На рис. 6 символом v обозначена ячейка парадигмы, в которой перечислено 21 вариант словоизменений имен прилагательных.

Выводы

1. Предложены общие алгебраические принципы построения логической сети, предназначенной для схемной реализации формул, описывающих алгебрологические модели естественного языка.

2. Рассмотрен пример построения логической сети, моделирующей морфологическое отношение склонения полных непритяжательных имен прилагательных русского языка.

Публикуемые материалы являются новыми. Ближайшим аналогом рассматриваемой в работе логической сети является нейронная сеть, однако принципиальные отличия последней не позволяют решать задачи параллельной обработки логической информации, например, рассмотренную в данной статье морфологическую задачу. Поэтому дальнейшая разработка логических сетей имеет практическое значение для широкого класса задач.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф., Дударь З.В., Ефимова И.А., Лещинский В.А., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* О мозгоподобных ЭВМ // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 2. С. 89-105.**2.** *Хомский Н., Миллер Дж.* Введение в формальный анализ естественного языка / / Кибернетический сборник. Новая серия. М.: Физматгиз. 1965. Вып.1. С. 229-290.

Поступила в редколлегию 30.12.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руткас А.Г.

Калиниченко Ольга Викторовна, канд.техн.наук, ст.пр. каф. ПО ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: математика, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 7-021-446.

Козяев Леонид Леонидович, консультант по внедрению, компания “Открытые технологии-98”. Научные интересы: программирование БД, математическое моделирование. Адрес: Россия, 117997, Москва, ул. Обручева, 30, корп. 1, тел.: 8-095-7877027.

Мельникова Роксана Валериевна, ст.преп. каф. ПО ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: программирование, математическое моделирование ЕЯ. Адрес : Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 7-021-446.

УДК 621.391:51.142

ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ КРАТНЫХ РЯДОВ В ГПВЯ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

С помощью средств численного моделирования приводится верификация формул суммирования кратных рядов, которые получены методом суммирования рядов по выборочным значениям в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром (ГПВЯ).

1. Постановка цели и задач исследования

Математическое моделирование в настоящее время – неотъемлемый этап решения любой практически важной задачи, поскольку дает существенную информацию об исследуемом объекте. Оно предполагает: исследование проблемы; разработку алгоритма ее решения; написание кода на одном из языков программирования; тестирование и верификацию моделей, методов, алгоритмов и программ. Классификация математических моделей по уровням сложности организации вычислений включает составляющие:

1) модель-формула как простейший тип, состоящий из одного уравнения;

2) модель-уравнение, параметры которого, в свою очередь, могут быть рассчитаны по моделям-формулам;

3) модель – система уравнений, например, система линейных алгебраических уравнений;

4) модель-алгоритм как совокупность уравнений матмодели и алгоритма расчета искомых характеристик исследуемого объекта;

5) модель-методика как наиболее сложный вид организации вычислений, объединяющий несколько моделей-алгоритмов.

Очевидно, при оценке адекватности результатов моделирования первоначальным является повышение точности расчета модели-формулы. Преимуществом на данном этапе следует считать возможность расчетов без применения ЭВМ.

Эта работа продолжает исследования, связанные с суммированием рядов в ГПВЯ [1-7] и ориентированные на решение задач, которые критичны к погрешности вычислительных методов по отношению к предлагаемому точному решению.

Цель исследования – уменьшение вычислительной сложности расчетов при моделировании радиоэлектронных устройств благодаря использованию нового метода суммирования рядов в ГПВЯ.

Задачи данного исследования:

1. Получить аналитический результат для определения суммы двойного ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m F(k,m)}{b^2-m^2}.$$

2. Проверить справедливость формулы для нахождения суммы тройного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m}{b^2-m^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(-1)^n}{b^2-n^2}F(k,m,n).$$

3. Доказать и подтвердить численно формулу суммирования для билатеральных знакопеременных рядов:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m F(k,m)}{b-m}=\frac{\pi^2 F(a,b)}{\sin\pi a\sin\pi b}.$$

4. Обосновать численно формулу суммирования

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{y^2-k^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m mF(m,k)}{x^2-m^2}=\frac{\pi^2 F(x,y)}{4\sin(\pi x)\sin(\pi y)}$$

при $0<x<\infty$, $0<y<\infty$, $x,y\neq 1,2,3,\ldots$.

