УДК 510.62

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ИНТЕЛЛЕКТА*

Рассмотрим следующую задачу. Дана переменная x, изменение которой ограничено универсумом $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Область M определения переменной x зависит от значений буквенных параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Эта зависимость задается уравнением алгебры конечных предикатов $f(x, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 1$ **(1)**.

Требуется выразить в явном виде компоненты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ векторного представления $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ множества M как функции параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Искомые зависимости имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
f(a_1, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_1^1; \\
\overline{f}(a_1, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_1^0; \\
f(a_2, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_2^1; \\
\overline{f}(a_2, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_2^0; \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\
f(a_\kappa, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_\kappa^1; \\
\overline{f}(a_\kappa, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_\kappa^0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Пусть, например, в роли (1) задано уравнение $x^0 t_1^0 t_2^1 \vee x^0 t_1^1 t_2^1 \vee \vee x^1 t_1^0 t_2^1 \vee x^1 t_1^1 t_2^0 = 1$ **(а)**, а изменение переменных x, t_1, t_2 ограничено областью $\{0, 1\}$. Для этого уравнения зависимости вида (2) находим следующим образом (на примере ξ_1): $0^0 t_1^0 t_2^1 \vee 0^0 t_1^1 t_2^1 \vee \vee 0^1 t_1^0 t_2^1 \vee 0^1 t_1^1 t_2^0 = t_1^0 t_2^1 \vee t_1^1 t_2^1 = \xi_1^1$, $\overline{t}_2^1 = t_2^0 = \xi_1^0$.

Окончательно имеем $t_2^1 = \xi_1^1$, $t_2^0 = \xi_1^0$, $t_1^0 t_2^1 \vee t_1^1 t_2^0 = \xi_2^1$; $t_1^0 t_2^0 \vee t_1^1 t_2^1 = = \xi_2^0$ **(б)**.

Найдем векторное представление задаваемого уравнением (а) множества M при $t_1 = t_2 = 1$. Согласно (б) имеем $\xi_1^1 = 1^1 = 1$, $\xi_1^0 = 1^0 = 0$, $\xi_2^1 = 1^0 \cdot 1^1 \vee 1^1 \cdot 1^0 = 0$, $\xi_2^0 = 1^0 \cdot 1^0 \vee 1^1 \cdot 1^1 = 1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае $M = (1, 0)$, следовательно, множество M состоит из единственного элемента 0. В случае, когда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, имеем $M = (1, 1)$, множество M состоит из элементов 0 и 1. Когда же $t_1 = t_2 = 0$, то $M = (0, 0)$ и множество M пусто.

---

* Статья является продолжением работ [1,2].

Поставим вопрос: при каких значениях параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$ уравнение (1) имеет единственное решение относительно переменной x? Ясно, что при единственном решении множество M всех корней уравнения (1) для переменной x должно состоять в точности из одной буквы. В этом случае вектор множества M содержит только единичный компонент, а все остальные его компоненты — нулевые. В формализованном виде это утверждение запишется следующим образом: $\xi_1^1\xi_2^0 \ldots \xi_\kappa^0 \vee \xi_1^0\xi_2^1 \ldots \xi_\kappa^0 \vee \ldots \vee \vee \xi_1^0\xi_2^0 \ldots \xi_\kappa^1 = 1$ **(3)**.

Подставляя в полученное уравнение значения входящих в его состав узнаваний, определяемые равенствами (2), получаем некоторое уравнение $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 1$ **(4)**, связывающее параметры $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Решая его, мы можем найти область изменения параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$, в которой уравнение (1) имеет единственное решение относительно переменной x.

Особый интерес для приложений представляет случай, когда переменная x двоичная. При этом условии система равенств (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} f(0, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_1^1; \\ \bar{f}(0, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_1^0; \\ f(1, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_2^1; \\ \bar{f}(1, t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \xi_2^0, \end{aligned} \qquad (5)$$

а условия (3), (4) соответственно приобретут следующую форму: $\xi_1^1\xi_2^0 \vee \xi_1^0\xi_2^1 = 1$ **(6)**, $f(0, t_1, t_2, \ldots, t_n) \oplus f(1, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 1$ **(7)**. В качестве примера рассмотрим булево уравнение $x \vee t_1 = t_2$ (в), где x, t_1, t_2 — булевы переменные, и определим область значений параметров t_1, t_2, для которых существует единственное решение относительно переменной x. Уравнение (1) для отношения (в) запишется так: $x^0t_1^0t_2^0 \vee x^0t_1^1t_2^1 \vee x^1t_1^0t_2^1 \vee x^1t_1^1t_2^1 = 1$ (г).

Искомая область определится уравнением (7), которое в данном случае принимает вид $(0^0t_1^0t_2^0 \vee 0^0t_1^1t_2^1 \vee 0^1t_1^0t_2^1 \vee 0^1t_1^1t_2^1) \oplus \oplus (1^0t_1^0t_2^0 \vee 1^0t_1^1t_2^1 \vee 1^1t_1^0t_2^1 \vee 1^1t_1^1t_2^1) = 1$. После упрощений получаем $t_1^0t_2^0 \vee t_1^0t_2^1 = 1$ (д).

