Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Центр Післядипломної освіти
(повна назва)

Кафедра Штучного інтелекту
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Дослідження еластичних мереж з
приєднанням за посередництвом
(тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи СШІздм-21-1
Федченко К.С.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 122 Комп'ютерні науки
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-наукова
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Системи штучного інтелекту
(повна назва спеціалізації)
Керівник проф. Удовенко С.Г.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ______________ В.О. Філатов
(підпис) (прізвище, ініціали)

2023 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Центр Післядипломної освіти
(повна назва)

Кафедра Штучного інтелекту
(повна назва)

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 122 Комп'ютерні науки
(код і повна назва)

Тип програми освітньо-наукова
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системи штучного інтелекту (СШІ)
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Зав. кафедри ________________
(підпис)
«______» ___________ 20 ___ р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Федченко Катерині Сергіївні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом

затверджена наказом університету від 31 березня 20 23 р. № 73Стз
2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 23 травня 20 23 р.
3. Вихідні дані до роботи Науково- технічні публікації, дані Інтернет-джерел та відомих наукових проектів щодо розробки еластичних мереж та мереж з приєднанням за посередництвом

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
1) Аналіз предметної області
2) Аналіз властивостей і характеристик еластичних мереж та мереж з приєднанням за посередництвом
3) Експериментальне дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри) Слайд 1 – Титульний слайд. Слайд 2 – Об'єкт, предмет, мета досліджень. Слайд 3 – Постановка задачі дослідження. Слайд 4 – Графи та мережі. Слайд 5 – Складні мережі та їх властивості. Слайд 6 – Моделі складних мереж. Слайд 7 – Масштабно-інваріантна мережа. Слайд 8 – Концепція еластичності мережі. Слайд 9 – Аналіз моделі приєднання за посередництвом. Слайд 10 – Порівняння правил приєднання BA та MDA. Слайд 11 – Вдосконалення EMDA з використанням фактору копіювання. Слайд 12 – Вдосконалення EMDA з використанням фактору копіювання. Слайд 13 – Вдосконалення EMDA з використанням фактору копіювання. Слайд 14 – Зображення розподілу рангів ступенів вузлів. Слайд 15 – Візуалізація EMDA з різними значеннями параметрів. Слайд 16 – Висновки.

6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1)

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім’я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання на кваліфікаційну роботу	03.04.2023	виконано
2	Аналіз предметної області	05.04.2023	виконано
3	Постановка завдання	10.04.2023	виконано
4	Аналіз моделей графів та складних мереж	15.04.2023	виконано
5	Дослідження правил приєднання нових вузлів до	20.04.2023	виконано
6	Дослідження моделі мереж, заснованих на	25.04.2023	виконано
7	Дослідження моделі еластичних мереж	01.05.2023	виконано
8	Експериментальні дослідження	03.05.2023	виконано
9	Написання пояснювальної записки	08.05.2023	виконано
10	Захист перед ЕК	23.05.2023	

Дата видачі завдання 3 квітня 2023 р.

Студент ______________________
(підпис)

Керівник роботи ______________________ проф. Удовенко С.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 67 с., 14 рис., 1 табл., 1 дод., 21 джерело.

ЕЛАСТИЧНІСТЬ, МАСШТАБНО-ІНВАРІАНТНА МЕРЕЖА, МОДЕЛЬ БАРАБАШІ-АЛЬБЕРТ, ПРИЄДНАННЯ ЗА ПОСЕРЕДНИЦТВОМ.

Об’єкт досліджень – безмасштабні, еластичні мережі.

Предметом досліджень – еластична мережа з приєднанням за посередництвом.

Мета роботи – аналіз моделей складних мереж, дослідження впливу показника розподілу вузлів та коефіцієнту еластичності мережі на структуру та динаміку мережі, проведення експериментальних досліджень оцінювання меж середнього кластерного коефіцієнту еластичних мереж.

Завданням дослідження є отримання глибокого розуміння еластичних мереж з приєднанням за посередництвом, вивчення їхньої структури та динаміки, а також виявлення ключових властивостей та можливих застосувань.

Методи дослідження – аналіз безмасштабних мереж, поняття концепції еластичності, аналіз впливу параметрів мережі на її функціональність, математичне моделювання еластичної мережі з приєднанням за посередництвом.

На основі результатів дослідження зроблені декілька моделей еластичної мережі на основі різних способів генерації мережі. Була виявлена гнучкість та масштабованість цих мереж, що дозволяє їм адаптуватися до змінних умов та вимог. Аналіз впливу параметрів мережі на її функціональність дав змогу визначити оптимальні налаштування та покращити її роботу. Також було виявлено можливі проблеми та запропоновано шляхи їх вирішення.

ABSTRACT

Explanatory note: 67 p., 14 fig., 1 tabl., 1 ann., 21 sources.

BARABASI-ALBERT NETWORK, COMPLEX NETWORKS, ELASTICITY, MEDAITION-DRIVEN ATTACHMENT MODEL, SCALE-FREE NETWORK.

The object of research is scale-free, elastic networks.

The subject of the research is an elastic network with attachment through mediation.

The aim of the study is to analyze models of complex networks, investigate the influence of the node distribution parameter and network elasticity coefficient on the structure and dynamics of the network, and conduct experimental research to assess the boundaries of the average clustering coefficient of elastic networks.

The objective of the research is to gain a deep understanding of elastic networks with attachment through mediation, study their structure and dynamics, and identify key properties and potential applications.

Methods of research – analysis of scale-free networks, concept of elasticity, analysis of the impact of network parameters on its functionality, mathematical modeling of elastic networks with intermediation.

Based on the research results, several models of elastic networks have been created using different methods of network generation. The flexibility and scalability of these networks have been observed, allowing them to adapt to changing conditions and requirements. The analysis of the impact of network parameters on its functionality has enabled the identification of optimal configurations and improved network performance. Additionally, potential issues have been identified, and solutions have been proposed to address them.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

БА – мережа Барабаші-Альберт;

УС – мережа Уоттса-Строгаца;

МІМ – масштабно-інваріантна мережа;

EMDA – Elastic MDA – еластична модель з приєднанням за посередництвом;

MDA – Mediation-Driven Attachment model – модель з приєднанням за посередництвом;

SF-мережа – Scale-Free network – безмасштабна мережа;

SW – Small World – мережа малого світу.

ВСТУП

З розвитком сучасних технологій та зростанням обсягів даних з'явилася потреба в розумінні структури мереж та їх властивостей. Особливу увагу звертають на масштабно-інваріантні мережі, які є важливими для розуміння багатьох природних та соціальних процесів.

Проблема безмасштабних мереж є однією з актуальних у галузі соціальних мереж та мережевого аналізу. На сьогоднішній день існує багато різних підходів до моделювання та аналізу безмасштабних мереж, але багато питань залишаються відкритими та потребують подальшого дослідження.

З одного боку, існують різноманітні методи та інструменти для аналізу структури та властивостей еластичних мереж з приєднанням за посередництвом, такі як метрики центральності та міри посередництва. Ці методи дозволяють виявляти ключові вузли мережі та оцінювати їх важливість у контексті різних сценаріїв використання.

З іншого боку, проблема еластичних мереж є складною та має багато відкритих питань. Наприклад, одним із викликів є розробка ефективних алгоритмів для пошуку оптимального розташування посередників у мережі, які дозволять зменшити затримки та підвищити пропускну здатність. Крім того, потрібно досліджувати вплив різних параметрів на структуру та властивості мережі з приєднанням за посередництвом, таких як рівень пов'язаності вузлів, кількість та розташування посередників, а також час на додавання нових вузлів та посередників.

У цілому, проблема еластичних мереж є важливою для багатьох галузей, включаючи телекомунікації, соціальні мережі та мережевий аналіз. Розвиток нових методів та алгоритмів для моделювання та аналізу еластичних мереж буде мати важливе значення для покращення ефективності та надійності різних систем, що базуються на мережах. Зокрема, використання еластичних мереж дозволяє покращити якість передачі даних, зменшити витрати на мережеве обладнання та забезпечити високу роботу мережі в умовах змінних навантажень.

Актуальність теми полягає у тому, що розуміння структури еластичних мереж з приєднанням за посередництвом є важливим для багатьох наукових та практичних досліджень. Зокрема, еластичні мережі з приєднанням за посередництвом використовуються в соціальних мережах, біології, фізиці, транспортних мережах та інших галузях.

Огляд літератури показує, що проблема дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом вже вивчалася. Було запропоновано різноманітні алгоритми та методи для аналізу цих мереж. Проте більшість з них не забезпечують точні результати на великих мережах, або потребують великих обчислювальних ресурсів. Також, існують певні проблеми з обробкою та аналізом даних еластичних мереж з приєднанням за посередництвом.

В останні роки дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом отримали значне поширення, особливо в галузі аналізу соціальних мереж. Багато дослідників займаються застосуванням цих понять та методів до різних областей, включаючи аналіз вірусних захворювань, вивчення криз в глобальних фінансових системах, а також до дослідження електронних мереж, включаючи Інтернет.

Таким чином, актуальність дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом полягає у тому, що вони дозволяють отримати більш повне та точне розуміння структури та взаємодії в мережах різних типів. Метою дослідження є детальний аналіз різних методів та показників, які використовуються для аналізу еластичних мереж з приєднанням за посередництвом, а також їх застосування для вирішення практичних завдань.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Графи та мережі

Граф – це математична структура, що представляється сукупністю вершин (вузлів) та ребер (зв'язків) між ними. Він використовується для моделювання та вивчення взаємозв'язків між об'єктами в різних областях науки, технології та соціальних наук.

Історія виникнення графів сягає своїми коріннями в XVIII століття. У 1736 році Леонард Ейлер [1] вирішив відому проблему про сім кюрасо в Кенігсберзі (рисунок 1.1), яка полягала в тому, чи можна пройти по всіх сім мостах міста, не проходячи по нікому з них більше одного разу. Ця задача стала відома як задача о кюрасо та привернула увагу до вивчення графів.

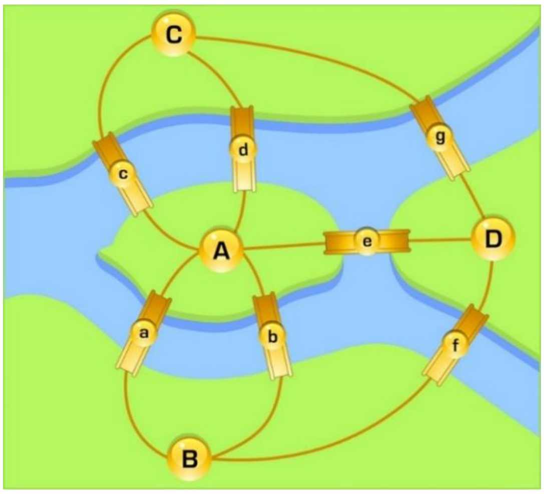

Рисунок 1.1 – Схема мостів Кенігсбергу

Ейлер сформулював правило, що для того, щоб граф можна було накреслити без відривання олівця від паперу, необхідно, щоб кількість вершин з непарним числом інцидентних ребер дорівнювала нулю або двом. Якщо кількість непарних вершин дорівнює нулю, то можна починати накреслення з будь-якої вершини, а якщо двом – то почати з однієї з непарних вершин. Граф Кенігсбергських мостів, який мав чотири непарні вершини, не міг бути обхідним без повторного перетину мостів. Ця публікація Ейлера є фундаментальною для теорії графів.

Граф складається з вершин і ребер. Вершини графа також називаються елементами графа. Кількість вершин у графі позначається як $|V|$, а кількість ребер – як $|E|$. Ребро з'єднує дві вершини, які називаються кінцевими вершинами або просто кінцями цього ребра. Два ребра називаються суміжними, якщо вони мають загальну кінцеву вершину. Ребра можуть бути кратними, якщо вони мають однакові кінцеві вершини. Якщо ребро має одну вершину як початок і кінець, то його називають петлею.

Граф без петель і кратних ребер називається простим графом. Ступінь вершини v (позначається як $deg(v)$) визначається кількістю ребер, що інцидентні цій вершині (при цьому петлі рахуються двічі). Ізольована вершина – це вершина, яка не є кінцем жодного ребра. Висяча (або лист) – це вершина, яка є кінцем лише одного ребра.

Існує декілька видів графів, які використовуються в теорії графів і дослідженнях мереж. По-перше орієнтований та неорієнтований графи (рисунок 1.2). У неорієнтованому графі ребра не мають визначеної орієнтації, тобто вони можуть з'єднувати вершини в будь-якому напрямку. В орієнтованому графі кожне ребро має визначений напрямок з однієї вершини до іншої.

Орієнтований граф, також відомий як орграф, є впорядкованою парою $G = (V, A)$, де V є непорожньою множиною вершин або вузлів, а A є множиною впорядкованих пар різних вершин, які називаються дугами або орієнтованими ребрами. Дуга представляється як впорядкована пара вершин (u, v), де u – початкова вершина, а v – кінцева вершина. Можна сказати, що дуга $u \rightarrow v$ вказує на напрямок від вершини u до вершини v.

Змішаний граф (*G*) є графом, в якому деякі ребра можуть бути орієнтованими, а деякі – неорієнтованими. Орієнтовані та неорієнтовані графи є окремими випадками змішаного графа.

Граф *G* називається ізоморфним графу *H*, якщо існує взаємно однозначне відображення (біекція) *f* між множинами вершин графа *G* і *H*, таке, що якщо у графі *G* є ребро (*u*, *v*), то в графі *H* також повинно бути ребро ($f(u)$, $f(v)$) (тобто з вершини $f(u)$ до вершини $f(v)$). Зворотно, якщо в графі *H* є ребро (*u'*, *v'*), то в графі *G* повинно бути ребро ($f^{-1}(u')$, $f^{-1}(v')$), де f^{-1} є оберненою функцією *f*. У випадку орієнтованого графа ця біекція також повинна зберігати орієнтацію ребра. У разі зваженого графа біекція також повинна зберігати вагу ребер.

