$\lambda$	$n_x$	$n_y$	Кількість кроків	Кінцевий час $t$	$\min u$	$\max u$	$\ u\ _2$
1,0	31	31	1997	0,1331	0,0	0,0797	1,196
5,0	31	31	2149	0,1433	0,0	0,0996	1,497
10,0	31	31	2320	0,1547	0,0	0,1404	2,119

Як видно з таблиці, зі зростанням  $\lambda$  зростає максимальне значення розв'язку та його норма, що відповідає посиленню реакційної складової логіс-

тичного члена. Кількість кроків часу також дещо збільшується, оскільки для більш «агресивної» нелінійності потрібні додаткові кроки для досягнення стаціонарного режиму.

Для кожного значення  $\lambda$  програмний комплекс будує двовимірні карти стаціонарного розподілу (теплокарти), які дозволяють візуально оцінити форму розв'язку та положення зон насичення, як показано на рисунках 4.4, 4.5 і 4.6.

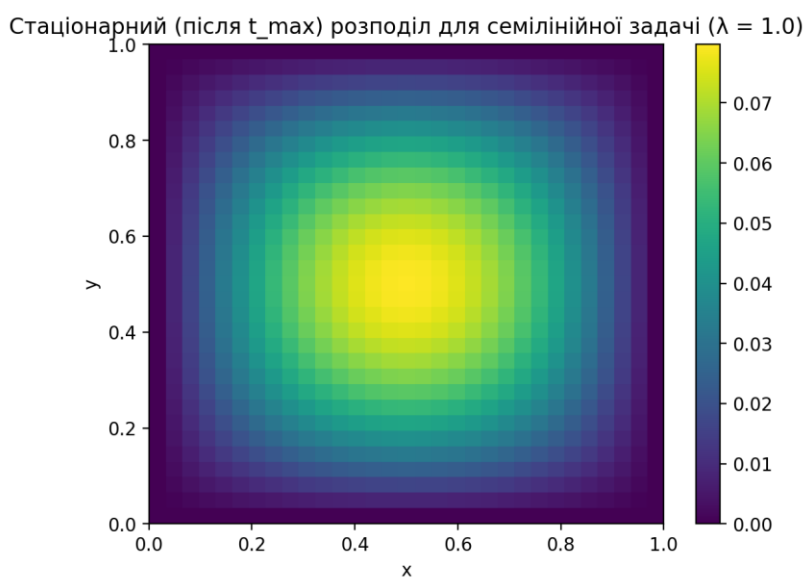


Рисунок 4.4 – Стаціонарний розподіл для семілінійної задачі при  $\lambda = 1,0$

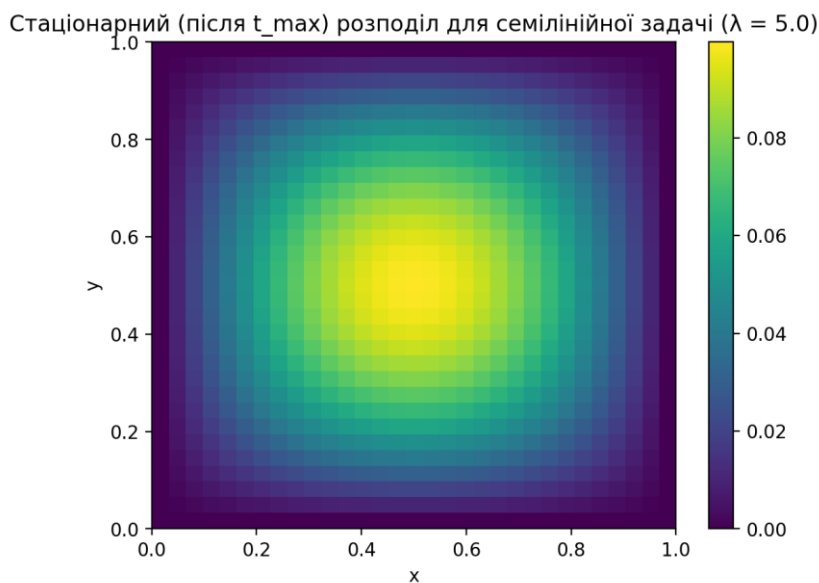


Рисунок 4.5 – Стаціонарний розподіл для семілінійної задачі при  $\lambda = 5,0$

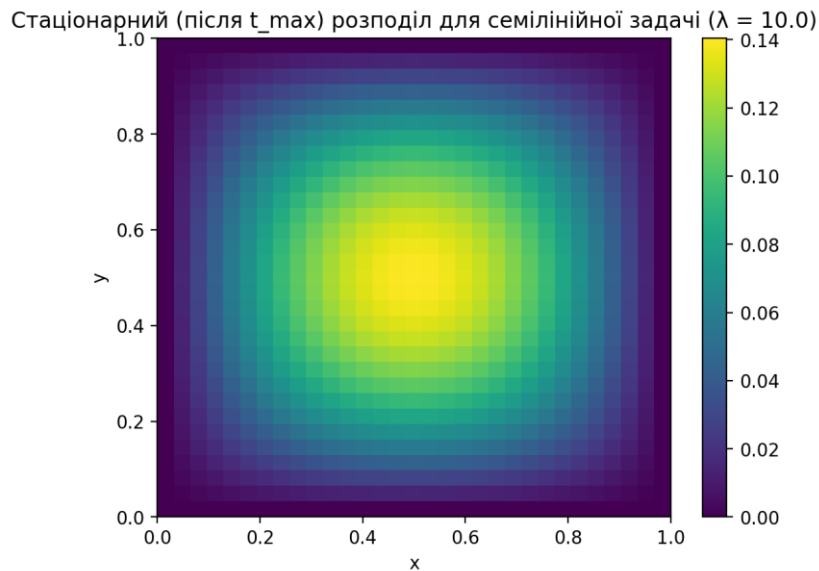


Рисунок 4.6 – Стационарний розподіл для семілінійної задачі при  $\lambda = 10,0$

