УДК 621.391:519.21

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р. физ-мат. наук

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ КВАДРАТОВ ОШИБОК ПРИ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ НОРМАЛЬНОЙ МАРКОВСКОЙ ПОМЕХИ

При регистрации сигнала заданного вида в дискретные моменты времени плотность раскрепления вероятностей результирующего процесса имеет, очевидно, дельтаобразный вид. Наличие помехи, аддитивно наложенной на сигнальный процесс, приводит к изменению плотности — ее уширению и смещению максимума. Авторами исследовано влияние помехи на распределение дискретной квадратичной суммы в случае, когда помеха обладает свойствами нормального марковского шума.

Рассмотрим сигнал $s(t)$, зависимость которого от текущего времени t имеет детерминированный характер, и будем подвергать процесс $s(t)$ измерению в моменты времени t_n, где $t_n=n\Delta t$, $(n=0, 1, \dots, N)$, на протяжении интервала $(0, T)$, $T=N\Delta t$. Пусть сигнал $s(t)$ принимается на фоне коррелированного шума $x(t)$; таким образом при измерении регистрируются величины

$$u(t_n)=s(t_n)+x(t_n). \tag{1}$$

Охарактеризуем уклонение (отнесенное ко всей измерительной процедуре за интервал T) зарегистрированного процесса $s(t)$ с помощью величины

$$S_{N+1}=\sum_{n=0}^{N}[s(t_n)+x(t_n)]^2-\sum_{n=0}^{N}s^2(t_n) \tag{2}$$

— суммы квадратов ошибок при наблюдении в условиях аддитивной помехи. Выражение (2) определено так, чтобы в отсутствие помехи величина S_{N+1} обращалась в ноль.

Целью настоящей работы является изучение статистической структуры величины S_{N+1}. Хорошо известно (см. работу [1]), что если помеха $x(t)$ является δ-коррелированным процессом белого шума, то сумму S_{N+1} можно охарактеризовать в терминах гамма-распределения. Значительно сложней обстоит дело, если случайный процесс $x(t)$ обладает «памятью» (последействием), что приводит, во-первых, к кумулятивному эффекту накопления влияния предыдущих значений дискретных реализаций $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ в текущий n-й вклад, и, во-вторых, к особой роли исходного состояния в момент времени $t=0$, стационарное распределение значений $x_0=x(0)$ которого также влияет на статистическую структуру суммы S_{N+1}. Поэтому для плотности распределения вероятностей $\rho(S_{N+1})$ можно записать

$$\rho(S_{N+1}) = \left< \delta \left\{ S_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} [s(t_n) + x(t_n)]^2 + \sum_{n=0}^{N} s^2(t_n) \right\} \right>, \quad (3)$$

где уголковыми скобками $<$, $>$ обозначена процедура усреднения по реализациям случайного процесса $x(t)$ на полуинтервале $0<t\leqslant T$ и в исходный момент $t=0$.

Задачу усреднения в (3) можно поставить, если задана статистическая структура процесса $x(t)$. В рамках этой работы будет принято, что $x(t)$ — нормальный марковский процесс с переходной плотностью распределения вероятностей [2]

$$w(x_2, t_2; x_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma(1-q^2)}} \exp\left[-\frac{(x_2 - qx_1)^2}{\sigma(1-q)^2} \right], \quad (4)$$

где $q=\exp(-\nu|t_2-t_1|)$; σ и ν — интенсивность и декремент затухания процесса $x(t)$. Такой процесс можно также задать с помощью уравнения движения

$$\frac{d}{dt}x + \nu x = f(t),$$

где $f(t)$ — белый шум, $<f(t)f(t')> = \sigma\nu\delta(t-t')$.

Поскольку функционал S_{N+1} представляет собой сумму слагаемых, вместо нахождения $\rho(S_{N+1})$ удобнее искать производящую функцию

$$Q(\lambda) = <\exp(-\lambda S_{N+1})> \quad (5)$$

(λ — произвольный параметр), являющуюся Лаплас-образом для $\rho(S_{N+1})$. Здесь отметим, что задача нахождения $Q(\lambda)$ в случае, когда $s(t)\equiv 0$ и $\nu=0$, была рассмотрена в работе [3], некоторые результаты этой работы, использованы ниже.