Маршрут в графі – це послідовність вершин, в якій кожна вершина (крім останньої) з'єднана з наступною вершиною ребром Ланцюг – це маршрут у графі, у якому ребра не повторюються. Простий ланцюг – це спеціальний вид ланцюга, у якому вершини також не повторюються.

Орієнтований маршрут або шлях в орграфі є кінцевою послідовністю вершин і дуг, в якій кожна вершина або дуга інцидентна попередній і наступній. Цикл – це ланцюг, у якому перша і остання вершини збігаються. Довжиною шляху (або циклу) називається кількість його складових ребер. Якщо вершини u та v є кінцями деякого ребра, то послідовність (*u*, *v*, *u*) є циклом. Щоб уникнути таких «вироджених» випадків, визначення циклу уточнюють, вводячи поняття простого і елементарного шляху (циклу).

Шлях (або цикл) називається простим, якщо ребра в ньому не повторюються, і елементарним, якщо він простий і вершини в ньому не повторюються. Основні властивості шляхів і циклів:

– будь-який шлях, що з'єднує дві вершини, містить елементарний шлях, що з'єднує ті ж дві вершини;

– всякий простий неелементарний шлях містить елементарний цикл;

– всякий простий цикл, що проходить через деяку вершину (або ребро), містить елементарний підцикл, що проходить через ту ж вершину (або ребро);

– петля є елементарним циклом.

Таким чином, ці властивості допомагають розуміти особливості шляхів і циклів в орієнтованих графах.

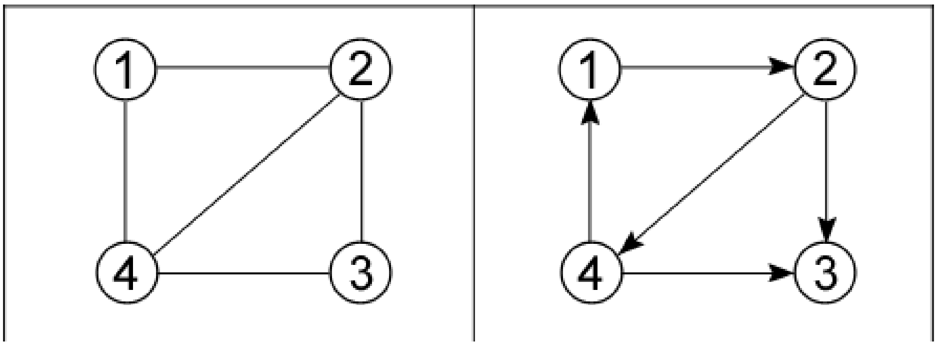

Рисунок 1.2 – Приклади графів: а) неорієнтований; б) орієнтований

Також графи можуть бути зважені та незважені: у зваженому графі кожному ребру призначена числова вага, яка відображає важливість або вартість цього зв'язку. У незваженому графі всі ребра мають однакову вагу або вага не враховується. Бувають повні та неповні графи: у повному графі кожна вершина безпосередньо з'єднана з усіма іншими вершинами. У неповному графі можуть бути пропущені деякі зв'язки між вершинами.

Дерево – це зв'язний ациклічний граф, у якому кожній вершині, крім однієї, є рівно один вхідний зв'язок (рисунок 1.3). Дерева мають важливе значення в алгоритмах та структурах даних.

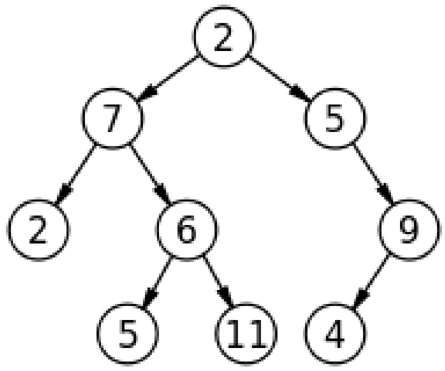

Рисунок 1.3 – Просте бінарне дерево

Існують багатошарові графи, що складаються з декількох рівнів або шарів, де вершини одного шару з'єднані з вершинами іншого шару. Цей тип графів часто використовується для моделювання соціальних мереж, Інтернету та інших складних систем. Це лише декілька основних видів графів, асортимент варіантів і спеціальних видів графів може бути значно більшим і залежить від конкретного дослідження та застосування. У теорії графів існують також інші види графів, такі як орієнтовані ациклічні графи (DAG), дводольні графи, регулярні графи, розширені графи та багато інших. Кожен з цих видів графів має свої особливості і використовується для вивчення певних аспектів структури та взаємозв'язків у системах.

Мережа є системою зв'язків між окремими компонентами, які можуть бути представлені вузлами або вершинами, а зв'язки між ними – ребрами або зв'язками. Мережа використовується для моделювання та аналізу різних видів взаємозв'язків і залежностей між компонентами.

Види мереж можуть бути дуже різноманітними і залежать від конкретного контексту та досліджуваної системи. Деякі загальні види мереж включають:

– соціальні мережі: вони моделюють зв'язки між особами або соціальними сутностями, такі як дружба, співпраця, спільноти та інші форми взаємодії;

– інтернет-мережі: відображають структуру зв'язків між веб-сторінками, сайтами або іншими елементами Інтернету;

– транспортні мережі: моделюють мережі доріг, залізниць, авіаліній або інших транспортних систем, в яких зв'язки відображають маршрути та з'єднання між різними місцями;

– біологічні мережі: описують взаємозв'язки між біологічними сутностями, такими як молекули, білки, гени або клітини, і допомагають розуміти біологічні процеси та системи.

Щодо походження мереж, сам концепт мережі є фундаментальним у багатьох галузях науки. Проте, не можна приписати її створення конкретній особі або джерелу, оскільки вона розвивалась у багатьох наукових дисциплінах протягом багатьох років. Розуміння та вивчення мереж відбувалося завдяки внеску багатьох вчених і дослідників з різних галузей.

1.2 Поняття складних мереж

Складні мережі – це мережі, що складаються з великої кількості взаємопов'язаних елементів, таких як вузли та ребра, і мають складну структуру. Ці мережі виникають у багатьох сферах, включаючи науку, технології, соціологію, біологію та економіку.

Історія складних мереж має свої корені у теорії графів, яка була розроблена в XVIII столітті. У той час математики вивчали математичні об'єкти, що складалися з вузлів та зв'язків між ними. Але використання графів у дослідженнях реальних систем було обмеженим до початку XX століття.

У 1930-х роках математик-статистик Андрій Колмогоров започаткував теорію випадкових графів [2]. Він використовував графи для опису складних систем з багатьма взаємодіючими компонентами, такими як полімерні ланцюги та речовини. Колмогоров запропонував різні моделі графів, які можуть бути використані для опису цих систем.

У 1990-х роках складні мережі почали застосовуватися в біології та соціології для моделювання взаємодії між різними об'єктами. У 1998 році була опублікована стаття «Collective dynamics of 'small-world' networks» [3], авторами якої були Дункан Уоттс та Стівен Строгац. Вони запропонували модель «малого світу», яка пояснювала, чому в деяких мережах людей можуть знати один одного через декілька посередників.

У 2000-х роках складні мережі стали популярним об'єктом досліджень в ряді різних галузей, таких як фізика, економіка, технології та багато інших. Декілька ключових подій та досягнень, пов'язаних з дослідженнями складних мереж, в цих галузях, включають:

– дослідження соціальних мереж: з появою соціальних мереж в Інтернеті, дослідження структури та динаміки цих мереж стали актуальними. Вивчення взаємодії між користувачами, поширення інформації, формування груп та спільнот в соціальних мережах дало поштовх для розвитку теорії складних мереж;

– економіка та фінанси: складні мережі застосовуються в економіці та фінансах для моделювання взаємодії між різними економічними агентами, ринками та фінансовими установами. Вони використовуються для аналізу структури фінансових мереж, розподілу ризиків та взаємодії між ринками;

– технології та Інтернет: вивчення складних мереж має важливе значення в розробці технологій та в управлінні комп'ютерними мережами. Використання мережевих алгоритмів, таких як алгоритми маршрутизації, оптимізації трафіку та управління ресурсами, допомагає вдосконалити функціональність та ефективність мереж;

– біологія та медицина: складні мережі використовуються для моделювання взаємодій між біологічними молекулами, клітинами та організмами. Наприклад, складні мережі можуть допомогти відповісти на питання про те, як білки взаємодіють один з одним і які процеси відбуваються в клітинах.

Складні мережі мають багато властивостей, які відрізняють їх від простих мереж. Ось деякі з найважливіших властивостей складних мереж:

– масштабованість: складні мережі мають тенденцію до збільшення розміру зі зростанням кількості вузлів. Це означає, що при додаванні нових вузлів мережа не втрачає своєї функціональності;

– розподіл степенів вузлів: степінь вузла в мережі вказує на кількість з'єднань, які його з'єднують з іншими вузлами. В складних мережах розподіл степенів вузлів може бути нерівномірним, що вказує на те, що деякі вузли мережі є більш важливими за інші;

– кластеризація: ця властивість вказує на те, наскільки багато з'єднань є між вузлами в конкретному районі мережі. У складних мережах кластеризація може бути високою, що означає, що вузли у певних районах мережі сильно пов'язані між собою;

– короткі шляхи: ця властивість вказує на те, які вузли в мережі мають короткі шляхи між собою. У складних мережах короткі шляхи можуть бути знаходитись між далекими вузлами, що свідчить про те, що мережа може бути зв'язана між собою за декілька кроків;

– впливові вузли: деякі вузли у складних мережах можуть бути більш впливовими за інші. Ці вузли можуть мати високу степінь, бути часто включені в короткі шляхи або бути ключовими вузлами, необхідними для збереження структури та функцій мережі. Такі вузли називаються «вузлами-хабами» або «центральними вузлами». Вони можуть бути важливими для розповсюдження інформації, контролю в мережі, а також для розв'язання проблем з безпекою та захисту мережі від атак.

Іншою важливою властивістю складних мереж є їх резилієнтність або стійкість до випадкових або зловмисних атак. Резилієнтність мережі визначається її здатністю зберігати свої функціональні властивості при випадкових відключеннях вузлів або зв'язків. Ця властивість є дуже важливою в технологічних мережах, де невміле відключення частини мережі може призвести до серйозних наслідків.

Також складні мережі можуть мати властивість малих світів, коли будь-який вузол мережі може бути досягнутий з будь-якого іншого вузла за декілька кроків. Це означає, що навіть великі мережі можуть бути дуже зв'язними та легкодоступними для інформаційного обміну.

Складні мережі можуть бути досліджені за допомогою різних методів, включаючи математичні моделі та комп'ютерне моделювання. Дослідження складних мереж можуть допомогти зрозуміти взаємодію між їх складовими, виявити ключові вузли та зв'язки, а також вивчити глобальні властивості мережі, такі як масштабованість, резилієнтність та вплив зовнішніх факторів. Вивчення складних мереж може мати застосування в багатьох областях, включаючи комунікації, транспорт, біологію, економіку та соціологію.

1.3 Моделі складних мереж

Моделі складних мереж – це формальні математичні структури, які дозволяють описувати і аналізувати складні мережі. Такі моделі можуть мати різні рівні складності та деталізації, в залежності від конкретної задачі або дослідження.

Модель Ердеша-Реньї є однією з найбільш відомих моделей в теорії складних мереж. Ця модель була запропонована у 1959 році угорськими математиками Паулем Ердешем та Альфредом Реньї [4]. Вона передбачає створення випадкової мережі з n вузлами та l зв'язками, де кожен зв'язок між двома вузлами додається з ймовірністю p (рисунок 1.4).

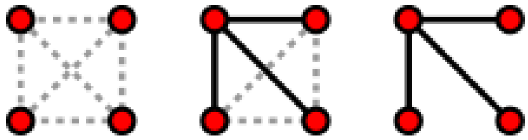

Рисунок 1.4 – Модель Ердеша Реньї згенерована з 4 вузлами

Модель Ердеша-Реньї є дуже важливою для вивчення властивостей складних мереж, так як ця модель надає базовий фреймворк для порівняння з іншими моделями та реальними мережами. Основними характеристиками моделі Ердеша-Реньї є:

– випадковість: зв'язки між вузлами утворюються випадковим чином з однаковою ймовірністю p. Це означає, що кожна пара вузлів має однакову ймовірність мати з'єднання;

– степінь вузла визначає кількість з'єднань, які його пов'язують. У моделі Ердеша-Реньї ступінь кожного вузла є випадковою величиною, яка підпорядковується біноміальному розподілу;

– ймовірність з'єднання: ймовірність *p* визначає ймовірність існування з'єднання між будь-якою парою вузлів. Якщо *p* дуже мала, то мережа буде розрідженою, а якщо *p* дуже велика, то мережа буде щільною;

– властивості компонентів: модель Ердеша-Реньї може мати декілька компонентів (груп з'єднаних вузлів), і кількість та розміри цих компонентів залежать від ймовірності *p*.

1.3.1 Модель Уоттса-Строгаца

Модель Уоттса-Строгаца, також відома як Small World (SW) модель, є одним з важливих внесків у дослідження мереж і була розроблена Дунканом Уоттсом та Стівеном Строгацем у 1998 році. Історія створення моделі Уоттса-Строгаца починається з прагнення вивчати властивості мереж з випадковими та регулярними з'єднаннями. Уоттс та Строгац зауважили, що багато реальних мереж, таких як соціальні мережі та мережі знайомств, мають як властивості локальної структури, так і властивості коротких шляхів між вузлами. Існуючі моделі графів не здатні точно відображати ці властивості, тому вони розробили модель, що поєднує ці характеристики – модель Уоттса-Строгаца.