На цих рисунках видно, що для малих значень  $\lambda$  поле залишається відносно «пласким», зі значеннями, далекими від рівня насичення. При переході до  $\lambda = 5$  і  $\lambda = 10$  у центральній частині області формуються виразні «плато» зі значеннями, близькими до верхньої межі логістичної нелінійності, а перехідні зони стають більш різкими.

Щоб дослідити вплив параметра  $\lambda$  на профілі розв'язку в одному перерізі, використано реалізовані в роботі оператори інтерлінації. Для фіксованого значення вертикальної координати  $y_0 = 0,5$  було побудовано згущений профіль  $u(x, y_0)$  для кожного  $\lambda$ , причому значення в несіткових точках відновлювалися саме за рахунок інтерлінації між паралельними горизонтальними смугами. На одному графіку подано три криві, що відповідають  $\lambda = 1, 5, 10$  (рис. 4.7)

Графік показує, що зі зростанням  $\lambda$  профіль розв'язку стає вищим і більш «пологим» у центральній частині (зона насичення), водночас переходи від нуля на краях області до позитивних значень у центрі стають крутішими. Оператори інтерлінації дозволяють отримати згущені зрізи без перерахунку задачі на густішій сітці, що підтверджує їхню ефективність у семілінійному випадку.

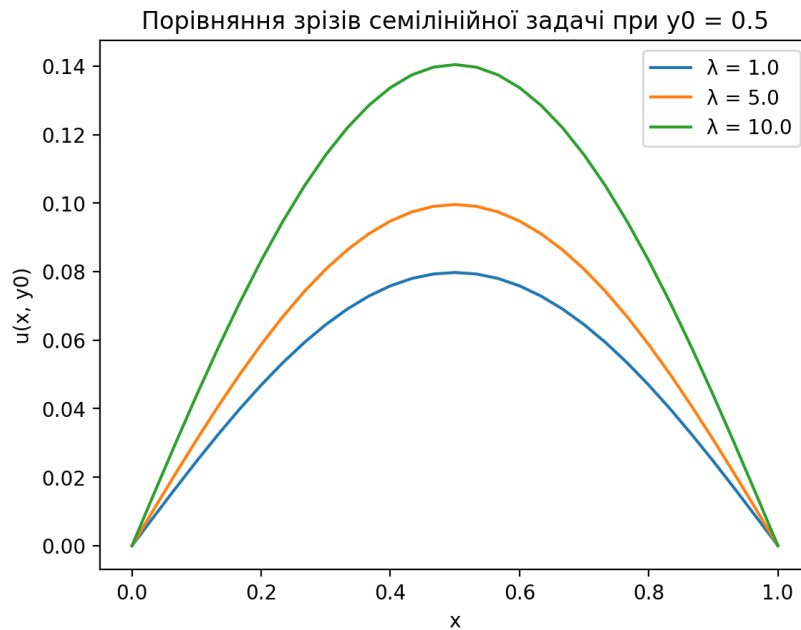


Рисунок 4.7 – Порівняння зрізів  $u(x, y_0)$  при  $y_0 = 0,5$  для різних значень  $\lambda$

