УДК 517.93:621.373.42:621.3.018.3

В. И. Гомозов

К ТЕОРИИ УСТАНОВЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ

7 мая 1995 г. исполнилось 100 лет со дня изобретения первого радиоприемника А. С. Поповым. Это событие и созданный вскоре радиотелеграф положили начало интенсивному развитию радиотехники, в частности методов и устройств генерирования электромагнитных колебаний. Первые искровые и дуговые генераторы впоследствии успешно сменились разнообразными типами автономных и неавтономных электронных автогенераторов,

относящимися к специфическому классу нелинейных физических объектов — автоколебательным системам.

Теория установления частоты автоколебаний, выявляющая причины, характер и величину выбегов частоты в переходных процессах при различных начальных условиях, имеет важное прикладное значение. Знание последнего является определяющим при выборе оптимальных режимов работы, методов параметрической и автоматической стабилизации частоты, путей уменьшения модуляционных частотных искажений при импульсной и угловой модуляции колебаний задающих генераторов и гетеродинов разнообразных радиотехнических систем. Особое значение эти вопросы приобрели в связи с широким использованием в радиотехнических системах сложных сигналов с высокой скоростью внутриимпульсной, внутрипериодной и межпериодной модуляции частоты или фазы.

Работы по формированию вышеуказанных видов сигналов для радиолокации, проводимые автором под руководством Я. Д. Ширмана и Н. Д. Колпакова еще в 1961—1965 гг. [1], показали настоятельную необходимость учета переходных процессов при высокоскоростной частотной модуляции генераторов [2, 3], уточнения и развития нелинейной теории установления частоты автоколебаний. Некоторые результаты последнего направления исследований уже частично публиковались автором, начиная с 1975 г. [20—24, 26—29]. Ниже делается попытка их обобщения, сопоставления этих результатов с ранее известными теоретическими и экспериментальными данными, появившимися в последние 20 лет.

1. Состояние и необходимость развития теории установления частоты автоколебаний

При любых прикладных исследованиях должны рассматриваться три равноправные составляющие: физический объект, его математическая модель и метод математического исследования этой модели.

Начало нелинейной теории автономных и неавтономных автоколебаний положили зарубежные и отечественные ученые: Мейснер, Г. Беркгаузен, Г. Мельер, Б. Ван-дер-Поль, Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. Н. Крылов, А. А. Андронов, А. А. Витт, Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Ю. Б. Кобзарев и др. Весомый вклад в развитие этой теории и ее приложений внесли затем Я. Грошковский, Б. К. Шембель, С. И. Евтянов, А. А. Дородницын, К. Ф. Теодорчик, В. М. Лопухин, В. Ф. Коваленко, Ю. А. Митропольский, Дж. Роу, Л. А. Вайнштейн и др.

В рамках указанной теории при определенных допущениях большинство автономных или неавтономных электронных автогенераторов описываются предложенными еще в 20-е гг. математическими моделями вида однородного или неоднородного нелинейных дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля, считающимися достаточно строгими, универсальными и применяемыми многими вплоть до последних лет [4, 5, 9, 15—17, 19, 25 и др.]. Предложены также приближенные математические модели вида алгебраических или интегральных уравнений с переменными коэффициентами, полученными на основе символического метода анализа низохронности автоколебаний или уравнений баланса активных и реактивных мощностей [6—8, 10, 11, 13, 14, 17 и др.], а также вида символических укороченных уравнений, адекватных уравнениям Ван-дер-Поля [12, 19 и др.].

В силу нелинейности таких моделей и сложности их анализа длительное время обосновывались и совершенствовались различные методы их математического исследования. Наибольшее применение нашли приближенные асимптотические и символические методы решения, которые в основном сводятся к разновидностям методов “малого параметра” [9, 16, 18, 19, 25 и др.]. Однако достижения по совершенствованию самих математических моделей оказались недостаточными. Именно неполное соответствие математических моделей физическому объекту, а не приближенность методов математического исследования обусловило то, что сложившееся состояние развитой в вышеуказанных работах теории установления и нелинейных поправок для частоты (фазы) автоколебаний отстало от современных требований. Это убедительно иллюстрируется следующими основными примерами.

Известны приближенные и точное численное решения однородного уравнения Ван-дер-Поля

$$(d^2u/d\tau^2) + u = \varepsilon(1-u^2)(du/d\tau) \tag{1}$$

для классического автономного автогенератора томпсоновского типа с резонансной колебательной системой, работающего в мягком режиме самовозбуждения. Уравнение (1) и его решения, как считается, описывают основные физические процессы в широком круге известных видов автономных автогенераторов, поскольку их эквивалентные схемы для переменных составляющих токов при определенных допущениях могут сводиться к классическим резонансным схемам: триодной (транзисторной) с внешней обратной связью или диодной (динатронной) с внутренней обратной связью [9—19]. На рис. 1 и 2 приведены графики известных приближенных (сплошные и штриховые кривые), а также полученных в [27] точных численных (пунктирные кривые) решений уравнения (1) для безразмерной амплитуды U и относительной частоты ω/ω_u автоколебаний в зависимости от $\varepsilon\tau$

при значениях $n_0 = 1{,}1;\ 2;\ 40$ и $\mathcal{E} = 0{,}1\ (KS_{a0}R = g_0R = 3,\ Q_0 = 20)$. Здесь: $\mathcal{E} = (KS_{a0}R - 1)/Q_0 = (g_0R - 1)/Q_0$ — малый параметр; $\tau = \omega_0 t$ — безразмерное время; K, $KS_{a0}R$ (или g_0R), S_{a0} и g_0 — приведенный коэффициент обратной связи, полный коэффициент передачи по цепи

