

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Г. Ф. Зайцев

Киев

Работа посвящена дальнейшему развитию методов определения переходных процессов замкнутых импульсных систем по их дискретным изображениям [1—5], в частности, развитию метода разложения z -изображения реакции системы по степеням z^{-1} .

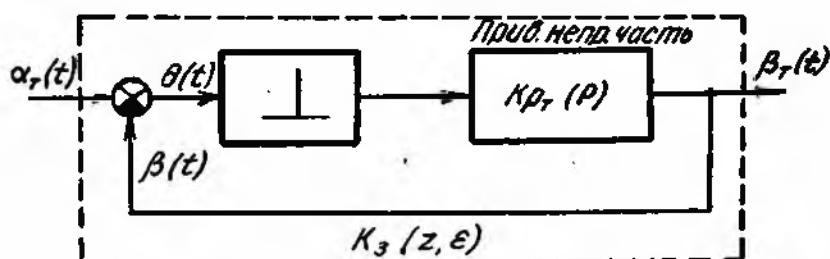


Рис. 1.

Как известно [1—6], z -изображение выходной величины замкнутой импульсной системы (рис. 1) равно:

$$\beta(z, \epsilon) = K_3(z, \epsilon) z^{-1} \alpha(z, 1),$$

где $z^{-1} \alpha(z, 1)$ — изображение входного сигнала;

$K_3(z, \epsilon)$ — передаточная функция замкнутой импульсной системы:

$$K_3(z, \epsilon) = \frac{K_p(z, \epsilon)}{1 + z^{-1} K_p(z, 1)}$$

$K_p(z, \epsilon)$ — передаточная функция импульсной системы в разомкнутом состоянии;

или для случая, когда сигнал, поступающий на импульсный элемент, не претерпевает скачков:

$$\beta(z, \epsilon) = K_3(z, \epsilon) \alpha(z, 0),$$

где

$$K_3(z, \epsilon) = \frac{K_p(z, \epsilon)}{1 + K_p(z, 0)}.$$

Для определения реакции системы $\beta[n, \epsilon]$ на данный входной сигнал необходимо выполнить обратное z -преобразование, т. е. найти оригинал функции по ее z -изображению. Одним из распространенных методов определения оригинала по его z -изображению является метод разло-

жения z -изображения по степеням z^{-1} . Этот метод применен Я. З. Цыпкиным [1] для определения импульсной переходной функции импульсной замкнутой системы, а Г. Г. Сигаловым [3] — для нахождения реакции системы на воздействие произвольной формы в частном случае, когда z -изображение представляется в виде отношения полиномов равных степеней.

Ниже выводится рекуррентное соотношение, позволяющее сравнительно просто определять реакцию импульсной системы на воздействие произвольной формы для более общего случая, когда степени полиномов, которыми представляется z -изображение выходной величины, не равны между собой.

В общем случае z -изображение выходной величины импульсной системы можно представить в виде отношения полиномов

$$\beta(z, \epsilon) = K_0(z, \epsilon) z^{-1} \alpha(z, 1) = \frac{d_k(\epsilon) z^k + d_{k-1}(\epsilon) z^{k-1} + \dots + d_0(\epsilon)}{e_l z^l + e_{l-1} z^{l-1} + \dots + e_0}, \quad (1)$$

$$k < l.$$

С другой стороны, в соответствии с основной формулой z -преобразования [2, 3, 5—6] можно записать:

$$\beta(z, \epsilon) = z \{ \beta[n, \epsilon] \} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta[n, \epsilon] z^{-n} = \beta[0, \epsilon] + \beta[1, \epsilon] z^{-1} + \beta[2, \epsilon] z^{-2} + \dots + \beta[n, \epsilon] z^{-n} + \dots \quad (2)$$

Значения коэффициентов $\beta[n, \epsilon]$ степенного ряда при z^{-n} соответствуют значениям выходной величины системы в дискретные моменты времени $\bar{t} = n + \epsilon$.