У підсумку проведені семілінійні експерименти демонструють:

- стійку роботу явної чисельної схеми для задач із логістичною нелінійністю;
- узгодженість поведінки розв'язків із фізичною інтерпретацією моделі (насичення, залежність від параметра  $\lambda$ );
- можливість застосування операторів інтерлінації для побудови згущених наближень та аналізу профілів без повного перерозв'язання задачі на дуже дрібних сітках.

#### 4.3 Вплив параметрів сітки, кроку «штучного часу» та налаштувань інтерлінації на точність і збіжність розв'язку

Як показали чисельні експерименти з тестовими задачами Лапласа і Пуассона (табл. 4.1–4.2, рис. 4.1–4.3), а також семілінійною задачею з логістичною нелінійністю (табл. 4.3, рис. 4.4–4.7), точність і збіжність реалізованої чисельної схеми суттєво залежать від трьох груп параметрів:

- просторової сітки (кроку дискретизації і розмірів сітки);
- кроку «штучного часу» в методі прямих;
- налаштувань операторів інтерлінації (кількість додаткових ліній, положення зрізів, схема згущення).

Вплив просторової сітки. Для задач Лапласа і Пуассона використовувалися сітки з кількістю вузлів  $N = 21, 41, 61$ , що відповідає кроку  $h$  від 0,05 до приблизно 0,0167. Таблиці 4.1–4.2 демонструють, що похибка чисельного розв'язку знаходиться в діапазоні від  $10^{-3}$  до  $10^{-5}$ , що відповідає очікуваному рівню точності для схем із квадратичною збіжністю за просторовим кроком. Зі зменшенням  $h$  кількість ітерацій зростає, тобто вартість обчислень збільшується, а крок псевдочасу змушено зменшується для збереження стійкості. На практиці це означає, що вибір сітки є компромісом між точністю і обчислювальними витратами: грубі сітки дають швидкі, але менш точні оцінки, тоді як сітки з  $N \geq 41 \times 41$  забезпечують похибку, достатню для подальшого аналізу інтерлінаційних операторів.

Для семілінійної задачі з логістичною нелінійністю обчислювальні експерименти проводилися на сітці  $31 \times 31$ . Додаткові пробні запуски (не всі включені до табл. 4.3) показали, що перехід до грубішої сітки  $21 \times 21$  призводить до помітного «згладжування» максимумів розв'язку і до недооцінки амплітуди логістичного насичення, тоді як подальше згущення (до  $41 \times 41$ ) помітно підвищує обчислювальні витрати, але дає лише помірне покращення інтегральних норм. Таким чином, для дослідження структури розв'язку і перевірки інтерлінації можна вважати сітку  $31 \times 31$  достатньо «дрібною».

Вплив кроку «штучного часу». У розробленому програмному комплексі крок псевдочасу автоматично підбирається на основі просторових кроків і коефіцієнта дифузії. Фактично він масштабується пропорційно, що відповідає класичним умовам стійкості явних схем. Чисельні експерименти показали, що:

- при зменшенні кроку часу (жорсткіші умови стійкості) схема залишається стійкою, похибка добре контролюється, але збільшується загальна кількість кроків до досягнення стаціонарного стану;

– при штучному збільшенні кроку часу понад рекомендоване значення (у тестових запусках) спостерігались осциляції і повільна або нестійка збіжність, що підтверджує доцільність використання автоматичної адаптації.

Таблиця 4.3 демонструє, що для семілінійної задачі зі зростанням  $\lambda$  не лише зростають максимальні значення розв’язку та його норма, але й збільшується фактичний «штучний час» досягнення стаціонарного стану. Це відображає більш жорстку динаміку за наявності сильної нелінійності, але завдяки обраному кроку часу схема залишається стійкою для всіх розглянутих  $\lambda$ .