Модель Уоттса-Строгаца базується на двох основних принципах: локальному переналаштуванні та випадковому перебудованні. Починаючи з регулярної решітки або графа з регулярними з'єднаннями, модель випадковим чином переналаштовує кілька з'єднань, щоб створити короткі шляхи між вузлами. Цей процес дозволяє зберегти локальну структуру мережі, одночасно створюючи короткі шляхи.

Однією з ключових формул, що описують модель Уоттса-Строгаца, є формула ймовірності переналаштування з'єднання. Вона визначає ймовірність того, що кожне з'єднання в регулярній мережі буде переналаштовано. Ця формула може бути записана як $P = \beta / K$, де β – це ймовірність переналаштування, а K – загальна кількість з'єднань в мережі. Додатково, в моделі Уоттса-Строгаца використовується формула випадкового перебудування, яка визначає ймовірність випадкового з'єднання між будь-якою парою вузлів. Ця формула може бути записана як $P = \alpha$, де α – ймовірність випадкового з'єднання. Ці формули використовуються для моделювання процесу переналаштування та випадкового перебудовання з'єднань у мережі Уоттса-Строгаца, що дозволяє створити властивості «коротких шляхів» у мережі при збереженні локальної структури.

Модель Уоттса-Строгаца генерує граф шляхом початкового створення регулярної решітки та додавання деякої кількості випадкових ребер (рисунок 1.5). Кожен вузол з'єднується з k найближчими сусідами, де k – параметр моделі, який визначає степінь регулярності мережі. Після цього додавання випадкових ребер здійснюється наступним чином: випадково вибираються два вузли із графу, які не мають зв'язку між собою, та додається ребро між ними. Цей процес повторюється n раз, де n – кількість випадкових ребер, які додаються до графу.

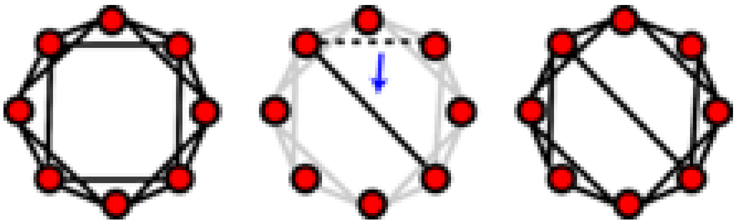

Рисунок 1.5 – Модель Уоттса-Строгаца, де $k = 4$

Модель Уоттса-Строгаца може генерувати графи з різним рівнем кластеризації та діаметром, що робить її корисною для моделювання різноманітних складних мереж.

1.3.2 Модель Барабаші-Альберта

Модель графа Барабаші-Альберт (БА) отримала свою назву на честь її авторів, Альберта-Ласло Барабаші і Реки Альберт. Вони вперше представили цю модель у своїй статті «Emergence of scaling in random networks» в журналі Science у 1999 році [5]. Розвиток моделі БА був відповіддю на потребу пояснити явище «багаті стають багатшими» або «переважне приєднання», яке було помічено в багатьох реальних мережах. Дослідники хотіли зрозуміти, чому деякі вузли в мережах мають значно більше зв'язків, ніж інші. Модель БА була вперше запропонована як спосіб пояснити це явище. Вона базується на ідеї, що нові вузли додаються послідовно і приєднуються до наявних вузлів з ймовірністю, пропорційною їх ступеню. Це означає, що вузли з вищим ступенем мають більше можливостей отримати нові зв'язки, і таким чином їх ступінь продовжує зростати. Згодом модель БА була деталізована та розширена іншими дослідниками, і вона стала однією з ключових моделей у теорії скейлінгових мереж. Вона була застосована для пояснення властивостей різних реальних мереж, включаючи соціальні мережі, мережі Інтернет, мережі цитувань наукових статей та багато інших.

Завдяки своїй простоті та здатності пояснювати скейлінгові властивості мереж, модель Барабаші-Альберт стала популярним інструментом у дослідженнях комплексних систем та мережевої науки. Вона допомогла розширити наше розуміння процесів формування мереж, зокрема пояснити, чому деякі вузли мають значно більше зв'язків, ніж інші, і як формуються скейлінгові закони, що описують розподіл ступенів вузлів. Протягом років модель Барабаші-Альберт була вдосконалена і розширена різними дослідниками, що призвело до виникнення нових варіацій та модифікацій.

Модель Барабаші-Альберт привернула значну увагу у наукових дослідженнях і була використана в багатьох галузях. Основні напрямки застосування моделі Барабаші-Альберт включають:

– вивчення структури соціальних мереж: модель Барабаші-Альберт використовується для розуміння структури соціальних мереж, в тому числі мереж знайомств, мереж співпраці, мереж дружби тощо. Вона дозволяє пояснити наявність «вливових осіб» з високою кількістю зв'язків і структуру мережі, що не підкоряється регулярним законам;

– вивчення Інтернету та Всесвітньої павутини: модель BA використовується для моделювання структури Інтернету та Всесвітньої павутини. Вона допомагає пояснити наявність вузлів з високою кількістю посилань (наприклад, популярних веб-сторінок) і безмасштабної структури мережі Інтернету;

– дослідження епідеміології та поширення хвороб: використовується для моделювання поширення хвороб та епідемій. Вона дозволяє досліджувати вплив структури мережі на швидкість поширення і контроль за епідеміями;

– аналіз соціальних медіа: вона допомагає розуміти, як пости, повідомлення та тренди поширюються у соціальних мережах, в тому числі в Twitter, Facebook, Instagram тощо;

– моделювання транспортних мереж, таких як системи автомобільних доріг, міські мережі громадського транспорту або повітряні маршрути. Вона допомагає розуміти структуру та потоки в таких мережах, що сприяє оптимізації планування транспортної інфраструктури;

– вивчення біологічних мереж, таких як молекулярні взаємодії у клітині, мережі взаємодії генів або нейронні мережі. Вона дозволяє аналізувати структуру та функціонування цих мереж, що сприяє розумінню біологічних процесів та розробці нових методів лікування та діагностики.

Починаючи з одного вузла, на кожному кроці додається новий вузол з m ребрами, що приєднують його до існуючих вузлів (рисунок 1.6). Ідея «багатий стає ще багатішим» полягає в тому, що новий вузол має більшу ймовірність приєднатися до вузла з великою кількістю зв'язків, тобто вузла з високим ступенем центральності. Це призводить до того, що деякі вузли мережі мають значно більшу кількість зв'язків, ніж інші.

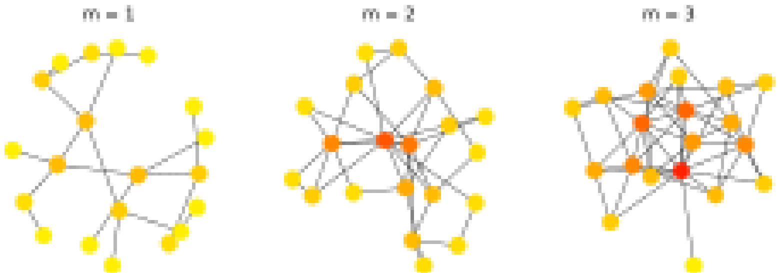

Рисунок 1.6 – Модель Барабаші-Альберта

Будучи основою МІМ модель Барабаші-Альберт має кілька недоліків, які успадкувала від попередніх моделей:

– у реальних мережах середня степінь вузлів $k(n)$ має тенденцію зростання зі збільшенням розміру мережі, тоді як у Моделі Барабаші-Альберт вона залишається постійною. Тому ця модель генерує дуже розріджені мережі;

– модель Барабаші-Альберт породжує мережі з нейтральною асортативністю [6], [11], тоді як соціальні мережі суттєво асортативні, а біологічні та технічні мережі – дизасортативні;

– передбачається, що інформація про ступінь вузлів і k використовується явно, тобто вхідний вузол «знає» (або може оцінити) ступені всіх існуючих вузлів мережі;

– керуючі параметри моделей (наприклад, m) зазвичай залежать від масштабу, що суперечить самій концепції масштабної інваріантності.

Крім того, існує багато інших моделей, які описують різні характеристики складних мереж, такі як модель конфігураційної моделі Больцмана-Гіббса для визначення розподілу станів вузлів у мережі, модель Евклідової мережі для опису геометричних характеристик мережі та інші.

1.4 Масштабно-інваріантні мережі

Масштабно-інваріантна мережа (МІМ), або безмасштабна мережа (англ. scale-free network) – це тип мережі, в якій кількість зв'язків вузлів розподілена за степеневим законом. Іншими словами, в цій мережі кількість зв'язків вузлів різна, але деякі вузли мають набагато більше зв'язків, ніж інші (рисунок 1.7). Такі вузли називаються «хабами» або «вузлами високого ступеня».

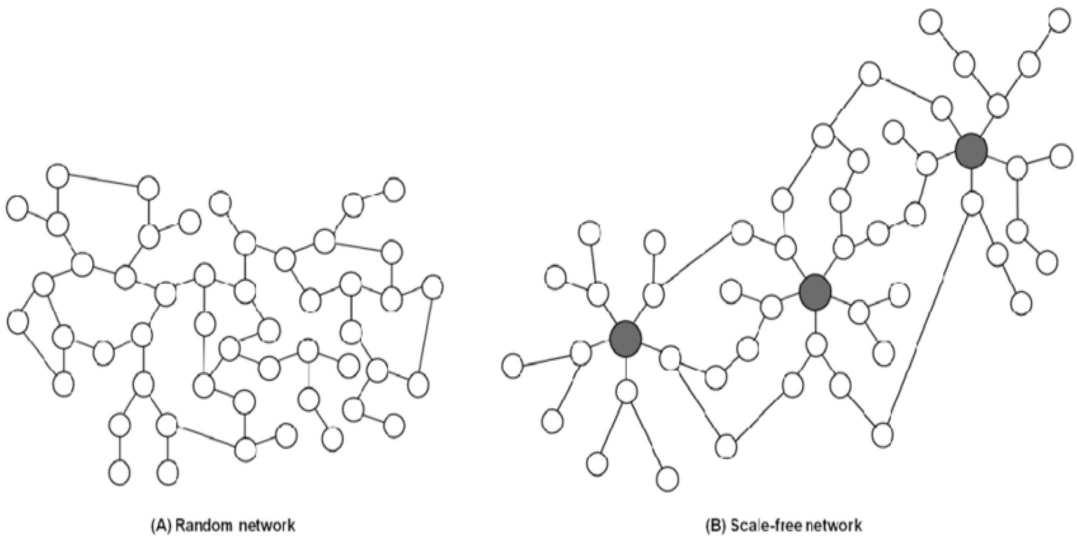

Рисунок 1.7 – Умовне зображення мереж: а) випадкова мережа; б) безмасштабна мережа

Одним з перших досліджень цього типу мережі було дослідження Барабаши та Альберта. Вони показали, що розподіл ступенів вузлів в мережі може бути описаний степеневим законом, де кількість вузлів зі ступенем k пропорційна k^-γ

$$p(k) \approx ck^{-\gamma}, \quad (1.1)$$

де c – нормалізуючий параметр;

γ – показник степеневого закону, який зазвичай знаходиться в межах 2<γ≤3.

Цей закон показує, що є деякі вузли, які мають надзвичайно велику кількість зв'язків, тоді як більшість вузлів має малу кількість зв'язків.

Барабаші і Альберт запропонували просту і елегантну модель для пояснення появи безмасштабності. Вони встановили, що для виникнення безмасштабних мереж необхідно задовольнити дві умови:

– рост: модель починається зі скінченого числа початкових вузлів (m_0). На кожному кроці часу додається один новий вузол, який має ($m \leq m_0$) зв'язків. Ці зв'язки встановлюються між новим вузлом і m різними вже існуючими вузлами в мережі;

– переважне приєднання (англ. Preferencial attachment): ймовірність того, що новий вузол приєднається до існуючого вузла i (p_i), пропорційна кількості зв'язків у цього вузла (k_i):

$$p_i = \frac{k_i}{2(N-1)}. \quad (1.2)$$

Ця модель пояснює те, як мережі можуть рости безмасштабно, з кількістю зв'язків, що розподіляються нерівномірно між вузлами. Чим більше зв'язків у вузлі, тим більша ймовірність, що до нього приєднається новий вузол.

$$l_s \propto log\ (log\, N). \quad (1.3)$$

Для безмасштабних мереж середня довжина найкоротшого шляху між вузлами є значно меншою, ніж для ER-моделі (випадкової регулярної мережі). Середня довжина найкоротшого шляху в безмасштабних мережах є низькою і залежить від логарифму кількості вузлів у мережі.

Це означає, що в безмасштабних мережах існує велика кількість коротких шляхів між будь-якими двома вузлами. Це сприяє швидкій передачі інформації та ефективній комунікації в мережі. У порівнянні з ER-моделлю, де середня довжина найкоротшого шляху зростає зі збільшенням кількості вузлів, безмасштабні мережі забезпечують більш короткі шляхи, незалежно від їх розміру. Це одна з важливих особливостей безмасштабних мереж, яка робить їх ефективними для передачі інформації, пошуку ресурсів та взаємодії в мережевих системах.