5. Оценить погрешность проведенных вычислений.

2. Основное содержание исследования

Рассмотрим применение методов ГПВЯ для реализации задач исследования.

Теорема 1. *Сумма двойного ряда в ГПВЯ*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m F(k,m)}{b^2-m^2}$$

определяется формулой:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m F(k,m)}{b^2-m^2}=\frac{\pi^2 F(a,b)}{ab\sin\pi a\sin\pi b} \tag{1}$$

при $0<a<\infty$, $0<b<\infty$, $a\neq 1,2,\ldots$, $b\neq 1,2,\ldots$.

Доказательство. Вычислим ряд по индексу m, используя суммирование в ГПВЯ:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m F(k,m)}{b^2-m^2}=\frac{\pi F(k,b)}{b\sin\pi b}. \tag{2}$$

Подставим (2) в левую часть (1) и снова просуммируем, используя рекурсивную процедуру:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\frac{\pi F(k,b)}{b\sin\pi b}=\frac{\pi}{b\sin\pi b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}F(k,b)=$$

$$=\frac{\pi^2 F(a,b)}{ab\sin\pi a\sin\pi b}.$$

Таким образом, истинность (1) установлена.

Следствие. Результаты теоремы 1 можно распространить для тройного ряда, а именно:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m}{b^2-m^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(-1)^n}{b^2-n^2}F(k,m,n)=$$

$$=\frac{\pi^3 F(a,b,c)}{abc\sin\pi a\sin\pi b\sin\pi c} \tag{3}$$

при $0<a<\infty$, $0<b<\infty$, $0<c<\infty$, $a\neq 1,2,\ldots$, $b\neq 1,2,\ldots$, $c\neq 1,2,\ldots$.

Теорема 2. *Для функций из ГПВЯ справедлива следующая формула, определяющая сумму двойного ряда*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m F(k,m)}{b-m}=\frac{\pi^2 F(a,b)}{\sin\pi a\sin\pi b} \tag{4}$$

при $-\infty<a<\infty$, $-\infty<b<\infty$, $a\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$, $b\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Доказательство. Из [9] можно получить:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k F(k)}{a-k}=\frac{\pi F(a)}{\sin\pi a},\ -\infty<a<\infty,\ a\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Используя последнее, вычислим ряд по m, а затем – по k:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m F(k,m)}{b-m}=\frac{\pi F(k,b)}{\sin\pi b},-\infty<b<\infty, b\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m F(k,m)}{b-m}=$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi b}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k F(k,b)}{a-k}=\frac{\pi^2 F(a,b)}{\sin\pi a\sin\pi b},$$

$-\infty<a<\infty$, $-\infty<b<\infty$, $a\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$, $b\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$,

что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры применения теорем 1, 2 и следствия к вычислению некоторых рядов, а также численные результаты.

Пример 1. Формула (1) при заданной функции F дает:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(-1)^k}{a^2-k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m(-1)^m e^{-km}\sin(k+m)}{b^2-m^2}=$$

$$=\frac{\pi^2 e^{-ab}\sin(a+b)}{ab\sin\pi a\sin\pi b},$$

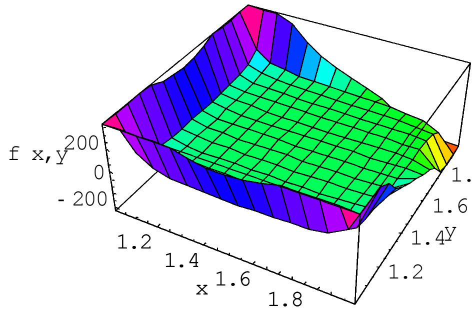
$0<a<\infty$, $0<b<\infty$, $a\neq 1,2,\ldots$, $b\neq 1,2,\ldots$.

Пример 2. Используя теорему 2 при заданной функции $F(k,m)=\sin km$, получаем:

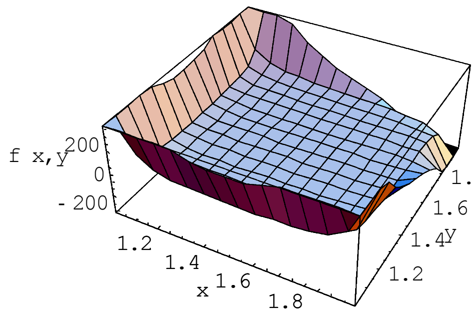
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m\sin(km)}{b-m}=\frac{\pi^2\sin(ab)}{\sin\pi a\sin\pi b},$$

$-\infty<a<\infty$, $-\infty<b<\infty$, $a\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$, $b\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$.