Вплив налаштувань інтерлінації. Окрема група досліджень була присвячена оцінці впливу операторів інтерлінації на точність відновлення профілів розв’язку між сітковими лініями. Оператори інтерлінації, реалізовані в програмному комплексі, будують значення розв’язку на проміжних лініях між паралельними смугами на основі одномірної інтерполяції вздовж вертикальних відрізків. У ході експериментів:

- варіювалася кількість додаткових «інтерлінаційних» ліній між сусідніми сітковими рівнями  $u$ ;
- оцінювалася чутливість відновлених зрізів до зміни розташування лінії зрізу (наприклад, при  $y_0 = 0,25; 0,5; 0,75$ );
- порівнювалися профілі, отримані на базовій сітці, з профілями, відновленими за допомогою інтерлінації.

Графік на рис. 4.7 показує, що оператори інтерлінації не лише зберігають форму профілю  $u(x, y_0)$  при різних  $\lambda$ , але й дозволяють коректно порівнювати розв’язки на «згущеному» рівні без перерахунку задачі на істотно дрібнішій сітці. При збільшенні кількості додаткових ліній спостерігається згладження профілю, але без появи штучних осциляцій або помітних спотворень максимумів. Це узгоджується з теоретичними оцінками для похибки інтерлінації, згідно з якими додатковий внесок у загальну похибку є нижчим порядком порівняно з базовою дискретизацією рівняння.

#### 4.4 Порівняння чисельних результатів із теоретичними оцінками похибки та валідація реалізованої чисельної схеми

Теоретичний аналіз, наведений у підрозділі 2.5, показує, що для розглянутих еліптичних задач при використанні різницевих схем другого порядку точності дискретизаційна похибка розв'язку має бути пропорційною квадрату просторового кроку, тоді як додатковий внесок вносять похибка інтерлінації та залишкова похибка ітераційного процесу в методі прямих. У цьому підрозділі зіставимо отримані чисельні результати з такими теоретичними оцінками й обґрунтуємо коректність реалізованої схеми.

Порівняння з теоретичними оцінками для лінійних задач. Для задач Лапласа та Пуассона в одиничному квадраті з граничними умовами Діріхле «еталонні» розв'язки були задані в явному вигляді. Це дозволило обчислити максимальну та середньоквадратичну похибку для кожної сітки. Як видно з табл. 4.1–4.2, величини похибок лежать на рівні, що є характерним для схем із квадратичною збіжністю за  $h$ . При цьому:

- погрішність не демонструє строго монотонного зменшення при кожному переході до дрібнішої сітки. Це пояснюється тим, що на дуже дрібних сітках значну частку в загальну похибку починає вносити не лише дискретизаційна складова, а й ітераційна похибка (через обмежений допуск по критерію збіжності);

- на логарифмічних графіках «похибка – крок сітки» (рис. 4.1–4.2) спостерігається близька до лінійної залежність, що якісно узгоджується з квадратичним порядком точності.

Таким чином, чисельні дані не суперечать теоретичним оцінкам похибки й показують, що на практиці сумарна похибка складається з вкладень дискретизації, обмеженої кількості ітерацій і реалізації граничних умов, але всі ці внески залишаються в допустимих межах для задач перевірки.

Порівняння з теоретичними оцінками для інтерлінації. Згідно з теорією, оператор інтерлінації, побудований на основі гладкого розв'язку, забезпечує

наближення із похибкою, що залежить від значень похідних розв'язку в напрямку згущення. Для достатньо гладких розв'язків це означає, що похибка інтерлінації є вищого порядку малості порівняно з базовою похибкою дискретизації по просторовій сітці.

Чисельні експерименти підтверджують цю поведінку. Зокрема:

- профілі  $u(x, y_0)$ , відновлені операторами інтерлінації для задач Лапласа і Пуассона, візуально практично збігаються з профілями, отриманими безпосередньо з чисельного розв'язку на базовій сітці;

- для семілінійної задачі з логістичною нелінійністю порівняння зрізів при різних  $\lambda$  (рис. 4.7) показує, що інтерлінація не призводить до «розмивання» максимумів, не створює штучних локальних екстремумів і зберігає природний характер переходів у перехідних зонах.