Раскрытие операции усреднения в (5) приводит к $(N+1)$-кратному интегралу

$$Q(\lambda) = \exp\left(\lambda \sum_{m=1}^{N} s_m^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0) \times$$

$$\times \exp[-\lambda(x_0 + s_0)^2] \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int dx_1 \ldots dx_N \times \quad (6)$$

$$\times \prod_{n=1}^{N} w(x_p, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \exp\left[-\lambda \sum_{l=1}^{N} (x_l + s_l)^2\right],$$

где $x_n = x(t_n)$; $s_n = s(t_n)$; $w(x_0)$ — плотность распределения вероятностей процесса $x(t)$ в исходный момент времени $t=0$. Таким образом математическая часть задачи сводится к нахождению $(N+1)$-квадратуры; поскольку интеграл (6) в силу (4) гауссового вида, квадратура может быть вычислена точно.

Подставив в (6) явный вид переходных w-функций (4), выделим интегрирование по x_0:

$$Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 w(x_0)\, Q(\lambda, x_0) \times$$
$$\times \exp[-\lambda(x_0^2 + 2x_0 s_0) - x_0^2 g^2/\sigma p], \qquad (7)$$

где $$Q(\lambda, x_0) = (\pi\sigma p)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int \exp\Big\{-(x_1^2 - 2gx_1x_0)/\sigma p -$$
$$-\sum_{n=1}^{N} (x_{n+1} - gx_n)^2/\sigma p - \lambda \sum_{n=1}^{N} (x_n^2 + 2x_n s_n)\Big\} dx_1 \ldots dx_N \qquad (8)$$

и $g = \exp(-\nu\Delta t)$; $p = 1 - g^2$. Введем новые переменные интегрирования по правилу $y_n = x_n(\sigma p)^{-1/2}$, а также величины

$$b_1 = 2\lambda s_1 (\sigma p)^{1/2} - 2x_0 g (\sigma p)^{1/2}; \; b_n = 2\lambda s_n (\sigma p)^{1/2}, \; n = 2, \ldots, N. \qquad (9)$$

Тогда часть производящей функции, зависящая от x_0,

$$Q(\lambda, x_0) = \pi^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int dy_1 \ldots dy_N \times$$
$$\times G\Big(\sum_{n=1}^{N} b_n y_n\Big) \exp\Big(-\sum_{k,l=1}^{N} A_{kl} y_k y_l\Big), \qquad (10)$$

где функция $G(\eta) = \exp(-\eta)$. Квадратичная форма в показателе экспоненты в (10) содержит матрицу A, которая в силу марковского свойства рассматриваемого случайного процесса $x(t)$ трехдиагональна (матрица Якоби [4]) и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & & 0 \\ \beta & \alpha & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \alpha & \beta \\ 0 & & & & \beta & \alpha_N \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $\beta = -g$; $\alpha = \lambda(1-g) + (1+g)(\sigma p)^{-1/2}$; $\alpha_N = \lambda(1-g) + (\sigma p)^{-1/2}$.

Из условия положительной определенности квадратичной формы $\Sigma A_{kl} y_k y_l$ следует, что существует вещественная ортогональная матрица Ω, приводящая A к диагональному виду. Поэтому можно перейти к новым переменным z_m согласно соотношению $y_k = \Sigma \Omega_{km} z_m$, в терминах которых

$$Q(\lambda, x_0) = (\det A)^{-1/2} \exp(-x_0^2 g^2/\sigma p) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int G\left(\sum_{k,l<1}^{N} b_k z_l \Omega_{kl} \right) \prod_{n=1}^{N} \frac{dz_n}{(2\pi\sigma_n)^{1/2}} \exp(-z_n^2/2\sigma_n),$$

где $\sigma_n = (2\lambda_n)^{-1}$; λ_n — собственные числа матрицы A.

Переменные z_n можно рассматривать как независимые нормально распределенные случайные величины с равными нулю средними и дисперсиями σ_n. Поскольку сумма $\Sigma b_k z_l \Omega_{kl}$ представляет собой их линейную комбинацию, она также нормальна [1] со средним, равным нулю, и с дисперсией

$$\Delta = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \left(\sum_{m=1}^{N} b_n \Omega_{mn} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} b_n b_m (A^{-1})_{nm}, \tag{12}$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A. Полученное выражение имеет место для матрицы A произвольного вида, в частности, оно справедливо, если помеха обладает свойствами винеровского процесса. Из (12) следует

$$Q(\lambda, x_0) = (\det A)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\Delta - x_0^2 g^2/\sigma p \right). \tag{13}$$

Таким образом, промежуточная производящая функция $Q(\lambda, x_0)$ может быть выражена в терминах детерминанта матрицы A и дисперсии Δ.