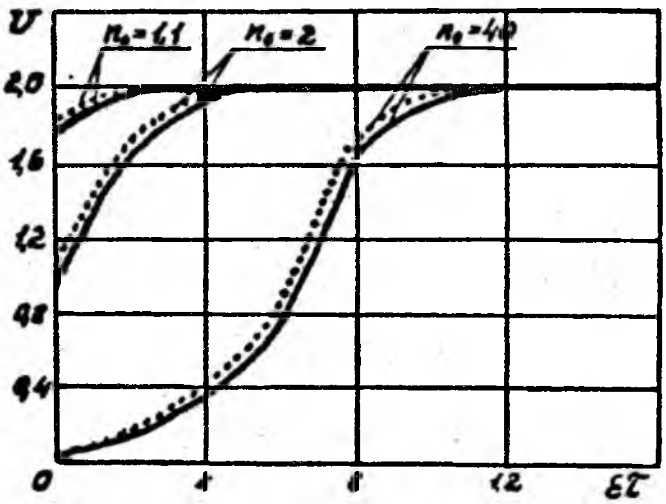

Рис. 1. Графики установления амплитуды автоколебаний, рассчитанные по Ван-дер-Полю

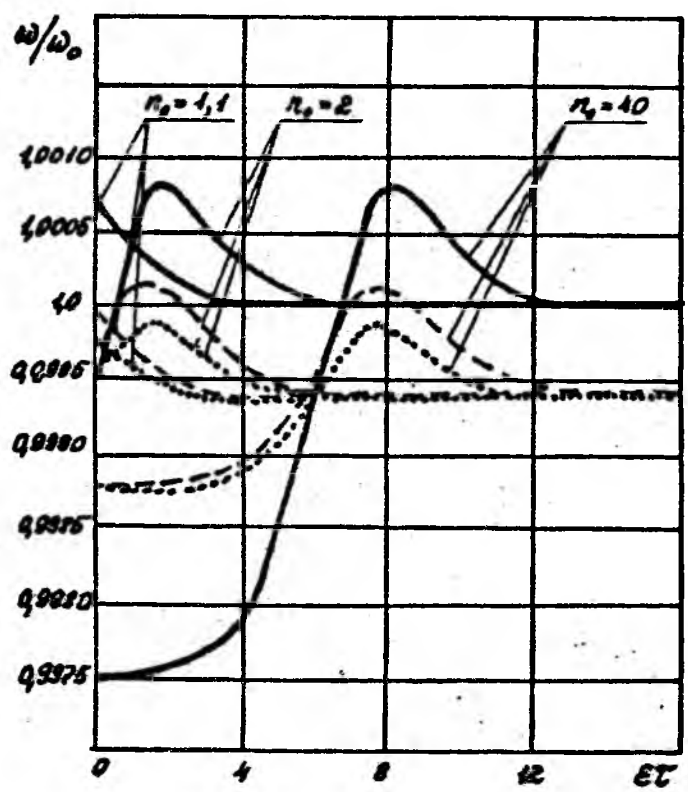

Рис. 2. Графики установления частоты автоколебаний, рассчитанные по Ван-дер-Полю

обратной связи (коэффициент регенерации), крутизна вольт-амперной характеристики $i_a(Ku_a)$ и отрицательная дифференциальная активная проводимость в исходной рабочей точке нелинейного активного элемента автогенератора (эквивалентного триода, транзистора, полупроводникового диода, эквивалентного диода магнетрона или отражательного клистрона и т. д.); Q_a, ω_a, R, L_a и C_a — нагруженная добротность, резонансная частота, сопротивление при резонансе, индуктивность и емкость нерегенерированного эквивалентного колебательного контура автогенератора с учетом межэлектродных и вносимых нагрузкой сопротивлений; $n_0 = U_{ст}/U_0$ — параметр, характеризующий начальные условия автоколебаний; U_0 и $U_{ст}$, — начальное и стационарное значения $U=(KU_a/E_s)[KS_{a0}R/(KS_{a0}R-1)]^{1/2}=(U_a/E_s)[g_0R/(g_0R-1)]$; E_s — напряжение насыщения аппроксимированной неполным кубическим полиномом характеристики $i_a(Ku_a)$. Изображенные на рис. 1 и 2 сплошные кривые рассчитаны по соотношениям работы [15], а штриховые кривые — по соотношениям работ [9, 16, 25].

Известны также приближенные решения нелинейного дифференциального уравнения отражательного клистрона, адекватного по своей сути уравнению Ван-дер-Поля, но полученные методом вариации постоянных с использованием начальных и предельных условий, которые определялись из дополнительной системы уравнений баланса активных и реактивных составляющих мощности [17]. Для клистрона же в работе [14] квазистационарным методом получены точные численные решения системы укороченных уравнений для амплитуды и частоты автоколебаний, составленной только на основе уравнений баланса активных и реактивных составляющих мощности. В обоих случаях расчетные графики для установления относительной амплитуды автоколебаний практически идентичны изображенным на рис. 1. На рис. 3 приведены графики для относительного приращения частоты $\Delta\omega/\Delta\omega_{ст}$ при установлении автоколебаний в зависимости от μ при $X_{ст}=1{,}84$ $(g_0R=X_{ст}/2J_1(X_{ст})\cos\delta_э\approx 1{,}6)$ и значениях $n_0=4{,}3\cdot 10^2$ и $1{,}84\cdot 10^5$, рассчитанные по соотношениям работы [17, с. 353—355] (штриховые кривые 1 и 2) и работы [14] (сплошная кривая 3). Здесь: $\Delta\omega=\omega-\omega_0$; $\Delta\omega_{ст}=\omega_{ст}-\omega_0$; ω и $\omega_{ст}$ — текущее и установившееся стационарное значения частоты автоколебаний; $\mu=t/\tau_э=\varepsilon\tau/2(g_0R-1)$ — относительное время; ω_0 и $\tau_э=2RC_0$ — резонансная частота и постоянная времени эквивалентного контура резонатора клистрона; $n_0=U_{ст}/U_0=X_{ст}/X_0$; $X_{ст}$ и X_0 — стационарное и начальное значения параметра группировки электронов; $J_1(X_{ст})$ — функция Бесселя первого рода первого порядка от $X_{ст}$; $\gamma_э=t_{пр}/\tau_э$ и $\delta_э$ — относительное время пролета и отклонение от оптимального значения угла пролета электронов в пространстве дрейфа клистрона. Отличие графиков 2 и 3, изображенных на рис. 3, отражает влияние времени $t_{пр}$ ($\gamma_э=0$ и $\gamma_э=0{,}1$) на установление и выбег частоты автоколебаний.