Характеристики мережі залежать від правила приєднання, що визначає ймовірність приєднання π_i нового зв'язку до вузла, залежно від його індивідуальних властивостей (i, k_i, P_i) та загальних параметрів мережі, таких як її розмір n, початкових умов n_0, L_0 та параметрів управління U:

$$\pi_i = f(i, k_i, n_0, L_0, p_i, U). \tag{1.4}$$

Розвиток мережі визначається кількістю зв'язків $m(n)$, що з'єднують новий вузол з наявними вузлами, або середнім ступенем вузлів $\bar{k}(n)$.

Ця характеристика описує властивості стохастичного процесу, що породжує мережу. При створенні мережі за правилом приєднання, вершини з'єднуються з іншими вершинами з певною ймовірністю. Ця ймовірність зазвичай залежить від індивідуальних властивостей кожної вершини, таких як ступінь центральності, а також від загальних параметрів мережі, таких як розмір мережі та її початкові умови.

У масштабно-інваріантних мережах, нові вузли зазвичай приєднуються до найбільш підключених вузлів, тобто вузлів з великою кількістю зв'язків (ступенем). Цей процес називається «приєднанням за перевагою» або «приєднанням за привабливістю». Чим більше зв'язків у вузла, тим більше ймовірність, що до нього приєднається новий вузол. Цей процес можна описати формулою:

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{n} k_j}, \tag{1.5}$$

де $P(k_i)$ – ймовірність того, що нова вершина приєднається до вершини i;

k_i – кількість зв'язків вершини i;

$\sum_{j=1}^{n} k_j$ – загальна кількість зв'язків усіх вершин в мережі.

Ця формула означає, що вершини з більшою кількістю зв'язків мають більшу ймовірність бути обраними для приєднання нової вершини, що призводить до того, що мережа стає більш безмасштабною.

Цей процес веде до того, що масштабно-інваріантні мережі мають велику кількість вузлів з невеликою кількістю зв'язків і декілька вузлів з великою кількістю зв'язків, які називаються «хабами». Ці хаби відіграють важливу роль в структурі мережі, так як вони забезпечують шляхи зв'язку між різними частинами мережі. Ці мережі також відомі своєю стійкістю до випадкового видалення вершин та зв'язків, що робить їх особливо корисними для моделювання складних систем. Такі мережі виявилися досить поширеними в природі та соціальних системах, і вони мають ряд властивостей, які роблять їх важливим об'єктом дослідження в різних науках, включаючи фізику, математику, біологію та соціологію. Наприклад, соціальна мережа, в якій деякі люди мають значно більше друзів, ніж інші, може бути прикладом масштабно-інваріантної мережі. Також масштабно-інваріантні мережі можуть бути знайдені в багатьох інших областях, таких як Інтернет, наука та технології, біологія та інші.

Ця особливість масштабно-інваріантних мереж є важливою для багатьох їх застосувань, оскільки вона дозволяє їм бути більш стійкими до випадкових збурень та більш ефективними для передачі інформації та ресурсів.

Хоча безмасштабні мережі мають багато переваг, таких як висока стійкість до випадкового видалення вузлів, вони також мають кілька недоліків.

Один з найбільш помітних недоліків полягає в тому, що вони не здатні точно відтворити реальні мережі, такі як соціальні мережі. У багатьох реальних мережах, таких як мережі дружби або професійні мережі, вузли мають тенденцію з'єднуватися з іншими вузлами, які мають схожі властивості. Безмасштабні мережі, які створюються з використанням правил приєднання на основі привабливості, не відображають цю властивість реальних мереж.

Крім того, побудова безмасштабних мереж може бути досить складною, оскільки потрібно правильно настроїти правила приєднання для отримання бажаного розподілу ступенів вузлів. Також, дослідження таких мереж можуть бути складними, оскільки вони можуть мати велику кількість вузлів та зв'язків. Одним з прикладів SF-мережі є Інтернет, де великі вузли, такі як сервери, мають багато зв'язків з іншими вузлами, тоді як менші вузли, такі як персональні комп'ютери, мають менше зв'язків. Іншим прикладом є соціальні мережі, де деякі люди мають багато друзів, тоді як більшість людей має менше друзів.

1.5 Постановка задачі дослідження

Метою атестаційної роботи є дослідження впливу механізму приєднання за посередництвом на структуру та динаміку мережі, а також виявлення властивостей таких мереж, які можуть мати практичне застосування.

Завданням дослідження є отримання глибокого розуміння еластичних мереж з приєднанням за посередництвом, вивчення їхньої структури та динаміки, а також виявлення ключових властивостей та можливих застосувань.

Для досягнення цієї мети необхідно:

– ознайомитись з існуючою літературою та дослідженнями, що пов'язані з еластичними мережами та приєднанням за посередництвом;

– розробити математичні моделі та алгоритми, які відображають механізм приєднання за посередництвом в еластичних мережах;

– провести експериментальні дослідження на зразках еластичних мереж для аналізу їхніх структурних та динамічних властивостей;

– проаналізувати отримані дані та визначити ключові характеристики еластичних мереж з приєднанням за посередництвом;

– виявити можливі застосування еластичних мереж та запропонувати вдосконалення для оптимізації їхньої ефективності.

2 АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ І ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛАСТИЧНИХ МЕРЕЖ ТА МЕРЕЖ З ПРИЄДНАННЯМ ЗА ПОСЕРЕДНИЦТВОМ

2.1 Концепція еластичності мереж

Еластичність мережі – це міра її здатності зберігати свою структуру та функціональні властивості після змін у складі або конфігурації вузлів та ребер. Цей показник визначає, наскільки мережа може адаптуватись до змін, зберігаючи свою стійкість та ефективність.

Один з перших дослідників, який вивчав поняття еластичності мереж, був Марк Грановеттер [10]. У своїх роботах він висловлював думку про те, що зв'язки між людьми можуть бути слабкими або сильними, і це може впливати на структуру мережі. Він також розглядав важливість посередницьких вузлів у мережах. Далі розвиток теорії графів та соціальних мереж дозволив розширити дослідження в галузі мережевого аналізу. У 2002 році у науковому журналі «Nature» була опублікована стаття Дункана Дж. Уоттса та Стівена Строгаца «Колективна динаміка малих світів», в якій було виявлено, що багато мереж в природі, включаючи соціальні мережі, мають структуру малих світів.

У 2005 році в журналі «Physical Review Letters» було опубліковано статтю Ладіслава Коцко та Романа Бока «Еластичні мережі та різноманітність посередницьких вузлів» [11], де вони розглядали поняття еластичності мереж та вивчали різноманітність посередницьких вузлів. Також велику роль у розвитку досліджень еластичних мереж з приєднанням за посередництвом відіграли роботи Міхаліса Літтла та Лінка Янга [12], які ввели новий підхід до аналізу цих мереж, використовуючи поняття «betweenness centrality» – показника, що вимірює кількість найкоротших шляхів, що проходять через даний вузол.

Концепція еластичності мереж має велике значення в багатьох галузях, включаючи телекомунікації, соціальні мережі, мережевий аналіз та біологію. У телекомунікаціях, еластичні мережі можуть адаптуватися до змін в трафіку, що дозволяє оптимізувати використання ресурсів та забезпечити більш ефективний обмін даними. Мережевий аналіз використовує концепцію еластичних мереж для дослідження структури та властивостей мережі під час її зміни відповідно до зміни умов функціонування. Це дозволяє досліджувати ефективність та стійкість мережі до змін, що може бути корисним при розробці більш ефективних та стійких мережевих систем. У біології, концепція еластичності мереж застосовується для дослідження механізмів адаптації живих систем до зміни умов середовища. Наприклад, еластичні мережі можуть допомогти дослідити, як мережі нейронів адаптуються до змін умов зовнішнього середовища, таких як втрата частини нейронів або зміна зв'язків між ними. Це може мати важливі застосування у дослідженні різних хвороб, таких як хвороба Паркінсона або аутизм, де порушення в роботі мереж нейронів може відігравати важливу роль.

У соціальних науках, концепція еластичності мереж застосовується для дослідження зміни соціальних структур та поведінки людей відповідно до зміни умов середовища, таких як економічні кризи, зміна технологій або політичні зміни. Це може допомогти вивчити, як люди адаптуються до зміни соціальних умов та які фактори впливають на їхню поведінку.

Еластичні мережі мають низку переваг, таких як:

– адаптивність: еластичні мережі здатні пристосовуватися до змін у середовищі, включаючи зміни в обсязі даних, кількості вузлів, розмірів мережі тощо;

– резистентність до випадкових помилок та відмов: мають більшу стійкість до випадкових помилок, відмов вузлів або збоїв в системі, оскільки вони можуть перебудовуватися та компенсувати втрати;

– масштабованість: мережі можуть легко масштабуватися вгору або вниз, що дозволяє їм працювати з різними розмірами даних або обсягами трафіку без значного зниження продуктивності.

Але в той же час в концепції еластичності мереж існує декілька недоліків, які потрібно враховувати при їх створенні:

– висока складність: розробка і управління еластичними мережами може бути складним завданням. Вимагається спеціалізоване програмне забезпечення та експертиза для налагодження та управління мережею;

– потенційні проблеми безпеки: розширення мережі та зміна її структури можуть створювати нові точки доступу для атак і збільшувати вразливість мережі до кіберзагроз.

Витрати на ресурси є одним з недоліків еластичних мереж. В процесі зміни топології або масштабування мережі можуть знадобитися значні ресурси, такі як обчислювальна потужність, пам'ять, пропускна здатність мережі та інфраструктура. Деякі з основних витрат на ресурси, пов'язані з еластичними мережами, включають:

– обчислювальні ресурси: перестроювання або масштабування мережі може вимагати значних обчислювальних ресурсів для обробки даних, перерахунку маршрутів, зберігання та обробки додаткових вузлів;

– інфраструктура мережі: збільшення розмірів мережі або зміна її структури може вимагати розширення фізичної інфраструктури, такої як сервери, комутатори, маршрутизатори, що веде до додаткових витрат на закупівлю, установку та підтримку обладнання;

– пам'ять та зберігання даних: збільшення обсягу даних в еластичних мережах може вимагати більшого обсягу пам'яті та зберігання для збереження, обробки та аналізу інформації. Це може призвести до витрат на сервери з більшою ємністю дискового простору або системи зберігання даних;

– пропускна здатність мережі: збільшення розмірів мережі або зміна її структури може призводити до збільшення вимог до пропускної здатності мережі. Це може вимагати розширення мережевої інфраструктури та додаткових витрат на мережеве обладнання;

– енергоспоживання: збільшення розмірів та активності мережі може призводити до збільшення енергоспоживання. Еластичні мережі, зокрема мережі хмарних обчислень, можуть вимагати значних обчислювальних ресурсів та енергетичних витрат для забезпечення високої продуктивності та доступності.

Важливо зазначити, що витрати на ресурси в еластичних мережах можуть бути значною мірою залежати від конкретних умов і масштабу розгортання мережі. Досягнення балансу між еластичністю та витратами є важливим завданням для ефективного управління та розробки мережевої інфраструктури.

Розглянемо модель BA-дерева з $m = 1$ як найпростішу. Початкова мережа складається з двох вузлів та одного ребра $G(V, E)$. На кожному кроці додається один вузол та одне ребро до мережі [13-15], отже

$$\begin{aligned} V(t) &= t + 1, \\ E(t) &= t, \\ \Delta V(t) &= 1, \\ \Delta E(t) &= 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Якщо порівняти відносні швидкості зростання кількості вершин $\delta V(t) = \Delta V(t)/V(t)$ та ребер $\delta E(t) = \Delta E(t)/E(t)$:

$$\delta E(t) = 1 \cdot \delta V(t-1). \tag{2.2}$$

Розглянемо інший крайній випадок – повний граф. При тих же початкових умовах ($V(1) = 2$, $E(1) = 1$) вершина, що додається, з'єднується з усіма існуючими, тобто $\Delta E(t) = E(t+1) - E(t) = t+1$, $E(t) = t(t+1)/2$. Таким чином, для повного графа:

$$\delta E(t)=2\cdot\delta V(t\text{-}1). \quad (2.3)$$

Узагальнюючи ці вирази (2.2) та (2.3) на проміжний випадок $1 < \lambda < 2$:

$$\delta E(t) = \lambda \cdot \delta V(t) \cdot \frac{t+1}{t} = \lambda \cdot \delta V(t-1). \quad (2.4)$$

Параметр λ є еластичністю, тобто відношенням відносного приросту кількості ребер до відносного приросту кількості вершин:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{\delta E(t)}{\delta V(t\text{-}1)}. \quad (2.5)$$

Один з важливих і корисних аспектів поняття еластичності полягає в тому, що воно встановлює відповідність між швидкістю зміни кількості ребер $\Delta E(t)$ та поточним середнім значенням цієї кількості $e(t)$. У випадку фіксованого коефіцієнта еластичності λ і використання кількості вершин як міри часу ($\Delta V(t) = 1$), ми можемо записати таке співвідношення:

$$\Delta E(t) = \lambda \frac{E(t)}{V(t)} \cdot \frac{t+1}{t} \approx \lambda \cdot e(t). \quad (2.6)$$

Отже, коли значення $\lambda > 1$, це означає, що кожна нова вершина додає в середньому більше ребер, ніж є в даний момент часу. Важливо відзначити, що в усіх існуючих моделях МІМ це співвідношення дорівнює одиниці ($\lambda = 1$). З (2.5)-(2.6) можна зрозуміти, що кількість ребер в мережі дорівнює:

$$E(V) = \frac{\Gamma(V+\lambda-1)}{\Gamma(V-1)\Gamma(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda\cdot B(V-1,\lambda)} \propto n^{\lambda}. \quad (2.7)$$

Також середня степінь вузлів не є постійною m, а

$$\overline{k}(n) = \frac{L(n)}{n} \propto n^{\lambda-1}. \quad (2.8)$$

Вочевидь, що еластичність може бути використана як міра безмасштабної щільності графа. У відмінність від звичайних мір щільності, таких як середня ступінь вузла та відношення щільності графа, які залежать від масштабу, еластичність залишається незмінною. Це означає, що еластичність може вказати на те, наскільки граф щільний, незалежно від його розмірів.

