

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Автоматизація і комп'ютерно-інтегровані технології  
(повна назва)

Кафедра Комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки  
(повна назва)

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти перший (бакалаврський)  
Побудова математичних моделей об'єктів автоматизації  
з використанням цифрових двійників  
(тема)

Виконав:  
здобувач 4 року навчання,  
групи АКТАКІТ-21-2  
Валерія ДАРАГАН  
(власне ім'я, прізвище)

Спеціальність 151 Автоматизація та  
комп'ютерно-інтегровані технології  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма Автоматизація та  
комп'ютерно-інтегровані технології  
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. каф. Юрій РОМАШОВ  
(посада, власне ім'я, прізвище)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри КІТАР

\_\_\_\_\_

(підпис)

Ігор НЕВЛЮДОВ  
(власне ім'я, прізвище)

2025 р.

Я, Дараган Валерія Віталіївна, як здобувачка вищої освіти ХНУРЕ, розумію і підтримую політику закладу із академічної доброчесності. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки кваліфікаційної роботи. Я не використовувала штучний інтелект для підготовки кваліфікаційної роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

14 червня 2025 р.



Валерія ДАРАГАН

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет \_\_\_\_\_ АКТ \_\_\_\_\_  
Кафедра \_\_\_\_\_ КІТАР \_\_\_\_\_  
Рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ перший (бакалаврський) \_\_\_\_\_  
Спеціальність 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології \_\_\_\_\_  
(код і повна назва)  
Тип програми \_\_\_\_\_ освітньо-професійна \_\_\_\_\_  
Освітня програма Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології \_\_\_\_\_  
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис)

« 28 » квітня 2025 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві \_\_\_\_\_ Дараган Валерії Віталіївни \_\_\_\_\_  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи \_\_\_\_\_ Побудова математичних моделей об'єктів автоматизації  
з використанням цифрових двійників \_\_\_\_\_

затверджена наказом університету від 19 травня 2025 р. № 390 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 червня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи \_\_\_\_\_ Технічна інформація про насосну установку, наукові  
джерела щодо цифрових двійників та об'єктів автоматизації, доступ до програмного  
середовища моделювання (Python, GoogleColab) \_\_\_\_\_

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1) Аналіз підходів до побудови математичних моделей об'єктів автоматизації \_\_\_\_\_

2) Вивчення структури та принципу роботи насосної установки \_\_\_\_\_

3) Формування математичної моделі об'єкта у вигляді передавальної функції \_\_\_\_\_

4) Ідентифікація параметрів моделі за допомогою практичних даних \_\_\_\_\_

5) Реалізація цифрового двійника у програмному середовищі \_\_\_\_\_

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри) \_\_\_\_\_

Графічний матеріал у вигляді презентації, файл формату \*.ppt, 13 арк., Ф. А4

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_


6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1 )

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Строк / терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Дослідження предметної галузі	28.04.2025	виконано
2	Теоретичний аналіз: цифрові двійники, моделювання, методи ідентифікації	01.05.2025 – 05.05.2025	виконано
3	Вибір об'єкта (насосна установка), опис технічних характеристик	06.05.2025 – 08.05.2025	виконано
4	Ідентифікація параметрів та побудова математичної моделі	09.05.2025 – 12.05.2025	виконано
5	Реалізація цифрового двійника у Python, побудова графіків реакції	13.05.2025 – 16.05.2025	виконано
6	Аналіз результатів симуляції, оцінка поведінки системи	17.05.2025 – 20.05.2025	виконано
7	Оформлення розділу з охорони праці, висновків та списку джерел	21.05.2025 – 25.05.2025	виконано
8	Верстка, редагування, підготовка до захисту	26.05.2025 – 18.06.2025	виконано
	Подання кваліфікаційної роботи в ЕК	20.06.2025	виконано

Дата видачі завдання 28 квітня 2025 р.

Здобувач   
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

Валерія ДАРАГАН

(власне ім'я, прізвище)

проф. каф. Юрій РОМАШОВ

(посада, власне ім'я, прізвище)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 67 с., 22 рис., 1 дод., 10 джерел.

ЦИФРОВИЙ ДВІЙНИК, АВТОМАТИЗАЦІЯ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ, НАСОСНА УСТАНОВКА, СИСТЕМА КЕРУВАННЯ, СИМУЛЯЦІЯ.

Побудова математичних моделей є однією з ключових задач у сфері автоматизації, оскільки саме через математичне представлення об'єкта можливо реалізувати ефективне керування, оптимізацію та прогнозування роботи системи. Сучасні технології дозволяють доповнити цей процес створенням цифрових двійників – віртуальних копій фізичних об'єктів, які функціонують у режимі реального часу та дозволяють імітувати поведінку об'єкта без необхідності втручання у фізичну систему. Відповідно, об'єктом розробки є побудова математичних моделей об'єктів автоматизації.

Предмет розробки – застосування цифрових двійників і параметричної ідентифікації для побудови математичних моделей об'єктів автоматизації.

Метою роботи є розробка підходу до застосування цифрових двійників та параметричної ідентифікації для побудови математичних моделей об'єктів автоматизації. Такий підхід дозволяє не лише точніше описати динаміку об'єкта, а й забезпечити гнучкість у його моделюванні, тестуванні та подальшому впровадженні.

Завдання розробки охоплюють аналіз сучасних методів моделювання, вивчення принципів роботи базових цифрових двійників, виконання параметричної ідентифікації за експериментальними або апроксимаційними даними, побудову динамічної моделі об'єкта та її реалізацію у вигляді цифрового двійника із подальшим тестуванням.

Об'єктом дослідження в даній роботі є побудова математичних моделей об'єктів автоматизації, що дозволяє точно описати їхню динаміку, забезпечити

можливість симуляції, аналізу та подальшої реалізації у вигляді цифрових двійників. Такий підхід є важливою складовою сучасних систем керування, де математична модель виступає основою для створення адаптивних, надійних і ефективних алгоритмів автоматизації.

Методика розробки базується на використанні класичних математичних методів, зокрема методу найменших квадратів і правила Крамера для визначення параметрів моделі, а також на побудові передавальних функцій та імітаційному моделюванні. Як приклад, для застосування цифрових двійників, було розглянуто насосну установку, яка є типовим елементом у промислових автоматизованих системах.

У першому розділі представлено теоретичні основи побудови математичних моделей та поняття цифрового двійника, його функціональне призначення, переваги та галузі застосування. Надано класифікацію типів моделей, що використовуються в автоматизованих системах, а також описано можливості сучасних програмних засобів для симуляції.

Другий розділ присвячений побудові математичної моделі на основі реального об'єкта – насосної установки. Виконано параметричну ідентифікацію з використанням методу найменших квадратів та правила Крамера. Отримано числові значення параметрів моделі, що відображають поведінку системи у часі.

У третьому розділі реалізовано цифровий двійник насосної установки у програмному середовищі. Проведено імітацію її роботи, побудовано графіки реакцій системи на входні впливи, виконано аналіз перехідного процесу та динамічної поведінки об'єкта.

У результаті розроблено підхід до побудови математичних моделей із застосуванням цифрових двійників і параметричної ідентифікації. Створений цифровий двійник дозволяє проводити дослідження об'єкта без втручання у реальну систему, що забезпечує підвищення безпеки, зменшення витрат часу та ресурсів.

## ABSTRACT

Explanatory note: 67 p., 22 fig., 1 ann., 10 references.

DIGITAL TWIN, AUTOMATION, MATHEMATICAL MODEL, PARAMETRIC IDENTIFICATION, PUMP UNIT, CONTROL SYSTEM, SIMULATION.

The development of mathematical models is one of the key tasks in the field of automation, as it enables effective control, optimization, and forecasting of system behavior. Modern technologies make it possible to enhance this process by introducing digital twins – virtual replicas of physical objects operating in real-time, which allow simulating object behavior without intervening in the actual system. Accordingly, the object of the study is the development of mathematical models for automation objects.


The subject of the study is the application of digital twins and parametric identification for constructing mathematical models of automation objects.

The purpose of the work is to develop an approach to applying digital twins and parametric identification to build mathematical models of automation systems. This approach not only improves the accuracy of object modeling but also provides flexibility in simulation, testing, and implementation processes.

The objectives of the work include the analysis of modern modeling methods, the study of digital twin principles, the implementation of parametric identification based on experimental or approximated data, the development of a dynamic model of the object, and its implementation in the form of a digital twin for further testing.

The methodology is based on classical mathematical methods, in particular, the least squares method and Cramer's rule for identifying model parameters, as well as transfer function development and simulation modeling. As a practical example, a pump unit – a typical element of industrial automated systems – was selected.

The first chapter provides the theoretical foundations of mathematical modeling



and introduces the concept of a digital twin, its functional purpose, advantages, and areas of application. It includes a classification of model types used in automation and describes modern simulation tools.

The second chapter is devoted to the construction of a mathematical model based on a real object – a pump unit. Parametric identification was carried out using the least squares method and Cramer's rule. Numerical values of the model parameters reflecting system dynamics over time were obtained.

In the third chapter, a digital twin of the pump unit was implemented in a software environment. A simulation of its operation was conducted, response graphs to input impacts were built, and an analysis of the transient process and dynamic behavior was performed.

As a result, an integrated approach was developed for constructing mathematical models using digital twins and parametric identification. The created digital twin enables system behavior analysis without interacting with the real equipment, thereby improving safety, saving time and resources.

## ЗМІСТ

Перелік скорочень.....	11
Вступ.....	12
1 Аналіз підходів до моделювання об'єктів автоматизації.....	14
1.1 Цифрові двійники: поняття, структура і сфери застосування.....	15
1.1.1 Визначення та концепція цифрового двійника: його види.....	15
1.1.2 Аналіз цифрових двійники в контексті життєвого циклу технічних систем.....	18
1.1.3 Аналіз застосувань цифрових двійників в автоматизації.....	21
1.2 Методи побудови математичних моделей.....	22
1.2.1 Класифікація математичних моделей у цифрових двійниках.....	24
1.2.2 Використання диференціальних рівнянь у побудові моделей.....	25
1.2.3 Переваги й обмеження різних типів моделей.....	27
1.3 Інструменти та програмні засоби моделювання.....	28
2 Розробка математичної моделі об'єкта.....	30
2.1 Вибір об'єкта та постановка задачі.....	30
2.1.1 Технічні характеристики об'єкта.....	32
2.1.2 Формування задачі моделювання.....	34
2.2 Ідентифікація параметрів: метод найменших квадратів.....	35
2.3 Розрахунок параметрів за допомогою правила Крамера.....	37
2.4 Побудова передавальної функції.....	39
3 Реалізація цифрового двійника та симуляція.....	41
3.1 Математична модель насосної установки.....	41
3.1.1 Вибір типу насосної системи для моделювання.....	41
3.1.2 Фізичні параметри та вхідні змінні.....	44
3.1.3 Побудова математичної моделі.....	46

3.1.4 Ідентифікація параметрів моделі.....	48
3.1.5 Побудова передавальної функції.....	52
3.2 Реалізація моделі у програмному середовищі.....	53
3.2.1 Вибір платформи для симуляції.....	53
3.2.2 Налаштування моделі та початкові умови .....	54
3.3 Аналіз результатів моделювання.....	59
3.4 Охорона праці.....	60
Висновки.....	62
Перелік джерел посилання.....	63
Додаток А Демонстраційний матеріал.....	66

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

API – Application Programming Interface;

CAD – Computer-Aided Design;

ЦД – цифровий двійник;

IoT – Internet of Things;

МНК – метод найменших квадратів;

NASA – National Aeronautics and Space Administration;

ПЕОМ – персональна електронно-обчислювальна машина;

ПК – персональний комп'ютер;

ПЛК – програмований логічний контролер;

SCADA – Supervisory Control and Data Acquisition;

ШІМ – широтно-імпульсна модуляція.

## ВСТУП

У сучасному світі стрімкий розвиток цифрових технологій сприяє трансформації підходів до проєктування, експлуатації та обслуговування технічних систем. Однією з таких прогресивних концепцій є використання цифрових двійників – віртуальних моделей фізичних об'єктів, які дозволяють моделювати, аналізувати та оптимізувати роботу реальних систем у безпечному цифровому середовищі. Це особливо актуально для автоматизованих систем, які функціонують у динамічному середовищі та потребують високої точності керування.

