$$\Delta_A \Delta_{S-2} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} s-1 \\ s-1 \end{pmatrix} \Delta_{S-1} - \left| \mathbf{M}\begin{pmatrix} s-1 \\ s \end{pmatrix} \right|^2, \quad (23)$$

где $\Delta_{S-1} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} s-1,s \\ s-1,s \end{pmatrix}$ и $\Delta_{S-1} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$ являются главными минорами матрицы $\mathbf{A}$. Из (23) при $\Delta_{S-2} \neq 0$ получается полезное для вычислений рекуррентное выражение

$$\Delta_A = \frac{\mathbf{M}\begin{pmatrix} s-1 \\ s-1 \end{pmatrix} \Delta_{S-1} - \left| \mathbf{M}\begin{pmatrix} s-1 \\ s \end{pmatrix} \right|^2}{\Delta_{S-2}}, \quad (24)$$

которым можно пользоваться и для вычисления определителей симметрических матриц.

Выводы

Новые соотношения, доказанные для миноров квадратных матриц, могут не только применяться в теоретическом анализе, но и позволяют значительно сократить объем вычислений определителей матриц высоких порядков. Так, если при разложении определителя порядка S по элементам строки требуется вычислить S определителей порядка $S-1$, то применение общей формулы (17) требует вычисления четырех определителей порядка $S-1$ и одного порядка $S-2$. Упрощение вычислений достигается и путем использования рекуррентных формул вида (23).

Литература: 1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.

Поступила в редколлегию 21.12.99

Рецензент: д-р техн. наук Шарапов В.М.

Лега Юрий Григорьевич, канд. техн. наук, доцент, ректор Черкасского инженерно-технологического института. Адрес: Украина, 18005, Черкассы, б-р Шевченка, 460, тел. (8-0472) 43-35-64; факс (8-0472) 43-44-81; E-mail: cheti @ cheti.cherkassy.ua

Первунинский Станислав Михайлович, канд. техн. наук, доцент, докторант Черкасского инженерно-технологического института. Адрес: Украина, 18005, Черкассы, б-р Шевченка, 460, тел. (8-0472) 65-68-66, факс (8-0472) 43-44-81.

УДК 519.21

ЛОКАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ФОКУСИРОВКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

ДИКАРЕВ В.А.

Приводятся условия фокусировки, реализуемой при локальных возмущениях марковского процесса с непрерывным временем и конечным числом состояний. Каждое отдельно взятое возмущение воздействует лишь на часть состояний процесса. Согласованное воздействие возмущений приводит к стабилизации всего процесса.

Предположим, что множество всех состояний наделено некоторой топологией, например, является метрическим пространством. Естественно считать, что если некоторое состояние (или группа состояний, близких между собой) получит сильное возмущение, то возмущения получат и состояния, близкие к нему. Этим возмущениям отвечает определенное множество возмущенных элементов стохастической матрицы $P(s, t)$ процесса. Часть их является ее диагональными элементами. Множество всех возмущенных элементов $P(s, t)$ порождает инфинитезимальную матрицу. Будем называть ее фрагментом. Считаем, что любой фрагмент является квадратной матрицей и фокусирует (точная фокусировка) или σ-фокусирует [1–3]; число всех возможных фрагментов конечно.

Подчеркнем, что в отличие от подхода, описанного в [3], теперь возмущениям подвергается не весь процесс, а лишь отдельные его части. Согласованное воздействие возмущенных частей на распределение вероятностей состояний приводит к стабилизации всего процесса. Описанная картина возмущений возникает, когда процесс, множеством состояний Ω которого является некая поверхность или область из R^n, за малые промежутки времени подвергается сильным локальным воздействиям (например, ударам, возникающим при бомбардировке Ω потоком частиц), изменяющим его эволюцию.

Считаем, что каждое очередное возмущение локализовано в некоторой окрестности момента времени τ_k, отделяющей τ_k от промежутков, на которых действуют другие возмущения; моменты τ_k являются точками фокусировки для процессов с инфинитезимальными матрицами-фрагментами, возникающими при этих возмущениях; каждый фрагмент после момента τ_k обращается в нуль за малый промежуток времени. Это означает, что результаты фокусировки не изменятся за промежуток (τ_k, t), на котором данный фрагмент еще отличен от нуля. Эволюция процесса рассматривается на промежутке $[s_0, t_0)$, $t_0 \leq \infty$. Если $t_0 = \infty$, считаем, что при отсутствии возмущений стохастическая матрица $P(s, t)$ процесса совпадает с единичной матрицей. Если $t_0 < \infty$, то $P(s, t)$ предполагается лишь непрерывной.