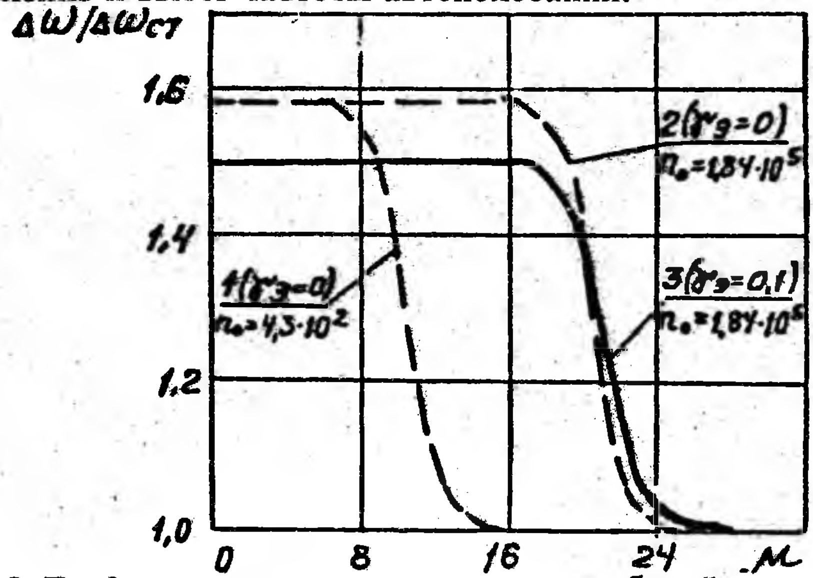

Рис. 3. Графики установления частоты колебаний отражательного клистрона,рассчитанные по[14, 17]

И, наконец, известны выражения для зависимостей частоты от амплитуды (кривых неизохронности) автоколебаний и, в частности, для классического автогенератора томпсоновского типа, полученные квазистационарны ми символическими методами как на основе совместного анализа баланса активных и реактивных составляющих полной проводимости эквивалентной схемы автогенератора [6, 7], так и на основе решения системы символических укороченных уравнений [18].

С помощью кривых неизохронности наглядно сопоставляются результаты всех указанных выше работ [6, 7, 9, 14—18, 25]. Такие кривые, рассчитанные автором при одинаковых условиях ($KS_{a0}R=3$ и $\varepsilon=0{,}1$) для всех рассмотренных выше примеров, изображены на рис. 4, где обозначено $\delta_0=1/Q_0$ и $\delta U=U/U_{ст}$. График 1 соответствует первому приближению решения уравнения (1) для частоты автоколебаний с удержанием членов только первого порядка малости [9; 16, с. 81]. График 2 соответствует совпадающим по результатам первым приближениям решений, полученных двумя различными методами с удержанием членов второго порядка малости [15, 18]. График 3 соответствует совпадающим по результатам вторым приближениям решений, полученных тремя различными методами с удержанием членов второго порядка малости [16, с. 82; 18, 25]. График 4 соответствует первому приближению решения с удержанием членов второго порядка малости, полученного в [7, с. 154—156]. График 5 соответствует совпадающим по результатам первым приближениям решений, полученных двумя различными методами с удержанием членов второго порядка малости при условии, что $tg\,\delta_э = 1/Q_0$ [14; 17, с. 354—355]. График 6 соответствует точному численному решению уравнения (1) [27].

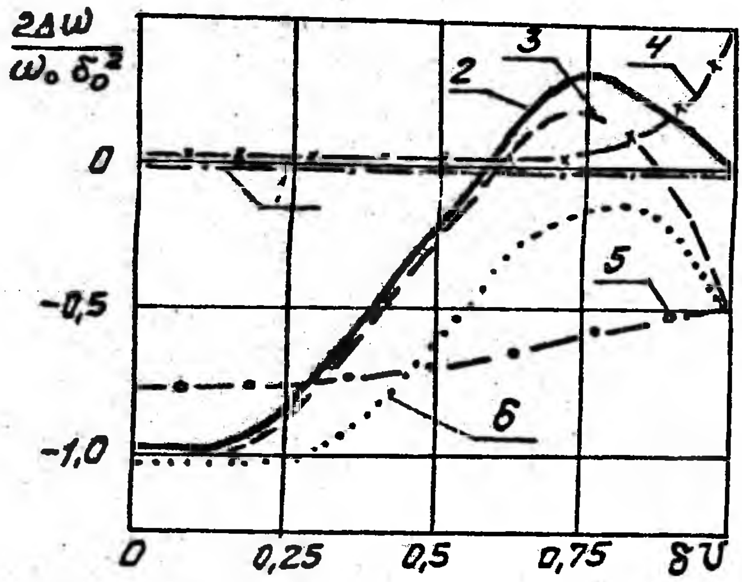

Рис. 4. Графики кривых неизохронности автогенераторов, рассчитанные по известным работам

Анализ графиков, приведенных на рис. 1—4, их сопоставление между собой и с экспериментальными данными [2, 3, 20, 22, 24, 26, 27] показывает следующее.