Введем следующие обозначения:

$$D_1 = \det A, \ldots; \quad D_{N-2} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha_N \end{vmatrix};$$

$$D_{N-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha_N \end{vmatrix}; \quad D_N = \alpha_N; \; D_{N+1} = 1. \tag{14}$$

В работе [3], посвященной рассмотрению винеровского ($\nu = 0$) случайного процесса $x(t)$, установлено, что

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} Z_n (\beta^{2n} D_n D_{n+1})^{-1};$$

$$Z_n = \sum_{m=n}^{N} \beta^m b_m D_{m+1}. \tag{15}$$

Поскольку зависимость от исходного значения помехи x_0 содержится в b_1, выделим в (15) слагаемое с $n=1$, тогда

$$Q(\lambda, x_0) = D_1^{-1/2} \exp\left\{- x_0^2 g^2 + b_1^2 D_2/4D_1 + \right.$$

$$\left. + b_1 Z_2/2\beta D_1 + Z_2^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{N} Z_n^2 (\beta^{2n} D_n D_{n+1})^{-1} \right\}, \qquad (16)$$

где, напомним, $b_1 = 2\lambda s_1 (\sigma p)^{1/2} - 2x_0 g (\sigma p)^{-1/2}$. В целях дальнейшего вычисления введем совокупность детерминантов $H_1, \ldots, H_N$, определяемых согласно (14), но от матриц, у которых α_N заменено на α. В силу трехдиагональности матрицы A для произвольных $k \leqslant N-1$ имеет место равенство

$$D_k = \alpha_N H_{k+1} - \beta^2 H_{k+2}, \qquad (17)$$

в свою очередь для детерминантов H_k справедливо рекуррентное соотношение

$$H_k = \alpha H_{k+1} - \beta^2 H_{k+2} \qquad (18)$$

с краевыми условиями

$$H_N = \alpha, \quad H_{N-1} = \alpha^2 - \beta^2.$$

Пользуясь стандартной методикой [4], найдем

$$H_k = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \mu_1^{N-k} - \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \mu_2^{N-k}, \qquad (19)$$

где $\qquad \mu_1 = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2})/2, \ \mu_2 = (\tau - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2})/2.$

Таким образом, промежуточная производящая функция $Q(\lambda, x_0)$ выражается формулами (16), (17) и (19).

Для учета вклада в сумму погрешностей S_{N+1} в исходный момент $t_0=0$ производящую функцию $Q(\lambda, x_0)$ необходимо усреднить согласно (7). В стационарном случае, когда результат измерительной процедуры не зависит от стартового момента t_0, в качестве весовой функции $w(x_0)$ естественно выбирать предельное значение переходной плотности $w(x, t; x_0, t_0)$ при $t \to \infty$:

$$w(x_0) = (\pi\sigma)^{-1/2} \exp(-x_0^2/\sigma).$$

Однако, имея в виду разнообразность экспериментальной ситуации, конкретизируем весовую функцию в виде

$$w(x_0) = (\pi\sigma_0)^{-1/2} \exp(-x_0^2/\sigma_0), \qquad (20)$$

при этом не будем накладывать на дисперсию σ_0 каких-либо ограничений (в частности, возможен случай, когда $\sigma_0 \to 0$). После простого интегрирования получим для искомой производящей функции (5)

$$Q(\lambda) = \left(\frac{\sigma p D_{10} - g^2 \sigma_0 D_{20}}{\sigma p D_1 + \lambda\sigma_0 \sigma p D_1 - g^2 \sigma_0 D_2} \right)^{1/2} \exp\left\{ \lambda^2 s_1^2 \sigma p D_2/D_1 + \right.$$

$$+Z_2+\lambda s_1 Z_2\sqrt{\sigma p}/\beta D_1+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N} Z_n^2(\beta^{2n}D_nD_{n+1})^{-1}+$$

$$+\frac{\sigma_0\sigma p D_1}{\sigma p D_1+\lambda\sigma_0\sigma p D_1-g^2\sigma_0 D_2}\left(\lambda s_0+\lambda s_1 g\frac{D_2}{D_1}+\frac{gZ_2}{2\beta D_1\sqrt{sp}}\right)^2\Bigg\}, \qquad (21)$$

где D_{10} и D_{20} — значения детерминантов D_1 и D_2 при $\lambda=0$.