Сначала рассмотрим случай, когда $t_0 = \infty$ и фокусировка, реализуемая фрагментами, точная. Опишем изменение вектора $\vec{\pi}(t)$ распределения вероятностей состояний всего процесса, происходящее при каждой очередной фокусировке. Пусть фрагмент Δ_i в момент τ_k фокусирует на $\vec{\pi}_i = \vec{\pi}_i(\tau_k)$. Рассмотрим вектор $\vec{\pi}_i'(t)$, координаты которого состоят из всех координат $\vec{\pi}(t)$, находящихся в тех же строках, что и строки Δ_i. Пусть (t', t'') — любой интервал, содержащий τ_k, в котором никакой фрагмент, кроме Δ_i, не фокусирует. Тогда, чтобы получить вектор распределения $\vec{\pi}(t)$ процесса при $t \in (\tau_k, t'')$, следует подвектор $\vec{\pi}_i'(t')$ вектора $\vec{\pi}(t')$ заменить на $\vec{\pi}_i(\tau_k)$. В результате получим $\vec{\pi}(t)$.

Каждому элементу любого фрагмента отвечает определенный элемент матрицы $P(s, t)$. Пусть Δ_i, Δ_j – произвольные фрагменты. Выделим из них все элементы, каждый из которых соответствует одному и тому же элементу из $P(s, t)$. Множество всех таких элементов из Δ_i и Δ_j будем называть их пересечением: $\Delta_{ij} = \Delta_i \bigcap \Delta_j$. Прямоугольная матрица Δ_{ij} принимает разные значения в окрестностях моментов фокусировки фрагментов Δ_i, Δ_j. Вне этих окрестностей $\Delta_{ij} = 0$.

Сделаем следующие предположения.

а) Любой момент τ_k фокусировки произвольного фрагмента Δ_i (а значит, и возмущение, которое его порождает) не зависит от эволюции процесса до τ_k. Существует последовательность интервалов

$$\{[s_k, s_{k+1})\}_{k=0}^{\infty}, \ \bigcup_{k=0}^{\infty}[s_k, s_{k+1}) = [s_0, \infty), \tag{1}$$

такая, что любой фрагмент Δ_i ($i = 1, ..., N$) в моменты $\tau_k \in [s_k, s_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, ...$ фокусирует с вероятностью $p_i(\tau_k)$:

$$0 < p_0 \le p_i(\tau_k) \le p_i < 1. \tag{2}$$

Любой фрагмент при каждом очередном его возмущении фокусирует на одно и то же распределение $\vec{\pi}_i$.

б) Пусть $M = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i$ – объединение всех фрагментов. Считаем, что M накрывает всю диагональ матрицы $P(s, t)$; возможна такая нумерация фрагментов, при которой

$$\Delta_{i,\,i+1} \ne \varnothing, \ i = 1, ..., N-1,$$
$$\Delta_{i,\,N} = \varnothing, \ i = 1, ..., N-2, \cdot$$

диагональные элементы $P(s, t)$, принадлежащие разности $\Delta_i \setminus \Delta_{i,\,i+1}$, лежат левее диагональных элементов $P(s, t)$ из разности $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i,\,i+1}$.

Далее используется описанная выше нумерация фрагментов.

в) Условия согласования. Пусть Δ_i, Δ_j – любые фрагменты, для которых $\Delta_{ij} \ne \varnothing$ и Δ_i, Δ_j фокусируют на $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$. Рассмотрим векторы

$$\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}, \tag{3}$$

координаты которых состоят из тех координат векторов $\vec{\pi}_i, \vec{\pi}_j$, которые лежат в тех же строках, что и строки фрагмента Δ_{ij}. Потребуем, чтобы $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$ были параллельны.

Если выполняются все перечисленные условия, то такой процесс с вероятностью 1 фокусирует на распределение $\vec{\pi}^*$, которое не зависит от начального распределения вероятностей, заданного в момент s_0. При $t \to \infty$ векторы $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$ из (3) имеют совпадающие пределы

$$\lim_{t\to\infty} \vec{\pi}_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} \vec{\pi}_{ji}(t) = \vec{\pi}^*_{ij}. \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения сводится к проверке следующих утверждений.