Решения для установления амплитуды автоколебаний $U(\varepsilon\tau)$ или $U(\mu)$ устойчивы, практически одинаковы во всех работах [9, 14—17, 25 и др.]. Их первые, вторые приближения и точное численное решения совпадают за исключением небольших отличий по времени запаздывания при $n_0 \geq 5 \ldots 10$ (см. рис. 1). Экспериментально подтверждаются как апериодический характер кривых $U(\varepsilon\tau)$ при всех значениях n_0, так и их величина выбега и стационарное значение.

Решения для установления частоты автоколебаний $\omega(\varepsilon\tau)/\omega_0$, $\Delta\omega(\mu)/\Delta\omega_{ст}$ или $2\Delta\omega(\delta U)/\omega_0\delta_0^2$ неустойчивы. Их первые, вторые приближения и точное численное решения в большинстве своем отличаются как по характеру получаемых кривых, так и по их величинам выбега, начальному и стационарному значениям (рис. 2—4). Так, первое приближение решения уравнения (1) с удержанием членов первого порядка малости дает для $\omega(\varepsilon\tau)/\omega_0 = const = 1$ или $2\Delta\omega(\delta U)/\omega_0\delta^2 = const = 0$, что означает мгновенное установление частоты без переходного процесса (см. рис. 4, график 1). Вторые приближения решений уравнения (1) или адекватных ему укороченных символических уравнений совпадают с первыми приближениями их решений при удержании членов второго порядка малости и с точным численным решением уравнения (1) только качественно но характеру кривых, но отличаются количественно по величинам выбега и стационарного значения частоты автоколебаний (см. рис. 2, рис. 4, графики 2, 3 и 6), а также существенно качественно и количественно отличаются от полученных в [7, 14, 17] решений с дополнительным учетом в первом приближении баланса фаз через баланс реактивных составляющих проводимостей или мощности автоколебаний (см. рис. 3, рис. 4, графики 4 и 5). Экспериментально не подтверждаются вытекающие из уравнения (1) или адекватных ему символических укороченных уравнений ни колебательный характер процессов установления частоты при всех $n_0 \geq 1{,}3$ при апериодическом характере установления амплитуды автоколебаний (см. рис. 1 и 2, кривые для $n_0 = 2$ и 40; рис. 4, графики 2, 3 и 6), ни убывающий характер изменения частоты с отрицательным значением $d\omega/d\tau$ при $n_0 < 1{,}3$ (см. рис. 2, кривые для $n_0 = 1{,}1$; рис. 4, графики 2, 3 и 6 при $\delta U \geq 0{,}8 \ldots 0{,}85)$, ни величины выбегов частоты $\Delta\omega / \omega_0$, ни относительные значения $\omega_{ст} / \omega_0$. Это означает, что математическая модель Ван-дер-Поля и адекватные ему укороченные символические уравнения, достаточно полно отражая баланс амплитуд, энергетические соотношения и установление амплитуды, недостаточно отражает баланс фаз и процессы установления частоты автоколебаний. Этот вывод, в определенной мере, подкрепляется результатами, полученными в [7, 14, 17], поскольку при принятом в них подходе устраняется одно из основных отличий от экспериментальных данных — колебательный характер установления частоты при апериодическом установлении амплитуды автоколебаний (см. рис. 4, графики 4 и 5). Однако величины выбега частоты и относительные значения $\omega_{ст} / \omega_0$, полученные и в [7, 14, 17], также существенно отличаются от экспериментальных данных.

Проведенный выше анализ свидетельствует о настоятельной необходимости развития теории установления частоты, в частности уточнения математической модели автоколебаний.

2. Уточненная математическая модель и результаты исследования установления частоты автоколебаний

Уточнение математической модели автоколебаний осуществлялось автором для ряда типов автогенераторов и тремя различными путями: символическим методом на основе алгебраических уравнений для кривых неизохронности [21—23], уточнением дифференциальных уравнений состояния дл электрических эквивалентных схем на основе законов Кирхгофа [26, 27], уточнением обобщенных дифференциальных векторных уравнений электродинамики на основе уравнений Максвелла [28, 29].

Для краткости, законченности и наглядности сопоставления поставленную задачу и полученные результаты целесообразно рассмотреть также на классическом примере автономного автогенератора томпсоновского типа с резонансной колебательной системой, работающего в мягком режиме самовозбуждения. При этом для упрощения и исключения эффектов, относящихся в данном случае к второстепенным, как и при выводе уравнения Ван-дер-Поля, пренебрегается пролетно-волновыми и рядом других эффектов: инерцией или временем пролета электронов, емкостью объемного заряда в промежутке сетка-катод эквивалентного триода или анод-катод эквивалентного диода, током сетки эквивалентного триода и его влиянием на колебательный резонансный контур. Как и для модели Ван-дер-Поля, принимается также одночастотный режим колебаний в резонансном контуре и аппроксимация вольт-амперной характеристики эквивалентных триода или диода $i_a(u_a)$ неполным кубическим полиномом [9, 16, 18, 25 и др.].