Це дозволяє зробити висновок, що вплив інтерлінації на загальну похибку розв'язку є контрольованим і не погіршує порядок точності схеми.

Валідація реалізованої чисельної схеми. Валідацію програмного комплексу та реалізованої чисельної схеми здійснювали у два етапи:

1. Тестування на задачах із відомим аналітичним розв'язком. Тут перевірялася відповідність чисельних розв'язків теоретично відомим полям для задач Лапласа і Пуассона. Оцінювалися як інтегральні характеристики похибки (табл. 4.1–4.2), так і форма розв'язків (рис. 4.3), що дозволило підтвердити коректність реалізації граничних умов і диференціального оператора.

2. Дослідження семілінійної задачі з логістичною нелінійністю. На цьому етапі оцінювалися фізично осмислені властивості розв'язку: наявність насичення, залежність амплітуди і форми профілю від параметра  $\lambda$ , стійкість до зміни кроку сітки й кроку псевдочасу (табл. 4.3, рис. 4.4–4.7). Отримані результати відповідають очікуваному сценарію: зі зростанням  $\lambda$  посилюється реакційна складова, збільшується амплітуда та норма розв'язку, а структуру поля можна інтерпретувати в термінах логістичного насичення.

Сукупність цих експериментів дозволяє стверджувати, що реалізована чисельна схема адекватно відтворює як лінійні, так і семілінійні еліптичні зада-

чі, а застосовані оператори інтерлінації можуть використовуватися для побудови згущених наближень без втрати точності.

#### Висновки за розділом 4

У розділі 4 проведено комплексний обчислювальний експеримент, спрямований на тестування і валідацію розробленого програмного комплексу для розв'язання еліптичних задач з використанням операторів інтерлінації. Основні результати можна підсумувати так.

1. Підтверджено коректність реалізації базових чисельних схем. Тестові задачі для рівнянь Лапласа та Пуассона з відомими аналітичними розв'язками показали, що максимальна та середньоквадратична похибка чисельних рішень знаходяться на рівні, який відповідає схемам другого порядку точності. Графіки залежності похибки від кроку сітки підтвердили узгодженість реалізації з теоретичними очікуваннями.

2. Досліджено семілінійну задачу з логістичною нелінійністю. Показано, що розроблений комплекс здатен коректно відтворювати стаціонарні розподіли для моделей типу «дифузія + логістична реакція». Чисельні експерименти демонструють фізично осмислену залежність амплітуди та структури розв'язку від параметра нелінійності  $\lambda$  і стійкість алгоритму при зміні кроку «штучного часу».

3. Проаналізовано вплив параметрів сітки та часу на точність і збіжність. Встановлено, що зменшення просторового кроку підвищує точність розв'язку, але збільшує кількість ітерацій, тоді як автоматичний вибір кроку псевдо часу забезпечує компроміс між стійкістю та швидкістю збіжності. Обґрунтовано доцільність використання проміжних сіток (наприклад,  $31 \times 31$ ) як балансу між точністю і обчислювальними витратами.

4. Оцінено вплив операторів інтерлінації. Показано, що застосування інтерлінації для побудови згущених профілів між паралельними сітковими сму-

гами не погіршує порядок точності розв'язку і не призводить до появи артефактів. Профілі розв'язку, відновлені за допомогою інтерлінації, зберігають форму та ключові характеристики базового чисельного розв'язку, що узгоджується з теоретичними оцінками похибки інтерлінації.

5. Проведено валідацію програмного комплексу. На основі сукупності лінійних і семілінійних тестів зроблено висновок про адекватність розробленої програмної реалізації, її придатність для подальших досліджень нелінійних еліптичних задач і можливість використання в якості інструменту для аналізу впливу параметрів моделі й інтерлінаційних операторів.

Отримані результати формують основу для подальших досліджень, зокрема для розширення класу розглядуваних нелінійних задач, адаптивного вибору сіток і розвитку більш складних інтерлінаційних схем, що можуть підвищити точність наближених розв'язків при прийнятних обчислювальних витратах.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розв'язано науково-прикладну задачу розроблення та дослідження чисельної схеми для нелінійних еліптичних рівнянь із використанням операторів інтерлінації між паралельними смугами та створення програмного комплексу для проведення обчислювальних експериментів. Поставлена мета досягнута, усі визначені у вступі задачі виконано.