1. После каждой фокусировки любого фрагмента сумма

$$\sum_{i,j} \left|\vec{\pi}_{ij} - \vec{\pi}_{ji}\right| \tag{5}$$

не возрастает. Проверка этого утверждения основывается на предположении о параллельности векторов $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$.

2. Существуют такие цепочки (системы) фрагментов, при последовательной фокусировке которых сумма (5) убывает. К их числу, в частности, относится цепочка

$$\{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{N-1}, \Delta_N\}. \tag{6}$$

Здесь фрагменты расположены в том порядке, в котором они фокусируют. Если все фрагменты такой цепочки последовательно фокусировать в указанном порядке бесконечное число раз, то сумма (5) обратится в нуль. При проверке этого утверждения существенную роль играет условие $\Delta_{i,\,N} = \varnothing$ ($i = 1, ..., N-2$) из б). Если такой фрагмент Δ_N не существует, то указанное стремление к нулю суммы (5) не имеет места без дополнительных предположений о связях между векторами $\vec{\pi}_i$, на которые фокусируют фрагменты.

3. Вероятность того, что возмущение всех фрагментов цепочки (6) произойдет за конечное время, положительна. Вероятность того, что все фрагменты цепочки (6) за промежуток $[s_0, \infty)$ будут возмущены (в порядке их нумерации) бесконечное число раз, равна единице. Это утверждение проверяется с помощью (2).

Опишем строение вектора $\vec{\pi}^*$. Обозначим через $\vec{\pi}^*_i$ пределы (при $t \to \infty$) векторов $\vec{\pi}_i(\tau_k)$, на которые фокусируют фрагменты Δ_i ($i = 1, ..., N$). Заменим нулями все координаты вектора $\vec{\pi}^*_i$ ($i = 2, ..., N$), которые принадлежат $\vec{\pi}^*_{i-1,\,i}$ из (3). Отбросив в этом новом векторе нулевые координаты, получим вектор $\vec{\pi}^*_{ii}$. Вектор $\vec{\pi}^*$ имеет вид

$$\vec{\pi}^* = \left(\vec{\pi}^*_1, \vec{\pi}^*_{22}, ..., \vec{\pi}^*_{NN}\right). \tag{7}$$

Случай $t_0 < \infty$ имеет место при лавинообразном наростании мощности факторов, порождающих фокусирующие фрагменты. Сформулированное выше для случая $t_0 = \infty$ утверждение здесь имеет место, когда матрица $P(s, t)$ непрерывна и t_0 не является ее точкой фокусировки. Доказательство этого утверждения с незначительными изменениями проводится так же, как и для случая $t_0 = \infty$. Равенство (1) теперь имеет вид

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}[s_k, s_{k+1}) = [s_0, t_0);$$

по-прежнему $\tau_k \in [s_k, s_{k+1})$.

Пусть выполняются перечисленные выше условия, но теперь все фрагменты σ-фокусируют. Тогда при $t \uparrow t_0$ имеет место σ-фокусировка на $\vec{\pi}^*$. Это утверждение верно и для случая, когда часть фрагментов σ-фокусирует, а остальные – фокусируют.

Если векторы $\vec{\pi}_{ij}, \vec{\pi}_{ji}$ из (3) удовлетворяют условиям согласования с точностью до слагаемых, длины которых достаточно малы, то имеет место σ -фокусировка.

Полученные результаты справедливы и в случае, когда множество всех состояний исследуемого процесса Π является счетным или континуальным. Для каждого из этих случаев число возможных фрагментов бесконечно. Условия согласования здесь такие же, как и в случае конечного числа состояний. Доказательство сходимости к финальному распределению проводится сначала для процессов Π_n ($n = 1, 2, ...$), в каждом из которых число возможных фрагментов конечно и неограниченно возрастает с ростом n. Каждый процесс Π_n при $t \uparrow t_0$ фокусирует на распределение $\vec{\pi}_n^*$ и аппроксимирует с заданной точностью процесс Π. С ростом n точность аппроксимации возрастает. Далее устанавливается, что $\vec{\pi}_n^* \to \vec{\pi}^*$ ($n \to \infty$).