При таких допущениях эквивалентную схему автогенератора, как известно, можно свести к параллельному резонансному контуру, к которому в качестве нелинейного активного элемента в точках a-δ (рис. 5) подключен эквивалентный диод с вольт-амперной характеристикой для переменных составляющих

$$i_a(Ku_a)=(S_{a0}K)u_a-(S_{a0}K^3/3E_s^2)u_a^3=-g_0u_a+(g_0/3E_s^2)u_a \quad . \qquad (2)$$

При уточнении эквивалентной комплексной проводимости нелинейного активного элемента такого автогенератора, что необходимо для более точного учета баланса фаз, можно полагать известными амплитуды κ-х гармоник анодного тока $I_{a\kappa}$ и напряжения $U_{a\kappa}$. Тогда можно воспользоваться уравнениями Б. К. Шембеля [11, 13], подтвержденными также более строгим методом в [28], в соответствии с которыми реактивная мощность первой гармоники P_{p_1} , развиваемая на нелинейном сопротивлении, и эквивалентная реактивная проводимость нелинейного активного элемента $\bar{B}_э$ на основной частоте соответственно равны

$$P_{p_1}=-\sum_{\kappa=2}^{\infty}\kappa P_{p_\kappa}\,;\quad \bar{B}_э=-\sum_{\kappa=2}^{\infty}\kappa\left(U_{a\kappa}/U_{a_1}\right)^2B_\kappa^2\ , \qquad (3)$$

где P_{p_κ} — реактивные мощности κ-х гармоник, начиная со второй, выделяемые на линейной нагрузке нелинейного активного элемента;

$B_к$ — реактивная проводимость линейной нагрузки для $к$-й гармоники. Для случая рассматриваемой линейной нагрузки вида параллельного колебательного контура [27]

$$B_к = \frac{\omega C_0}{к}\left[к^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right], \; U_{aк} = -\frac{I_{aк}}{к\omega C_0}, \; \left(\frac{U_{aк}}{U_{a1}}\right)^2 = \left(\frac{I_{aк}}{кI_{a1}}\right)^2$$

и тогда (4)

$$\tilde{B}_э = -\omega_0 C_0 \sum_{к=2}^{\infty} \frac{[к^2-(\omega/\omega_0)^2]}{к^2}\left(\frac{I_{aк}}{I_{a1}}\right)^2, \; \tilde{C}_э = -C_0 \sum_{к=2}^{\infty} \frac{[к^2-(\omega/\omega_0)^2]}{к^2}\left(\frac{I_{aк}}{I_{a1}}\right)^2.$$

Знак минус перед правыми частями выражений (4) означает, в том числе и по терминологии Б. К. Шембеля, что $\tilde{B}_э$ и, в частности, $\tilde{C}_э$ характеризует источник, а не потери реактивной мощности. Таким образом, в принятых допущениях схема замещения нелинейного активного элемента автогенератора, как показано на рис. 5, кроме общепринятого отрицательного (ввиду противофазности i_a и u_a) нелинейного активного сопротивления $(-\tilde{R}_э = u_a / i_{\tilde{R}})$ как источника активной мощности на основании изложенного дополняется еще отрицательной нелинейной емкостью $(-\tilde{C}_э)$ как источником реактивной мощности, которые оба являются функциями амплитуд тока i_a или напряжения u_a. Этим принципиально важным элементом отличается схема рис. 5 от общепринятых ранее.

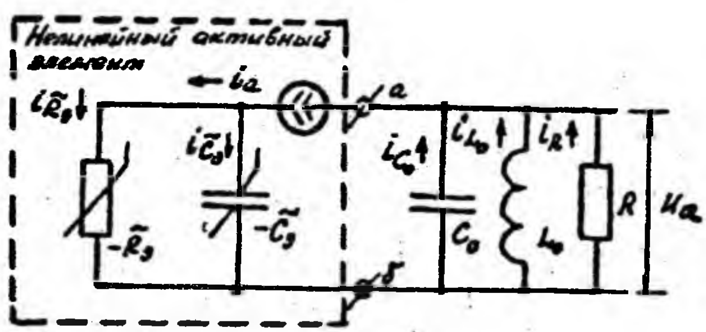

Рис. 5. Уточненная эквивалентная схема замещения автогенератора

В первом приближении напряжение на контуре схемы рис. 5 при высоких значениях Q_0 записывается в виде [9, 16]

$$u_a(t) = U_a \cos\psi = U_a \cos\int\omega\, dt, \tag{5}$$

где U_a, ω — в общем случае медленные функции времени t, зависимость от которого для упрощения записей опущена. Тогда, подставляя (5) в (2), можно получить

$$i_a = I_{a1} \cos \int \omega dt + I_{a3} \cos 3 \int \omega dt,$$

где (6)

$$I_{a1} = S_{a0} K U_a [1-(KU_a/2E_s)^2] = g_0 U_a [1-(U_a/2E_s)^2],$$

$$I_{a3} = -\frac{1}{3} S_{a0} K U_a (KU_a/2E_s)^2 = -\frac{1}{3} g_0 U_a (U_a/2E_s)^2.$$

В свою очередь, на основании (2), (4) и (6), учитывая наличие в рассматриваемом случае только одной высшей третьей гармоники, можно записать

$$\tilde{C}_э = -C_0 \frac{[9-(\omega/\omega_0)^2](KU_a/2E_s)^4}{81[1-(KU_a/2E_s)^2]^2} = -C_0 \frac{[9-(\omega/\omega_0)^2](U_a/2E_s)^4}{81[1-(U_a/2E_s)^2]^2}, \quad (7)$$

$$\tilde{R}_э = -\frac{1}{KS_{a0}\left[1-\frac{1}{3}(KU_a/2E_s)^2\right]} = -\frac{1}{g_0\left[1-\frac{1}{3}(U_a/2E_s)^2\right]}. \quad (8)$$

Для анализа автоколебаний на основной частоте ω при указанных на рис. 5 направлениях токов и напряжений можно составить исходное уравнение состояния

$$\frac{1}{R} u_a(t) + \frac{1}{L_0} \int u_a(t) dt + C_0 \frac{du_a(t)}{dt} + \frac{u_a(t)}{\tilde{R}_э} + \tilde{C}_э \frac{du_a(t)}{dt} = 0. \quad (9)$$

После преобразования уравнения (9) с учетом медленности изменения функций $u_a(t)$ и $\omega(t)$ при сравнительно высокой добротности Q_0, квазигармонического характера автоколебаний, выполняя замены и операции, близкие к используемым при выводе уравнения Ван-дер-Поля, в [27] можно получить следующее дифференциальное уравнение автоколебаний для рассматриваемого случая:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + u = \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{d\tau} + \frac{8\alpha^2 u^4}{81(1-\alpha u^2)^2}\left[\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \frac{4}{(1-\alpha u^2)u}\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2\right], \quad (10)$$

где $u=[KS_{a0}R/(KS_{a0}R-1)]^{1/2}(KU_a/E_s)=[g_0R/(g_0R-1)]^{1/2}(U_a/E_s)$ - безразмерное напряжение; $\alpha=(KS_{a0}R-1)/4KS_{a0}R=(g_0R-1)/4g_0R$.

