Продукция p_{34} является многоместной и ей должна алгоритмически соответствовать многоместная математическая операция сравнения. Таким образом, показана возможность существования многоместной математической операции сравнения и возможность ее аппаратурной реализации.

Алгоритм СМП синтезирует многоместные продукции не только представляющие многоместные математические операции, но и описывающие алгоритмы работы с данными, что обуславливает возможность легко сопоставить системе продукций соответствующую структуру вычислительной системы.

Список литературы: 1.*Путятин Е.П., Климушев В.Б.* Математическая модель понятия задачи// АСУ и приборы автоматики. 1983. Вып. 66. С. 9 –12 .

Поступила в редколлегию 29.04.01

Климушев Виктор Борисович, старший преподователь кафедры информатики ХТУРЭ. Научные интересы: программное обеспечение и синтез структур параллельных вычислительных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, ул. Космическая, 11, кв. 29, 40-94-19.

УДК 519.7

О.Н. ВОСКОБОЙНИК

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДИКАТОВ

Рассматриваются свойства предикатов, аксиоматически определяющие на некотором множестве структуру линейного пространства и позволяющие задать метрику.

Метод компараторной идентификации, основанный на изучении свойств бинарных отношений, позволяет выявить структуру неизвестного преобразования с точностью до взаимно-однозначного отображения. Нами уже подчеркивалось [1], что с точки зрения построения математической модели “черного ящика” этого вполне достаточно, поскольку речь идет об изоморфизме моделей, а невосстанавливаемая взаимно-однозначная часть представляет собой некую шкалу, выбор которой во многих реальных задачах может быть произволен.

Вместе с тем, на практике часто знание шкалы необходимо. К подобному выводу несложно прийти, проанализировав круг задач, возникающих в теории измерений, экономике, психофизике и во многих других областях.

В рамках рассмотренных в данной работе моделей, когда речь шла в основном о преобразованиях линейного пространства в R_n, как правило, нелинейная взаимно-однозначная часть по сути дела искривляет n-мерное арифметическое пространство. Еще раз подчеркнем, что на базе бинарных отношений это искривление найти невозможно, более того его нельзя даже “уловить”, т. е. установить сам факт его присутствия. Однако идеология компараторного метода может быть сохранена и распространена на случай n-арных отношений. При таком подходе поставленная выше задача может быть решена и это является целью настоящей статьи.

На примере психофизической системы “орган зрения человека” сформулируем некоторые факты, предшествующие формальной постановке задачи.

Рассмотрим процесс распознавания цветов. Многочисленные исследования в области психофизики в совокупности с методом компараторной идентификации позволили в настоящее время прийти к выводу о так называемой трехкомпонентной модели [2] распознавания цветов. Цвет может быть охарактеризован тремя числами: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а все множество цветов представляет собой некоторую область (цветовой треугольник) в R_3. Сама процедура распознавания может быть описана в виде следующей математической модели [3]:

$$\alpha_i(x(\lambda)) = \varphi_i(\int_{\lambda_i}^{\lambda_2} \beta_i(\lambda)x(\lambda)d\lambda), i = 1,2,3, \qquad (1)$$

где $x(\lambda)$ – функция яркости в зависимости от длинны волны (математическая модель подаваемого излучения); $\beta_i(\lambda)$ – функция спектральной чувствительности; $[\lambda_1, \lambda_2]$ – участок видимого спектра и φ_i – взаимно-однозначные отображения из R в R.

Трехкомпонентную модель цветового зрения можно охарактеризовать как суперпозицию двух преобразований $F: L_2[\lambda_1, \lambda_2] \to R_3$ – линейного оператора и $\varphi: R_3 \to R_3$ – взаимно-однозначного отображения. При этом нетрудно заметить, что отображение φ будет изменять метрические свойства пространства, т. е. его искривлять. На базе бинарных отношений эти изменения уловить не удается. Однако есть возможность работать с парами цветов (четырехместными предикатами), фиксируя в опыте субъективное равенство расстояний между ними. В психофизике подобные эксперименты описаны в работах [3]. Более того, испытуемый достаточно точно находит среднюю точку отрезка, соединяющего два цвета, если их воспринимать как элементы R_3. Такое половинное деление, как будет показано ниже, позволяет уловить изменения пространства под действием отображения φ.

Суммируя эти факты, мы можем обобщить ситуацию на n – мерный случай и перейти к формальной постановке задачи.