В основі створення цифрового двійника лежить математична модель – сукупність рівнянь, що описують поведінку об'єкта в часі та просторі. Саме математичне моделювання є ключовим інструментом для вивчення процесів, які складно або небезпечно досліджувати експериментально. Застосування методів параметричної ідентифікації, таких як метод найменших квадратів, дозволяє адаптувати модель до реальних умов, зробивши її максимально наближеною до поведінки фізичної системи.

Об'єктом дослідження у цій роботі є побудова математичних моделей об'єктів автоматизації, що дозволяє точно описати їхню динаміку, забезпечити можливість симуляції, аналізу та реалізації у вигляді цифрових двійників. Як приклад такого об'єкта розглянуто насосну установку — поширений елемент у промислових системах, де необхідна стабільна подача рідини. Побудована модель дозволяє досліджувати поведінку системи при змінних навантаженнях, тестувати алгоритми керування та оцінювати потенційні відмови без залучення фізичного обладнання [1].

Актуальність обраної теми зумовлена потребою в точному та безпечному моделюванні технологічних об'єктів. Використання цифрових двійників сприяє зменшенню витрат на експериментальні дослідження, підвищує ефективність розробки автоматизованих систем та сприяє впровадженню інноваційних

технологій у виробництво.

Метою кваліфікаційної роботи є розробка математичної моделі об'єкта автоматизації та реалізація його цифрового двійника, що дозволяє дослідити динаміку об'єкта та перевірити ефективність керування в умовах моделювання.

Робота виконано згідно [11-12]. Проведені дослідження відповідають цілям сталого розвитку, так як наукові дослідження та інновації є важливими факторами, що сприяють сталому розвитку.

## 1 АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ АВТОМАТИЗАЦІЇ

В умовах динамічного розвитку промислових технологій і автоматизованих систем усе більшої актуальності набуває необхідність у точному й адаптивному описі поведінки об'єктів керування. Одним із найсучасніших підходів до цього завдання є використання цифрових двійників – концепції, що поєднує в собі математичне моделювання, збір реальних даних і симуляцію.

Цифровий двійник – це не просто модель, а віртуальна копія фізичного об'єкта, здатна відтворювати його поточний стан, прогнозувати подальшу поведінку та реагувати на зміну умов. Така модель формується на основі динамічних рівнянь або передавальних функцій, які описують фізичні й технологічні процеси. Зв'язок із реальним об'єктом здійснюється за допомогою сенсорів, які передають у цифрову модель актуальні значення змінних. У результаті, модель здатна адаптуватися до змін і служити джерелом актуальної інформації для системи керування.

Поява цифрових двійників значно розширила можливості інженерного аналізу. Якщо раніше перевірка моделей потребувала тривалого експериментування, то тепер стало можливим тестувати роботу об'єкта в умовах, які складно або навіть неможливо відтворити фізично. Наприклад, у разі виявлення тенденції до погіршення технічного стану обладнання цифровий двійник може спрогнозувати час виходу з ладу або порекомендувати зміни у керуванні.

У різних галузях – від машинобудування до медицини – ця технологія вже довела свою ефективність. Її застосування дозволяє не лише покращити точність розрахунків, а й забезпечити гнучке налаштування систем у режимі реального часу. Крім того, цифровий двійник допомагає виявити приховані проблеми ще до того, як вони проявляться у фізичному світі.

Таким чином, цифровий двійник виступає своєрідним містком між теорією та практикою. Його використання дозволяє не лише глибше зрозуміти поведінку об'єкта, а й ефективно впливати на неї – завдяки точним даним, швидкій обробці інформації та можливості прогнозування подій у межах моделі.

### 1.1 Цифрові двійники: поняття, структура і сфери застосування

Численні виробничі технології сприяють досягненню обіцянок Індустрії 4.0. У цій технологічній структурі цифровий двійник став передовою технологією діджиталізації виробництва, оскільки він відображає фізичну інформацію в кібернетичному світі, відтворюючи і маніпулюючи поведінкою свого фізичного аналога за допомогою високоточної віртуальної моделі і двостороннього обміну даними. Проте термін «цифровий двійник» залишається багатозначним, оскільки немає консенсусу щодо його визначення.

#### 1.1.1 Визначення та концепція цифрового двійника: його види

Найбільш прийнятне визначення цифрового двійника дає NASA: «інтегрована мультифізична, мультимасштабна, імовірнісна симуляція транспортного засобу або системи, яка використовує найкращі доступні фізичні моделі, оновлення датчиків, історію парку тощо, щоб відобразити життя свого відповідного літаючого двійника» [2]. Таким чином, технологія цифрових двійників затьмарює традиційне моделювання та імітацію (M&S), безперешкодно поєднуючи фізичний та віртуальний простори. Іншими словами, кіберпростір повинен містити актуальну віртуальну модель виробничого об'єкта, яка безперешкодно відстежує і пристосовується до змін у фізичному об'єкті за допомогою двонаправленого потоку даних. Ця функція відкрила нову еру для різних виробничих сценаріїв, включаючи прогнозоване технічне обслуговування, виявлення несправностей, планування виробництва тощо. У

строгому сенсі, цифровий двійник - це дзеркальне відображення фізичного процесу, яке артикулюється паралельно з процесом, що розглядається, і зазвичай точно відповідає роботі фізичного процесу, який відбувається в реальному часі.

Вперше цей термін запропонував на початку 2000-х років Майкл Грієвз (Michael Grieves, 2014) [3], чий досвід у дизайні продуктів спочатку укорінив цю концепцію у виробничій інженерії. Однак з часу свого виникнення концепція дещо розширилася і послабилася, оскільки зараз її застосовують, а точніше, використовують для характеристики різноманітних цифрових імітаційних моделей, які працюють паралельно з процесами, що відбуваються в реальному часі, які стосуються як соціальних та економічних систем, так і фізичних. У цьому сенсі нагальним питанням є визначення відмінностей між реальною системою і будь-якою комп'ютерною моделлю цієї системи, і в цьому контексті варто звернути увагу на труднощі, які виникають у зв'язку з аргументами про те, що є цифровим двійником міста.

Технологія цифрових двійників (ЦД) також відома як цифрові аватари, цифрові майстри, цифрові тіні тощо. Це технологія, яка виконує відображення реального світу з цифровим світом і реалізує взаємодію між ними в режимі реального часу. Ця технологія долає обмеження реальних факторів навколишнього середовища. Він може поширювати відповідні функції реального світу на цифровий світ і реагувати на реальний світ. В даний час ЦД характеризуються трьома функціями: злиття даних різних ознак фізичних об'єктів і високоточне відображення фізичних об'єктів в реальному часі; співіснування та коеволюція протягом життєвого циклу фізичних об'єктів; та опис, оптимізація та керування фізичними об'єктами.

ЦД виникли у військовій аерокосмічній промисловості Сполучених Штатів [4]. Тепер вони поширилися на транспорт, промислове виробництво, інтелектуальну освіту та інші галузі промисловості. Вони можуть сприяти моделюванню, моніторингу, оцінці, прогнозуванню, оптимізації, контролю та іншим програмам. Як показано (рисунок 1.1), технологія ЦД тісно корелює з

багатьма технологіями. ЦД розглядається як ключова технологія для реалізації цифрової трансформації підприємств, а також є гарячою технологією, що викликає інтерес у промисловості та наукових колах.

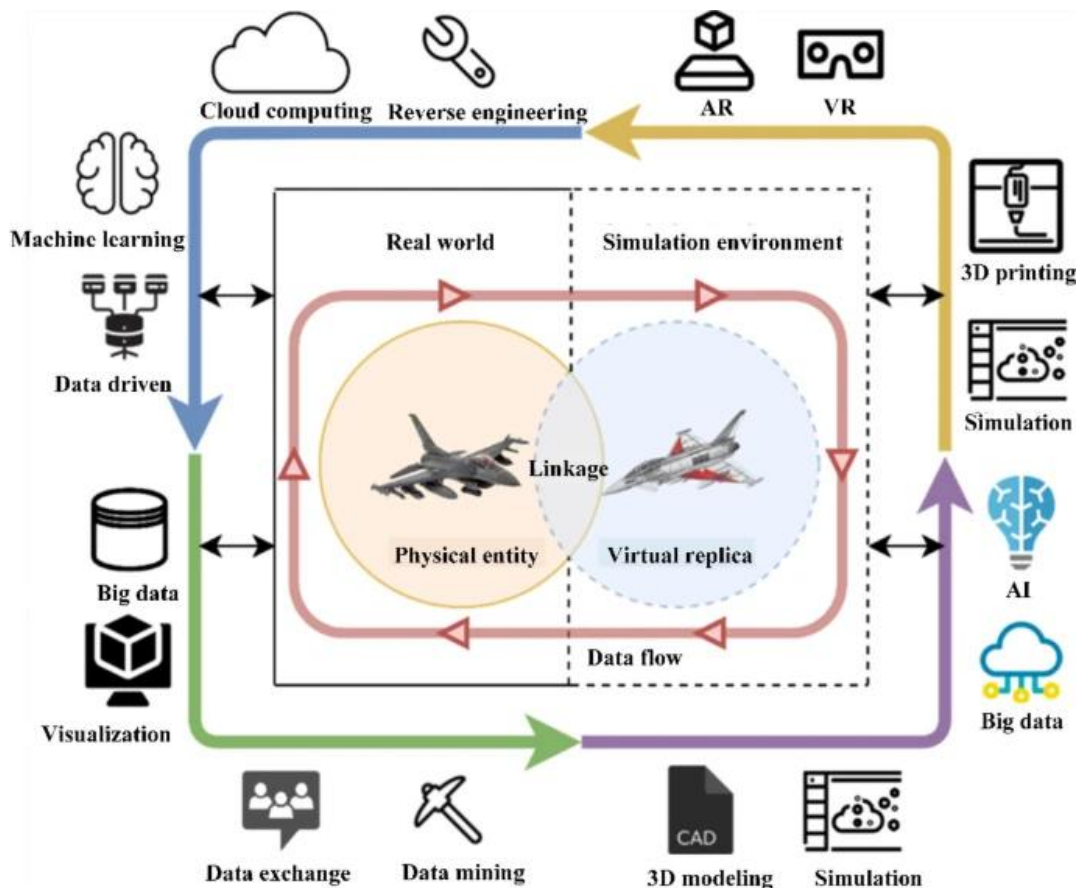


Рисунок 1.1 – ЦД і пов'язані з нею технології

Дискретний цифровий двійник – це єдиний об'єкт, який використовується без необхідності подальшого розбиття. Наприклад, редуктор або двигун для кульового млина в гірничодобувній промисловості можна контролювати і аналізувати на цьому рівні об'єкта. Композитний цифровий двійник – це комбінація дискретних цифрових двійників, які представляють об'єкт, що складається з кількох окремих компонентів або частин. Композиція може

відбутися на різних рівнях. Наприклад, виробнича комірка – це складений об’єкт, цифровий двійник якого складається з цифрових двійників пристроїв у виробничій комірці. Весь завод – це система, цифровий двійник якої складається з кількох інших складених цифрових двійників.

Ієрархічний: як і аналоги в реальному світі, набір компонентних цифрових двійників може бути зібраний у цифровий двійник обладнання, набір цифрових двійників обладнання можна зібрати у цифровий двійник 11 виробничої лінії, набір цифрових двійників виробничої лінії можна зібрати в заводський цифровий двійник тощо. Асоціативний: існують асоціації між цифровими двійниками, як і їхні аналоги в реальному світі. Цифровий двійник газопроводу пов'язаний з цифровим двійником для видобутку та споживанням газу.