Крім того, граф з нецілим значенням еластичності можна розглядати як фрактал. Це пов'язано з тим, що кількість ребер у такому графі зростає за степеневим законом при наближенні до нескінченності $E(V) \xrightarrow[v \to \infty]{} CV^{\lambda}$. Такий граф може мати фрактальну властивість, а еластичність можна сприймати як його фрактальну розмірність.

2.2 Аналіз моделі приєднання через посередника

Визначення відстані між вузлами базується на кількості кроків, необхідних для досягнення одного вузла з іншого вузла за допомогою існуючих ребер мережі. Враховується як пряме, так і опосередковане з'єднання вузлів через інші вузли. Середня найкоротша відстань (SP, shortest path) між двома вузлами визначається як мінімальна кількість кроків, необхідних для досягнення одного вузла з іншого вузла. Для всієї мережі можна обчислити середню найкоротшу відстань, що є середнім значенням мінімальної відстані між усіма парами вузлів. Це можна зробити за допомогою формули, яка включає в себе суму мінімальних відстаней між усіма парами вузлів та загальну кількість можливих пар вузлів в мережі:

$$L = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i>j} l_{ij}, \tag{2.8}$$

де n – кількість вузлів;

l_{ij}– найкоротша відстань між вузлами i та j.

Посередництво (betweenees) – це міра того, наскільки важливим є даний вузол у мережі. Вона визначається як кількість найкоротших шляхів між будь-якою парою вузлів, які проходять через даний вузол. Чим більше таких шляхів проходить через вузол, тим важливішим він є для зв'язків між вузлами мережі. Посередництво (b_m) вузла m визначається за формулою:

$$b_m = \sum_{i>j} \frac{\beta(i,m,j)}{B(i,j)}, \tag{2.9}$$

де $B(i,j)$ – загальна кількість найкоротших шляхів між вузлами i та j;

$\beta(i,m,j)$ – кількість найкоротших шляхів між вузлами i та j , що проходять через вузол m.

Мережі з приєднанням за посередництвом, також відомі як мережі малих світів, є типом складних мереж, який відрізняється від моделей Ердеша-Реньї та Барабаші-Альберта. У таких мережах вузли з'єднуються за допомогою невеликої кількості дужок, що йдуть через небагато посередників (рисунок 2.1).

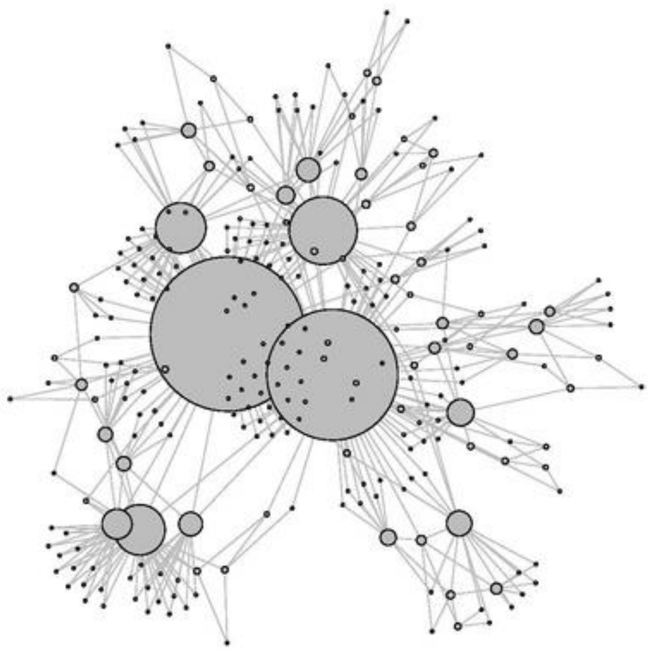

Рисунок 2.1 – Модель приєднання за посередництвом

Мережі з приєднанням за посередництвом, такі як соціальні мережі, виникають, коли нові елементи (вершини або вузли) додаються до існуючої мережі шляхом утворення зв'язків з наявними елементами на основі їх посередницької ролі. Це означає, що нові елементи вибирають вже існуючі елементи, які мають велику кількість зв'язків або важливу роль в мережі.

У моделі приєднання через посередника (англ. MDA) новий вузол приходить з m ребрами, для чого вибирається випадковим чином наявний пов'язаний вузол і новий вузол з'єднується не тільки з цим випадково вибраним вузлом, але також з m його сусідами, вибраними також випадково. Ймовірність $\Pi(i)$, що сусідній вузол i наявного вузла вибирається, дорівнює

$$\Pi(i) = \frac{k_i}{N}\frac{\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{k_j}}{k_i}, \qquad (2.10)$$

де $\frac{\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{k_j}}{k_i}$ дорівнює оберненій величині середнього гармонійного (ОСГ) степенів k_i сусідів вузла i.

Завдяки обширному чисельному дослідженню [10] можна зробити припущення, що при значенні m > 14 середнє значення оберненої суми гармонічних середніх степенів великих N збігається до константи. Це означає, що ймовірність П(і) $\propto k_i$. З цього випливає, що вузол з більшою кількістю зв'язків (степенем) має більшу ймовірність отримати додаткові зв'язки, оскільки їх можна отримати більшим числом шляхів через посередників. Це суттєво втілює інтуїтивну ідею «багаті стають багатшими», яка є основою правила пріоритетного приєднання в моделі Барабаші-Альберта. Тому мережі, побудовані за допомогою моделі MDA, фактично підкоряються правилу пріоритетного приєднання, але це виражено неявним способом.

Виникнення мереж з приєднанням за посередництвом можна пов'язати зі зростанням доступності технологій комунікації, таких як електронна пошта та інтернет-платформи, які дозволяють людям легко знаходити та спілкуватися з іншими людьми на відстані. Це стимулює формування груп та спільнот зі спільними інтересами, що стають частинами мережі з приєднанням за посередництвом. Наприклад, у соціальних мережах, коли новий користувач реєструється, він може обрати вже існуючих користувачів з великою кількістю друзів або великим впливом у мережі для додавання їх у свій список друзів. Це забезпечує збільшення зв'язків між користувачами і формування мережі з приєднанням за посередництвом.

Такі мережі мають свої особливості, такі як «багаті стають ще багатшими» (англ. rich-get-richer) ефект, де елементи з великою кількістю зв'язків мають більше шансів отримати нові зв'язки. Це призводить до нерівномірного розподілу зв'язків в мережі, де деякі елементи стають дуже впливовими, тоді як інші залишаються менш підключеними. Такі мережі з приєднанням за посередництвом широко досліджуються в теорії графів та соціальних науках, оскільки вони дозволяють вивчати процеси формування мереж та їх властивості.

Модель Барабаші-Альберта є однією з моделей для генерації мереж з приєднанням за посередництвом. У цій моделі нові вузли додаються поступово, і кожен новий вузол поєднується з існуючими вузлами з ймовірністю, що пропорційна їхній степені (кількості зв'язків). Це означає, що вузли з більшою кількістю зв'язків мають вищі шанси бути обраними для з'єднання з новим вузлом.

Порівнюючи правила BA і MDA (рисунок 2.2), можна побачити що згідно з (1.4), в моделі BA вхідний вузол знає, що $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = 2$. Отже, $\pi_i = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ відповідно. Згідно з правилом MDA, вхідний вузол з'єднується з вузлом 1 лише у випадку, якщо вузол 2 був обраний як посередник (це станеться з ймовірністю 1/3), і вузол 1 обирається серед сусідів вузла 2 (ймовірність 1/2). Отже, $\pi_1 = \frac{1}{6}$. Також $\pi_3 = \frac{1}{6}$. Вузол 2 обирається, якщо вузол 1 або 3 був обраний як посередник, отже $\pi_2 = \frac{2}{3}$. Як було зазначено в [16], для невеликого значення m правило MDA призводить до супер-переважного приєднання, тобто відбувається ефект «все або нічого». Однак для великого значення m цей ефект замінюється ефектом «часткового переважання», що призводить до формування простих хабів.

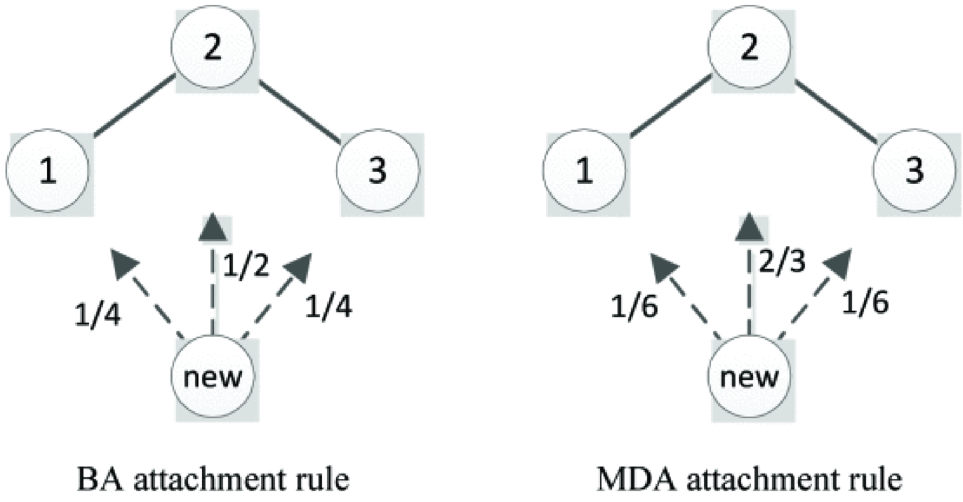

Рисунок 2.2 – Порівняння правил приєднання BA та MDA при m=1

Для більшості реальних мереж правило MDA виглядає набагато більш природним, ніж BA, але воно також має деякі суттєві недоліки. По-перше, параметр m вважається сталою величиною, що явно суперечить властивостям реальних мереж. По-друге, вузол-посередник ніколи не з'єднується самостійно з вхідним вузлом. Іншими словами, посередник є недостатньо вираженим, що не є дуже поширеним у реальних мережах.

Модель Уоттса-Строгаца також є однією з моделей для генерації мереж з приєднанням за посередництвом. У цій моделі вибирається випадковий вузол, а потім з ймовірністю p підключається до іншого вузла, який вибирається випадково. Якщо зв'язок між вузлами вже існує, то нічого не відбувається. Параметр p може бути налаштований для забезпечення різноманітності структури мережі від досить рідкісної до дуже щільної. Якщо у нас є три вузли з m=1 і додається новий вузол, то при застосуванні правила приєднання Уоттса-Строгаца, ймовірність приєднання буде залежати від значення параметра p.

Підсумовуючи, правило MDA є найбільш перспективним для моделювання масштабованих мереж зі степеневим розподілом, але для подолання обмежень, пов'язаних з постійністю кількості доданих зв'язків, тому пропонується застосувати концепцію еластичності до правила MDA.

2.3 Виявлення основних характеристик EMDA мережі

Для виявлення основних характеристик еластичної мережі з приєднанням за посередництвом можна використати наступні показники:

– середня степінь вузлів (Average Degree): обчислити середнє значення ступенів вузлів у мережі. Це дає загальне уявлення про кількість зв'язків, які мають вузли в мережі;

– розподіл ступенів (Degree Distribution): проаналізувати розподіл ступенів вузлів у мережі. Це може допомогти виявити наявність характеристичних особливостей, таких як степінний закон (power law) або інші види розподілу;

– коефіцієнт кластеризації (Clustering Coefficient): визначити кількість зв'язків між сусідніми вузлами та загальну кількість можливих зв'язків між ними. Це дає уявлення про локальну структуру мережі та рівень кластеризації;

– шляхова довжина (Path Length): обчислити середню шляхову довжину між будь-якою парою вузлів у мережі. Це вказує на сполученість мережі та швидкість, з якою інформація може поширюватися в мережі;

– коефіцієнт асортативності (Assortativity Coefficient): виміряти ступінь тенденції вузлів утворювати зв'язки з вузлами зі схожими ступенями. Це допомагає визначити рівень асортативності мережі, тобто чи мають вузли тенденцію з'єднуватися з подібними або відмінними за ступенем вузлами.

Ці показники допоможуть зрозуміти структуру та основні характеристики еластичної мережі з приєднанням за посередництвом.

2.3.1 Вдосконалення EMDA з використанням фактору копіювання

Згідно з проведеним аналізом [17], [18], пропонується змінити правило MDA, використовуючи коефіцієнт копіювання $0 \leq q \leq 1$ – частка сусідів посередника, що зв'язана з прибуваючим вузлом – як керуючий параметр замість m. Посередник завжди з'єднаний, тому він не є прихованим, а явним (рисунок 2.3). Таким чином, m розглядається не як постійна величина, а як

$$m = 1 + q \cdot k_{med}, \quad (2.10)$$

де k_{med} – показник вузла-посередника.