Уравнение (10), являющееся уточненной математической моделью автоколебаний, отличается от модели Ван-дер-Поля дополнительными нелинейными членами с малым коэффициентом $8\alpha^2/81<1$, зависящими от $u^4, u^3, u^2, (du/d\tau)^2$ и $d^2u/d\tau^2$. Для квазигармонических автоколебаний они имеют порядок малости ε^2, поскольку $8\alpha^2/81=\varepsilon^2(Q_0/KS_{a0}R)^2/162=\varepsilon^2(Q_0/g_0R)^2/162$, и учитывают влияние дополнительно введенной $\tilde{C}_э$ на фазовый угол электронной проводимости активного элемента (тока смещения), резонансную частоту и частоту свободных колебаний регенерированного эквивалентного контура автогенератора. Пренебрегая этими членами, из (10) получим уравнение Ван-дер-Поля (1), а если принять $\alpha=0$, то $KS_{a0}R=g_0R=1, \varepsilon=0$ и уравнение (10), как и уравнение (1) при $\varepsilon=0$, преобразуем в уравнение $(d^2u/d\tau^2)+u=0$ для незатухающих колебаний в идеальном резонансном контуре без потерь.

Из уравнения (10), как и из уравнения (1), известным методом асимптотических разложений по степеням малого параметра ε [16], вводя обозначения $\alpha^2=\varepsilon^2\gamma$ и $\gamma=Q_0^2/16(KS_{a0}R)^2=Q_0^2/16(g_0R)^2$, учитывая также, что $\alpha u^2<1$, и удерживая составляющие разложения в ряд второго члена правой части уравнения (10) не выше порядка ε^2, получим следующую систему уточненных укороченных дифференциальных уравнений для амплитуды и частоты автоколебаний [29]:

$$\frac{dU}{d\tau}=\frac{\varepsilon U}{2}\left(1-\frac{U^2}{4}\right);\quad \frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\omega}{\omega_0}=1-\varepsilon^2\left(\frac{1}{8}-\frac{U^2}{8}+\frac{7U^4}{16^2}-\frac{\gamma U^4}{16}\right). \quad (11)$$

Из системы уравнений (11) получим уточненное уравнение для второго приближения кривой неизохронности

$$\frac{2\Delta\omega(\delta U)}{\omega_0\delta_0^2}=-\frac{2\varepsilon^2}{\delta_0^2}\left(\frac{1}{8}-\frac{\delta U^2}{2}+\frac{7\delta U^4}{16}-\gamma\delta U^4\right), \quad (12)$$

где $\delta U=U/U_{ст}=[1+(n_0^2-1)\exp(-\varepsilon\tau)]^{-1/2}$, $\gamma=\alpha^2/\varepsilon^2$.

Первое уравнение системы (11) для амплитуды автоколебаний совпадает, а второе уравнение для частоты автоколебаний и уравнение для кривой неизохронности (12) отличаются от соответствующих уравнений модели

Ван-дер-Поля дополнительными членами $\gamma U^4/16$ и $\gamma\delta U^4$. Они и приводят к апериодическому характеру установления частоты для всех n_0 при апериодическом характере установления амплитуды автоколебания и существенно влияют на величины $\Delta\omega/\omega_0$ и $\omega_{ст}/\omega_0$.

Отличия полученных точных численных решений уравнений (1) и (10) для зависимостей $U(\varepsilon\tau)$ при одинаковых значениях $n_0, \varepsilon, KS_{a0}R$ (или g_0R) и Q_0 по характеру и величине пренебрежимо малы. Они сводятся к несущественным смещению по $\tau\varepsilon$ в верхней части кривых и увеличению получаемой из (10) стационарной безразмерной амплитуды автоколебаний (например при $KS_{a0}R=g_0R=2$ до $U_{ст}=2{,}007$ и при $KS_{a0}R=g_0R=3$ до $U_{ст}=2{,}037$ вместо $U_{ст}=2$, получаемой из (1) для всех значений $KS_{a0}R$). В то же время полученные результаты точных численных решений для $\omega(\varepsilon\tau)/\omega_0$ не только количественно, но и качественно существенно отличаются друг от друга. Графики $\omega(\varepsilon\tau)/\omega_0$ при $\varepsilon=0{,}05(KS_{a0}R=g_0R=2$, $Q_0=20)$ и $n_0=1{,}1; 2; 40$, полученные из уравнений (1) и (10), приведены, соответственно, пунктирными и сплошными линиями на рис. 6. Как видно, зависимости $\omega(\varepsilon\tau)/\omega_0$, полученные из уравнения (10), по сравнению с таковыми для уравнения (1) имеют в 14...26 раз большие выбеги частоты и апериодический, а не колебательный характер при всех значениях n_0. При $n_0<1{,}3$ зависимости $\omega(\varepsilon\tau)/\omega_0$ для решений уравнения (10) сохраняют нарастающий характер установления частоты, не изменяя его на убывающий, как это имеет место для решений уравнения (1) (см. рис. 2 и 6).