Одноранговий (рівноправний) зв'язок: одноранговий зв'язок спостерігається в групі обладнання однакового або схожого типів, яке виконує однакові або подібні функції. Загальний ефект від усього обладнання – це проста сума ефекту, створеного кожною частиною обладнання. Наприклад, у вітряній електростанції група двигунів вітряних турбін утворюють композитний цифровий двійник вітряної турбіни

### 1.1.2 Аналіз цифрових двійники в контексті життєвого циклу технічних систем

Протягом усього життєвого циклу об’єкта автоматизації інформація про нього часто знаходиться в різних системах і базах даних, які обслуговуються окремими підрозділами чи навіть різними організаціями. Така розпорошеність даних перешкоджає ефективному обміну інформацією та її узгодженому використанню на різних етапах експлуатації, що може призводити до дублювання, суперечностей або втрати важливих відомостей. У результаті значний час витрачається на пошук потрібних даних, їхню обробку та адаптацію, що ускладнює процес прийняття рішень. До того ж, відсутність цілісної

інформаційної структури створює перешкоди для використання сучасних технологій, таких як штучний інтелект або розширена аналітика, які потребують доступу до повних та достовірних даних.

Використання цифрових двійників вирішує цю проблему, об'єднуючи інформацію з різних джерел у єдину віртуальну модель. Цифровий двійник виконує роль посередника між фізичними об'єктами та інформаційними системами, дозволяючи інтегрувати дані і робити їх доступними через стандартизовані інтерфейси, зокрема API. Такий підхід не лише забезпечує більш точне уявлення про стан об'єкта, але й сприяє оптимізації витрат, підвищенню ефективності обслуговування та прийняттю обґрунтованих управлінських рішень.

Упродовж свого життєвого циклу об'єкт автоматизації може неодноразово змінюватися та оновлюватися. Наприклад, виробник може доповнювати модель новими функціональностями, замовник – адаптувати її до своїх умов, а технічне обслуговування — вносити актуальні дані про експлуатацію. Цифровий двійник у такому випадку дозволяє усім сторонам відстежувати зміни, оптимізувати процеси та зберігати єдину картину стану системи. Це особливо важливо для складних об'єктів, що потребують міждисциплінарного обслуговування.

Інформація про об'єкт протягом життєвого циклу часто зберігається в ізольованих форматах: частина вбудована у прошивку обладнання, інша – у внутрішніх базах даних обслуговуючих компаній, ще частина – у форматах САД або специфікаціях виробника. Це ускладнює об'єднання цих даних в один інформаційний простір. Цифрові двійники надають можливість створити єдиний інтегрований канал доступу до всієї інформації, яка стосується конкретного об'єкта або класу обладнання.

Крім централізації даних, цифрові двійники підтримують встановлення зв'язків між окремими компонентами об'єкта та між різними цифровими двійниками. Це дозволяє створити повноцінну цифрову екосистему, в якій інформація використовується максимально ефективно. У разі відсутності таких

зв'язків окремі цифрові моделі залишаються ізольованими, і втрачається перевага в інтегрованому аналізі.

Платформи цифрових двійників можуть включати в себе алгоритми штучного інтелекту, моделі на основі фізичних законів, віртуальні датчики та інші інструменти, які розширюють функціональні можливості та дозволяють не лише збирати, але й аналізувати, прогнозувати й автоматизувати управлінські рішення. Такі рішення можуть бути незамінними при виявленні збоїв у роботі сенсорів або при створенні програмних заміників для фізичних датчиків (рисунок 1.2).



Рисунок 1.2 – Цифрові двійники в контексті життєвого циклу технічних систем

Крім того, цифрові двійники суттєво покращують командну роботу між віддаленими групами інженерів, дозволяючи оперативно обмінюватись актуальною інформацією про об'єкт, що забезпечує високу якість проєктування, введення в експлуатацію, технічного обслуговування та модернізації.

Отже, цифровий двійник не лише зберігає повний інформаційний профіль об'єкта автоматизації, а й слугує платформою для розширеного аналізу, оптимізації, інтеграції та підвищення продуктивності протягом усього життєвого

циклу обладнання.

### 1.1.3 Аналіз застосувань цифрових двійників в автоматизації

Цифровий двійник (ЦД) в контексті автоматизації процесів відіграє надзвичайно важливу роль, оскільки дозволяє створити віртуальне відображення фізичного об'єкта або системи, що функціонує в реальному часі. Основна ідея полягає у синхронізації фізичного й цифрового компонентів, що забезпечує глибоке розуміння динаміки процесу, контроль, передбачення відмов та оптимізацію роботи системи.

У сучасних автоматизованих системах поєднуються різноманітні компоненти: сенсори, виконавчі механізми, контролери та спеціалізоване програмне забезпечення. Інтеграція цифрового двійника у таке середовище значно розширює функціональні можливості керування й діагностики. Вона забезпечує безперервне спостереження за станом об'єкта в режимі реального часу, використовуючи дані, що надходять від SCADA-систем, ПЛК-контролерів або IoT-пристроїв. Завдяки цьому з'являється можливість моделювати поведінку системи за різних умов без необхідності взаємодії з фізичним обладнанням, що особливо актуально під час тестування або модернізації.

Крім того, цифровий двійник дозволяє ще до запуску реальної системи виконувати віртуальне налагодження, перевіряти алгоритми керування та моделювати критичні ситуації. Це не лише підвищує надійність, а й значно зменшує часові та матеріальні витрати. У поєднанні з аналітикою історичних і поточних даних з'являється можливість прогнозувати ймовірні несправності або критичні стани, що покращує обслуговування та подовжує термін служби обладнання. Також цифровий двійник є ефективним інструментом для підготовки персоналу: взаємодія з віртуальною моделлю дає змогу тренуватись у безпечному середовищі, яке точно відображає реальні процеси.

Залежно від складності системи, цифровий двійник може мати різний

рівень деталізації – від простих моделей з кількома змінними до повноцінних кіберфізичних рішень, які включають адаптивні алгоритми керування й зворотний зв'язок. У його основі, як правило, лежить математична модель динаміки об'єкта, що формується на основі диференціальних рівнянь. Ця модель взаємодіє з реальними даними через датчики, інтерфейси збору інформації та аналітичні модулі, які забезпечують обробку, візуалізацію і передачу результатів через графічний інтерфейс користувача.

Згідно з дослідженням, цифровий двійник в автоматизації можна описати як систему математичних моделей, що взаємодіють між собою: модель стану об'єкта та модель зміни керованого параметра [5]. Такий підхід дозволяє не просто виводити дані, а й здійснювати прогнозування поведінки системи в умовах зміни керуючих сигналів, параметрів середовища тощо. Застосування таких двійників у розумних містах, промислових об'єктах, логістиці чи енергетиці дозволяє підвищити ресурсну ефективність, безпеку та автономність систем.

Окремо слід зазначити, що цифрові двійники відкривають нові можливості для цифрового планування життєвого циклу системи – починаючи з етапу проєктування, через виробництво, експлуатацію та до модернізації або утилізації[5]. Усе це робить цифровий двійник невід'ємним інструментом сучасної автоматизації в умовах індустрії 4.0 та переходу до індустрії 5.0.

## 1.2 Методи побудови математичних моделей

Побудова математичних моделей є фундаментальним етапом в аналізі й управлінні технічними об'єктами в автоматизованих системах. Модель дозволяє описати поведінку об'єкта у вигляді сукупності математичних співвідношень, що пов'язують вхідні, вихідні та внутрішні змінні. Завдяки цьому моделювання виступає основою для проєктування алгоритмів керування, симуляцій і прогнозного аналізу.

Сучасна теорія систем розглядає кілька основних підходів до математичного опису динаміки об'єкта. До них належать: аналітичний, емпіричний та ідентифікаційний методи. У аналітичному підході модель формується на основі фізичних законів – наприклад, законів Ньютона, термодинаміки чи гідравліки. Такий підхід забезпечує високий ступінь точності, але вимагає повного знання конструкції та параметрів системи.

Емпіричні методи передбачають побудову моделей шляхом обробки даних, отриманих із реальних експериментів або спостережень. Найчастіше вони використовуються тоді, коли математичний опис фізичних процесів є складним або недоступним. У цьому разі використовуються апроксимаційні функції, регресійний аналіз та чисельні методи.

Ідентифікаційний підхід є поєднанням емпіричних та статистичних методів, коли модель підлаштовується під реальні дані з метою мінімізації похибки між результатом моделювання та вимірними значеннями. Один з найпоширеніших методів – метод найменших квадратів (МНК) – дозволяє визначити коефіцієнти рівнянь так, щоб сумарна квадратична похибка між теоретичними й експериментальними даними була мінімальною. Цей підхід особливо ефективний при побудові лінійних моделей у вигляді передавальних функцій або диференціальних рівнянь.

На практиці широко використовуються такі формати подання математичних моделей: передавальна функція, система диференціальних рівнянь, станова модель, а також чорний ящик (black-box), коли модель побудована лише на основі вхідно-вихідних залежностей без урахування внутрішньої структури об'єкта.

Для складних технічних систем доцільним є використання комбінованого підходу, коли аналітична частина моделі доповнюється експериментальними даними або результатами чисельних симуляцій. Саме таку гібридну стратегію найчастіше застосовують при побудові цифрових двійників, які мають не лише математичне ядро, а й активний зв'язок із фізичною системою.

Математичне моделювання у межах цифрових двійників має відповідати вимогам гнучкості, точності й обчислювальної ефективності, щоб бути придатним до інтеграції з реальними процесами та інструментами аналізу.

### 1.2.1 Класифікація математичних моделей у цифрових двійниках

Модель цифрового двійника виконує роль не лише математичної репрезентації об'єкта, а й є структурною основою для всієї функціональності цифрового середовища. Вона служить контейнером, у якому відбувається обробка, взаємодія та візуалізація даних, а моделювання, що базується на цій моделі, є головним інструментом для аналізу поведінки системи.

Основу цифрового двійника, як правило, становить математична модель, яку можна класифікувати за кількома критеріями. Зокрема, з огляду на джерело формування, вирізняють фізично обґрунтовані, дані-орієнтовані та гібридні моделі. Перші базуються на фундаментальних фізичних законах – таких як рівняння теплопровідності, руху або масообміну – і часто описуються через диференціальні рівняння. Другий тип – це моделі, побудовані на основі аналізу емпіричних даних із використанням статистики або методів машинного навчання, що дає змогу отримати опис системи навіть у разі браку повного фізичного розуміння. Гібридний підхід поєднує обидва підходи, дозволяючи досягти балансу між точністю та гнучкістю.

Ще однією ознакою є рівень деталізації: макромоделі описують систему загалом, зосереджуючись на її інтегральних властивостях, тоді як мікромоделі деталізують окремі компоненти, що дозволяє вивчати конкретні внутрішні процеси.

З погляду математичного апарату моделі можуть бути детерміністичними або стохастичними. У першому випадку поведінка системи визначається чітко заданими параметрами, тоді як у другому враховуються випадкові чинники та невизначеність, що важливо для систем зі змінними умовами. Окремо варто

згадати агентно-орієнтовані моделі, які подають систему як сукупність взаємодіючих елементів (агентів), кожен з яких має власну логіку поведінки.

Нарешті, за характером оновлення виділяють статичні й динамічні моделі. Статичні залишаються незмінними після створення, а динамічні мають здатність до оновлення, зокрема шляхом інтеграції нових даних із сенсорів або IoT-пристроїв, що підтримує актуальність моделі та забезпечує її адаптацію до поточних умов функціонування об'єкта.

Фізично-обґрунтовані моделі забезпечують високий рівень достовірності завдяки прямій відповідності фізичним процесам, однак обмежені в адаптації до нових умов. Дані-орієнтовані моделі, навпаки, надзвичайно гнучкі, але потребують великих масивів якісних даних і не завжди дозволяють інтерпретувати поведінку системи у фізичних термінах.

Гібридні моделі намагаються поєднати переваги обох підходів, проте мають найвищу складність реалізації. Стохастичні моделі враховують невизначеність, що є важливою особливістю для складних і варіативних систем. Агентно-орієнтовані моделі особливо корисні для моделювання багатокomпонентних систем з автономними елементами.

Вибір типу моделі залежить від цілей моделювання, наявності вхідних даних та вимог до точності, адаптивності й інтерпретованості моделі.

