

щодо позицій на вході та виході переходу і більш повно враховувати особливості предметних областей.

Для модифікованих Е-мереж, з метою створення моделей, запропоновано та обґрунтовано умови дозволених зв'язків, правила інтерпретації компонент мережі та простору її станів.

Практична значущість одержаних результатів полягає в тому, що:

— сформульовано рекомендації по практичному використанню моделей на основі мереж з керованою структурою;

— модель використано в засобах прийняття рішень в задачах пошуку альтернатив та раціонального визначення потенційних постачальників високо-технологічних виробництв;

— розробка дозволила зменшити розмір мережі по відношенню до існуючих рішень біля 10% в практичних реалізаціях за рахунок розширень можливостей та використання їх компонент. Це дало змогу скоротити терміни вирішення практичних задач та підвищити вірогідність рішень на основі вибору раціональних шляхів та альтернатив розв'язання практичних задач, що визначається їх моделюванням мережами з керованою структурою.

Література: 1. *Управление ГПС: модели и алгоритмы* / Под общ. ред. С.В. Емельянова. М.: Машиностроение, 1987. 368 с. 2. *Прицкер А.* Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 646 с. 3. *Представление и использование знаний*: Пер. с англ. / Под ред. Х. Уэно, М. Исидзука. М.: Мир, 1989. 220 с. 4. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981. 286 с. 5. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. К.: Выща шк., 1975. 312 с. 6. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с. 7. *Петров Э.Г., Новожилова М.Г., Гребенник И.В., Соколова Н.А.* Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах / Под общ. ред. Э.Г. Петрова. Херсон: ОЛДІ-плюс, 2003. 380 с. 8. *Мурата Т.* Сети Петри: Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР, апрель 1989 г. 77. № 4. С. 41-85. 9. *Применение микропроцессорных средств в системах передачи информации* / Б.Я. Советов, О.И. Кутузов, Ю.И. Головин, Ю. В. Аветов. М.: Высш. шк., 1987. 256 с.

Надійшла до редколегії 05.04.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Гриб О.Г.

Кучеренко Валерій Євгенович, аспірант кафедри штучного інтелекту ХНУРЕ. Наукові інтереси: моделювання та обробка даних і знань в автоматизованих системах управління. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Леніна, 14, тел. 70-21-337.

УДК 621.391:51.142

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Развивается метод воспроизводящих преобразований, который позволяет аналитически получать выражения для рядов, имеющих применение в прикладных задачах радиоэлектроники. Приводится численное обоснование предлагаемого подхода на примере двух наиболее используемых в инженерных и математических расчетах функций — Бесселя и нормального распределения.

1. Введение

Рассматриваемые в данной работе функции относятся к специальным [1]. Их свойства достаточно изучены, и таблицы значений известны [1, 2]. Однако это не мешает находиться им вплоть до настоящего времени в состоянии интенсивного развития. В связи с применением функций Бесселя при решении задач теплопроводности, электродинамики, гидро- и аэромеханики, теории потенциала, геофизики теоретическая значимость исследования последних не вызывает сомнений. При изучении случайных явлений во многих областях науки и техники — в физике, биологии, производстве, системах автоматизированного управления, медицине, — используется, в частности, функция нормального или гауссова распределения [3].

Фундаментальные труды по специальным функциям позволяют классифицировать их в соответствии со способом определения: с помощью бесконечных произведений; последовательного дифференцирования; производящих функций; неопределенных и определенных интегралов; дифференциальных, интегральных, функциональных и разностных уравнений; степенных и тригонометрических рядов, а также рядов по ортогональным функциям. Таковы, например, всемирно известный трактат Г. Ватсона по функциям Бесселя [4]; справочник Градштейна И.С. и Рыжика И.М. по интегралам, рядам и произведениям [5]; трехтомник по высшим трансцендентным функциям [6, 7], написанный штабом специалистов во главе с известным английским математиком Артуром Эрдеи на основе научного наследия крупнейшего американского ученого, профессора Калифорнийского технологического института Гарри Бейтмена.