Таким образом, область изменения набора параметров (t_1, t_2) имеет вид $\{(0, 0), (0, 1)\}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения $x \vee 0 = 0$ и $x \vee 0 = 1$ действительно имеют единственное решение (соответственно 0 и 1). Остальным наборам значений параметров (1, 0) и (1, 1) соответствуют уравнения $x \vee 1 = 0$ и $x \vee 1 = 1$. Первое из них вовсе не имеет решений, а второе имеет два корня: 0 и 1.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть задано уравнение $f(x, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 1$ **(1)**. Введем область N изменения наборов параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$ этого уравнения, определяемую отношением $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 1$ **(4)**.

Как следует из сказанного выше, уравнение (1) задает на области N некоторую функцию $x = F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Требуется записать эту функцию в явном виде.

При решении этой задачи мы сталкиваемся с необходимостью доопределить функцию F за пределами области N, причем это доопределение может быть произведено многими разными способами. Одно из возможных доопределений состоит в том, чтобы объявить, что за пределами области N значения функции F не существуют. В этом случае явное задание функции F имеет вид

$$\begin{aligned} &f(a_1, t_1, t_2, \ldots, t_n)\,\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = x^{a_1};\\ &f(a_2, t_1, t_2, \ldots, t_n)\,\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = x^{a_2};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f(a_k, t_2, \ldots, t_n)\,\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = x^{a_k}. \end{aligned} \qquad (8)$$

В случае, когда переменная x двоичная, равенства (8) запишутся так: $f(0, t_1, t_2, \ldots, t_n)\bar{f}(1, t_1, t_2, \ldots, t_n) = x^0$; $\bar{f}(0, t_1, t_2, \ldots, t_n) f(1, t_1, t_2, \ldots, t_n) = x^1$ **(9)**.

Рассмотрим пример. Выразить в явном виде булеву функцию $x = F(a, b, c)$, заданную системой булевых уравнений $ax = b$; $a \vee x = c$ (**е**). Система (е) эквивалентна следующему каноническому уравнению алгебры конечных предикатов: $(a^1x^1 \sim b^1)(a^1 \vee x^1 \sim c^1) = 1$ (**ж**). Равенства (9) в данном случае запишутся в виде

$$(a^1 0^1 \sim b^1)(a^1 \vee 0^1 \sim c^1)\overline{(a^1 1^1 \sim b^1)(a^1 \vee 1^1 \sim c^1)} = x^0;$$

$$\overline{(a^1 0^1 \sim b^1)(a^1 \vee 0^1 \sim c^1)}(a^1 1^1 \sim b^1)(a^1 \vee 1^1 \sim c^1) = x^1.$$

После упрощений получаем искомое явное описание функции F: $a^0b^0c^0 \vee a^1b^0c^1 = x^0$; $a^0b^0c^1 \vee a^1b^1c^1 = x^1$ (з).

Вычисления по формулам (з) приводят к табл. 1. Из таблицы следует, что на наборах (0, 0, 0) и (1, 0, 1) функция F обращается в нуль, на наборах (0, 0, 1) и (1, 1, 1) — в единицу, на остальных наборах значения функции F не существуют. Областью N определения функции F служит множество наборов (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1). Уравнение, задающее эту область, получаем на основе зависимости $(a^1 0^1 \sim b^1)(a^1 \vee 0^1 \sim c^1) \oplus (a^1 1^1 \sim b^1)(a^1 \vee 1^1 \sim c^1) = 1$. После упрощений это уравнение запищется в виде $(a^1 \vee b^0)(a^0 \vee c^1) = 1$ (**и**).

Другой возможный способ доопределения функции $x = F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ заключается в том, чтобы за пределами области N каждому набору значений параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$ поставить в соответствие некоторое одно значение переменной x. Доопределение производится с таким расчетом, чтобы формулы явного описания функции F получились возможно более простыми. Построим этим способом явное описание функции F для условий только что рассмотренного примера. Функция должна быть доопределена на следующей области наборов: (a, b, c): {(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)}. Этим наборам соответствуют элементарные произведения $a^0b^1c^0$, $a^0b^1c^1$, $a^1b^0c^0$, $a^1b^1c^0$.

Таблица 1

a	b	c	x^0	x^1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Таблица 2

a	b	c	x^0	x^1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Процесс доопределения состоит в том, чтобы пополнить формулы, стоящие в левой части равенств (з), дизъюнктивными членами, в качестве которых должны быть взяты перечисленные элементарные произведения. При этом каждое элементарное произведение должно быть использовано по одному разу. Элементарные произведения распределяются между формулами с таким расчетом, чтобы после упрощений получить возможно более экономные выражения.

Записываем явные выражения для функции F: $a^0b^0c^0 \vee a^1b^0c^1 \vee a^1b^0c^0 = x^0$, $a^0b^0c^1 \vee a^1b^1c^1 \vee a^0b^1c^0 \vee a^0b^1c^1 \vee a^1b^1c^0 = x^1$. После упрощений окончательно получаем $b^0c^0 \vee a^1b^0 = x^0$; $a^0c^1 \vee b^1 = x^1$ (к). Как видим, применение второго способа дало существенное упрощение явного описания функции F (получили 7 узнаваний вместо 12).