### 1.2.2 Використання диференціальних рівнянь у побудові моделей

У дослідженні, представленому на міжнародній конференції "Sustainable Smart Cities and Communities" (SSC&C2025), В. Дараган, І. Колупаєва та Ю. Ромашов запропонували загальний підхід до створення цифрових двійників об'єктів автоматизації [6]. Метою є досягнення більшої точності моделювання за рахунок покращеної деталізації внутрішніх процесів.

Цей підхід базується на математичному поданні об'єкта автоматизації через зв'язок між керуючим параметром  $u(t)$  та контрольованим параметром  $x(t)$ ,

що формалізується як:

$$M: u(t) \rightarrow x(t), \quad (1.1)$$

де  $M$  – математична модель об'єкта.

Щоб врахувати динаміку внутрішніх процесів, вводиться вектор стану  $q(t)$ , зміна якого описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(q(t), u(t)), \quad q(t_0) = q_0 \quad (1.2)$$

А зміна контрольованого параметру визначається як:

$$\frac{dx(t)}{dt} = q(q(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.3)$$

Таким чином, цифровий двійник формується через зв'язану систему диференціальних рівнянь, яка дозволяє відобразити як зовнішню поведінку об'єкта, так і його внутрішній стан. Ступінь деталізації такої моделі визначається розмірністю вектора стану  $q(t)$ , що дозволяє гнучко адаптувати модель до різних завдань автоматизації.

Цифрові двійники, побудовані за таким підходом, можуть застосовуватись не лише для керування об'єктами в реальному часі, але й для навчання персоналу, діагностики аварійних ситуацій, тестування нових режимів роботи без втручання в фізичну систему.

Даний підхід є універсальним і застосовним у багатьох галузях, зокрема в інфраструктурі "розумних міст", де важливо забезпечити ефективне управління інженерними системами, знижуючи ризики та витрати.

### 1.2.3 Переваги й обмеження різних типів моделей

У цьому підрозділі розглянуто особливості основних типів математичних моделей, які використовуються при побудові цифрових двійників, а саме – аналітичні, емпіричні та гібридні. Кожен із цих підходів має свої сильні сторони, недоліки та сфери застосування, які необхідно враховувати при виборі методики моделювання об'єкта автоматизації.

Аналітичні моделі формуються на основі математичних рівнянь, що описують фізичні закономірності об'єкта. Вони дозволяють досягти високої точності за умови наявності достовірних вихідних даних. Такий підхід добре підходить для передбачення поведінки системи та оптимізації керування, оскільки базується на суворо визначених залежностях між змінними. Аналітичні моделі зрозумілі з точки зору структури та логіки побудови, що спрощує їх використання в обчислювальних задачах. Проте застосування таких моделей ускладнюється в разі нелінійності або надмірної складності процесів, коли формалізувати об'єкт точно – непросто. Крім того, аналітичний опис недостатньо гнучкий у ситуаціях, де спостерігається непередбачувана динаміка або значні зовнішні збурення.

Натомість емпіричні моделі орієнтовані на роботу з реальними даними. Вони не потребують глибокого знання фізики процесу, оскільки базуються на аналізі спостережень і результатів експериментів. Такі моделі добре адаптуються до змін у середовищі, швидко створюються та здатні відображати поведінку об'єкта навіть у складних умовах, де аналітичний опис неможливий. Їхньою слабкою стороною є залежність від якості і обсягу вхідних даних, а також труднощі з інтерпретацією результатів: часто неможливо чітко пояснити, чому система поводить себе саме так. Це знижує надійність таких моделей у складних або критичних сценаріях.

Гібридний підхід поєднує в собі як аналітичні рівняння, так і методи

роботи з даними, що дозволяє досягти балансу між точністю і адаптивністю. У таких моделях основна структура базується на фізичних закономірностях, а конкретні параметри уточнюються за допомогою експериментальних спостережень або машинного навчання. Це дозволяє враховувати як глибокі теоретичні знання про систему, так і реальні умови її функціонування. Проте створення таких моделей потребує значного ресурсу – як у частині збору й обробки даних, так і в частині програмної реалізації. Також вони вимагають регулярного тестування та коригування для підтримки актуальності в умовах, що змінюються.

Таким чином, вибір типу моделі при побудові цифрового двійника залежить від складності об'єкта, обсягу доступних даних, точності вимог до симуляції та можливостей програмного середовища. У дипломній роботі перевагу надано комбінованому підходу, що базується на аналітичному ядрі з уточненням параметрів через методи ідентифікації.

### 1.3 Інструменти та програмні засоби моделювання

У сучасній інженерній практиці побудова математичних моделей та цифрових двійників нерозривно пов'язана з використанням спеціалізованого програмного забезпечення [1]. Вибір конкретного інструменту залежить від типу системи, складності процесу моделювання, необхідного рівня точності, а також від наявності вихідних даних.

Одним з найбільш популярних середовищ для моделювання є MATLAB/Simulink, яке забезпечує візуальне середовище для побудови блок-схем динамічних систем, реалізації математичних моделей у вигляді передавальних функцій, рівнянь стану та інтеграції результатів симуляції з іншими модулями. Simulink особливо зручний для створення цифрових двійників технічних систем завдяки гнучкій структурі, широкій бібліотеці компонентів і можливості спільної роботи з фізичними інтерфейсами.

Іншим ефективним інструментом є Python, який завдяки таким бібліотекам, як (NumPy, SciPy, control, matplotlib та TensorFlow), дозволяє створювати як класичні моделі керування, так і більш складні структури з елементами машинного навчання. Головною перевагою Python є його відкритість, адаптивність до різних типів задач і активна підтримка в науковій спільноті.

Для задач дискретно-подієвого моделювання або побудови багаторівневих систем все більшого поширення набуває “AnyLogic” – багатоплатформене середовище, яке дозволяє моделювати взаємодію між агентами, ресурсами та потоками, що особливо актуально в логістиці, виробництві та обслуговуванні. AnyLogic поєднує в собі елементи системної динаміки, агентного та процесного підходів, що робить його універсальним інструментом для побудови складних кіберфізичних систем.

Крім того, важливе значення мають SCADA-системи (наприклад, WinCC, Ignition, Zenon), які інтегруються з цифровими двійниками для обміну даними в реальному часі, а також інструменти для тривимірного моделювання та візуалізації, зокрема Unity, Blender чи Siemens NX, коли потрібна високоточна візуальна репрезентація об'єкта.

Слід також відзначити появу спеціалізованих платформ для цифрових двійників, як-от Siemens Digital Twin, Ansys Twin Builder, Dassault Systèmes 3DEXPERIENCE, які надають комплексні рішення для побудови, симуляції, моніторингу та керування цифровими копіями фізичних об'єктів.

Таким чином, програмні засоби моделювання є ключовою складовою у створенні цифрових двійників. Вони забезпечують не лише математичне відтворення динаміки об'єкта, а й інтеграцію з реальними даними, графічну візуалізацію та можливості для подальшого аналізу, прогнозування і прийняття рішень.

## 2 РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОБ'ЄКТА

Побудова математичної моделі є одним з ключових етапів при створенні цифрового двійника. Вона дозволяє описати динаміку об'єкта у вигляді математичних залежностей, що формалізують зв'язки між вхідними та вихідними сигналами системи. Така модель необхідна як для симуляції роботи об'єкта, так і для подальшого аналізу, оптимізації та впровадження алгоритмів керування.

У межах цієї роботи об'єктом дослідження обрано насосну установку – один із найбільш поширених елементів в автоматизованих системах, що забезпечує подачу рідини у відповідності до заданих параметрів. Побудова її математичної моделі базується на результатах ідентифікації за експериментальними даними з використанням класичних методів оцінювання параметрів. У цьому розділі буде представлено етапи формування моделі, починаючи від постановки задачі й визначення основних вхідних/вихідних величин, до розрахунку параметрів моделі та побудови передавальної функції. Отримані результати ляжуть в основу цифрового двійника, який буде реалізовано в наступному розділі.

### 2.1 Вибір об'єкта та постановка задачі

У рамках цієї роботи об'єктом моделювання обрано насосну установку (рисунок 2.1), яка широко використовується в промислових автоматизованих системах для транспортування рідин. Такий об'єкт є прикладом динамічної системи з керованими параметрами, що дає змогу дослідити поведінку системи за різних умов експлуатації та побудувати відповідну математичну модель.

Насосна установка характеризується наявністю вхідного сигналу (наприклад, керуюча напруга або частота обертання двигуна) та вихідного сигналу, що відображає реакцію системи (тиск або витрата рідини). Метою

моделювання є отримання такого математичного опису, який дозволить відтворити динаміку об'єкта у вигляді залежності між вхідними та вихідними величинами, а також провести подальшу симуляцію з використанням цифрового двійника.

Побудова моделі передбачає визначення структури системи, формалізацію її поведінки через математичні залежності, а також ідентифікацію параметрів за наявними експериментальними або апроксимаційними даними. Такий підхід забезпечує основу для створення цифрового двійника, який у свою чергу дозволить проводити аналіз роботи насосної установки без втручання в реальний об'єкт.



Рисунок 2.1 – Компактна насосна станція з кількома паралельними насосами

Насосна установка є прикладом об'єкта з відносно простою, але динамічно змінною поведінкою. Її робота залежить від таких параметрів, як тиск, витрата, швидкість обертання електродвигуна, температура середовища та інші зовнішні умови. Зазвичай для подачі рідини в системі використовується відцентровий насос, керований частотним перетворювачем. За допомогою цього пристрою

змінюється частота обертання, а отже – і продуктивність установки.

При розгляді насосної установки як об'єкта автоматизації можна виділити кілька основних змінних:

- вхідний сигнал ( $u(t)$ ) – це, як правило, керуючий сигнал на частотний перетворювач або безпосередньо на електродвигун;
- вихідний сигнал ( $y(t)$ ) – тиск або витрата, які вимірюються за допомогою відповідних датчиків;
- параметри системи – інерційність, коефіцієнт підсилення, часові затримки тощо.

Модель буде представлена у вигляді передавальної функції або системи рівнянь, що відображають зв'язок між вхідними та вихідними параметрами. Одним із ключових етапів стане ідентифікація параметрів моделі, яка виконується на основі доступних експериментальних або апроксимаційних даних. Отримана модель слугуватиме основою для створення цифрового двійника – віртуального представлення фізичної системи, що дає змогу аналізувати її поведінку в різних умовах без необхідності втручання в реальний об'єкт. Окремо буде проведено дослідження характеристик побудованої моделі, таких як стійкість, швидкодія та чутливість до змін зовнішніх впливів. У наступних підрозділах представлено детальний опис усіх етапів моделювання: від вихідних даних до реалізації цифрового двійника в програмному середовищі.

### 2.1.1 Технічні характеристики об'єкта

Подібні установки широко використовуються у водопостачанні, системах охолодження, а також у промислових технологічних процесах, де необхідне стабільне підтримання витрати або тиску.

Типовий насос, який розглядається в даному проекті, є відцентровим, одноступеневим, з горизонтальним розташуванням вала. Привод здійснюється за допомогою асинхронного електродвигуна, керованого частотним

перетворювачем. Встановлено датчики витрати та тиску, що дозволяє автоматизовано контролювати режим роботи установки.

Основні технічні параметри, які враховуються при моделюванні:

- потужність електродвигуна – 1.5 кВт;
- номінальна витрата – 3.5 м<sup>3</sup>/год;
- максимальний тиск – 2 бар;
- частота обертання вала – від 900 до 2800 об/хв (регулюється);
- матеріал корпусу насоса – чавун або нержавіюча сталь;
- живлення системи керування – 220 В / 50 Гц;
- сигнали керування – аналоговий 0–10 В або ШІМ, що надходить з ПЛК.

Така конфігурація дозволяє моделювати поведінку системи при зміні вхідного керуючого сигналу (наприклад, напруги на частотному перетворювачі) та аналізувати реакцію на виході – зміну тиску або витрати. Об'єкт має достатню динамічну інерційність, що дає змогу використовувати класичні методи математичного моделювання на основі передавальних функцій.