Будем считать, что изменение метрических свойств происходит следующим образом. Новая метрика $\rho^*(x,y)$ определяется равенством

$$\rho^*(x,y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)), \qquad (2)$$

где $x, y \in R_n, \varphi: R_n \to R_n$ – взаимно-однозначное соответствие, ρ – евклидова метрика.

Определение 1. Четырехместный предикат $\Phi(x,y,u,v)$, заданный на R_n, будем называть *метрическим*, если он имеет вид

$$\Phi(x,y,u,v) = D(\rho(\varphi(x), \varphi(y)), \rho(\varphi(u), \varphi(v))), \qquad (3)$$

где D – предикат равенства на R, а остальные элементы (3) определяются соотношением (2) с добавкой, что $\varphi: R_n \to R_n$ – гомеоморфизм.

Знание характеристических свойств метрических предикатов позволяет решать поставленную задачу. Изучением этих свойств мы займемся ниже.

Рассмотрим четырехместный предикат $\Phi(x,y,u,v)$, заданный на R_n и обладающий следующим набором свойств:

1. *Парная эквивалентность:*
   - 1a) $\Phi(x,y,u,v) = 1$ – парная рефлексивность;
   - 1b) $\Phi(x,y,u,v) = 1 \Rightarrow \Phi(x,y,u,v) = 1$ – парная симметричность;
   - 1c) $\left.\begin{matrix}\Phi(x,y,u,v)=1\\ \Phi(x,y,u,v)=1\end{matrix}\right| \Rightarrow \Phi(u,v,f,g) = 1$ – парная транзитивность.
2. *Внутренняя симметрия:*
   $\Phi(x,y,u,v) = 1 \Rightarrow \Phi(x,y,u,v) = 1;$
3. *Неподвижность:* $\Phi(x,x,y,z) = 1 \Rightarrow y = z;$.

Введем в рассмотрение множество $S(x,y)$ соотношением

$$S(x,y) = \{z: \Phi(y,x,x,z) = 1\}. \qquad (4)$$

Заметим, что из парной рефлексивности следует: для произвольных x, y множества $S(x,y) \neq \varnothing$, поскольку $\Phi(y,x,x,y)=1$, т. е. $y \in S(x,y)$. Легко видеть, что $S(x,x)=\{x\}$ состоит из одного вектора. Действительно, если $x_1 \in S(x,x)$, то $\Phi(x,x,x,x_1)=1$ и из неподвижности следует $x_1 = x$.

Будем предполагать, что предикат $\Phi(x,y,u,v)$ таков, что множества $S(x,y)$, индуцируемые этим предикатом, удовлетворяют следующим условиям (мы будем называть их аксиомами):

Аксиома внутреннего равноделения (АВНР):

для произвольных $x, y \in R_n$ найдется единственный вектор u, для которого множество $S(x,u) \cap S(y,u)$ состоит из одного вектора.

Аксиома внешнего равноделения (АВШР):

для произвольных $x, y \in R_n$ найдется единственный вектор v, для которого множество $S(x,y) \cap S(v,y)$ состоит из одного вектора.

Аксиома четырехугольника (АЧ):

для произвольных $x, y, u, v \in R_n$ имеет место: если вектора $\omega, w, z, \hat{\omega}, \hat{w}$ таковы, что множества

$$S(x,w) \cap S(y,w), S(u,\omega) \cap S(v,\omega), S(w,z) \cap$$
$$\cap S(\omega,z), S(x,\hat{w}) \cap$$
$$\cap S(u,\hat{w}), S(y,\hat{\omega}) \cap S(v,\hat{\omega})$$

состоят из одного вектора, то множество $S(\hat{w},z) \cap S(\hat{\omega},z)$ тоже состоит из одного вектора.

Формулировки аксиом внутреннего и внешнего равноделения позволяют ввести операции внутреннего и внешнего равноделения для произвольной пары векторов $x, y \in R_n$.

Определение 2. Операцией внутреннего равноделения для векторов x, y, которую будем обозначать $x \cdot y$, назовем вектор u, для которого множество $S(x,u) \cap S(y,u)$ состоит из одного вектора.

Определение 3. Операцией внешнего равноделения для векторов x, y, которую будем обозначать $x \angle y$, назовем вектор v, для которого множество $S(x,y) \cap S(v,y)$, состоит из одного вектора.

Корректность этих определений обеспечивается выполнением АВНР и АВШР.

Ближайшая наша задача состоит в том, чтобы показать, что на базе операций $x \cdot y$ и $x \angle y$ можно в R_n задать структуру линейного пространства, в общем случае, отличающуюся от структуры R_n. Для ее реализации остановимся сначала на некоторых свойствах введенных выше операций.