Таким образом, для определения дискретных значений переходного процесса системы необходимо определить коэффициенты степенного ряда. Определить эти коэффициенты через параметры системы и входное воздействие можно путем приравнивания правых частей выражений (1) и (2). Однако прежде чем приравнять эти части, следует выполнить преобразование выражения (1) с тем, чтобы так же, как и в правой части выражения (2), получить полиномы относительно z^{-1} . Для этого умножим числитель и знаменатель правой части выражения (1) на z^{-l} и вынесем $z^{-(l-k)}$ за скобку:

$$\beta(z, \epsilon) = \frac{d_k(\epsilon) + d_{k-1}(\epsilon) z^{-1} + \dots + d_0(\epsilon) z^{-k}}{e_l + e_{l-1} z^{-1} + \dots + e_0 z^{-l}} z^{-(l-k)}. \quad (3)$$

Приравняв (3) и (2), получим:

$$\frac{d_k(\epsilon) + d_{k-1}(\epsilon) z^{-1} + \dots + d_0(\epsilon) z^{-k}}{e_l + e_{l-1} z^{-1} + \dots + e_0 z^{-l}} z^{-(l-k)} \sum_{n=0}^{\infty} \beta[n, \epsilon] z^{-n}. \quad (4)$$

или

$$\frac{d_k(\epsilon) + d_{k-1}(\epsilon) z^{-1} + \dots + d_0(\epsilon) z^{-k}}{e_l + e_{l-1} z^{-1} + \dots + e_0 z^{-l}} = z^{l-k} \sum_{n=0}^{\infty} \beta[n, \epsilon] z^{-n}. \quad (4')$$

Согласно теореме сдвига [1, 2]

$$z^{l-k} \sum_{n=0}^{\infty} \beta[n, \epsilon] z^{-n} = z^{l-k} \beta(z, \epsilon) = z \{ \beta[r + l - k, \epsilon] \} = \sum_{r=0}^{\infty} \beta[r + l - k, \epsilon] z^{-r},$$

что может быть при

$$\beta[0, \varepsilon] = \beta[1, \varepsilon] = \dots = \beta[l-k-1, \varepsilon] = 0.$$

Подставляя полученное значение $z^{l-k} \sum_{n=0}^{\infty} \beta[n, \varepsilon] z^{-n}$ в (4) и записывая сумму в развернутой форме, получаем:

$$\frac{d_k(\varepsilon) + d_{k-1}(\varepsilon) z^{-1} + \dots + d_0(\varepsilon) z^{-k}}{e_l + e_{l-1} z^{-1} + \dots + e_0 z^{-l}} = \beta[l-k, \varepsilon] + \\ + \beta[1+l-k, \varepsilon] z^{-1} + \dots + \beta[s+l-k, \varepsilon] z^{-s} + \dots$$

Умножив обе части равенства на знаменатель левой части, будем иметь:

$$d_k(\varepsilon) + d_{k-1}(\varepsilon) z^{-1} + \dots + d_0(\varepsilon) z^{-k} = (e_l + e_{l-1} z^{-1} + \\ + \dots + e_0 z^{-l}) \{ \beta[l-k, \varepsilon] + \beta[1+l-k, \varepsilon] z^{-1} + \\ + \dots + \beta[s+l-k, \varepsilon] z^{-s} + \dots$$

Раскрывая скобки в правой части полученного выражения и приравнивая коэффициенты правой и левой частей при одинаковых степенях z^{-1} , получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z^0 \quad d_k(\varepsilon) &= \beta[l-k, \varepsilon] e_l; \\ \text{при } z^{-1} \quad d_{k-1}(\varepsilon) &= \beta[l-k, \varepsilon] e_{l-1} + \beta[1+l-k, \varepsilon] e_l; \\ \text{при } z^{-2} \quad d_{k-2}(\varepsilon) &= \beta[l-k, \varepsilon] e_{l-2} + \beta[1+l-k, \varepsilon] e_{l-1} + \\ &\quad + \beta[2+l-k, \varepsilon] e_l \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и т. д., из которой можно определить дискретные значения кривой переходного процесса системы.