Крім основних характеристик, важливо враховувати особливості конструкції насосної установки, які можуть впливати на її динамічні властивості. Зокрема, наявність зворотного клапана дозволяє уникнути зворотного потоку у випадку зупинки насоса, а демпфуючі елементи в трубопроводі знижують пульсації тиску, що покращує стабільність роботи всієї системи.

Система керування насосом побудована на основі програмованого логічного контролера (ПЛК), який забезпечує адаптивне регулювання частоти обертання двигуна залежно від вимог споживача. Це дозволяє значно зменшити енергоспоживання в умовах змінного навантаження. Додатково, використання частотного перетворювача відкриває можливості для плавного пуску та зупинки установки, що важливо для зменшення гідроударів у трубопроводі.

Для збору інформації про стан установки застосовуються аналогові датчики, які передають сигнали у реальному часі до SCADA-системи. Це дозволяє не лише контролювати поточні параметри, але й вести історичний архів

для подальшого аналізу або реалізації алгоритмів предиктивного обслуговування.

Таким чином, об'єкт дослідження має чітко визначену структуру, доступні точки вимірювання і керування, а також достатню кількість параметрів для адекватної математичної ідентифікації. Це робить насосну установку зручною для побудови цифрового двійника та проведення симуляційних експериментів.

### 2.1.2 Формування задачі моделювання

Щоб коректно описати поведінку насосної установки, необхідно побудувати математичну модель, яка відображатиме зв'язок між сигналом керування та вихідною реакцією системи. Такий підхід дозволяє зрозуміти, як зміна частоти обертання електродвигуна впливає на тиск або витрату рідини, що є критично важливим для підтримання стабільної роботи технологічного процесу.

Об'єкт моделювання має виражені інерційні властивості, тому його реакція на зміну вхідного впливу відбувається із певною затримкою. Це вимагає побудови моделі, яка не тільки враховує динаміку змін, а й дозволяє прогнозувати поведінку об'єкта в сталих і перехідних режимах. Для досягнення цієї мети передбачається використання методу найменших квадратів, що забезпечує можливість визначення параметрів моделі на основі доступних даних.

Передбачається, що модель матиме реалістичну структуру, яка дозволить проводити симуляцію в середовищі цифрового двійника. Вона повинна бути достатньо чутливою до змін керуючих сигналів, водночас залишаючись стійкою та математично обґрунтованою. Таким чином, задача моделювання формулюється як процес побудови передавальної функції з подальшою оцінкою її параметрів і перевіркою відповідності між теоретичним описом і практичною поведінкою системи.

## 2.2 Ідентифікація параметрів: метод найменших квадратів

Одним із ключових етапів побудови математичної моделі є визначення числових параметрів, які найбільш точно описують динаміку об'єкта. У даній роботі для цього застосовується метод найменших квадратів (МНК) – ефективний статистичний підхід, що дозволяє за відомими експериментальними даними оцінити коефіцієнти лінійної моделі.

Наприклад, в нас є насосна установка, ми подаємо вхідний сигнал  $u(t)$  (керуюча напруга, або частота) і спостерігаємо вихідний сигнал  $y(t)$ . Ми припускаємо, що залежність між ними лінійна і залежить також від попередніх значень.

У загальному випадку в нас математична модель буде виглядати так:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t) \quad (2.1)$$

де  $y(t)$  – вихідна змінна системи в момент часу  $t$ ;

$u(t)$  – вхідний сигнал;

$a_1, a_2$  – коефіцієнти, що описують вплив попередніх значень виходу;

$b_1, b_2$  – коефіцієнти, що описують вплив попередніх значень входу;

$e(t)$  – похибка моделі (залишкова компонента).

Надалі йде збір експериментальних даних: для ідентифікації моделі були отримані умовні дані спостережень, які включають п'ять вимірювань для кожного з параметрів (дані сформовані штучно з метою демонстрації застосування методу МНК у рамках побудови цифрового двійника насосної установки). Числові значення наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Вхідні та вихідні дані для ідентифікації моделі методом найменших квадратів

$y(t-1)$	$y(t-2)$	$u(t-1)$	$u(t-2)$	$y(t)$
1.8	1.4	1	0.8	2.1
2.1	1.8	1.2	1	2.5
2.5	2.1	1.3	1.2	2.8
2.8	2.5	1.4	1.3	3
3	2.8	1.5	1.4	3.3

На основі цих даних формується матриця регресорів  $X$  та вектор спостережень  $Y$ :

$$X = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.4 & 1.0 & 0.8 \\ 2.1 & 1.8 & 1.2 & 1 \\ 2.5 & 2.1 & 1.3 & 1.2 \\ 2.8 & 2.5 & 1.4 & 1.3 \\ 3 & 2.8 & 1.5 & 1.4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.5 \\ 2.8 \\ 3 \\ 3.3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Для розв'язання задачі оцінювання параметрів використовується матрична формула:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.3)$$

Ця формула дозволяє обчислити вектор оцінених параметрів, що мінімізує суму квадратів похибок.

Приклад розрахунку параметрів через EXCEL (рисунок 2.2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	<b>y(t-1)</b>	<b>y(t-2)</b>	<b>u(t-1)</b>	<b>u(t-2)</b>	<b>y(t)</b>								
2	1,8	1,4	1	0,8	2,1								
3	2,1	1,8	1,2	1	2,5								
4	2,5	2,1	1,3	1,2	2,8								
5	2,8	2,5	1,4	1,3	3								
6	3	2,8	1,5	1,4	3,3								
7													
8				<b>a1</b>	0,152948								
9				<b>a2</b>	0,100041								
10				<b>b1</b>	1,576062								
11				<b>b2</b>	0,120379								
12													
13													
14													
15													

Рисунок 2.2 – Автоматичне обчислення вектора параметрів з використанням EXCEL

В результаті ідентифікації отримано такі значення параметрів моделі, наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Результат обчислень значень параметрів моделі

Коефіцієнт	Значення
$a_1$	0,152948
$a_2$	0,100041
$b_1$	1,576062
$b_2$	0,120379

Ці коефіцієнти є основою для подальшого моделювання поведінки насосної установки. Вони дозволяють сформулювати передавальну функцію або реалізувати модель у цифровому вигляді для подальшої симуляції.

### 2.3 Розрахунок параметрів за допомогою правила Крамера

Для визначення коефіцієнтів математичної моделі також можна застосувати правило Крамера, яке базується на розв'язанні системи лінійних

рівнянь шляхом обчислення визначників. Цей метод зручний при невеликій кількості рівнянь і використовується для перевірки результатів методу найменших квадратів або у випадках, коли відомі точно всі коефіцієнти системи.

У загальному вигляді система рівнянь має форму:

$$A \cdot x = b \quad (2.4)$$

де  $A$  – квадратна матриця коефіцієнтів при змінних;

$x$  – вектор невідомих параметрів;

$b$  – вектор вільних членів.

З попереднього розділу маємо вхідні дані  $X$  и результати  $Y$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1.8 & 1.4 & 1.0 & 0.8 \\ 2.1 & 1.8 & 1.2 & 1 \\ 2.5 & 2.1 & 1.3 & 1.2 \\ 2.8 & 2.5 & 1.4 & 1.3 \\ 3 & 2.8 & 1.5 & 1.4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.5 \\ 2.8 \\ 3 \\ 3.3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Система має вигляд:

$$\begin{cases} 1.8a_1 + 1.4a_2 + 1.0b_1 + 0.8b_2 = 2.1 \\ 2.1a_1 + 1.8a_2 + 1.2b_1 + 1.0b_2 = 2.5 \\ 2.5a_1 + 2.1a_2 + 1.3b_1 + 1.2b_2 = 2.8 \\ 2.8a_1 + 2.5a_2 + 1.4b_1 + 1.3b_2 = 3.0 \end{cases} \quad (2.6)$$

За правилом Крамера для кожного параметра  $x_i$  обчислюється:

$$x_i = \frac{|A_i|}{A} \quad (2.7)$$

де  $|A|$  – визначник основної матриці;

$|A_i|$  – визначник матриці, яка утворюється заміною  $i$ -го стовпця на

вектор  $b$ .

Показано приклад розрахунків, який в подальшому буде реалізований завдяки ЦД.

## 2.4 Побудова передавальної функції

Після визначення коефіцієнтів моделі на основі методу найменших квадратів та правила Крамера [8], наступним етапом є побудова передавальної функції, що описує динаміку об'єкта автоматизації. Передавальна функція – це математичне представлення залежності між вхідним і вихідним сигналами у часовій або частотній області, яке широко використовується в теорії автоматичного керування.

У загальному випадку, для лінійної дискретної системи другого порядку передавальна функція у  $z$ -образі має вигляд:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (2.8)$$

На основі отриманих коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , які були ідентифіковані у попередньому підрозділі, передавальна функція об'єкта (насосної установки) набуває конкретного вигляду.

Наприклад, якщо розрахунки дали такі значення:

$$a_1 = 0,15; a_2 = 0,1; b_1 = 1,58; b_2 = 0,12$$

Передавальна функція матиме форму:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1,58z^{-1} + 0,12z^{-2}}{1 - 0,15z^{-1} - 0,1z^{-2}} \quad (2.9)$$

Дана функція описує, як зміна керуючого сигналу (наприклад, потужності електродвигуна насоса) впливає на зміну вихідного параметра (наприклад, тиску або потоку рідини). Такий підхід дозволяє перейти до етапу симуляції поведінки системи у програмному середовищі, реалізуючи цифровий двійник об'єкта.

## 3 РЕАЛІЗАЦІЯ ЦИФРОВОГО ДВІЙНИКА ТА СИМУЛЯЦІЯ

Після побудови аналітичної математичної моделі об'єкта та ідентифікації його параметрів наступним кроком є розробка цифрового двійника – інтерактивної програмної моделі, що дозволяє відтворити динамічну поведінку системи у віртуальному середовищі. Цифровий двійник забезпечує можливість тестування, налагодження, аналізу та прогнозування станів об'єкта без втручання у фізичну установку. В межах цього розділу здійснюється реалізація моделі насосної установки, яка буде використовуватись як приклад для симуляції, аналізу стабільності та поведінки в різних режимах.

### 3.1 Математична модель насосної установки

У даному підрозділі буде розглянуто побудову математичної моделі конкретного об'єкта автоматизації – насосної установки. Обрано саме цей тип об'єкта через його поширеність у промислових автоматизованих системах, зокрема в системах водопостачання, теплопостачання, на хімічних, нафтохімічних та енергетичних підприємствах. Центробіжні насоси, які найчастіше використовуються в подібних системах, характеризуються чіткою математичною залежністю між подачею, тиском, частотою обертання та іншими параметрами, що дозволяє ефективно описати їх поведінку математичною моделлю.

#### 3.1.1 Вибір типу насосної системи для моделювання

Для цілей моделювання у межах даної дипломної роботи було обрано центробіжну насосну установку, яка є одним із найпоширеніших типів насосного обладнання у промисловості. Такі насоси використовуються для транспортування рідин у системах водопостачання, опалення, охолодження, а

також у нафтохімічній, харчовій, фармацевтичній та енергетичній галузях.

Центробіжний насос перетворює механічну енергію електродвигуна на кінетичну енергію потоку рідини, яка далі перетворюється на тиск. Його конструкція включає робоче колесо, яке обертається всередині корпусу та створює відцентрову силу, що змушує рідину переміщатися від центру до периферії. Такий принцип роботи забезпечує безперервний і рівномірний потік, що робить ці насоси зручними для математичного опису та цифрового моделювання (рисунок 3.1).

Крім широкого застосування, ще однією причиною вибору цього типу установки стала наявність достатньої технічної документації, усталених математичних моделей та можливість реалізації цифрового двійника у типових програмних середовищах моделювання.