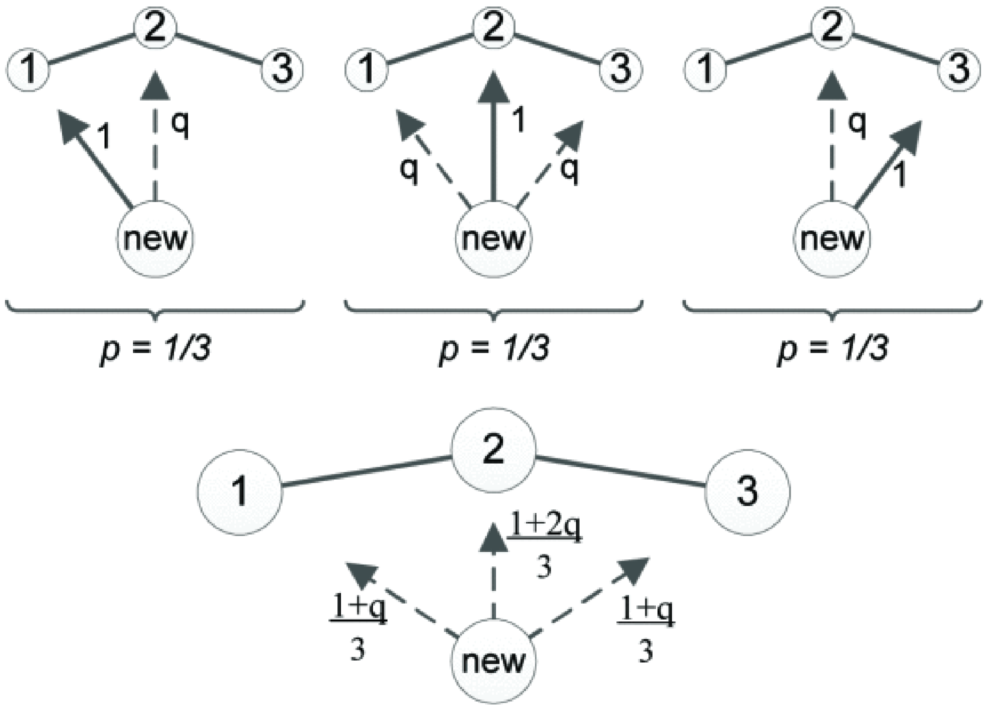

Рисунок 2.3 – Ймовірності приєднання нового вузла за запропонованим еластичним правилом MDA

Згідно з формулою (2.10), очікуване значення кількості вхідних ребер в часі n дорівнює

$$E\{m(n)\} = 1 + q \cdot E\{k_{med}\} = 1 + q \cdot \bar{k}(n) = 1 + q\frac{L(n)}{n}. \quad (2.12)$$

Таким чином, динамічне рівняння загального зростання зв'язків має наступний вигляд:

$$L(n+1) - L(n) = 2\left(1 + q \cdot \frac{L(n)}{n}\right). \quad (2.13)$$

Враховуючи початкові умови $L(1) = 0$, можна отримати залежність загальної кількості зв'язків $L(n)$ і середнього степеню вузлів $\bar{k}(n)$ від розміру мережі n:

$$L(n) = \frac{2}{2q-1}\left(\frac{\Gamma(n+2q)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2q)} - n\right), \quad (2.14)$$
$$\bar{k}(n) = \frac{2}{2q-1}\left(\frac{\Gamma(n+2q)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+2q)} - 1\right),$$

де $\Gamma(x)$ – функція Гамма Ейлера.

Згідно з (2.6)-(2.7) та (2.14), мережа, заснована на модифікованому правилі MDA, є еластичною з фактором еластичності $\lambda = 2q$. Середня степінь вузлів зростає до границі $\overline{k}_{lim} = 2/(1-2q)$ для 0 < q < 0.5, або асимптотична згідно степеневого закону $\overline{k}(n) \propto n^{2q-1}$для 0.5 < q < 1. Спеціальний випадок q = 0.5 буде проаналізовано пізніше.

Для знаходження розподілу вузлів за кількістю зв'язків рівняння динаміки математичного сподівання кількості зв'язків у довільного вузла *i* дорівнює:

$$k_i(n+1) - k_i(n) = \frac{1 + q \cdot k_i(n)}{n}. \quad (2.15)$$

Загальне рішення (2.15) має вигляд:

$$k_i(n) = C_i \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(n)} - \frac{1}{q}. \quad (2.16)$$

Параметри C_i можуть бути знайдені за умови, що очікуване значення степеню вузла i в часі i дорівнює очікуваній кількості доданих зв'язків в часі i-*1* (2.12): $k_i(i) = E\{m(i-1)\}$. Отже,

$$C_i = \frac{1}{2q-1}\left(\frac{\Gamma(i-1+2q)}{\Gamma(i+q)\Gamma(2q)} - \frac{\Gamma(i)}{\Gamma(i+q)} - \frac{1-q}{q}\right). \quad (2.16)$$

Згідно з (2.16), розподіл вузлів за степенями формується значенням q. З урахуванням того, що $i \gg 1$, параметр C_i асимптотично зростає як

$$C_i \propto \begin{cases} \frac{1}{(2q-1)\Gamma(2q)} i^{q-1}, & 0.5 < q < 1 \\ \frac{q-1}{(2q-1)} \cdot i^{-q} & 0 < q < 0.5 \end{cases}. \quad (2.17)$$

Фактично, номер вузла (i) розглядається як ранг за степенем. Таким чином, згідно з (2.17), розподіл рангів асимптотично слідує степеневому закону з масштабним параметром $\beta = min\{q, 1-q\}$. Це відповідає асимптотичному степеневому розподілу вузлів за степенями (1.1) з масштабним параметром

$$\gamma \propto 1 + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{min\{q, 1-q\}}. \quad (2.18)$$

Згідно з (2.18), степінь «молодих» вузлів (тобто вузлів з великою кількістю) слідує степеневому розподілу з масштабним параметром $\gamma > 3$.

Як випливає з аналізу вище, властивості запропонованої моделі безмасштабних мереж на основі модифікованого правила MDA визначаються керуючим параметром q, що представляє ймовірність того, що сусіди посередника будуть з'єднані з новим вузлом. Існують три особливі значення цього параметра, які призводять до особливих моделей.

У випадку $q = 0$, запропоноване правило призводить до зростаючої мережі Callaway [19, 20]. На кожному кроці до мережі додається один вузол, який випадковим чином приєднується до існуючого вузла. Таким чином, $m = 1$ і $L(n) = 2(n - 1)$. Розподіл вузлів за ступенем відповідає не степеневому закону (15)-(16), але логарифмічному розподілу.

$$k_i(n) = 1 + H_{n-1} - H_{i-1} \approx 1 + log(n/i), \quad (2.19)$$

де H_n – це n гармонічне число.

Отже, розподіл ступенів вузлів $p(k)$ не є степеневим законом (2), але експоненційним, тому ця модель не є безмасштабною. У випадку $q = 1$, кожен новий вузол з'єднується з усіма існуючими, утворюючи повну графову структуру.

Нарешті, випадок – $q = 1/2$. Залежності загальної кількості зв'язків $L(n)$ та середнього ступеня вузлів $\overline{k}(n)$ від розміру мережі мають форму, не (2.14), а

$$L(n) = 2n(H_n - 1) \propto 2n \cdot log(n), \quad (2.20)$$
$$\overline{k}(n) = 2(H_n - 1) \propto 2 \cdot log(n).$$

Розподіл вузлів за ступенем слідує степеневому закону (2.17) з

$$Ci = \Gamma(i) \cdot \frac{H_{i-1}+2}{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)} \propto \frac{log(i)}{\sqrt{i}}. \quad (2.21)$$

Детальне вивчення властивостей цієї моделі становить одну з цікавих тем для подальших досліджень.

3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛАСТИЧНИХ МЕРЕЖ З ПРИЄДНАННЯМ ЗА ПОСЕРЕДНИЦТВОМ

3.1 Вибір програмних засобів реалізації

У даному дослідженні буде використовуватись мова програмування Python та її бібліотеки, такі як NetworkX, igraph та інші. Як інтегроване середовище розробки (IDE) було обрано PyCharm. Для візуалізації мереж використовується програмний засіб Gephi, що дозволяє створювати графічні зображення та проводити аналіз мережі.

Мова програмування Python була створена Гвідо ван Россумом у кінці 1980-х років і початку 1990-х років [21]. Вона була розроблена як наступник мови програмування ABC, з метою створення простої і зрозумілої мови програмування, яка б підходила для початківців, але також була потужною для професіоналів. У лютому 1991 року Гвідо ван Россум випустив першу версію мови Python – Python 0.9.0. Початково вона була розроблена для внутрішнього використання у Нідерландах, але після випуску першої версії стала доступною для загальної публіки.

Протягом наступних років Python проходив процес розвитку і вдосконалення. В 2000 році випущена версія Python 2.0, яка внесла деякі суттєві зміни та покращення. Пізніше вийшли інші версії Python 2.x, такі як Python 2.7, яка стала надзвичайно популярною та широко використовуваною. У 2008 році була випущена перша версія Python 3.0, яка включала значні зміни порівняно з попередніми версіями. Оновлення Python 3.x вносило покращення в мову, такі як поліпшення юнікоду, зміни в синтаксисі та інші вдосконалення. Зараз активно розвиваються версії Python 3.x, і їх рекомендується використовувати для нових проектів.

Python став однією з найпопулярніших мов програмування у світі завдяки своїй простоті, ефективності та розширюваності. Вона широко використовується в різних сферах, включаючи веб-розробку, наукові дослідження, аналіз даних, штучний інтелект, автоматизація та розробці ігор. Ось деякі переваги мови програмування Python:

– простота використання: Python має простий і лаконічний синтаксис, який легко зрозуміти і читати. Це дозволяє розробникам писати код швидше і ефективніше;

– широкі можливості: мова має велику кількість стандартних бібліотек, які включають різноманітні функції і інструменти. Це дозволяє розробникам виконувати різноманітні завдання без необхідності в пошуку зовнішніх рішень;

– розширюваність: Python підтримує можливість використання зовнішніх бібліотек і фреймворків, що дозволяє розширити його функціональність і використовувати спеціалізовані інструменти для конкретних завдань;

– спільнота розробників, яка постійно вносить внесок у розвиток мови. Це означає наявність багатьох ресурсів, підтримки та можливість обміну досвідом з іншими розробниками;

– платформонезалежність: Python є кросплатформеною мовою програмування, що означає, що програми, написані на Python, можуть працювати на різних операційних системах, таких як Windows, macOS, Linux тощо;

– інтерактивне середовище, таке як Python Shell або Jupyter Notebook, де розробники можуть виконувати код по одній команді або блоку, що дозволяє швидко перевіряти та експериментувати зі своїм кодом.

Загалом, Python є потужною мовою програмування з великою кількістю функцій і можливостей та вона є ефективним інструментом для широкого спектру завдань.

NetworkX – це бібліотека мови програмування Python, яка надає інструменти для аналізу та моделювання складних мереж. Ця бібліотека дозволяє створювати, маніпулювати та аналізувати мережі різних типів, такі як безмасштабні мережі, мережі з приєднанням за посередництвом, орієнтовані мережі, мультиграфи та інші. NetworkX має вбудовані методи для створення та маніпулювання мережами, включаючи методи для додавання та видалення вузлів та ребер, знаходження шляхів між вузлами, обчислення ступенів вузлів та центральності, знаходження підмножин вузлів та ребер, та багато іншого. Крім того, NetworkX дозволяє імпортувати та експортувати мережі у різних форматах, включаючи GraphML, GEXF, GML та інші.

NetworkX є дуже популярною бібліотекою для аналізу мереж в середовищі Python. Вона дозволяє вченим та інженерам легко створювати, маніпулювати та аналізувати мережі з великою кількістю вузлів та ребер, що робить її ідеальним інструментом для дослідження складних мереж у багатьох галузях, включаючи соціологію, біологію, фізику та інші.

PyCharm є інтегрованою середовищем розробки (IDE) для мови програмування Python, розробленим компанією JetBrains. Ось деякі переваги використання PyCharm:

– повна функціональність: PyCharm надає широкий набір інструментів для розробки на Python, включаючи автодоповнення коду, перевірку синтаксису, рефакторинг, налагодження, керування версіями і багато іншого. Він підтримує також інші технології, що використовуються разом з Python, такі як HTML, CSS, JavaScript та SQL;

– легке налаштування: додаток має інтуїтивний і зручний інтерфейс користувача, який дозволяє швидко налаштовувати і настроювати проект. Він також підтримує різні кольорові схеми, шрифти і налаштування, щоб забезпечити комфортну робочу обстановку;

– розширені можливості: PyCharm має велику кількість плагінів і розширень, що дозволяють розширити його функціональність і використовувати його для різних типів проектів. Наприклад, плагіни для розробки веб-додатків, аналізу даних, роботи з базами даних тощо;

– підтримка проектів різних масштабів від невеликих скриптів до великих корпоративних проектів. Він надає засоби для керування залежностями, віртуальними середовищами, тестуванням, профілюванням та іншими завданнями, що стосуються розробки програмного забезпечення;

– підтримка інструментів розробки: PyCharm інтегрується з популярними інструментами розробки, такими як системи контролю версій Git, системи збирання проектів (наприклад, Maven або Gradle), інструменти для розробки веб-додатків (наприклад, Django або Flask) і багато інших. Це спрощує роботу з різними інструментами і дозволяє зосередитися на розробці програмного забезпечення;

– спільнота та документація: Python і PyCharm мають велику активну спільноту розробників, яка надає підтримку, допомогу та обмін знаннями. Також існує багата документація, посібники та онлайн-ресурси, які допомагають вивчити й використовувати PyCharm ефективно.

Загалом, PyCharm є потужним інструментом для розробки на мові програмування Python з багатьма перевагами, які сприяють зручності, продуктивності та якості роботи розробників.

Gephi – це візуальний інструмент для аналізу та візуалізації графів та мереж. Це безкоштовний та відкритий програмний засіб, що дозволяє аналізувати великі мережі та візуалізувати їх у вигляді графів, діаграм, карт і т.д.