Из первого уравнения находим дискретное значение выходной величины в момент времени $t = l-k + \varepsilon$:

$$\beta[l-k, \varepsilon] = \frac{d_k(\varepsilon)}{e_l}.$$

Из второго уравнения определяем:

$$\beta[1+l-k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l} \{ d_{k-1}(\varepsilon) - \beta[l-k, \varepsilon] e_{l-1} \}.$$

Из третьего уравнения получаем:

$$\beta[2+l-k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l} \{ d_{k-2}(\varepsilon) - \beta[l-k, \varepsilon] e_{l-2} - \beta[1+l-k, \varepsilon] e_{l-1} \},$$

или в сокращенной форме записи:

$$\beta[2+l-k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l} \{ d_{k-2}(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{2-1} \beta[i+l-k, \varepsilon] e_{l-2+i} \} \quad (6)$$

По аналогии с (6), значение выходной величины в момент времени $t = s+l-k + \varepsilon$ можно определить с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\beta[s+l-k, \varepsilon] = \frac{1}{e_l} \{ d_{k-s}(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i+l-k, \varepsilon] e_{l-s+i} \}. \quad (7)$$

Полученное выражение позволяет найти кривую переходного процесса не только в дискретные моменты квантования (при $\varepsilon = 0$), но

и в промежутках между ними, если придавать ϵ значения от 0 до 1. С помощью этого выражения можно определять реакцию импульсной системы на воздействие произвольной формы.

Для определения переходной функции системы на ее вход необходимо подавать единичное ступенчатое воздействие, z -изображение которого равно:

$$z\{1[n]\} = \frac{z}{z-1}.$$

В этом случае z -изображение реакции системы (переходной функции системы) будет равно:

$$\beta(z, \epsilon) = K_s(z, \epsilon) \frac{z}{z-1}. \quad (8)$$

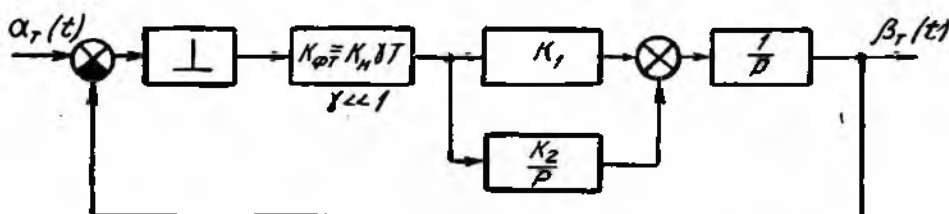


Рис. 2.

Пример. Рассчитать переходную функцию замкнутой импульсной системы автоматического сопровождения цели по дальности с двумя интеграторами (рис. 2), передаточная функция которой определяется таким выражением [6]:

$$K_s(z, \epsilon) = \frac{b_2(\epsilon) z^2 + b_1(\epsilon) z}{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} b_2(\epsilon) &= k_3 + k_4 \epsilon; \quad c_2 = 1, \\ b_1(\epsilon) &= k_4 - k_3 - k_4 \epsilon; \quad c_1 = -(2 - k_3 - k_4), \\ b_0(\epsilon) &= 0, \quad c_0 = 1 - k_3 \end{aligned}$$

при следующих параметрах системы:

$$\begin{aligned} k_3 &= k_u \gamma T k_1 = k_1 = 0,84; \\ k_4 &= k_u \gamma T^2 k_2 = T k_2 = 0,6. \end{aligned}$$

z -изображение переходной функции системы в соответствии с выражением (8) равно:

$$\begin{aligned} \beta(z, \epsilon) &= K_s(z, \epsilon) \frac{z}{z-1} = \frac{b_2(\epsilon) z^2 + b_1(\epsilon) z}{c_2 z^2 + c_1 z + c_0} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{b_2(\epsilon) z^3 + b_1(\epsilon) z^2}{c_2 z^3 + (c_1 - c_2) z^2 + (c_0 - c_1) z + c_0} = \\ &= \frac{d_3(\epsilon) z^3 + d_2(\epsilon) z^2}{e_3 z^3 + e_2 z^2 + e_1 z + e_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} d_3(\epsilon) &= b_2(\epsilon) = k_3 + k_4 \epsilon = 0,84 + 0,6\epsilon; \\ d_2(\epsilon) &= b_1(\epsilon) = k_4 - k_3 - k_4 \epsilon = -0,24 - 0,6\epsilon; \\ e_3 &= c_2 = 1; \\ e_2 &= c_1 - c_2 = -2 + k_3 + k_4 - 1 = -1,56; \\ e_1 &= c_0 - c_1 = 1 - k_3 + (2 - k_3 - k_4) = 3 - 2k_3 - k_4 = 0,72; \\ e_0 &= -c_0 = -(1 - k_3) = -0,16. \end{aligned}$$