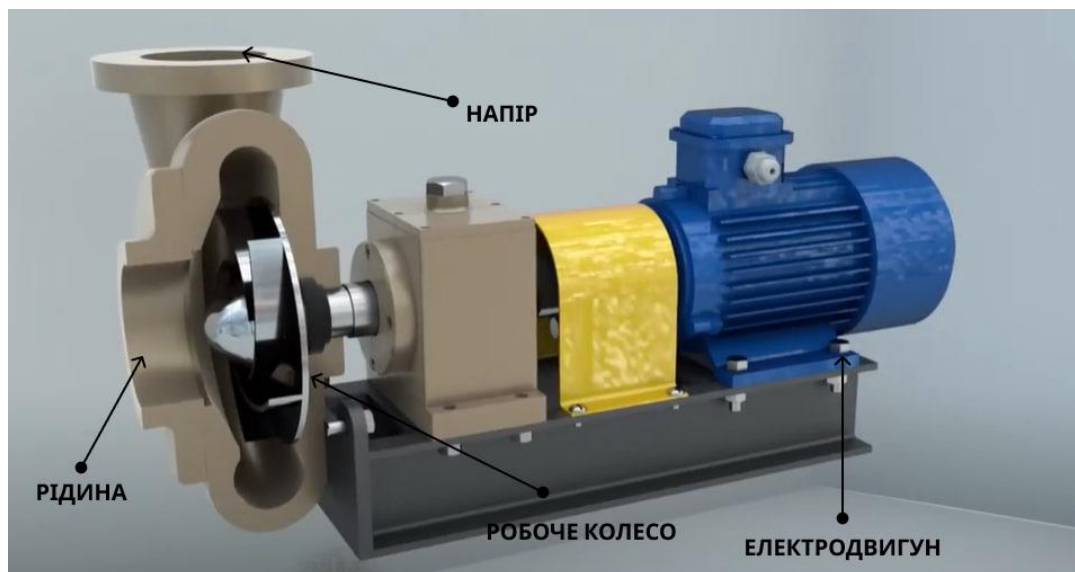


Рисунок 3.1 – Схема насосної установки

На практиці існує кілька основних типів насосів, що застосовуються в автоматизованих системах:

– поршневі насоси – працюють за принципом зворотно-поступального руху поршня. Забезпечують високий тиск і точність подачі, проте мають

пульсацію потоку, складніші у конструкції та вимагають частішого обслуговування;

– шестеренні та гвинтові насоси – використовують обертові елементи для переміщення рідини. Вони забезпечують стабільний потік, але складніші у виготовленні та не завжди підходять для великих обсягів;

– центробіжні насоси – створюють потік за допомогою відцентрової сили. Вони прості за конструкцією, надійні, легко масштабуються, забезпечують плавну подачу без пульсацій і придатні для більшості промислових систем, де не потрібен надвисокий тиск.

З огляду на ці характеристики, саме центробіжні насоси є оптимальним вибором для побудови математичної моделі й цифрового двійника. Їхня фізика роботи добре вивчена, а поведінка – легко формалізується рівняннями. Крім того, вони ідеально підходять для симуляційного моделювання, оскільки мають передбачувану динаміку та стабільну характеристику на широкий діапазон навантажень.

Базовою деталлю машини є опорний кронштейн, у якому на двох шарикопідшипниках встановлюють вал. До кронштейна шпильками кріплять спіральний корпус, напірний патрубок якого спрямований вертикально вгору. У корпусі виконуються отвори для випуску повітря, зливу води і приєднання манометрів.

На консольному кінці вала кріплять робоче колесо. З боку вхідної воронки колеса корпус пристрою закривають кришкою з вхідним патрубком, що забезпечує підведення рідини до робочого колеса.

Кінцеве ущільнення насоса сальникового типу, яке за необхідності можна замінити торцевим ущільненням. Незначні осьові зусилля сприймаються шарикопідшипниками, які змащуються консистентним мастилом. Насос з електродвигуном встановлюють на загальній плиті і з'єднують пружною муфтою.

Сьогодні відцентрові насоси використовуються повсюдно. Їхня

конструкція така, що дає змогу їх монтувати в тих місцях, де інше обладнання просто не може бути встановлено через великі габарити. У хімічній і нафтовій галузі ці агрегати просто незамінні. Вони здатні переміщати під високим тиском важкі компоненти, різні суміші, кислоти, нафтопродукти тощо. Все це позначається на величезному попиті на такі агрегати в сучасній газовій, нафтовій і хімічній промисловості.

При цьому вони здатні підтримувати постійний тиск при зміні температури робочої рідини. Це змушує людей використовувати подібні агрегати для організації примусової циркуляції в опалювальних системах. При роботі з котлом насоси просто необхідні. У більшості випадків йдеться про циркуляцію води всередині замкнутого контуру. Саме тут і знаходять своє використання відцентрові насоси. Благо їхня конструкція дає змогу це робити.

### 3.1.2 Фізичні параметри та вхідні змінні

У процесі побудови моделі важливо врахувати особливості об'єкта, що моделюється. Насосна установка, яка використовується як основа для цифрового двійника, має низку характеристик, що впливають на її динаміку. Поведінка системи змінюється залежно від обсягу рідини, що перекачується, висоти підйому, з якою вона працює, і тієї кількості енергії, яку вона споживає. На результат також впливають втрати потужності, в'язкість середовища, яке транспортується, і частота обертання вала.

До основних параметрів належать:

- подача ( $Q$ ) – об'єм рідини, який насос може перекачати за одиницю часу. Вимірюється в  $\text{м}^3/\text{год}$  або  $\text{л}/\text{с}$ . Це один із ключових показників ефективності насоса;
- напір ( $H$ ) – висота, на яку насос здатен підняти рідину. Залежить від типу насоса, швидкості обертання та гідравлічного опору в системі;
- потужність ( $P$ ) – кількість енергії, яку споживає насосна установка для

забезпечення заданої подачі та напору;

– ККД ( $\eta$ ) – коефіцієнт корисної дії, що показує, яку частку енергії насос реально витрачає на корисну роботу.

Оскільки модель має реагувати на зовнішні впливи, необхідно також враховувати змінні, які слугують вхідними сигналами. Йдеться, зокрема, про електричні сигнали керування приводом, зміну умов у трубопроводі, коливання швидкості обертання та навантаження. Саме на основі цих впливів насос демонструє характерну реакцію, яка в подальшому й аналізується у вигляді зміни тиску або об'ємної подачі (рисунок 3.2).

Отримана модель враховує і статичні характеристики, і перехідні процеси, що виникають при зміні режиму роботи. Це дозволяє побудувати універсальну структуру цифрового двійника, яка здатна адаптуватися до різних умов експлуатації без необхідності втручання в фізичне обладнання.

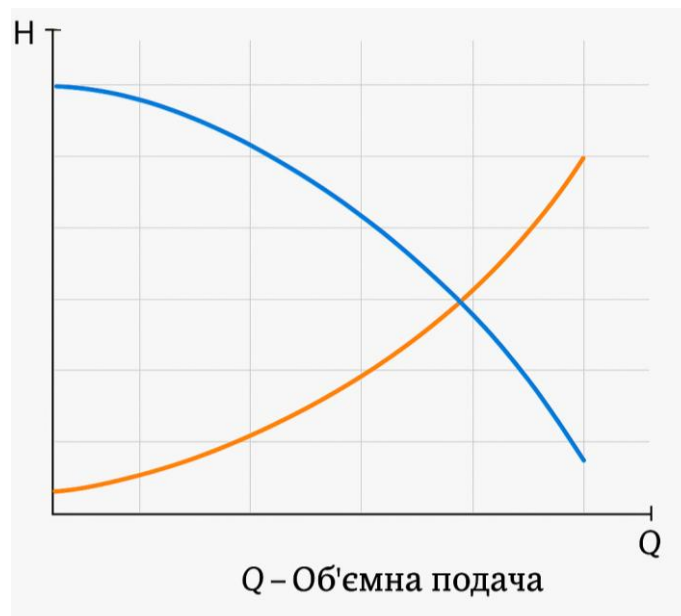


Рисунок 3.2 – Типова характеристика центробіжного насоса

Графік демонструє взаємозв'язок між подачею насоса ( $Q$ ) та створеним ним напором ( $H$ ). Зображена крива має спадний характер: чим більша подача,

тим менший напір. Це типова поведінка для центробіжних насосів, обумовлена їх конструкцією та фізикою процесу – за рахунок збільшення швидкості потоку зростають втрати тиску. Така характеристика дозволяє інженеру прогнозувати, як насос буде працювати в різних умовах навантаження та оптимізувати його експлуатаційний режим.

Цей графік є основою для подальшого побудування математичної моделі, оскільки надає зручну залежність між основними технічними параметрами, які можна апроксимувати або використати для ідентифікації моделі.

### 3.1.3 Побудова математичної моделі

Для адекватного опису динаміки насосної установки використовується математична модель, що пов'язує вхідні та вихідні параметри системи. Найчастіше для таких об'єктів застосовують модель у вигляді передавальної функції, яка описує залежність між зміною вхідного впливу (наприклад, частоти обертання вала) та реакцією системи (зокрема, зміною подачі або тиску).

У процесі моделювання об'єктів автоматизації, зокрема насосних систем, математичний опис будується на основі закономірностей, що описують зміну вихідних параметрів у часі під впливом вхідних сигналів. У випадку з насосом – це залежність між подачею або тиском (вихідна величина) і, наприклад, частотою обертання вала або сигналом керування (вхідна величина).

Оскільки насосна установка має інерційні властивості, її поведінка не є миттєвою, а змінюється плавно. Це означає, що для адекватного опису динаміки необхідно враховувати похідні від вихідної змінної – її швидкість і прискорення. Саме тому в моделюванні застосовується диференціальне рівняння другого порядку, яке включає першу і другу похідні:

$$a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + b_0 \cdot u(t) \quad (3.1)$$

де  $y(t)$  – вихідна величина (наприклад, тиск або подача);

$u(t)$  – вхідний вплив (наприклад, керуючий сигнал або оберти двигуна);

$a_i, b_i$  – коефіцієнти, які відображають фізичні властивості системи.

Це рівняння відображає залежність між зміною сигналу на вході та реакцією системи на виході. Його структура відповідає класичним моделям динамічних систем і широко використовується в автоматизації та теорії керування.

Коефіцієнти не задаються вручну, а визначаються за результатами спостереження або експериментальних даних. У подальших підрозділах проводиться їх ідентифікація методами найменших квадратів або алгебраїчними методами.

Щоб перейти до передавальної функції, виконуємо перетворення Лапласа (при нульових початкових умовах). Це дозволяє перетворити похідні функцій у добутки змінної ( $s$ ) і самої функції:

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} &= s^n \cdot Y(s) \\ L\left\{\frac{d^n u(t)}{dt^n}\right\} &= s^n \cdot U(s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Застосувавши це до рівняння, отримаємо:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 s U(s) + b_0 U(s) \quad (3.3)$$

Виносимо  $Y(s)$  та  $U(s)$  за душки:

$$Y(s) \cdot (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = U(s) \cdot (b_1 s + b_0) \quad (3.4)$$

Ділимо обидві частини та отримуємо передавальну функцію:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.5)$$

Це і є передавальна функція насоса – формальний зв'язок між входом та виходом у частотній області, оскільки дозволяє в подальшому реалізувати модель у середовищах симуляції та проводити аналіз динаміки об'єкта.

### 3.1.4 Ідентифікація параметрів моделі (метод найменших квадратів)

У даному підрозділі було здійснено ідентифікацію параметрів математичної моделі насосної установки на основі згенерованих умовних даних, які імітують реакцію системи на вхідний вплив. Цей підхід дозволяє отримати наближене представлення динаміки об'єкта у вигляді рівняння, параметри якого визначаються за допомогою методу найменших квадратів [8].

Для проведення розрахунків було побудовано часовий ряд із 20 рівномірно розподілених точок у діапазоні від 0 до 10 секунд. Як вхідний сигнал було використано функцію, що моделює згасаючі коливання, які є типовими для реальних керуючих впливів у промислових системах. Для розрахунку вихідного сигналу використовувалась умовна модель другого порядку:

$$y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2} \quad (3.6)$$

Першу та другу похідну по часу від вхідного сигналу було обчислено чисельно методом скінченних різниць. Для визначення коефіцієнтів  $b_0, b_1, b_2$  було застосовано класичну формулу методу найменших квадратів:

$$\vec{b} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y} \quad (3.7)$$

де  $X$  – матриця.