Пусть локальные возмущения процесса Π таковы, что векторы распределений, на которые фокусируют фрагменты, являются случайными. Мощность множества всех состояний процесса Π по-прежнему не более чем континуальна. Предполагается, что любой фрагмент при каждом очередном его возмущении фокусирует на один и тот же случайный вектор. Условия согласования теперь состоят в том, чтобы были параллельны векторы математических ожиданий $M\vec{\pi}_{ij}$, $M\vec{\pi}_{ji}$. Остальные предположения об исследуемом процессе остаются прежними (см. условия а), б)). Тогда процесс Π с вероятностью 1 фокусирует на случайный вектор $\vec{\pi}^*$. Равенство (4) теперь имеет вид $\lim_{t \uparrow t_0} M\vec{\pi}_{ij}(t) = \lim_{t \uparrow t_0} M\vec{\pi}_{ji}(t)$.

Литература: 1. *Дикарев В. А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков, 1995. 9 с. Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, № 526 – Ук95. 2. *Dikarev V. A.* Modeling of disintegrating economy by Markov process // II Intern. Conf. "Computing in economics and finance". Geneva, 1996. P. 170-171. 3. *Дикарев В. А.* Фокусировка распределений марковских процессов // Доп. НАН України. 1999. №11. С. 100 -103.

Поступила в редколлегию 07.12.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Руткас А. Г.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: функциональный анализ, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина 66, кв. 21, тел. (0572) 33-57-03, (0572) 40-94-36.

УДК 658.012

ДВУХСТУПЕНЧАТЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ, ОСНОВАННЫЙ НА МЕТОДЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ТИМОФЕЕВ В.А.

Рассматривается задача оценивания параметров линейной регрессионной модели в случае коррелированных помех. Проводится анализ используемых при этом алгоритмов, в частности, МНК, двойной МНК. В данной ситуации несмещенная оценка может быть получена с использованием МИП, однако целесообразным представляется разработка такой модификации алгоритма, которая позволяла бы получить оценку с минимальной дисперсией. Предлагается двухступенчатая процедура алгоритма МИП. Приводится вычислительная процедура алгоритма. Доказывается его сходимость. Показывается, что предлагаемый алгоритм имеет меньшую СКО по сравнению с аналогами.

Многие задачи распознавания образов, обработки экспериментальных данных, идентификации и прогнозирования связаны с построением множественной регрессии вида

$$\vec{Y} = X\vec{a} + \vec{\varepsilon},$$

где $\vec{Y} \in R^n$ – вектор выходной переменной; $X \in R^{n \times m}$ – матрица наблюдений; $\vec{a} \in R^n$ – вектор оцениваемых параметров; $\varepsilon \in R^n$ – помеха измерений; n – число наблюдений.

На практике наиболее часто для оценивания параметров $\vec{a}$ используются алгоритмы метода наименьших квадратов (МНК). Если помехи измерений распределены по нормальному закону, МНК-оценки становятся оценками максимального правдоподобия, а также несмещенными, состоятельными, эффективными и достаточными [1]. Наличие коррелированности входных переменных, приводящей к плохой обусловленности информационной матрицы, резко ухудшает свойства МНК-оценок.

Уменьшение среднеквадратичной ошибки (СКО) оценивания может быть достигнуто переходом от МНК к двухступенчатому МНК. Двухступенчатый метод, основанный на МНК, был предложен в [2] для анализа остатков линейного регрессионного уравнения. Задача оценивания параметров с помощью такого метода рассмотрена в [3,4]. Обобщение двухступенчатого метода на многомерный случай регрессионной модели осуществлено в [5]. Кроме того, в этой работе показано, что двухступенчатый МНК (ДМНК), обладая тем же смещением, что и МНК, позволяет получить меньшую по сравнению с МНК среднеквадратичную ошибку оценивания. Эффективность ДМНК существенно возрастает при наличии помех и сильной коррелированности входных переменных, т.е. при плохой обусловленности матрицы наблюдений.

В ряде случаев, в частности, при наличии корреляции полезного сигнала и помехи предпочтительным оказывается метод инструментальных переменных (МИП) [4]. Однако известный МИП имеет ряд недостатков, поэтому представляется целесообразным получение такой его модификации, которая помимо несмещенной оценки давала бы еще и оценку с меньшей СКО по сравнению с МИП.

Для получения модифицированного МИП поступим следующим образом. Разобьём матрицу X и вектор $\vec{a}$ на блоки

$$X = (X_1, X_2)\ ,\ \vec{a}^T = \left(\vec{a}_1^{\,T}, \vec{a}_2^{\,T}\right). \qquad (1)$$