Gephi надає користувачеві багато інструментів для візуалізації та аналізу мереж, включаючи:

– можливість імпортувати дані з різних форматів файлів, таких як CSV, GDF, GML, GraphML, та ін.;

– різні алгоритми розкладання графів, такі як Fruchterman-Reingold, ForceAtlas2, та ін., що дозволяють візуалізувати графи у вигляді плоских або тривимірних діаграм;

– широкий спектр інструментів для аналізу мереж, такі як вимірювання центральності, класифікації вершин, виявлення спільнот та ін.;

– можливість налаштування вигляду графа, включаючи кольори, форми, розміри вершин та ребер, шрифти, тощо;

– функції експорту графів у різні формати, такі як PDF, SVG, PNG, та ін.

Gephi є потужним інструментом для аналізу та візуалізації мереж, і він може бути використаний у багатьох різних галузях, таких як соціологія, біологія, комп'ютерні науки та інші.

Таким чином, обрані методи та інструменти дослідження, а також вибрані джерела даних є обґрунтованими та дозволять провести достатньо повне та детальне дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом.

3.2 Генерація еластичних мереж з приєднанням за посередництвом

Створимо алгоритм побудови еластичної мережі з приєднанням за посередництвом на принципі переважного приєднання. Це означає, що ймовірність того, що новий вузол k приєднається до існуючого вузла i, залежить від кількості зв'язків у цьому існуючому вузлі (s_i):

$$p_i(k) = \frac{s_i}{2(k-1)}. \qquad (3.1)$$

Чим більше зв'язків у вузлі i, тим вища ймовірність приєднання нового вузла до нього. Це означає, що вузли з великою кількістю зв'язків стають більш привабливими для нових вузлів, що приєднуються до мережі. Таке правило переважного приєднання сприяє зростанню безмасштабної мережі, де деякі вузли набувають значно більше зв'язків, ніж інші. Це призводить до структури з характеристиками безмасштабності, такими як наявність вузлів з високим ступенем вузла (кількістю зв'язків) і короткими шляхами між вузлами.

Заініціалізуємо мережу, включивши кілька початкових вузлів. Знайдемо, скільки нових вузлів необхідно додати до мережі. Візуалізуємо розподіл рангів ступенів вузлів (рисунок 3.1). Для кожного нового вузла виконуються такі кроки:

– обчислюється накопичений ступінь всіх існуючих вузлів у мережі;

– генерується випадкове число від 0 до накопиченого ступеня;

– проходяться по всіх існуючих вузлах і виберіть посередника на основі його ступеня, якщо ймовірність вибору певного вузла в якості посередника визначається формулою: P(посередник) = ступінь вузла / накопичений ступінь;

– порівнюється випадкове число, згенероване раніше, з накопиченим ступенем кожного вузла, щоб визначити посередника;

– приєднується новий вузол до обраного посередника;

– оновлюється ступінь вибраного посередника та накопичений ступінь.

Повторюємо цей процес для всіх нових вузлів, які мають бути додані до мережі. Даний алгоритм був описаний мовою Python.

Лістинг 3.1 – Програмний код EMDA з переважним приєднанням

```
import networkx as nx
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

M = 100  # Number of networks
N = 4096  # Number of nodes

# Parameters for m = 1
m1 = 1

# Parameters for m = 5
m5 = 5

power_law_exponents_m1 = []
# Store power law exponents for m = 1
power_law_exponents_m5 = []
```

Продовження лістингу 3.1

```
# Store power law exponents for m = 5
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

for i in range(M):
    network_m1 = nx.barabasi_albert_graph(N, m1)

    # Calculate the degree of each node for m = 1
    degree_sequence_m1 = [d for n, d in
network_m1.degree()]

    # Sort the degree sequence in descending order for m =
1
    degree_sequence_m1.sort(reverse=True)

    # Calculate the ranks for m = 1
    ranks_m1 = np.arange(1, N + 1)

    # Fit a power law to the degree distribution for m = 1
and calculate the exponent
    fit_m1 = np.polyfit(np.log(ranks_m1),
np.log(degree_sequence_m1), deg=1)
    power_law_exponent_m1 = -fit_m1[0]
    power_law_exponents_m1.append(power_law_exponent_m1)

    # Generate a random scale-free network for m = 5
    network_m5 = nx.barabasi_albert_graph(N, m5)

    # Calculate the degree of each node for m = 5
    degree_sequence_m5 = [d for n, d in
network_m5.degree()]

    # Sort the degree sequence in descending order for m =
5
    degree_sequence_m5.sort(reverse=True)

    # Calculate the ranks for m = 5
    ranks_m5 = np.arange(1, N + 1)

    # Fit a power law to the degree distribution for m = 5
and calculate the exponent
    fit_m5 = np.polyfit(np.log(ranks_m5),
np.log(degree_sequence_m5), deg=1)
    power_law_exponent_m5 = -fit_m5[0]
    power_law_exponents_m5.append(power_law_exponent_m5)

    # Plot the degree range in log-log scale for m = 1 and
m = 5
    ax.loglog(ranks_m1, degree_sequence_m1, 'b.',
alpha=0.2)
    ax.loglog(ranks_m5, degree_sequence_m5, 'r.',
alpha=0.2)
```

Продовження лістингу 3.1

```
#Calculate the average power law exponents for m = 1 and m
= 5
avg_exponent_m1 = np.mean(power_law_exponents_m1)
avg_exponent_m5 = np.mean(power_law_exponents_m5)

# Set plot titles and labels
ax.set_title(«Degree Range for m = 1 and m = 5»)
ax.set_xlabel(«Rank (log)»)
ax.set_ylabel(«Degree (log)»)
# Show the plot
```

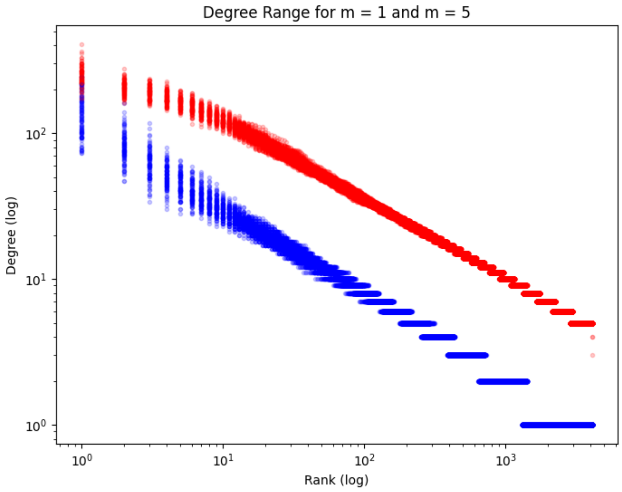

Рисунок 3.1 – Зображення розподілу рангів ступенів вузлів при переважному приєднанні

Спробуємо згенерувати еластичну мережу за допомогою моделі Барабаші-Альберт для двох різних значень параметра *m* (*m* = 1 та *m* = 5). Для кожного значення *m* згенеруємо 100 випадкових мереж з 4096 вузлами. Знайдемо розподіл ступенів вузлів для кожної мережі, відсортуємо послідовність ступенів за спаданням і обчислимо ранги вузлів. Код підганяє степінний закон до розподілу ступенів, виконуючи лінійну регресію для логарифмів рангів і ступенів. Він визначає нахил побудованої лінії, який представляє показник степеневого закону.

Діапазон ступенів для кожного значення *m* відображається на графіку у логарифмічній шкалі. Кожна точка на графіку представляє ранг і ступінь вузла (рисунок 3.2). Точки відображаються з низькою прозорістю (alpha=0.2), щоб показати накладення розподілу вузлів. На завершення, код обчислює середній показник степеневого закону для кожного значення *m*, обчислюючи середнє значення показників з лінійної регресії.

Лістинг 3.2 – Програмний код EMDA з використанням моделі Барабаші-Альберт

```
import networkx as nx
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

M = 100  # Number of networks
N = 4096  # Number of nodes

# Parameters for m = 1
m1 = 1
beta1 = 1.8335

# Parameters for m = 5
m5 = 5
beta5 = 0.85992

power_law_exponents_m1 = []  # Store power law exponents
for m = 1
power_law_exponents_m5 = []  # Store power law exponents
for m = 5

# Create a combined figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

for i in range(M):
    # Generate a random scale-free network for m = 1
    network_m1 = nx.barabasi_albert_graph(N, m1)

    # Calculate the degree of each node for m = 1
    degree_sequence_m1 = [d for n, d in
network_m1.degree()]

    # Sort the degree sequence in descending order for m =
1
    degree_sequence_m1.sort(reverse=True)

    # Calculate the ranks for m = 1
    ranks_m1 = np.arange(1, N + 1)
```

Продовження лістингу 3.2

```
        # Fit a power law to the degree distribution for m = 1
and calculate the exponent

        fit_m1 = np.polyfit(np.log(ranks_m1),
np.log(degree_sequence_m1), deg=1)
        power_law_exponent_m1 = -fit_m1[0]
        power_law_exponents_m1.append(power_law_exponent_m1)

        # Generate a random scale-free network for m = 5
        network_m5 = nx.barabasi_albert_graph(N, m5)

        # Calculate the degree of each node for m = 5
        degree_sequence_m5 = [d for n, d in
network_m5.degree()]

        # Sort the degree sequence in descending order for m =
5
        degree_sequence_m5.sort(reverse=True)

        # Calculate the ranks for m = 5
        ranks_m5 = np.arange(1, N + 1)

        # Fit a power law to the degree distribution for m = 5
and calculate the exponent
        fit_m5 = np.polyfit(np.log(ranks_m5),
np.log(degree_sequence_m5), deg=1)
        power_law_exponent_m5 = -fit_m5[0]
        power_law_exponents_m5.append(power_law_exponent_m5)

        # Plot the degree range in log-log scale for m = 1
        ax.loglog(ranks_m1, degree_sequence_m1, 'b.',
alpha=0.2)

        # Plot the degree range in log-log scale for m = 5
        ax.loglog(ranks_m5, degree_sequence_m5, 'r.',
alpha=0.2)

    # Calculate the average power law exponents for m = 1 and
m = 5
    avg_exponent_m1 = np.mean(power_law_exponents_m1)
    avg_exponent_m5 = np.mean(power_law_exponents_m5)


    # Set plot title
    ax.set_title(«Rank distribution of nodes degree for m = 1
and m = 5»)
    ax.set_xlabel(«log2(Range)»)
    ax.set_ylabel(«log2(Degree)»)

    #Show the plot
    plt.show()
```

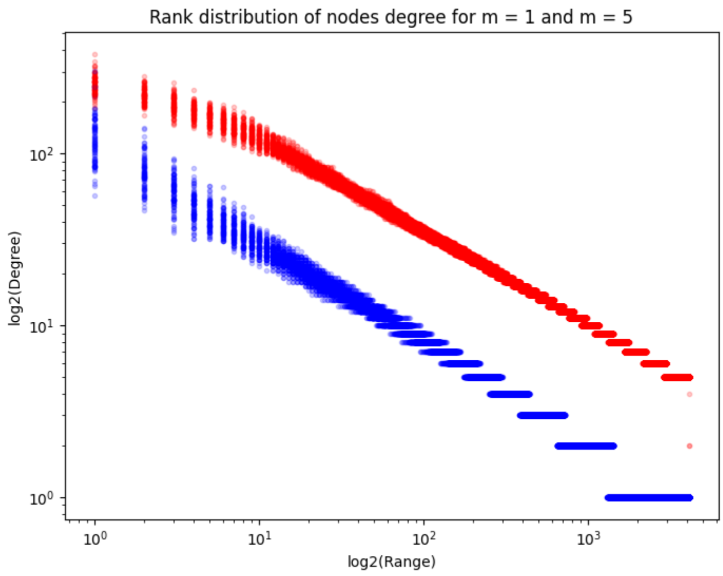

Рисунок 3.2 – Зображення розподілу рангів ступенів вузлів за допомогою моделі BA

Обидва коди аналізують розподіл ступенів вузлів у еластичних мережах, але використовують різні моделі для їх генерації та методи аналізу.

У першому випадку використовується модель переважного зчеплення, де нові вузли приєднуються до наявних випадково, з ймовірністю, пропорційною до їх ступеня. Код генерує одну мережу з 4096 вузлами та обчислює ранги та ступені вузлів. Він також виконує побудову лінійної регресії логарифмів рангів і ступенів для визначення показника степеневого закону. Результати відображаються на графіку.

В другому випадку використовується модель Барабаші-Альберта з параметрами $m = 1$ і $m = 5$ для генерації 100 випадкових мереж з 4096 вузлами. Він обчислює ранги вузлів та ступені кожної мережі, після чого побудовує лінійну регресію логарифмів рангів і ступенів для визначення показників степеневого закону. Результати відображаються на графіках, де кожна точка представляє ранг і ступінь вузла.

Порівнюючи результати, можна зробити такі висновки:

– обидва коди демонструють степеневий закон у розподілі ступенів вузлів у безмасштабних мережах. Графіки в обох випадках показують лінійну залежність в логарифмічній шкалі;

– значення показників степеневого закону можуть відрізнятися для різних значень параметра m. Наприклад, у першому коді якщо параметр перевагового зчеплення налаштований вірно, можна отримати близькі значення показників степеневого закону в обох кодах. Однак, конкретні результати будуть залежати від конкретних параметрів моделей та випадкових факторів при генерації мереж. У другому коді, для $m = 1$ можна отримати інший показник в порівнянні з $m = 5$.

Загалом, обидва коди демонструють розподіл ступенів вузлів у безмасштабних мережах та їх степеневий закон. Однак, вони використовують різні моделі для генерації мереж та аналізують їх за допомогою різних методів.