З метою реалізації ідентифікації параметрів моделі на практиці, було використано середовище Google Colaboratory, яке дозволяє виконувати Python-код без встановлення додаткового ПЗ. Це середовище є зручним інструментом для інженерного аналізу та обробки даних (рисунок 3.3).

```
import numpy as np
import pandas as pd
from numpy.linalg import inv

t = np.linspace(0, 10, 20)
u = np.exp(-0.1 * t) * np.sin(t)
du = np.gradient(u, t)
d2u = np.gradient(du, t)
y = 0.5 * u + 0.2 * du + 0.1 * d2u

X = np.vstack([u, du, d2u]).T
Y = y
coefficients = inv(X.T @ X) @ X.T @ Y

print(coefficients)

df = pd.DataFrame({
    't': t,
    'u': u,
    'du': du,
    'd2u': d2u,
    'y': y
})
print(df)
```

Рисунок 3.3 – Програмна реалізація ідентифікації параметрів моделі у середовищі Google Colaboratory

Імпорт необхідних бібліотек – для чисельних розрахунків та для обробки табличних даних (рисунок 3.4).

```
import numpy as np
import pandas as pd
from numpy.linalg import inv
```

Рисунок 3.4 – Імпорт необхідних бібліотек

Формування вектора часу. Це створює часовий ряд від 0 до 10 секунд із 20 рівномірними точками (рисунок 3.5).

```
t = np.linspace(0, 10, 20)
```

Рисунок 3.5 – Формування вектора часу

Формування вхідного сигналу – було змодельовано згасаючі синусоїдальні коливання (рисунок 3.6).

```
u = np.exp(-0.1 * t) * np.sin(t)
```

Рисунок 3.6 – Формування вхідного сигналу

Обчислення першої та другої похідної, що імітує швидкість зміни сигналу та його прискорення (рисунок 3.7).

```
du = np.gradient(u, t)  
d2u = np.gradient(du, t)
```

Рисунок 3.7 – Обчислення першої та другої похідної

Створення вихідного сигналу  $y(t)$ , сформованого як лінійна комбінація вхідного сигналу та його похідних (рисунок 3.8).

```
y = 0.5 * u + 0.2 * du + 0.1 * d2u
```

Рисунок 3.8 – Вхідний сигнал  $y(t)$

Побудова матриці регресії та розрахунок коефіцієнтів за формулою методу найменших квадратів (рисунок 3.9).

```
X = np.vstack([u, du, d2u]).T
Y = y
coefficients = inv(X.T @ X) @ X.T @ Y
```

Рисунок 3.9 – Матриці регресії та розрахунок коефіцієнтів за формулою методу найменших квадратів

Вивід результатів підрахунку коефіцієнтів у вигляді таблиці за допомогою бібліотеки (рисунок 3.10).

```
df = pd.DataFrame({
    't': t,
    'u': u,
    'du': du,
    'd2u': d2u,
    'y': y
})
print(df)
```

Рисунок 3.10 – Вивід результатів у вигляді таблиці

У результаті було отримано таблицю з усіма розрахованими значеннями та коефіцієнтами моделі (рисунок 3.11). Google Colab забезпечив швидку перевірку правильності обчислень і візуальний контроль за даними.

	[0.5 0.2 0.1]				
	t	u	du	d2u	y
0	0.000000	0.000000	0.905531	-0.309121	0.150194
1	0.526316	0.476595	0.742836	-0.519727	0.334892
2	1.052632	0.781933	0.358450	-0.782190	0.384437
3	1.578947	0.853911	-0.080521	-0.772535	0.333598
4	2.105263	0.697173	-0.454745	-0.563432	0.201295
5	2.631579	0.375232	-0.673608	-0.229053	0.029989
6	3.157895	-0.011887	-0.695853	0.131340	-0.131980
7	3.684211	-0.357245	-0.535355	0.421652	-0.243528
8	4.210526	-0.575419	-0.252009	0.573571	-0.280754
9	4.736842	-0.622518	0.068404	0.561515	-0.241427
10	5.263158	-0.503415	0.339059	0.404992	-0.143396
11	5.789474	-0.265614	0.494712	0.159044	-0.017960
12	6.315789	0.017334	0.506473	-0.103591	0.099603
13	6.842105	0.267515	0.385668	-0.313112	0.179580
14	7.368421	0.423301	0.176882	-0.420470	0.204980
15	7.894737	0.453707	-0.056932	-0.400022	0.174665
16	8.421053	0.363373	-0.252615	-0.290967	0.102067
17	8.947368	0.187796	-0.363212	-0.110123	0.010243
18	9.473684	-0.018956	-0.368534	0.018026	-0.081382
19	10.000000	-0.200134	-0.344238	0.046163	-0.164298

Рисунок 3.11 – Таблиця з усіма розрахованими значеннями та коефіцієнтами моделі

### 3.1.5 Побудова передавальної функції

На основі попередньо отриманих коефіцієнтів моделі, здійснено побудову передавальної функції, яка описує поведінку насосної установки як динамічної системи другого порядку. Враховуючи, що модель має вигляд:

$$y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2} \quad (3.8)$$

Та використовуючи перетворення Лапласа, отримаємо передавальну функцію у частотній області:

$$Y(s) = b_0 \cdot U(s) + b_1 \cdot sU(s) + b_2 \cdot s^2U(s) \quad (3.9)$$

Тобто:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + b_1s + b_2s^2 \quad (3.10)$$

Підставивши значення коефіцієнтів, отримаємо:

$$W(s) = 0,5 + 0,2s + 0,1s^2 \quad (3.11)$$

Таким чином, передавальна функція моделі насосної установки набуває вигляду:

$$W(s) = 0,1s^2 + 0,2s + 0,5 \quad (3.12)$$

Ця функція дозволяє виконати симуляцію динамічної поведінки системи у програмному середовищі та провести аналіз її стійкості, реакції на змінні входи та часові характеристики.

## 3.2 Реалізація моделі у програмному середовищі

### 3.2.1 Вибір платформи для симуляції

Для реалізації цифрового двійника насосної установки було обрано середовище Google Colab, яке дозволяє працювати в хмарі, без потреби встановлювати додаткове програмне забезпечення на локальному комп'ютері. Основною перевагою цього середовища є підтримка мови програмування Python та можливість використовувати спеціалізовані бібліотеки для технічних розрахунків і моделювання (рисунок 3.12).

Однією з таких бібліотек є control, яка забезпечує інструменти для побудови передавальних функцій, аналізу динамічних систем та симуляції їх поведінки у часовій області. Також використовувалась бібліотека matplotlib для візуалізації результатів [9].

Обрана платформа є зручною та ефективною для цілей створення

цифрового двійника, оскільки дозволяє швидко змінювати параметри моделі, миттєво отримувати графіки реакцій системи та адаптувати модель під різні вхідні умови.



Рисунок 3.12 – Середовище Google Colab

### 3.2.2 Налаштування моделі та початкові умови

Після вибору середовища для симуляції було проведено налаштування математичної моделі насосної установки. Як базу використано передавальну функцію, отриману на попередніх етапах, що описує залежність вихідного сигналу від вхідного у вигляді дробово-раціонального виразу.

Передавальна функція мала вигляд:

$$W(s) = 0,1s^2 + 0,2s + 0,5 \quad (3.12)$$

Ця функція була реалізована у Python із використанням бібліотеки control. Вхідним сигналом обрано одиничний стрибок (step function), що дозволяє оцінити перехідні характеристики системи, такі як інерційність, час встановлення та характер стабілізації, та дозволяє побачити, наскільки швидко система реагує, стабілізується і чи є перерегулювання. (рисунок 3.13).

```
!pip install control

from control import tf, step_response
import matplotlib.pyplot as plt

numerator = [0.1, 0.2, 0.5]
denominator = [1, 0, 0]
W = tf(numerator, denominator)

time, response = step_response(W)

plt.plot(time, response)
plt.title("Реакція системи на одиничний сигнал")
plt.xlabel("Час, с")
plt.ylabel("y(t)")
plt.grid(True)
plt.show()
```

Рисунок 3.13 – Програмна реалізація цифрового двійника для одиничного сигналу

Час моделювання визначався автоматично на основі заданої функції, а початкові умови приймалися нульовими. Уся симуляція проводилась у середовищі Google Colab, а результат представлено у вигляді графіка реакції системи у часовій області (рисунок 3.14).

Цифровий двійник, побудований таким чином, дозволяє візуалізувати перехідний процес об'єкта, оцінити його інерційність, стійкість та швидкодію, а також перевірити поведінку при різних сценаріях впливу вхідного сигналу.

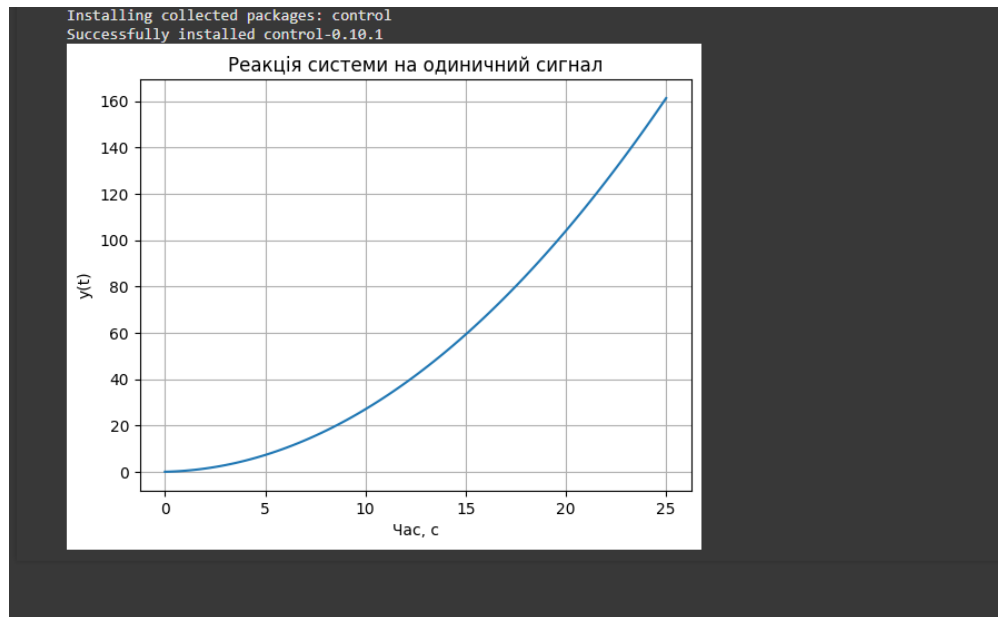


Рисунок 3.14 – Найпростіший сигнал — миттєвий стрибок вхідної величини з 0 до 1

У симуляційній моделі вхідний сигнал інтерпретується як керуючий вплив на насосну установку, наприклад, напруга, що подається на двигун насоса. Залежно від форми цього сигналу (стрибок, імпульс або синус), оцінюється реакція системи – зокрема, зміна тиску на виході або динаміка витрати.

Тому, було розглянуто різні форми цього сигналу для подальшого аналізу та порівняння роботи системи.

Наступною формою сигналу є *impulse* (імпульс) – коротке миттєве збурення. Сигнал дозволяє оцінити імпульсну реакцію, особливо важливо для нестійких або інерційних систем (рисунок 3.15).

```

import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

numerator = [0.1, 0.2, 0.5]
denominator = [1, 0, 0]
system = ctrl.tf(numerator, denominator)

time, response = ctrl.impulse_response(system)

plt.figure()
plt.plot(time, response)
plt.title("Реакція системи на імпульсний вплив")
plt.xlabel("Час, с")
plt.ylabel("y(t)")
plt.grid(True)
plt.show()

```

Рисунок 3.15 – Програмна реалізація для імпульсного сигналу

Система об'єкта автоматизації швидко реагує і повертається до початкового стану (рисунок 3.16).