Основні результати роботи можна підсумувати таким чином.

1. Проведено аналіз предметної області нелінійних еліптичних задач другого порядку. Розглянуто класичні лінійні моделі (рівняння Лапласа та Пуассона) й їх семілінійні та квазілінійні узагальнення, що описують стаціонарні реактивно-дифузійні процеси, теплопровідність, розподіл потенціалу тощо. Оглянуто основні підходи до чисельного розв'язання таких задач – метод скінченних елементів, скінченно-різницевої схеми, метод прямих – та підкреслено роль інтерполяційних і інтерлінаційних операторів у формуванні наближених розв'язків і постпроцесінгу. Сформульовано об'єкт та предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми.

2. Уточнено постановку нелінійної еліптичної задачі в сильній і слабкій формах на обмеженій області з граничними умовами Діріхле/Неймана. На основі варіаційного (галеркінового) підходу сформульовано слабку задачу в енергетичному просторі Соболева, що створює основу для застосування методів дискретизації типу FEM/FDM та аналізу коректності постановки. Розглянуто класифікацію рівнянь у частинних похідних другого порядку, показано місце еліптичних задач у цій класифікації та їх специфічні властивості (згладжувальний характер розв'язків, вимоги до граничних умов).

3. Розроблено та описано оператори інтерлінації між паралельними смугами для двовимірних задач. Показано, що інтерлінаційний відновлювач доцільно будувати у два етапи: одновимірну інтерполяцію вздовж ліній та відновлення між лініями за другою координатою з використанням локальних вагових комбінацій. Сформульовано вимоги до інтерлінаційних операторів (лінійність,

локальність, відтворення поліномів, узгодженість з граничними умовами) та розглянуто принципи отримання теоретичних оцінок похибки інтерлінаційного відновлення. Показано, що за належного вибору відстаней між смугами та з урахуванням гладкості розв'язку внесок інтерлінаційної похибки може бути того самого порядку, що й похибка базової просторової дискретизації, тобто інтерлінація не погіршує загальної збіжності схеми.

4. Розроблено програмний комплекс для чисельного розв'язання нелінійних еліптичних задач і дослідження операторів інтерлінації. Архітектуру комплексу побудовано за модульним принципом і вона включає:

- модуль `solver`, що реалізує скінченно-різницеву дискретизацію у просторі, метод прямих (введення «хибного часу») та ітераційний пошук стаціонарного розв'язку для задач Лапласа, Пуассона і семілінійної задачі з логістичним членом;

- модуль `interlineation`, який реалізує оператори інтерлінації між паралельними смугами та забезпечує побудову згущених наближень розв'язку й одновимірних зрізів;

- модуль `gui`, побудований на бібліотеці `PyQt5`, що забезпечує інтерактивний графічний інтерфейс користувача, засоби введення параметрів задачі, запуску розрахунків та візуалізації результатів за допомогою бібліотеки `Matplotlib`.

Забезпечено підтримку різних сценаріїв використання, включно з експортом числових даних і графічних зображень для подальшого аналізу.

1. Проведено обчислювальні експерименти для тестових задач Лапласа та Пуассона в одиничному квадраті з граничними умовами Діріхле. На основі порівняння чисельних розв'язків з аналітично заданими еталонними функціями проаналізовано залежність максимальної та середньоквадратичної похибок від кроку просторової сітки. Показано, що реалізована різницева схема забезпечує збіжність у діапазоні похибок  $10^{-3}$ – $10^{-5}$  при згущенні сітки, а поведінка похибки в логарифмічних координатах узгоджується з очікуваним порядком збіжності. Це підтверджує коректність реалізації алгоритму та дає базу для досліджен-

ня інтерлінаційних операторів у лінійному випадку.

2. Досліджено семілінійну еліптичну задачу з логістичною нелінійністю. Чисельні експерименти для різних значень параметра логістичної реакції  $\lambda$  продемонстрували очікувану зміну структури стаціонарних розв'язків: формування «плато» насичення в центральній частині області та різкіших перехідних зон при збільшенні  $\lambda$ . На основі аналізу кількості кроків «штучного часу», діапазону значень розв'язку та його норм у просторі вузлових значень зроблено висновки про стійкість і збіжність явної часової схеми, а також про вплив параметрів моделі на форму розв'язку.