Для расчета переходной функции воспользуемся полученным рекуррентным соотношением (7). Для рассматриваемого примера, как видно из выражения (10), высшие показатели степеней знаменателя l и числителя k z -изображения переходной функции равны $l = k = 1$, поэтому рекуррентное соотношение примет вид

$$\beta[s, \epsilon] = \frac{1}{e_s} \left\{ d_{3-s}(\epsilon) - \sum_{i=0}^{s-1} \beta[i, \epsilon] e_{3-s+i} \right\}. \quad (11)$$

Дискретные значения переходной функции системы в соответствии с последним выражением будут равны:

$$\beta[0, \epsilon] = \frac{1}{e_3} d_3(\epsilon) = 0,84 + 0,6\epsilon;$$

$$\beta[1, \epsilon] = \frac{1}{e_2} \left\{ d_2(\epsilon) - \sum_{i=0}^0 \beta[i, \epsilon] e_{3-1+i} \right\} =$$

$$= \frac{1}{e_2} \{ d_2(\epsilon) - \beta[0, \epsilon] e_2 \} = 1,07 + 0,336\epsilon;$$

$$\beta[2, \epsilon] = \frac{1}{e_1} \left\{ d_1(\epsilon) - \sum_{i=0}^1 \beta[i, \epsilon] e_{3-2+i} \right\} =$$

$$= \frac{1}{e_1} \{ d_1(\epsilon) - \beta[0, \epsilon] e_1 - \beta[1, \epsilon] e_2 \} = 1,07 + 0,09\epsilon;$$

$$\beta[3, \epsilon] = \frac{1}{e_0} \left\{ d_0(\epsilon) - \sum_{i=0}^2 \beta[i, \epsilon] e_{3-3+i} \right\} =$$

$$= \frac{1}{e_0} \{ d_0(\epsilon) - \beta[0, \epsilon] e_0 - \beta[1, \epsilon] e_1 - \beta[2, \epsilon] e_2 \} = 1,02 + 0,01\epsilon;$$

$$\beta[4, \epsilon] = 1,00 + 0,01\epsilon;$$

$$\beta[s, \epsilon] \approx 1 \quad \text{при } s > 4.$$

Кривая переходного процесса системы, построенная на основании расчетных данных, приведена на рис. 3.

Результаты расчета переходной функции системы совпадают с расчетными данными при использовании других методов расчета, что свидетельствует о справедливости полученного рекуррентного соотношения.

Приведенный пример показывает, что с помощью рекуррентной формулы (7) можно сравнительно просто и быстро определять реакции импульсных систем на воздействие произвольной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
2. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. ГНТИМЛ, М., 1962.
3. Г. Г. Сигалов. Импульсные радиолокационные следящие системы. МВирТУ, Минск, 1962.
4. В. П. Перов. Статистический синтез импульсных систем. Изд-во «Советское радио», М., 1959.
5. Э. Джурри. Импульсные системы автоматического регулирования. Перевод с англ. Физматгиз, М., 1963.
6. Г. Ф. Зайцев. Дискретные системы автоматического регулирования и управления. КВирТУ, Киев, 1964.

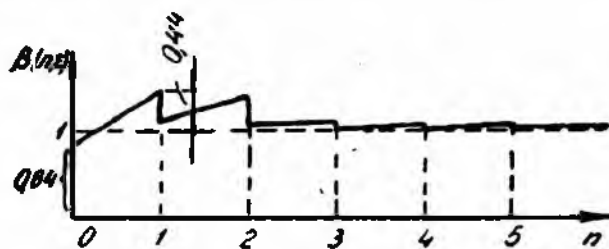


Рис. 3.