Рисунок 3.16 – Графік для імпульсного сигналу

Надалі для аналізу представлено sinusoidal (синусоїдальний) сигнал – періодичне коливання (наприклад, як сигнал з частотою 1 Гц). Сигнал дозволяє

побачити, чи система здатна слідувати за коливальним входом і як вона себе поводить при частотному впливі (рисунок 3.17).

```

import control as ctrl
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

numerator = [0.1, 0.2, 0.5]
denominator = [1, 0, 0]
system = ctrl.tf(numerator, denominator)

t = np.linspace(0, 20, 500)
u = np.sin(t)

time, response = ctrl.forced_response(system, T=t, U=u)

plt.figure()
plt.plot(time, response, label='Sinusoidal input response', color='green')
plt.title('Реакція системи на синусоїдальний вплив')
plt.xlabel('Час [с]')
plt.ylabel('Вихід')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```

Рисунок 3.17 – Програмна реалізація для синусоїдального сигналу

Графік показує, що вихід буде згладженою синусоїдою з фазовим зсувом і представлений таким чином (рисунок 3.18).

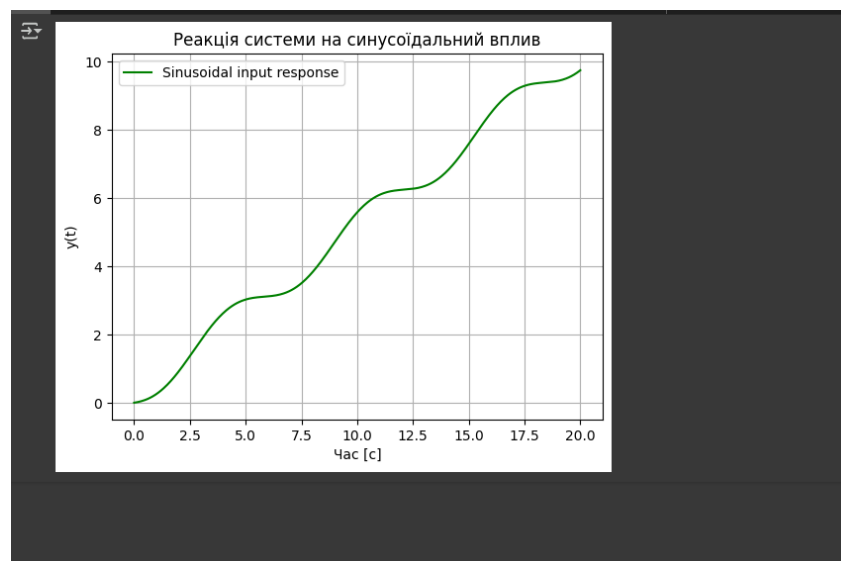


Рисунок 3.18 – Графік для синусоїдального сигналу

Було проведено симуляційний аналіз реакції моделі на три різних типи вхідного сигналу: одиничний стрибок, імпульс і синусоїду. Це дозволило оцінити динаміку системи у різних сценаріях [10]. В результаті видно, що система стабільна, має інерційні характеристики та демонструє типову поведінку для об'єктів другого порядку.

### 3.3 Аналіз результатів моделювання

На основі реалізованої цифрової моделі насосної установки у вигляді передавальної функції було проведено імітаційне моделювання її поведінки в різних режимах. У моделюванні використовувались три основні типи вхідних сигналів: одиничний стрибок, імпульсна дія та синусоїдальний вплив. Це дозволяє глибше оцінити динамічні властивості об'єкта – зокрема його реакцію на зміни керуючих впливів, стабільність та здатність до самопогашення коливань.

Під час моделювання стрибкоподібного сигналу система демонструє характерну для інерційних об'єктів реакцію – плавне зростання вихідної величини, що вказує на наявність накопичувальних властивостей. Відсутність коливань та перевищення вихідної величини свідчить про стабільність моделі та відсутність надмірного перерегулювання.

У випадку імпульсного сигналу фіксується короткочасне збурення на вході, після чого система поступово повертається до нульового значення. Таке поведіння характерне для систем, що мають інтегруючу ланку, та вказує на певний ступінь інерційності. Поведінка відповідає очікуваній динаміці насосної установки у разі різких короткочасних змін вхідного параметра, наприклад, через коливання тиску або раптове вмикання насоса.

Синусоїдальний вплив дозволив оцінити реакцію системи на періодичні коливання вхідного сигналу. Відзначено, що вихід повторює форму вхідного

сигналу з певним зсувом по фазі та зменшенням амплітуди, що є типовою ознакою фільтраційних властивостей динамічних систем. Така реакція важлива при аналізі роботи насосної установки в умовах флуктуацій навантаження.

### 3.4 Охорона праці

Під час виконання дипломної роботи з побудови математичної моделі та цифрового двійника насосної установки важливо дотримуватись вимог охорони праці та безпеки життєдіяльності. Незважаючи на те, що значна частина роботи виконується віртуально – у програмному середовищі, ризики все одно існують, особливо при роботі з комп'ютерною технікою, електронним обладнанням, а також при потенційному перенесенні розробленої моделі у фізичну систему.

Робоче місце було організоване відповідно до вимог нормативних документів щодо безпечної праці з ПЕОМ. Комп'ютерне обладнання розташоване на ергономічному столі з урахуванням висоти сидіння та монітора. Рівень освітлення відповідає санітарним нормам (не менше 300 лк для роботи за ПК). Використовується антибліковий екран або матове покриття монітора для зменшення навантаження на зір.

Температурно-вологісний режим у приміщенні підтримується в межах комфортних значень: температура 20–24 °С, відносна вологість – 40–60 %. Приміщення обладнане вентиляцією.

Комп'ютерна техніка та периферійні пристрої підключені до електромережі через сертифіковані мережеві фільтри з захистом від перенапруг. Усі роботи виконувались при дотриманні вимог 1-ї групи з електробезпеки. Проводилась візуальна перевірка справності кабелів та відсутності оголених провідників.

У приміщенні наявний первинний засіб пожежогасіння – вогнегасник типу ВВК-2 або порошковий ОП-2, розміщений у доступному місці.

При моделюванні не використовується обладнання, що може спричинити

займання, однак потенційні джерела загрози – електричні мережі та обладнання. Тому важливою вимогою є регулярне тестування мережевого навантаження, контроль справності розеток та відсутність перевантаження в мережі.

У разі виникнення задимлення, перегріву пристроїв або запаху гару необхідно негайно знеструмити обладнання, повідомити відповідальну особу та, за необхідності, скористатися первинними засобами пожежогасіння.

Розробка цифрового двійника здійснюється в програмному середовищі Python з використанням бібліотек для симуляційного моделювання. Всі ПЗ встановлено з офіційних джерел, що знижує ризик вірусного зараження або витоку даних. Регулярне збереження роботи в хмарному середовищі (наприклад, Google Colab) забезпечує захист результатів від втрати.

При тривалій роботі за ПК передбачені регулярні перерви – не менше 5 хвилин щогодини, з виконанням вправ для очей та кистей рук. Це дозволяє запобігти перевтомі, розвитку зорового перенапруження та захворюванням опорно-рухового апарату.

Дотримання вимог охорони праці під час виконання роботи дозволило забезпечити безпечні та комфортні умови для виконання дослідження. Врахування аспектів електробезпеки, пожежної безпеки, ергономіки та інформаційного захисту забезпечило мінімізацію ризиків та високу якість реалізації цифрового двійника.

## ВИСНОВКИ

У процесі виконання кваліфікаційної роботи на тему «Побудова математичних моделей об'єктів автоматизації з використанням цифрових двійників» було вирішено комплексне завдання, що охоплює як теоретичне обґрунтування, так і практичну реалізацію моделі об'єкта автоматизації – насосної установки.

На першому етапі було проведено аналіз підходів до моделювання в автоматизованих системах. Було розкрито сутність поняття цифрового двійника, його архітектуру, функції та галузі застосування. Також проаналізовано методи побудови математичних моделей – як фізично-обґрунтовані, так і дані-орієнтовані підходи, а також використані інструменти для симуляції, зокрема Python, Google Colab та бібліотеки симуляції динаміки систем.

У другому розділі здійснено розробку математичної моделі реального об'єкта – насосної установки. Була виконана параметрична ідентифікація моделі на основі вхідних та вихідних даних. Застосовано метод найменших квадратів для визначення коефіцієнтів передавальної функції. Обчислення продемонстровано як вручну, так і за допомогою Excel і Python. Додатково розглянуто метод розрахунку параметрів із використанням правила Крамера. Для кращого відображення фізичного змісту моделі в диплом було введено структурну схему системи автоматичного керування насосною установкою.

У третьому розділі реалізовано цифровий двійник об'єкта. Математична модель у вигляді передавальної функції була імплементована в середовищі Python. Побудовано графіки реакції системи на різні типи вхідних сигналів – одиничний стрибок, імпульс, зміна амплітуди – що дозволило візуалізувати динаміку об'єкта та оцінити його стабільність і швидкодію. Проведено аналіз отриманих результатів моделювання, виявлено поведінкові особливості насосної системи при зміні зовнішніх впливів.

Окремо було приділено увагу питанням охорони праці, що є невід'ємною

складовою проєктної діяльності. Описано безпечну організацію робочого місця, вимоги електробезпеки, протипожежної безпеки, а також гігієнічні аспекти роботи за комп'ютером.

Отже, в межах цієї роботи:

- розроблено повноцінну математичну модель реального об'єкта автоматизації;
- виконано параметричну ідентифікацію моделі на основі експериментальних даних;
- реалізовано цифровий двійник із можливістю симуляції поведінки системи;
- продемонстровано можливості прогнозування реакції системи без втручання у фізичний об'єкт;
- підтверджено актуальність застосування цифрових двійників у сучасних автоматизованих системах для підвищення ефективності, надійності та безпеки.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Sun X., Zhao L. Digital Twin Driven Simulation-Based Optimization for Industrial Process Control // Simulation Modelling Practice and Theory. – 2022. – Vol. 120. – Article ID: 102616. – DOI: 10.1016/j.simpat.2022.102616.
2. Glaessgen E., Stargel D. The Digital Twin Paradigm for Future NASA and U.S. Air Force Vehicles // 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. – 2012. – DOI: 10.2514/6.2012-1818
3. Stojanovic V., Milinkovic D., Kralj D. Implementation of Digital Twins in Smart Manufacturing Environments // Procedia CIRP. – 2022. – Vol. 107. – P. 174–180. – DOI: 10.1016/j.procir.2022.04.029.
4. Nguyen T. M., Nguyen D. T., Pham V. T. Digital Twin in Industrial Automation: Applications and Future Challenges // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 87014–87026. – DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3291321.
5. Кравчук І. О. Цифрові двійники в автоматизованих системах: концепція та практична реалізація // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Автоматизація та приладобудування. – 2022. – № 68. – С. 25–32.
6. Колупаєва І., Ромашов Ю. Підходи до параметричної ідентифікації в технічних системах // Вісник ХНУРЕ. – 2022. – № 3(75). – С. 19–26.
7. Гончарук С. В. Математичне моделювання об'єктів автоматизації з використанням сучасних симуляційних платформ // Науковий вісник ТДТУ. Серія "Автоматизація процесів". – 2023. – № 1 (65). – С. 42–48.
8. Костюк О. В., Сачко І. Г. Методи ідентифікації параметрів моделей технічних об'єктів // Проблеми автоматизації та керування технічними системами. – 2022. – № 2. – С. 31–39.
9. Python Control Systems Library Documentation. Official documentation. – 2023. – URL: <https://python-control.readthedocs.io/> (дата звернення: 16.06.2025).
10. Костюк О. В., Сачко І. Г. Методи ідентифікації параметрів моделей технічних об'єктів // Проблеми автоматизації та керування технічними

системами. – 2022. – № 2. – С. 31–39.

11. Методичні вказівки з підготовки кваліфікаційної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної і заочної форми навчання спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерноінтегровані технології освітньої [Електронний ресурс] / упоряд.: І. Ш. Невлюдов, О. І. Филипенко, О. В. Токарева, С. П. Новоселов, О.В Сичова ; Мво освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – електрон. вид. – Харків : ХНУРЕ, 2023. – 760

12. ДСТУ 3008-15. Документація. Звіти у сфері науки та техніки. структура та правила оформлення. Введ. 2015-06-22. К. Держстандарт України, 2017. 29 с.