В табл. 2 указаны значения x^0 и x^1, вычисленные по формулам (к). Как видно из таблицы, значения функции F в пределах области N остались прежними. На всех наборах за пределами области N функция F теперь однозначно определена: на наборе (1, 0, 0) она принимает нулевое значение, на наборах (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0) — единичное.

Еще более экономная форма явного задания функции F в ряде случаев может быть получена третьим способом, при котором ее доопределение за пределами области N осуществляется произвольным образом. При этом для одних наборов значений параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$ значение функции F принимается несуществующим, для других — однозначным, а для третьих — многозначным. Доопределение производится так же, как и по второму способу, с тем, однако, отличием, что элементарные произведения разрешается теперь использовать многократно или вовсе не использовать.

Для нашего примера принимаем следующий способ пополнения формул (з) элементарными произведениями: $a^0b^0c^0 \vee a^1b^0c^1 \vee$

$\vee a^0b^1c^0 \vee a^1b^1c^0 \vee a^1b^0c^0 = x^0$; $a^0b^0c^1 \vee a^1b^1c^1 \vee a^0b^1c^0 \vee a^0b^1c^1 \vee$ $\vee a^1b^1c^0 = x^1$. После упрощений имеем $c^0 \vee a^1b^0 = x^0$; $a^0c^1 \vee$ $\vee b^1 = x^1$ (л).

Мы видим, что применение третьего способа позволило сократить число узнаваний в явном описании функции F с 7 до 6. Вычисления по формулам (л) приводят к табл. 3. Из таблицы следует, что за пределами области N функция F имеет единичное значение на наборе (0, 1, 1) и оба возможных значения — на остальных наборах.

Таблица 3

a	b	c	x^0	x^1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Заметим, что функцию F не обязательно определять на всей области N. При желании ее можно определить на любом подмножестве P области N. Методы явного задания функции F на области P почти не отличаются от только что рассмотренных методов.

Рассмотрим пример. Функция $x = F(a, b, c)$ задана неявно уравнением (ж). Записать эту функцию в экономном явном виде для области P, определяемой уравнением $(a^0 \vee c^1)\, b^0 = 1$ **(м)**.

Вначале проверяем выполнение условия $P \subseteq N$. Если это условие не выполняется, то задача поставлена некорректно. Это условие выполняется в том и только в том случае, когда импликация, составленная из левых частей уравнений (м) и (и), тождественно истинна. В нашем примере условие $P \subseteq N$ выполняется:

$$(a^0 \vee c^1)\, b^0 \supset (a^1 \vee b^0)(a^0 \vee c^1) = (a^0 \vee c^1)\, b^0 \vee (a^1 \vee b^0)(a^0 \vee c^1) =$$
$$= a^1c^0 \vee b^1 \vee a^1c^1 \vee a^0b^0 \vee b^0c^1 =$$
$$= a^1 \vee b^1 \vee a^0b^0 \vee b^0c^1 = a^1 \vee b^0 \vee b^1 \vee c^1 = a^1 \vee 1 \vee c^1 = 1.$$

Отличие рассматриваемого метода от метода получения явного задания функции F для области N состоит лишь в том, что теперь мы не можем воспользоваться равенствами (9), а вынуждены обратиться к равенству (8). В этих равенствах под предикатом Ф теперь следует понимать левую часть равенства (м), задающего область P. Применяя равенства (8), получаем первый вариант явного задания функции F:

$$(a^1 0^1 \sim b^1)(a^1 \vee 0^1 \sim c^1)(a^0 \vee c^1)\, b^0 = x^0;$$
$$(a^1 1^1 \sim b^1)(a^1 \vee 1^1 \sim c^1)(a^0 \vee c^1)\, b^0 = x^1. \qquad \text{(н)}$$

После упрощений окончательно получаем:

$$a^0b^0c^0 \vee a^1b^0c^1 = x^0; \quad a^0b^0c^1 = x^1. \qquad \text{(о)}$$

Второй вариант описания получаем, пополняя левые части равенств (о) дизъюнктивными членами $a^0b^1c^0$, $a^0b^1c^1$, $a^1b^0c^0$, $a^1b^1c^0$, $a^1b^1c^1$, каждый из которых используется только по одному разу:

$$a^0b^0c^0 \vee a^1b^0c^1 \vee a^0b^1c^0 \vee a^1b^0c^0 \vee a^1b^1c^0 \vee a^1b^1c^1 = x^0;$$

$$a^0b^0c^1 \vee a^0b^1c^1 = x^1.$$

Окончательно имеем: $a^1 \vee c^0 = x^0$; $a^0c^1 = x^1$ **(п)**. Третий вариант описания в данном примере совпадает со вторым.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О моделировании конечных математических структур.— АСУ и приборы автоматики, 1981, вып 60, с. 86—90. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О моделировании алфавитных операторов средствами теории интеллекта.— Проблемы бионики, 1981, вып. 26, с. 3—10.

Поступила в редколлегию 26.12.81.