Среди специальных встречаются функции, практическое применение которых связано с большим набором формул, которые трудно изложить в удобном виде. При этом численные методы не всегда производительны. Часто они требуют высоких затрат памяти, приводят к потерям машинного времени и, как следствие, нерациональному использованию финансовых ресурсов. Например, для определения числа π с помощью ряда прямым численным суммированием с точностью до 10^{-6} требуется удерживать 2 миллиона слагаемых [8].

Потребность получить прямые аналитические выражения, удобные для вычисления и анализа той или иной функции, активизирует поиск новых

аналитических методов. Например, для вычисления сумм избранных рядов (включая знакопеременные) уже получены прямые формулы в терминах элементарных функций путем доказательства теорем [9, 10]. Для этого применялось суммирование рядов по выборочным значениям, основанное на методах гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами (ГПВЯ) [9].

Используемый в данной работе метод воспроизводящих преобразований является дальнейшим развитием упомянутого метода и может быть полезен также при решении названных выше задач.

2. Постановка цели и задач исследования

Рассматриваемые в данной работе функции связаны с их представлениями в виде рядов, вычисление которых даже с достаточной степенью точности обычно является задачей приближенной.

Цель данного исследования – вывод альтернативных представлений для функций нормального распределения и Бесселя на основе метода воспроизводящих преобразований, задекларированного в работах [11, 12]. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) получить аналитическое выражение для функции нормального распределения, не содержащее ряда;
- 2) получить аналитическое выражение для функции Бесселя путем суммирования ряда;
- 3) провести сравнительный анализ результатов для численного обоснования данного исследования.

Для сравнения результатов используются известные справочники и таблицы значений [1, 2].

3. Суть исследования

Рассмотрим следующее представление для функции нормального распределения [1, с.738, формула 26.2.10]:

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k! 2^k (2k+1)}, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

На основе метода воспроизводящих преобразований можно определить ряд из правой части (1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2^k (2k+1)} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^9}{3456}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

С учетом (2) функция (1) принимает вид:

$$P(x) = \frac{1}{2} + 0,2x \left[2 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{20} - \frac{x^8}{1728} \right], \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

Согласно [11, 12] имеет место соотношение:

$$\sum_{k=M}^{\infty} W(k)F(k) = \sum_{p=1}^N A_p F(V_p), \quad (4)$$

где $M = -\infty, 0, 1$. При $N = 1$, $A_p = 1$ имеем случай разложения функций в ГПВЯ [9, 13].

Представление (2) соотносится с (4), а именно: при

$$M = 0, \quad N = 3, \quad W(k) = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad F(k) = \frac{x^{2k+1}}{2^k (2k+1)},$$

$A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $A_3 = 1/2$, $A_4 = -1/24$, $V_1 = 0$, $V_2 = 1$, $V_3 = 2$, $V_4 = 4$ ряд из (1) принимает вид (2).

Рассмотрим следующее известное выражение для функции Бесселя, которое получено из [14, с. 174, формула (2)] при $m = 0$:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{z^{2k}}{k! 2^{2k}}. \quad (5)$$

Его альтернативное представление, полученное методом воспроизводящих преобразований, имеет вид:

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} - \frac{z^8}{256 \cdot 576}, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (6)$$

4. Анализ результатов и выводы

Для достоверности аналитически полученных выражений (3) и (6) проведем анализ их вычислений. Табл. 1 представляет сравнение результатов для функции нормального распределения, полученных по новой формуле (3) в интервале $0 \leq x \leq 1$, с известными табличными [1, с. 754].