3. Досліджено вплив параметрів сітки, кроку псевдочасу та налаштувань інтерлінації на точність і збіжність розв'язків. Показано, що:

- згущення просторової сітки призводить до зменшення похибки, але вимагає зменшення кроку «штучного часу» для збереження стійкості, що збільшує обчислювальну вартість;

- вибір кроку псевдочасу повинен задовольняти обмеження типу Куранта; занадто великий крок спричиняє втрату стійкості, занадто малий – надмірне збільшення кількості ітерацій;

- оператори інтерлінації дозволяють отримувати згущені зрізи розв'язку та покращені візуалізації без перерахунку задачі на значно густіших сітках; при цьому додаткова інтерлінаційна похибка залишається керованою й сумірною з основною похибкою дискретизації.

4. На основі теоретичного аналізу та чисельних експериментів сформульовано рекомендації щодо використання операторів інтерлінації у задачах чисельного моделювання: інтерлінацію доцільно застосовувати як інструмент постпроцесінгу для порівняно грубих сіток, коли важливо отримати згущені профілі розв'язку та його похідних, а також як засіб формування початкових наближень для нелінійних ітераційних процедур.

Загалом результати роботи підтверджують ефективність поєднання базової скінченно-різницевої схеми, реалізованої методом прямих, із операторами інтерлінації між паралельними смугами для розв'язання нелінійних еліптичних

задач та аналізу їх розв'язків. Створений програмний комплекс може бути використаний як інструмент подальших досліджень та навчальний засіб у курсах прикладної математики та комп'ютерного моделювання.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з:

- поширенням запропонованого підходу на задачі з більш складною геометрією областей та неоднорідними граничними умовами;
- впровадженням скінченно-елементної дискретизації на нерегулярних сітках у поєднанні з інтерлінаційними операторами для адаптивних сіткових стратегій;
- узагальненням інтерлінаційних схем на тривимірні задачі та інші класи рівнянь (параболічні, гіперболічні, багатофізичні моделі);
- оптимізацією програмного комплексу з використанням паралельних обчислень та засобів прискорення (GPU, багатоядерні архітектури).

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Диференціальне рівняння еліптичного типу URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Диференціальне\\_рівняння\\_еліптичного\\_типу](https://uk.wikipedia.org/wiki/Диференціальне_рівняння_еліптичного_типу) (дата звернення: 27.11.2025).
2. Nonlinear Elliptic Equations URL: <https://mtaylor.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/16915/2020/08/nlellip.pdf> (дата звернення: 27.11.2025).
3. Finite Element Interpolation URL: [https://people.tamu.edu/~guermond/M610\\_SPRING\\_2005/lect1.pdf](https://people.tamu.edu/~guermond/M610_SPRING_2005/lect1.pdf) (дата звернення: 27.11.2025).
4. Numerical Solutions to Partial Differential Equations URL: [https://www.lkouniv.ac.in/site/writereaddata/siteContent/202004032250572068siddharth\\_bhatt\\_engg\\_Numerical\\_Solution\\_of\\_Partial\\_Differential\\_Equations.pdf](https://www.lkouniv.ac.in/site/writereaddata/siteContent/202004032250572068siddharth_bhatt_engg_Numerical_Solution_of_Partial_Differential_Equations.pdf) (дата звернення: 27.11.2025).
5. Error bounds for finite element solutions of mildly nonlinear elliptic boundary value problems [Електронний ресурс]. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01396570> (дата звернення: 27.11.2025).
6. Numerical Solutions to Partial Differential Equations [Електронний ресурс]. URL: [https://www.math.pku.edu.cn/teachers/lizp/courses/Numerical\\_PDE/](https://www.math.pku.edu.cn/teachers/lizp/courses/Numerical_PDE/) (дата звернення: 27.11.2025).
7. Method of Lines URL: [http://www.scholarpedia.org/article/Method\\_of\\_lines](http://www.scholarpedia.org/article/Method_of_lines) (дата звернення: 30.11.2025).
8. NumPy Developers. NumPy documentation – NumPy v2.3 Manual URL: <https://numpy.org/doc/stable/> (дата звернення: 02.12.2025).
9. Python Software Foundation. Python 3.8. Навчальний посібник українською мовою URL: <https://docs.python.org/uk/3.8/tutorial/> (дата звернення: 02.12.2025).
10. Matplotlib Development Team. Getting started – Matplotlib 3.x documentation URL: [https://matplotlib.org/stable/users/getting\\_started/](https://matplotlib.org/stable/users/getting_started/) (дата звернення: 02.12.2025).