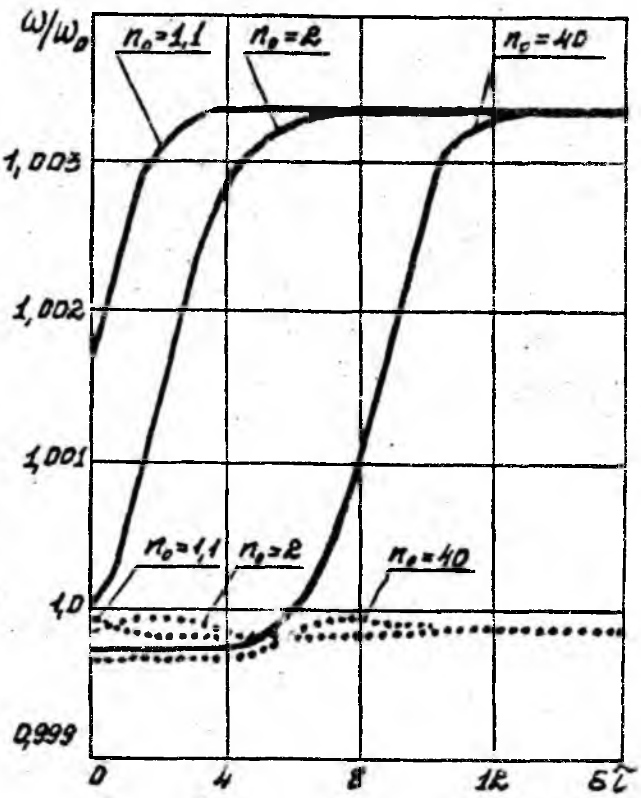

Рис. 6. Графики установления частоты автоколебаний, рассчитанные по Ван-дер-Полю и уточненному уравнению (10)

Результаты расчетов по уравнению (10) хорошо согласуются с данными экспериментов. На рис. 7 изображены экспериментальные графики в функции от $\mu = \tau / 2Q_0 = \varepsilon\tau / 2(KS_{a0}R-1)$ нормированных переходных характеристик для частоты $H_\omega(\mu) = [\omega(\mu) - \omega(0)] / [\omega_{ст} - \omega(0)]$ (кривые с крестиками) и амплитуды $H_U(\mu) = [U(\mu) - U_0] / (U_{ст} - U_0)$ (пунктирные кривые) колебаний триодного автогенератора с трансформаторной обратной связью и резонансной колебательной системой ($\omega_0 = 25$ МГц), полученные при двух режимах его работы: $n_0 = 1{,}5; \varepsilon = 0{,}028 (KS_{a0}R = 1{,}37$ и $Q_0 = 13{,}2)$ и $n_0 = 45, \varepsilon = 0{,}056 (KS_{a0}R = 1{,}82$ и $Q_0 = 14{,}7)$. Здесь же приведены соответствующие им зависимости $H_\omega(\mu)$ (сплошные кривые) и $H_U(\mu)$ (штриховые кривые), рассчитанные на основе уравнения (10). Наблюдаемые при этом расхождения между теоретическими и экспериментальными графиками с учетом принятых допущений несущественны. Они почти соизмеримы с погрешностями измерений, оценки относительных среднеквадратичных значений которых при измерении параметров режима работы автогенератора составляли $\hat{\rho}_{a_0}, KS_{a_0}R, n_0 \le (7...10)\cdot 10^{-2}$, амплитуды и мгновенной частоты автоколебаний $\hat{\rho}_U \le (3...5)\cdot 10^{-2}$ и $\hat{\rho}_\omega \le (0{,}5...1{,}5)\cdot 10^{-6}$.

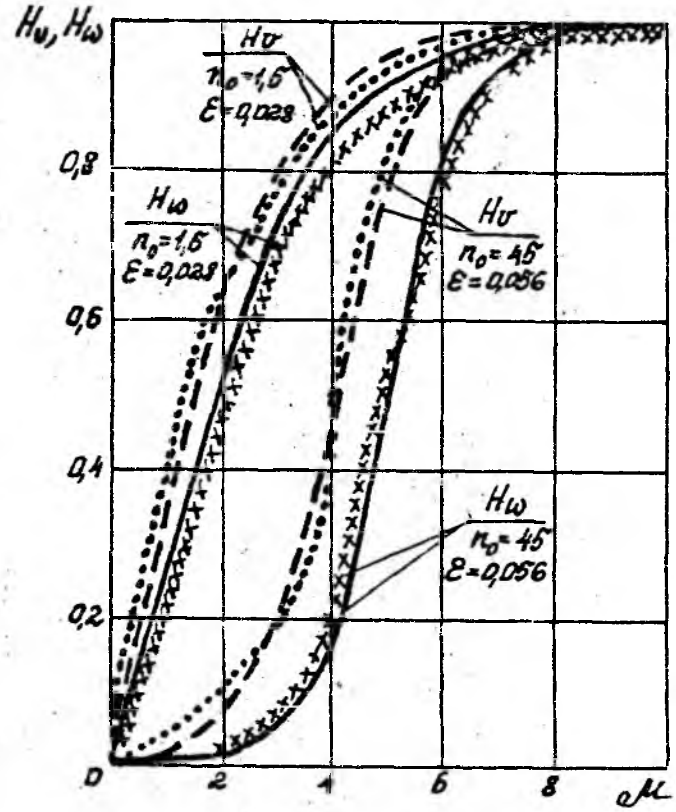

Рис. 7. Уточненные теоретические и экспериментальные графики установления амплитуды и частоты автоколебаний

Таким образом, уравнение (10), полученное на основе уточнения схемы замещения нелинейного активного элемента автогенератора, и вытекающие из него уравнения второго приближения (11) и (12) являются более точной математической моделью автоколебаний, которая адекватно описывает не только баланс амплитуд, энергетические соотношения и установление амплитуды, но и баланс фаз, установление и выбеги частоты колебаний в автогенераторе. Она позволила устранить имевшие место для математической модели Ван-дер-Поля существенные расхождения теоретических и экспериментальных данных о характере установления частоты автоколебаний.