1 $x \cdot x = x$ и $x \angle x = x$.

Доказательство. Ранее было установлено, что $S(x,x)=\{x\}$. Тогда из определений вытекают требуемые равенства.

2 $x \cdot y = y \cdot x$.

Доказательство. Вытекает из определения.

3 $(x \cdot y)\cdot(u \cdot v) = (x \cdot u)\cdot(y \cdot v)$ – свойство четырехугольника (СЧ).

Доказательство. Это свойство вытекает из АЧ. Действительно, пусть $x \cdot y = w, u \cdot v = \omega, w \cdot \omega = z, x \cdot u = \hat{w}$ и $y \cdot v = \hat{\omega}$, тогда выполняются условия АЧ. Следовательно, $S(\hat{w},z)\cap S(\hat{\omega},z)$ состоит из одного вектора и $z=\hat{w}\cdot\hat{\omega}$, а это означает выполнение СЧ.

4 $x\cdot(x\angle y)=y$ и $x\angle(x\cdot y)=y$.

Доказательство. Пусть $x\angle y=u, x\cdot u=v$. Тогда из этих равенств следует, что множества $S(x,y)\cap S(u,y)$ и $S(x,v)\cap S(u,v)$ состоят из одного вектора. С другой стороны, из АВНР вытекает, что для x и y найдется единственный вектор z, для которого $S(x,z)\cap S(u,z)$,– одноэлементно. Значит, $y=v=z$, или $x\cdot(x\angle y)=y$. Второе равенство доказывается аналогично.

Следствие. Уравнения $x\cdot z=y$ и $x\angle z=y$ относительно z имеют единственное решение вида $z=x\angle y$ и $z=x\cdot y$ соответственно.

5 $z\angle(x\cdot y)=(z\angle y)$ и $z\cdot(x\angle y)=(z\cdot x)\angle(z\cdot y)$.

Доказательство. Рассмотрим $x\cdot y$. С одной стороны, из свойства 4 имеем

$$x\cdot y=z\cdot[z\angle(x\cdot y)],$$

с другой – из этого свойства и свойства четырехугольника выполняется

$$\begin{aligned}x\cdot y&=[z\cdot(z\angle x)]\cdot[z\cdot(z\angle y)]=\\&=(z\cdot z)\cdot[(z\angle x)\cdot(z\angle y)]=z\cdot[(z\angle x)\cdot(z\angle y)],\end{aligned}$$

тогда из следствия свойства 4 вытекает $z\angle(x\cdot y)=(z\angle x)\cdot(z\angle y)$.

Для доказательства второго равенства рассмотрим $z\cdot y$. Тогда, используя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно выписать цепочки:

$$\begin{aligned}z\cdot y&=(z\cdot z)\cdot[x\cdot(x\angle y)]=(z\cdot x)\cdot[z\cdot(x\angle y),\\z\cdot y&=(z\cdot x)\cdot[(z\cdot x)\angle(z\cdot y)],\end{aligned}$$

отсюда $z\cdot(x\angle y)=(z\cdot x)\angle(z\cdot y)$.

6 $(x\angle y)\angle y=x.$

Доказательство. Пусть $x\angle y=z$, тогда $y=x\cdot z$, следовательно, $(x\angle y)\angle y=z\angle(z\cdot x)=x.$

7 $(x\angle y)\cdot(y\angle x)=(x\cdot y).$

Доказательство. Из свойства 5 вытекает следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}&(x\angle y)\cdot(y\angle x)=[(x\angle y)\cdot y]\angle[(x\angle y)\cdot x]=[(x\cdot y)\angle\\&\angle(y\cdot y)]\angle[x\cdot(x\angle y)]=[(x\cdot y)\angle y]\angle y=(x\cdot y).\end{aligned}$$

Прямым следствием доказанного свойства является свойство

8 $x\angle y=(y\angle x)\angle(x\cdot y).$

9 $(x\angle y)\angle x=x\angle(y\angle x).$

Доказательство. Рассмотрим $x\angle(y\angle x)$. Из свойства 8 следует

$$\begin{aligned}&x\angle(y\angle x)=x\angle[(x\angle y)\angle(x\cdot y)]=\\&=x\angle[\{(x\angle y)\angle x\}\cdot\{(x\angle y)\angle y\}]=x\angle[x\cdot[(x\angle\\&\angle y)\angle x]]=(x\angle y)\angle x.\end{aligned}$$

Доказанные свойства операций внутреннего и внешнего равноделения дают возможность обосновать утверждение о том, что на R_n при помощи предиката Φ может быть задана структура линейного пространства. Для этого введем операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

Определение 4. Суммой двух векторов x и y назовем третий вектор z, который связан с x и y следующим равенством:

$$z=x+y=e\angle(x\cdot y), \tag{5}$$

где $e\in R_n$ –фиксированный вектор.