11. SciPy Developers. Sparse Linear Algebra (scipy.sparse.linalg) – SciPy v1.13.0 Reference Guide URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.linalg.html> (дата звернення: 02.12.2025).
12. SciPy Developers. Linear Algebra (scipy.linalg) – SciPy v1.13.0 Tutorial URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy-1.13.0/tutorial/linalg.html> (дата звернення: 02.12.2025).
13. Riverbank Computing. Using Qt Designer – PyQt5 Reference Guide URL: <https://doc.bccnsoft.com/docs/PyQt5/designer.html> (дата звернення: 02.12.2025).
14. Qt Group. Qt Designer Manual. Qt Widgets & Forms Designer URL: <https://doc.qt.io/qt-6/qtdesigner-manual.html> (дата звернення: 02.12.2025).
15. Fitzpatrick M. PyQt5 basic widgets – tutorial (QLabel, QLineEdit, QPushButton, QComboBox, QCheckBox) URL: <https://www.pythonguis.com/tutorials/pyqt-basic-widgets/> (дата звернення: 02.12.2025).
16. Venturino E., et al. A high order numerical scheme for a nonlinear nonlocal logistic diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*. 2024. Article in press.– Наукова платформа: ScienceDirect
17. Dipierro S., Proietti Lippi M., Valdinoci E. Logistic diffusion equations governed by the superposition of Brownian and Lévy processes. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 2025. Vol. 204. P. 1–35
18. Shiralashetti S. C., Kantli M. H., Deshi A. B. Numerical solution of linear and nonlinear elliptic partial differential equations using lifting scheme. *Palestine Journal of Mathematics*. 2022. Vol. 11, № 1. P. 345–353.
19. Inc M., et al. New Positive Solutions of Nonlinear Elliptic PDEs. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, № 14. Article 4863.
20. Akdim Y., Lalaoui Rhali S., Oumouacha Y. Solvability of nonlinear elliptic problems with degenerate coercivity in weighted Sobolev space // *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. – 2023. – Vol. 23, № 5. – P. 461–474.
21. Abbassi P. K., et al. Numerical solution of nonlinear partial differential

equations using the Legendre collocation method // *Boundary Value Problems*. – 2024. – Article 19.

22. Elango S., et al. Efficient numerical methods for reaction–diffusion equations // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13, № 9. – Article 1511.

23. Fast numerical algorithm for the reaction–diffusion equations using an interpolating method // *Computational and Applied Mathematics*. – 2024. – Online first.

24. Kumar M., Mishra G. A review on nonlinear elliptic partial differential equations and approaches for solution // *International Journal of Nonlinear Science*. – 2012. – Vol. 13. – P. 401–418.

25. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green’s functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation // *Radio Electronics, Computer Science, Control*. – 2021. – № 3(58). – P. 26–41.

26. Evans L. C. *Partial Differential Equations*. – 2nd ed. – Providence : American Mathematical Society, 2010.

27. Glowinski R., Neittaanmäki P. *Partial Differential Equations: Modelling and Numerical Simulation*. – Berlin : Springer, 2008.

28. Johnson C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. – Mineola, NY : Dover Publications, 2009

29. Süli E. *Numerical Solution of Partial Differential Equations* // *Lecture notes*, Oxford University. – 2012. – 152 p. URL: [https://people.maths.ox.ac.uk/suli/PCAM\\_Numerical\\_Solution\\_of\\_PDEs.pdf](https://people.maths.ox.ac.uk/suli/PCAM_Numerical_Solution_of_PDEs.pdf) (дата звернення: 02.12.2025).

30. Application of two-sided approximations method to solution of first boundary value problem for one-dimensional nonlinear heat conductivity equation URL: <https://www.researchgate.net/publication/358359319> (дата звернення: 02.12.2025)