Применение данного подхода и математические модели для ряда других типов автогенераторов, их обобщение с учетом пролетно-волновых эффектов на основе уравнений Максвелла изложены в [22—24, 26, 27, 29], где также получено хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных. Однако эти вопросы выходят за рамки данной статьи.

Литература: 1. *Ширман Я. Д., Алмазов В. Б., Голиков В. Н.* и др. О первых отечественных исследованиях по сверхширокополосной радиолокации // Радиотехника и электроника.— 1991.— Т. 36.— № 1.— С. 96—100. 2. *Гомозов В. И.* Влияние инерционности генераторов на спектр флуктуаций частоты при шумовой модуляции // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1977.— № 11.— С. 64—70. 3. *Гомозов В. И.* Анализ устройств частотной модуляции и автоподстройки с учетом нестационарных процессов в генераторах // Радиотехника и электроника.— 1978.— Т. 23.— № 4.— С. 759—770. 4. *Van-der-Pol B., Appleton E. V.* On a Type of Oscillation Hysteresis in a Simple Triode Generator // Plylosophical Mag.— 1922.— Ianuary. 5. *Van-der-Pol B.* On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Pegreens of Fridom // Plylosophical Mag.–1922.— April. 6. *Кобзарев Ю. Б.* Зависимости частоты лампового генератора от режима // Вестн. электротехники.— 1931.— № 10.— С. 31—43. 7. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Новые методы нелинейной механики в их приложении к изучению работы электронных генераторов.— М.; Л.: Гостехиздат, 1934.— Ч. 1.— 243 с. 8. *Шембель Б. К.* Стабилизация частоты радиопередающих устройств // Проблемы новейшей физики.— ГТТИ, 1934.— Вып. XX.— С. 21—33. 9. *Ван-дер-Поль Б.* Нелинейная теория электрических колебаний.— М.: Связьтехиздат, 1935.— 46 с. 10. *Groszkowski I.* Podstawy elektrycznej stablilizacji czestotliwasci.— Warszawa, 1938. 11. *Шембель Б. К.* Эквивалентное полное сопротивление нелинейного элемента электрической системы // Тр. ВНИИМ.— Л., 1940.— Вып. 3(45).— С. 7—21. 12. *Евтянов С. И.* Расчет частоты автоколебаний // Радиотехника.— 1946.— № 2.— С. 17—24.

13. *Грошковский Я.* Генерирование высокочастотных колебаний и стабилизация частоты.— Варшава, 1947 / Пер. под ред. Б. К. Шембеля.— М.: ИИЛ, 1953.— 254 с. 14. *Голант М. Б., Коваленко В. Ф.* Установление колебаний в отражательном клистроне // Тр. НИИ МПСС СССР.— М., 1952.— Вып. 1(9).— С. 3—18. 15. *David E.* RF Phase Control in Pulsed Magnetrons // Proc. IRE.— 1952.— № 6.— P. 669—685 / Пер. ВРЛТ.— 1953.— № 1.— С. 126—158. 16. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1955.— 488 с. 17. *Гвоздовер С. Д.* Теория электронных приборов СВЧ.— М.: Гостехиздат, 1956.— 527 с. 18. *Евтянов С. И.* Установление частоты автоколебаний // Научн. докл. высш. шк. Радиотехника и электроника.— 1959.— № 1.— С. 9—18. 19. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике.— М.: Сов. радио, 1973.— 400 с. 20. *Волин С. А., Гомозов В. И., Степаненко В. А.* Спектральный метод определения постоянной времени установления частоты автогенераторов СВЧ с электронной перестройкой // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1975.— № 10.— С. 85—89. 21. *Гомозов В. И., Колпаков Н. Д.* К вопросу об установлении частоты автоколебаний: Республ. межвед. сб. "Радиотехника".— Харьков: Выща шк., 1976.— Вып. 38.— С. 89—95. 22. *Гомозов В. И., Дьяченко И. П.* Расчет времени установления частоты колебаний отражательного клистрона // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1976.— № 10.— С. 58—61. 23. *Гомозов В. И., Лошаков В. А., Сухаревский О. И.* Установление частоты колебаний генераторов на диодах Ганна // Там же.— № 11.— С. 3—10. 24. *Антонов С. В., Гомозов В. И., Лошаков В. А.* Экспериментальное исследование установления частоты колебаний генераторов на диодах Ганна // Там же.— 1979.— № 10.— С. 93—98. 25. *Вакман Д. Е.* Теория триодного генератора во втором приближении // Радиотехника и электроника.— 1982.— Т. 27.— № 1. С. 126—132. 26. *Гомозов В. И., Ламехов Э. Г.* Установление колебаний в автогенераторах М-типа // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1985.— № 10.— С. 63—68. 27. *Гомозов В. И.* Об одной уточненной математической модели автоколебаний. Математическая физика и нелинейная механика.— К.: Наук. думка, Ин-т математики АН УССР, 1986.— Вып. 6(40).— С. 1—6. 28. *Гомозов В. И., Гончаренко С. Ю., Лошаков В. А.* Математическая модель автоколебаний, уточненная на основе уравнений Максвелла.— Там же.— С. 6—10. 29. *Митропольский Ю. А., Гомозов В. И., Лошаков В. А., Яцюк В. Т.* Вопросы теории управляемых по частоте автогенераторов.— К.: Ин-т математики АН Украины. Препринт 91.45, 1991.—17 с.