Замечание. Несложно догадаться, что вектор e выполняет роль "нулевого" вектора (это будет показано ниже), а произвол в его выборе аналогичен произволу в выборе начала координат.

Лемма 1. Относительно введенной операции сложения множество векторов образуют абелеву группу.

Доказательство. Для доказательства леммы необходимо проверить выполнение свойств абелевой группы.

Сразу заметим, что $x+y=y+x$, т. е. операция коммутативна. Это следует из определения и из равенства $x\cdot y=y\cdot x$.

Докажем, что в качестве "нуля" выступает вектор e. Действительно, рассмотрим $x+e$. Тогда из определения и свойства 4 можно записать

$$x+e=e\angle(x\cdot 0)=e\angle(e\cdot x)=x.$$

Таким образом, "нулевой" элемент существует.

Докажем существование обратного элемента. Рассмотрим уравнение относительно y

$$x+y=e,$$

оно эквивалентно $e\angle(x\cdot y)=e$ или $x\cdot y=e.$

С учетом следствия свойства 4 можем найти единственное решение последнего уравнения в виде

$$y=x\angle e.$$

Это равенство и определяет обратный элемент, который в дальнейшем будем обозначать $-x$, т.е.

$$-x=x\angle e. \qquad (6)$$

Наконец покажем, что операция сложения ассоциативна.

Из определения и равенства $z+e=e$ можно записать

$$(x+y)+z=(x+y)+(z+e)=e\angle[(x+y)\cdot(z+e)].$$

Воспользуемся свойством 5, тогда

$$e\angle[(x+y)\cdot(z+e)]=e\angle\{[e\angle(x)]\cdot[e\angle(z\cdot e)]\}=$$

$$=e\angle\{e\angle[x\cdot y)\cdot(z\cdot e)]\}.$$

Из свойства четырехугольника вытекает

$$(x\cdot y)\cdot(z\cdot e)=(x\cdot e)\cdot(y\cdot z).$$

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$e\angle\{e\angle[(x\cdot y)\cdot(z\cdot e)]\}=e\angle\{e\angle[(x\cdot e)\cdot(y\cdot z)]\}=$$

$$=e\angle\{[e\angle(e\cdot x)]\cdot\{e\angle(y\cdot z)]\}=e\angle[x\cdot(y+z)]=$$
$$=x+(y+z).$$

Таким образом,

$$(x+y)+z=x+(y+z). \qquad (7)$$

Ассоциативность доказана. На этом завершается доказательство леммы.

Теперь приступим к введению операции умножения вектора на действительное число.

Сначала определим $2x$ и $\frac{x}{2}$. Поскольку эти операции индуцируются операцией сложения, то положим

Определение 5. $2x=x+x;$ вектор $z=\frac{x}{2}$ тогда и только тогда, когда $z+z=2z=x.$

Непосредственно из определений суммы вытекает

$$2x=e\angle x, \frac{x}{2}=e\cdot x.$$

Далее мы можем определить умножение вектора на число $\lambda = 2^k$ – степень двойки, как суперпозицию преобразования $2x$, если $k > 0$, и $-\dfrac{x}{2}$, если $k < 0.$, т.е.

Определение 6.

$$2^k x = \underbrace{2(2\ldots(2x)\ldots)}_{k\ \text{раз}}. \qquad 2^{-k}x \overset{det}{=} \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ldots(\frac{1}{2})\ldots)}_{k\ \text{раз}} \tag{8}$$

Естественным способом найдем

Определение 7.

$$(2^k + 2^e)x = 2^k x + 2^e x. \tag{9}$$

Далее заметим, что $2x = 2(-x)$. Действительно, из равенства (6) и определения 5 вытекает $2(-x) = 2(x\angle e) = e\angle(x\angle e).$ С учетом свойства 9 имеем

$$e\angle(x\angle e) = (e\angle x)\angle e = 2x\angle e = -2x.$$

Аналогично $\dfrac{-x}{2} = -\dfrac{x}{2}$, поскольку из определений и свойств вытекает следующая цепочка равенств:

$$\frac{-x}{2} = \frac{x\angle e}{2} = e\cdot(x\angle e) = (e\cdot x)\angle(e\cdot e) = (e\cdot x)\angle e) =$$
$$= -(e\angle x) = -\frac{x}{2}.$$