Таблица 1

Переменная x	Значения функции P(x) согласно (3)	Значения функции P(x) согласно [1]	Относительная погрешность
0	0,5	0,5	0
0,1	0,539933	0,539827	$1,963 \cdot 10^{-4}$
0,2	0,579470	0,579250	$3,798 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,618224	0,617911	$5,065 \cdot 10^{-4}$
0,4	0,655836	0,655421	$6,331 \cdot 10^{-4}$
0,5	0,691979	0,691462	$7,476 \cdot 10^{-4}$
0,6	0,726376	0,725746	$8,680 \cdot 10^{-4}$
0,7	0,758809	0,758036	0,001019
0,8	0,789128	0,788144	0,001248
0,9	0,817260	0,815939	0,001618
1,0	0,843218	0,841344	0,002227

Табл. 2 демонстрирует результаты, полученные по формуле (6), по сравнению с табличными [2, с.23-58].

Таблица 2

Переменная z	Значения функции $J_0(z)$ согласно (6)	Значения функции $J_0(z)$ согласно [2]	Относительная погрешность
0	1	1	0
0,1	0,997502	0,997501	$1,002 \cdot 10^{-6}$
0,2	0,990025	0,990025	0
0,3	0,977627	0,977626	$1,022 \cdot 10^{-6}$
0,4	0,960400	0,960398	$2,082 \cdot 10^{-6}$
0,5	0,938477	0,938469	$8,524 \cdot 10^{-6}$
0,6	0,912025	0,912004	$2,302 \cdot 10^{-5}$
0,7	0,881251	0,881200	$5,787 \cdot 10^{-5}$
0,8	0,846399	0,846287	$1,323 \cdot 10^{-4}$
0,9	0,807749	0,807523	$2,798 \cdot 10^{-4}$
1,0	0,765618	0,765197	$5,501 \cdot 10^{-4}$

Из приведенных данных видно, что значения, полученные по новым формулам, практически не отличаются от табличных, полученных удерживанием достаточно большого, но конечного числа членов в рядах из (1) и (5) соответственно. Минимальная относительная погрешность вычислений составляет $1,002 \cdot 10^{-6}$, максимальная — 0,002227.

Таким образом, проведенное исследование дает возможность сделать следующие *выводы*.

Предлагаемый метод воспроизводящих преобразований позволяет получать точные аналитические результаты при:

- суммировании рядов;
- решении сумматорных уравнений и их систем;
- решении сумматорно-интегральных уравнений и их систем, в том числе сложной структуры,

что упрощает известные методы решения и делает их удобными для дальнейшего численного анализа.

Область применения предлагаемого подхода не ограничивается задачами антенной теории, теории дифракции, электродинамики и названными выше. Ее можно дополнить теперь задачами, связанными

с теорией вероятностей и математической статистикой, где используется функция нормального распределения. Полученные данные также могут быть полезны для программного обеспечения, чем определяется их практическая значимость.

Литература: 1. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 832 с. 2. *Чистова Э.А.* Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 524 с. 3. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352 с. 4. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. Ч.1. 800с. 5. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. Т.1. 296 с. 7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. М.: Наука, 1966. Т.2. 296 с. 8. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. 512 с. 9. *Chumachenko S.V.* Summation method of selected series for IP-core design // Radioelectronics and Informatics. 2003. N3. С. 197-203 (in Russian). 10. *Чумаченко С.В.* Гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами и некоторые их применения // Радиоэлектроника и информатика. 2003. № 4. С. 141-144. 11. *Svetlana Chumachenko, Vladimir Hahanov.* Reproducing Transformations method for IP-core of summatory and integral equations solving // Proc. of DSD 2004 EUROMICRO SYMPOSIUM ON DIGITAL SYSTEM DESIGN: Architectures, Methods and Tools. August 31 - September 3, 2004, Rennes — France (Work in progress). 12. *Chumachenko S.V.* Solving Electrodynamics Problems by Reproducing Transformations Method // Proc. BEC 2004. Tallinn. October 3-6, 2004. P. 319-322. 13. *Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике:* Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256с. 14. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: Пер. с польск. М.: Наука, 1983. 384 с.

Поступила в редколлегию 12.06.2004

Рецензент: д-р физ.-мат наук, проф. Чурюмов Г.И.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: методы суммирования рядов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326.