3.3 Моделювання структури та дослідження впливу параметрів на структуру мережі

Моделювання структури еластичної мережі з приєднанням за посередництвом дозволяє дослідити вплив різних параметрів на формування мережі та її структуру. Ця модель поєднує концепції еластичної мережі та приєднання за посередництвом для створення мережі зі складною топологією.

Один з основних параметрів цієї моделі – це параметр еластичності, який визначає ступінь впливу посередництва на приєднання нових вузлів. Інші параметри, такі як кількість вузлів, розмір мережі та ймовірності приєднання, також можуть впливати на структуру мережі.

Шляхом зміни значень цих параметрів можна досліджувати наступне:

– вплив параметра еластичності на кількість зв'язків в мережі та розподіл ступенів вузлів;

– вплив кількості вузлів на загальну структуру мережі, наприклад, щільність зв'язків або середній шлях;

– вплив розміру мережі на її топологію, таку як кількість компонент зв'язності або кластеризація;

– вплив ймовірності приєднання на формування нових зв'язків та еволюцію мережі з часом.

Аналізуючи ці параметри та їх взаємодію, можна отримати глибше розуміння процесів, які відбуваються в еластичних мережах з приєднанням за посередництвом (рисунок 3.3). Це може допомогти в розумінні природи та функціонуванні реальних мереж, таких як соціальні мережі, мережі залізниць або інформаційні мережі.

Лістинг 3.3 – Програмний код EMDA для знаходження впливу параметрів на мережу

```
import networkx as nx
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import  random

# Значення параметрів
N_values = [100, 500, 1000]  # Розмір мережі
m_values = [1, 3, 5]  # Кількість зв'язків на кожен крок
elasticity_values = [0.1, 0.5, 1.0]  # Параметр 
еластичності

# Зберігання результатів
avg_degrees = []
avg_cluster_coeffs = []


def elastic_mediation_network(N, m, elasticity):
    network = nx.Graph()
    network.add_node(0)

    for i in range(1, N):
        nodes = list(network.nodes())
        degrees = [network.degree(node) for node in nodes]
        probabilities = [(degree + elasticity) / (2 * m + 
elasticity * len(network)) for degree in degrees]
```

Продовження лістингу 3.3

```
            new_node = random.choices(nodes, probabilities)[0]
            network.add_edge(i, new_node)
        return network

    # Проходимо по комбінації параметрів
    for N in N_values:
        for m in m_values:
            for elasticity in elasticity_values:
                # Створення мережі
                network = network(N, m, seed=0)

                # Обчислення середнього ступеня вузлів
                degrees = [degree for node, degree in
network.degree()]
                avg_degree = np.mean(degrees)
                avg_degrees.append(avg_degree)

                # Обчислення середнього кластерного
коефіцієнта
                cluster_coeffs =
nx.clustering(network).values()
                avg_cluster_coeff =
np.mean(list(cluster_coeffs))
                avg_cluster_coeffs.append(avg_cluster_coeff)

                # Візуалізація мережі
                plt.figure()
                pos = nx.spring_layout(network)
                nx.draw(network, pos, with_labels=False,
node_size=30)
                plt.title(f»N={N}, m={m},
elasticity={elasticity}»)

    # Виведення результатів
print(«Середній ступінь вузлів:»)
    print(avg_degrees)
    print(«Середній кластерний коефіцієнт:»)
    print(avg_cluster_coeffs)

    # Показ графіків
    plt.show()
```

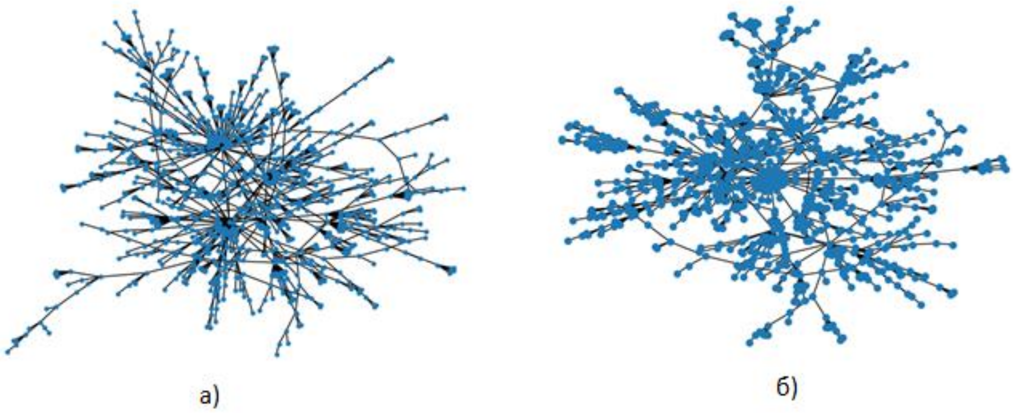

Рисунок 3.3 – Візуалізація EMDA з значеннями параметрів: а) N = 500, m = 3; б) N = 500, m = 5

Таблиця 3.1 – Порівняння значень середнього ступеня вузлів і кластерного коефіцієнта при змінах параметрів

№	Середній ступінь вузлів	Середній кластерний коефіцієнт
1	1.98	0.20867432999590
2	5.82	0.19520136949340727
3	9.5	0.059114569317329155
4	1.996	0.06387091546589424
5	5.964	0.03627333292057707
6	9.9	0.03782549888987157
7	5.982	0.039114569317329155
8	9.95	0.531201349320727

При зміні впливу параметрів N, m та *elasticity* можна спостерігати різні ефекти:

– збільшення значення N: збільшення кількості вузлів N зазвичай призводить до зменшення середнього ступеня вузлів. Це пов'язано з тим, що при більшому N кількість зв'язків розподіляється на більшу кількість вузлів, що знижує середній ступінь;

– збільшення значення *m*: збільшення кількості зв'язків *m* на кожен крок зазвичай призводить до збільшення середнього ступеня вузлів. Це означає, що кожен новий вузол додає більше зв'язків, що призводить до збільшення середнього ступеня;

– збільшення значення *elasticity*: збільшення параметра еластичності *elasticity* може мати різні ефекти на середній ступінь вузлів та кластерний коефіцієнт. Вплив залежить від конкретної реалізації моделі. Зазвичай, збільшення *elasticity* сприяє збільшенню середнього ступеня, оскільки воно збільшує ймовірність приєднання до вузлів з великим ступенем. Однак, це може також зменшити кластерний коефіцієнт, оскільки нові зв'язки можуть створюватись між вузлами, що вже мають велику кількість зв'язків, і вузлами, які ще не мають зв'язків з іншими вузлами.

ВИСНОВКИ

Досліджено проблему моделювання безмасштабних мереж. Виявлено, що властивості таких мереж значно залежать від правил, за якими нові вузли приєднуються до мережі. Оглянуті різні моделі безмасштабних мереж та відповідні правила приєднання. Найпоширенішою моделлю є модель Барабаші-Альберт, яка використовує правило переважного приєднання. Однак, це правило передбачає наявність інформації про всі вузли мережі, зокрема їх ступені. У випадку правил приєднання на основі посередництва, така інформація не потрібна, оскільки вибір вузла-посередника відбувається випадковим чином. Тому правила приєднання на основі посередництва є більш природними та відповідають реальним мережам, що є їх перевагою. Правило приєднання за посередництвом має безсумнівну перевагу через його непряме використання статистики вузлів. Однак, використання постійної кількості вхідних зв'язків як параметра контролю обмежує можливості такої моделі. Застосування коефіцієнта копіювання як параметра контролю дозволяє генерувати моделі мереж, які поєднують ключові переваги моделі приєднання за посередництвом та еластичні моделі, такі як різні відносні швидкості зростання для зв'язків та вузлів. Застосування різниці відносних швидкостей зростання зв'язків та вузлів дозволяє генерувати масштабовані моделі для щільних мереж. Крім того, коефіцієнт копіювання є внутрішньою характеристикою мережі, тоді як коефіцієнт еластичності є зовнішньою.

Структура еластичних мереж з приєднанням за посередництвом відображає властивості багатьох реальних мереж, таких як соціальні мережі, мережі зв'язків між сайтами та ін. Модель еластичної мережі дозволяє моделювати процес росту мережі, де нові вузли приєднуються з відповідним ймовірнісним розподілом на основі існуючих зв'язків в мережі. Еластична мережа з приєднанням за посередництвом може мати маленький світовий діаметр, що означає, що будь-які два вузли у мережі зазвичай можуть бути з'єднані коротким шляхом через кілька проміжних вузлів. Модель дозволяє керувати параметрами мережі, такими як розмір мережі, кількість зв'язків на кожен крок та еластичність, що дозволяє вивчати їх вплив на структуру мережі.

Одним з недоліків еластичних мереж з приєднанням за посередництвом є те, що вони можуть бути чутливими до початкових умов. Незначні зміни у початковому стані мережі можуть призвести до значних змін у структурі мережі. Модель не враховує інших факторів, які можуть впливати на розвиток мережі, таких як випадкові події, обмеження ресурсів або взаємодія зовнішніх факторів. Тому вона може бути спрощеною моделлю реальних мереж.

Дослідження створення еластичних мереж з приєднанням за посередництвом дозволило нам розглянути основні переваги та недоліки цієї моделі. Еластичні мережі відображають важливі структурні властивості реальних мереж та дозволяють моделювати процес росту мережі. Вплив параметрів, таких як розмір мережі, кількість зв'язків на кожен крок та еластичність, може бути вивчений для розуміння їх впливу на структуру мережі. Однак, важливо враховувати, що модель має деякі обмеження, такі як чутливість до початкових умов та відсутність управління підмережами. Враховуючи ці переваги та недоліки, еластичні мережі з приєднанням за посередництвом є корисним інструментом для вивчення структури мереж та їх розвитку.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Euler, L. The solution of a problem relating to the geometry of position. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. London, 1741, Vol. 8, P. 128-140.

2. Колмогоров А.Н., Журбенко Г.И., Прохоров А.В. Введення в теорію ймовірностей. Москва, 1982, С. 160.

3. Watts D.J., Strogatz, S.H. Collective dynamics of small world networks. *Nature*. London, 1998. Vol. 393, P. 440-442.

4. Erdős P., Rényi A. On Random Graphs I. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, Budapest 1959. Vol 6, P. 290-297.

5. Barabási A.L., Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, Washington DC, 1999. Vol. 286, P. 509-512.

6. Barabási A.L. Linked: the new science of networks. *Perseus Publishing*. Cambridge MA, 2002.

7. Barabási A.L., Albert R. Statistical mechanics of complex networks. *Physical Review*. Indiana, 2001. Vol. 75, P. 42-97.

8. Newman M.E. The structure and function of complex networks. *SIAM review*. Oxford, 2003. Vol. 45, P. 167-256.

9. Newman M. E. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*. Oxford, 2005. Vol. 46, P. 323-351.

10. Granovetter M.S. The Strength of Weak Ties. *American Journal of Sociology*. Chicago IL, 1973. Vol. 78, P. 1360-1380.

11. Kočko L., Bökö R. Modeling the Topology of the Semantic Space. *Physical Review Letters*. Indiana 2005. Vol. 94, P. 28-70.

12. Prountzos D., Pingali K. Betweenness Centrality: Algorithms and Implementations. *ACM SIGPLAN Notices*. Texas, 2013. Vol. 48. P. 35-46.

13. Shergin V.L., Chala L.E. The concept of elasticity of scale-free networks. 4th International Scientific-Practical Conference Problems of

Infocommunications. *Science and Technology (PIC S&T)*. Kharkov, 2017, P. 257-260.

14. Shergin V.L., Chala L.E. Udovenko S.G. Fractal dimension of infinitely growing discrete sets. 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelecrtronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). Slavske, 2018, P. 259-263.

15. Shergin V.L., Chala L.E. Udovenko S.G. Assortativity Properties of Barabási-Albert Networks. *In Data-Centric Business and Application*. Springer, 2021.

16. Shergin V.L., Chala L.E. Udovenko S.G, Pogurskaya M. Elastic Scale-Free Networks Model Based on the Mediaton-Driven Attachment Rule. *IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. Lviv, 2020.

17. Hassan M.K., Islam L., Haque S.A. Degree distribution, rank-size distribution, and leadership persistence in mediation-driven attachment networks. *Physica A: Stat. Mech. and its Appl*. 2017. Vol. 469. P. 23–30.

18. Hassan M.K., Islam L. Arefinul Haque Syed Degree distribution rank-size distribution and leadership persistence in mediation-driven attachment networks, *Physica A*. 2017. Vol. 469, P. 23-30.

19. Noldus R., Van Mieghem P. Assortativity in complex networks, J. *Complex Networks*. 2015. Vol. 3, P. 507-542.

20. Callaway D.S., Newman M.E.J., Strogatz S.H., Watts D.J. Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs. *Physical Review Letters*. Indiana, 2000. Vol. 85, P. 54-71.

21. Van Rossum G. History of Python. *Python Software Foundation*. 2000. URL: https://www.artima.com/articles/the-making-of-python (дата звернення: 17.05.2023)

ДОДАТОК А

Відомість кваліфікаційної роботи

Позначення	Найменування	Дод. відомості
	Текстові документи	
1.	Пояснювальна записка	67 с.
	Інші документи	
2.	Презентаційні матеріали	16 плакатів

.	.	Прізвище та ініціали.	Підп.	Дата			
Розробив		Федченко К.С.			Дослідження еластичних мереж з приєднанням за посередництвом	Шифр групи	Код напр./спец.
Перевірив		Удовенко С.Г				СШІздм-21-1	122
Н.контр.		Малєєва І.А.				ХНУРЕ кафедра ШІ	
Затв.		Філатов В.О.					