Отсюда для любой степени 2 имеем

$$2^k(-x) = -2^k x. \tag{10}$$

Теперь докажем, что при любом целом k имеет место

$$2^k x + 2^k y = 2^k(x + y). \tag{11}$$

Заметим, что из определения 6 вытекает

$$2^k(2^e x) = 2^{k+e}x. \tag{12}$$

Положим $k = 1.$ Тогда

$$2x + 2y = (x + x) = (y + y) = (x + y) + (x + y) =$$
$$= 2(x + y).$$

Индукцией по $k > 0$ получим

$$2^{k+1}x + 2^{k+1}y = 2^k(2x) + 2^k(2y) = 2^k(2x + 2y) =$$
$$= 2^k(2(x + y)) = 2^{k+1}(x + y).$$

Аналогично это свойство доказывается, когда $k < 0.$ Таким образом, имеет место равенство (11). Из (10) и (11) вытекает, что

$$2^k x - 2^k y = 2^k(x - y).$$

В итоге мы получили, что если число двоично-рациональное, то есть $\lambda = \sum_{k=-n}^{m}\alpha_k 2^k$, где $\alpha_k \in \{-1,0,1\}.$, то операция λx определена равенством

$$\lambda = \sum_{k=-n}^{m}\alpha_k 2^k,. \tag{13}$$

При этом если $\alpha_k = -1,$ то $-2^k x = 2^k(-x).$

Докажем еще два свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Первое:

$$(-x)+(-y)=-(x+y). \qquad (14)$$

Из определений $-x$ и $x+y$ имеем

$$(-x)+(-y)=e\angle[(x\angle e)\cdot(y\angle e)],$$
$$-(x+y)=[e\angle(x\cdot y)]\angle e.$$

Применяя свойство 9 к выражению $[e\angle(x\cdot y)]\angle e$, получаем $-(x+y)=e\angle[(x\cdot y)\angle e]$, откуда вытекает, что равенство (14) имеет место, если

$$(x\angle e)*(y\angle e)=(x\cdot y)\angle e. \qquad (15)$$

Докажем последнее равенство. Учитывая, что $e\cdot e=e$ и $x*(x\angle e)=e$ запишем $[x*(x\angle e)]*[y*(y\angle e)]=e.$

Применим к левой части свойство четырехугольника $(x\cdot y)\cdot[(x\angle e)\cdot(y\angle e)]=e,$ отсюда $(x\cdot y)\angle\{(x\cdot y)\cdot[(x\angle e)\cdot(y\angle e)]\}=(x\cdot y)\angle e$ или $(x\angle e)*(y\angle e)=(x*y)\angle e,$ т.е. выполняется (15), а значит, и (14).

Второе:

$$-(-x)=x\ . \qquad (16)$$

Действительно, $-(-x)=(x\angle e)\angle e.$ Значит, (16) выполняется, когда $(x\angle e)\angle e=x,$ но тогда $(x\angle e)*[(x\angle e)\angle e]=(x\angle e)*x$ или $e=(x\angle e)*x$ и $e=e.$

Проведя построенную цепочку равенств в обратном порядке, получим (16).

Суммируя сказанное, подведем следующий итог.

Нами введена операция умножения вектора x на двоично-рациональное число по формуле

$$\lambda x=\sum_{k=-n}^{m}\alpha_k(2^k x) \qquad (17)$$

с выполнением следующих свойств:

$$2^k(x+y)=2^k x+2^k y, \qquad (18)$$

$$2^k(2^e x+y)=2^{k+e}x, \qquad (19)$$

$$-(2^k x)=2^k(-x), \qquad (20)$$

$$-(x+y)=)-x)+(-y), \qquad (21)$$

$$-(-x)=x. \qquad (22)$$

По существу тем самым определена структура линейного пространства.

Список литературы: 1. *Воскобойник О.Н., Иващенко В.В.* Об изоморфизме моделей компараторной идентификации // АСУ и приборы автоматики, 2000. Вып.113. С.35-41. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта: Проблемы и перспективы.Т.3. Харьков, Выща шк., 1987. 158с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Рвачов В.Л., Мурашко А.Г.* Математичні моделі зору. К.: Техніка, 1966. – 95 с.

Поступила в редколлегию 12.06.01

Воскобойник Олег Николаевич, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.