В случае, когда действие помехи началось «в бесконечном прошлом», интенсивность шума, обладающего свойствами нормального марковского процесса, равна $\langle x^2(t)\rangle=\sigma$, это приводит к некоторому упрощению выражения (21).

Результат (21) выражен в элементарных функциях, что обусловлено гауссовостью как усредняемого выражения (5), так и весовых функций (4) и (20); он имеет место для произвольного сигнального процесса $s(t)$. Из вида производящей функции $Q(\lambda)$ следует, что на формирование статистики суммы квадратов S_{N+1} влияют квадратичное по амплитуде шума слагаемое в (2) и линейное (экспонента в (21)). Обозначив предэкспоненциальный множитель $Q_x(\lambda)$, найдем при $\sigma_0=\sigma$

$$Q_x(\lambda)=\left\{\frac{(1+R_0)^{N+1}-(1-R_0)^{N+1}}{(1+\lambda\sigma p+R)^{N+1}-(1+\lambda\sigma p-R)^{N+1}}\right\}^{1/2}, \qquad (22)$$

где $$R=[(1+\lambda\sigma p)^2-4g^2]^{1/2};\quad R_0=(1-4g^2)^{1/2}.$$

Это выражение отвечает случаю чисто шумовой регистрации, когда $s(t)\equiv 0$.

Для помехи, не обладающей последействием (белый шум), когда $\nu\to\infty$ и поэтому $g=0$, $p=1$, из (22) следует производящая функция

$$\lim_{\nu\to\infty} Q_x(\lambda)=(1+\lambda\sigma)^{-(N+1)/2}, \qquad (23)$$

отвечающая гамма-распределению [1].

Выражения (21) вместе с (9), (17) и (19) являются решением поставленной задачи. С их помощью можно найти $\rho(S_{N+1})$ (с использованием ЭВМ), так и произвольные моменты случайной величины S_{N+1}. Приведенное решение о статистической структуре величины S_{N+1} можно рассматривать как прямую задачу; в рамках обратной к ней можно исследовать проблему минимизации дисперсии S_{N+1} в определенных заданных условиях измерительной процедуры, оптимизации измерений N и другие задачи.

Отметим, что использованный подход может быть применен для описания ситуации, в рамках которой вместо суммы дискретов (2) рассматривается следующая интегральная характеристика уклонения:

$$S=\lim_{N\to\infty} S_{N+1}=\int_0^T dt\,[s(t)\,x(t)+x^2(t)]. \qquad (24)$$

В этом случае, переходя в (21) к пределу $N \to \infty$, получаем для производящей функции случайной величины S следующее выражение:

$$Q(\lambda) = \left[\frac{4r\nu e^{\nu T}}{(r+\nu)^2 e^{rT} - (r-\nu)^2 e^{-rT}}\right]^{1/2} \times \tag{25}$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda^2 \sigma\nu / r}{(r+\nu)^2 e^{rT} - (r-\nu)^2 e^{-rT}} \int_0^T dt \int_t^T dt' s(t) s(t') \times\right.$$

$$\left.\times [(r+\nu) e^{rt} + (r-\nu) e^{-rt}] [(r+\nu) e^{r(T-t')} + (r-\nu) e^{-r(T-t')}]\right\},$$

где $r = (\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma)^{1/2}$.

Результаты вида (21) и (25) могут быть получены не только для квадратичных уклонений (1) и (24), рассматриваемых в совпадающие моменты времени. Устройства, например, с корреляционным

$$S_{N+1} = -\sum_{n=1}^{N} s(t_n) s(t_p + \tau) +$$

$$+ \sum_{d=1}^{N} [s(t_n) + x(t_n)] [s(t_n + \tau) + x(t_n + \tau)] \tag{26}$$

(τ — постоянный сдвиг) или интерференционным преобразованием процессов [5] формируют на выходе величину, квадратично зависящую от амплитуды шума. Для описания статистической структуры результирующих величин в таких устройствах вполне применим описанный в настоящей работе метод.

Список литературы: 1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятности. М., 1964. 564 с. 2. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947. 168 с. 3. *Montroll E. W.* Markoff chains, Wiener integrals and quantum theory. Communic. pure and applied Mathematics. 1952. N 5. P. 415—455. 4. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. М., 1965. 300 с. 5. *Гольцман Ф. М.* Основы теории интерференционного приема регулярных волн. М., 1964. 284 с.

Поступила в редколлегию 24.11.86