На рис. 1 показаны графики вычисления двойного ряда по формуле (4) при 1<x<2, 1<y<2: а – точное значение; б – приближенное.



а



б

Рис. 1

Абсолютная и относительная погрешности вычислений в указанных интервалах изменения параметров представлены матрицами, соответственно:

Abs=

$$=\begin{pmatrix}0.809669 & 1.33663 & 1.54681 & 1.68686 & 1.81059\\ 1.33663 & 1.86498 & 2.07581 & 2.21631 & 2.34038\\ 1.54681 & 2.07581 & 2.28645 & 2.42645 & 2.54979\\ 1.68686 & 2.21631 & 2.42645 & 2.56557 & 2.68778\\ 1.81059 & 2.34038 & 2.54979 & 2.68778 & 2.80855\end{pmatrix},$$

Rel=

$$
=\begin{vmatrix}
0.00830335 & 0.0247644 & 0.0380663 & 0.0478496 & 0.0538079 \\
0.0247644 & 0.0617791 & 0.0909262 & 0.112125 & 0.125205 \\
0.0380663 & 0.0909262 & 0.13248 & 0.163314 & 0.183668 \\
0.0478496 & 0.112125 & 0.163314 & 0.202634 & 0.230795 \\
0.0538079 & 0.125205 & 0.183668 & 0.230795 & 0.267792
\end{vmatrix}.
$$

Пример 3. В [7] была доказана формула

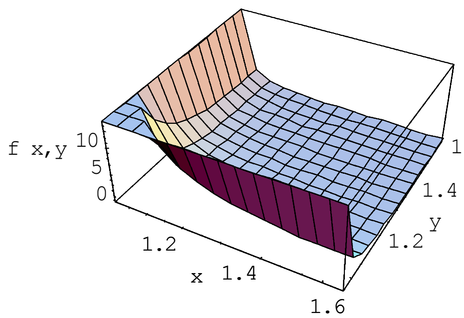
$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{y^2-k^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m mF(m,k)}{x^2-m^2}=\frac{\pi^2 F(x,y)}{4\sin(\pi x)\sin(\pi y)},
$$

применение которой при $F(k,m)=e^{-mk}\sin(mk)$ дает:

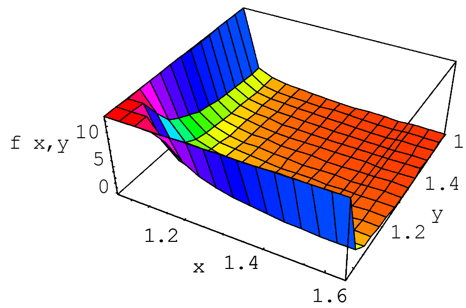
$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{y^2-k^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m}{x^2-m^2}e^{-mk}\sin(mk)=
$$

$$
=\frac{\pi^2 e^{-xy}\sin(xy)}{4(\sin\pi x)(\sin\pi y)}, \qquad (5)
$$

$0<x<\infty$, $0<y<\infty$, $x,y\neq 1,2,3,\ldots$. На рис. 2 приведены результаты вычисления двойного ряда по формуле (5) при $1<x<1{,}6$, $1<y<1{,}6$: а – точное значение (правая часть); б – приближенное.



а



б

Рис. 2

Абсолютная погрешность вычислений в указанных интервалах изменения параметров представлена матрицей:

$$
\begin{vmatrix}
0.593846 & 0.448302 & 0.391009 & 0.361109 & 0.347905 & 0.351143 \\
0.448302 & 0.325944 & 0.281656 & 0.260932 & 0.254264 & 0.261434 \\
0.391009 & 0.281656 & 0.242555 & 0.224525 & 0.21896 & 0.22558 \\
1109 & 0.260932 & 0.224525 & 0.207284 & 0.201344 & 0.206354 \\
0.347905 & 0.254264 & 0.21896 & 0.201344 & 0.194177 & 0.197026 \\
0.351143 & 0.261434 & 0.22558 & 0.206354 & 0.197026 & 0.197068
\end{vmatrix}.
$$

Пример 4. Используем формулу (3) для определения суммы тройного ряда при F=sin(a+b+c). Относительная погрешность по результатам вычислений при фиксированном значении a=1,5 и 1,2<b<1,8, 1,2<c<1,8 представлена матрицей

$$
\begin{vmatrix}
0.3385 & 0.2416 & 0.1554 & 0.0795 & 0.0129 & 0.0451 & 0.0959 \\
0.2416 & 0.1572 & 0.0830 & 0.0175 & 0.0401 & 0.0911 & 0.1363 \\
0.1554 & 0.0830 & 0.0199 & 0.0352 & 0.0841 & 0.1277 & 0.1670 \\
0.0795 & 0.0175 & 0.0352 & 0.0810 & 0.1213 & 0.1574 & 0.1902 \\
0.0129 & 0.0401 & 0.0841 & 0.1213 & 0.1535 & 0.1820 & 0.2080 \\
0.0451 & 0.0911 & 0.1277 & 0.1574 & 0.1820 & 0.2030 & 0.2218 \\
0.0959 & 0.1363 & 0.1670 & 0.1902 & 0.2080 & 0.2218 & 0.2332
\end{vmatrix}.
$$

Видно, что при усечении ряда потери составляют от 8 до 34 %.

3. Выводы

Научная новизна исследования определяется применением нового метода к суммированию кратных рядов при решении задач в целях уменьшения вычислительной сложности при последующем численном моделировании радиоэлектронных устройств и/или физических процессов в них.

Практическая значимость работы связана с повышением точности аналитических методов при моделировании/проектировании радиоэлектронных устройств, а также с повышением быстродействия вычислений в десятки и сотни раз.

Сравнение результатов. Для определения сумм рассмотренных в работе рядов до сих пор отсутствовали прямые формулы. Подобного типа ряды вычислялись путем усечения – удержанием некоторого количества слагаемых. Пакет Matematica 4.1, в среде которого проводились расчеты, позволяет удерживать только по 20 слагаемых в каждом из трех рядов (см. пример 4). Относительная погрешность вычислений при этом возрастает у границ интервалов и может составлять до 34%. Время построения графиков (в примере 4): по прямой формуле – 0,016 с; при усечении рядов – 127,344 с. Таким образом, преимущество в быстродействии при построении графиков составляет 4 порядка.

Перспективы исследований определяются возможностью упрощения методов решения граничных задач математической физики на основе использования метода суммирования рядов в ГПВЯ.

Литература: **1.** *Чумаченко С.В.* Численное обоснование метода суммирования рядов в ГПВЯ // Радиоэлектроника и информатика. 2005. №1. С. 111-115. **2.** *Chumachenko S.V.* Summation method of selected series for IP-core design // Proc. East-West Design & Test Conference. 2003. P. 197-203. **3.** *Чумаченко С.В.* Гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами и некоторые их применения // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №4. С. 141-144. **4.** *Чумаченко С.В.* Теоремы о некоторых интегральных тождествах на основе метода суммирования рядов в ГПВЯ // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 1. С. 113-115. **5.** *Чумаченко С.В.* Решение интегро-сумматорных уравнений и систем сложной структуры на основе методов суммирования рядов в ГПВЯ // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 2. С.122-125. **6.** *Chumachenko S.V., Gowher Malik, Khavar Parvez.* Reproducing Kernel Hilbert Space Methods for CAD Tools // Proc. East-West Design & Test Workshop. 2004. P. 247-250. **7.** *Чумаченко С.В.* Суммирование двойных рядов на основе методов ГПВЯ // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 4. С. 140-143. **8.** *Chumachenko S.V., Govhar Malik, Imran Saif Chattha.* Series Summation Method in HSRK // Proc. of the international Conference TCSET'2004 "Modern Problems of Radio Engineering Telecommunications and Computer Science". February 24-28. 2004. Lviv-Slavsko, Ukraine. P. 248-250. **9.** *Функции* с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256с.

Поступила в редколлегию 17.06.2005

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Чурюмов Г.И.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: теория рядов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326.