



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Ткаленку Микиті Сергійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Наближення розривної 2D функції за допомогою інтерлінації та розбиття області визначення на елементи з криволінійною стороною

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель розривного 2D тіла

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Першина Ю.І.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 62 с., 16 рис., 1 дод., 13 джерел.

РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, РОЗРИВНА ІНТЕРЛІНАЦІЯ, РОЗРИВНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, СПЛАЙН, ТРАПЕЦІЄПОДІБНІ ЕЛЕМЕНТИ, ЯВИЩЕ ГІББСА.

Об'єкт дослідження – процес наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами.

Мета роботи – створення та тестування алгоритму відновлення функції двох змінних, якщо про неї відомі її сліди вздовж заданої системи ліній, використовуючи для цього новий інформаційний оператор – інтерлінацію та розбиття області на прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною.

Методи дослідження – методи теорії наближення функцій багатьох змінних, методи наближення операторами сплайн-інтерлінації функції двох змінних.

В кваліфікаційній роботі наведено аналітичний огляд літературних джерел, присвячених предметній області. Зроблено вибір методу розв'язання поставленої задачі, суттєво використовуючи для цього тип експериментальних даних (проекції вздовж системи ліній). Розроблено та реалізовано алгоритм відновлення розривної функції, повністю покритої областю, яка розбивається дослідником на прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною на основі інтерлінації функцій. Алгоритм протестований на двох функціях.

## ABSTRACT

Introductory note: 62 pages, 16 figures, 1 appendixes, 13 sources.

DISCONTINUOUS FUNCTION, DISCONTINUOUS INTERLINATION, DISCONTINUOUS INTERPOLATION, SPLINE, TRAPEZIOUS ELEMENTS, GIBBS PHENOMENON.

Object of research – the process of approximating discontinuous functions of two variables by discontinuous splines.

Purpose of work – creating and testing an algorithm for restoring a function of two variables, if its traces along a given system of lines are known about it, using for this a new information operator – interlination and dividing the area into rectangular trapezoidal elements with one curved side.

Methods of research – methods of the theory of functions approximation of many variables, methods of approximation by spline-interlination operators of two variables functions.

This work includes an analysis of literary sources devoted to methods and algorithms for restoring discontinuous functions. The method of solving the problem was chosen based on a review of existing experimental data (projections along systems of planes). An algorithm for the reconstruction of the discontinuous internal structure of a three-dimensional body based on interlination

The qualification work provides an analytical review of literary sources devoted to the subject area. The method of solving the given problem was chosen, essentially using the type of experimental data (projections along a system of lines) for this purpose. An algorithm for restoring a discontinuous function, completely covered by an area that is divided by the researcher into rectangular trapezoidal elements with one curved side based on the functions interlination, is developed and implemented. The algorithm is tested on two functions.

## ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів .....	8
Вступ .....	9
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження .....	11
1.1 Математичне моделювання розривних об'єктів .....	11
1.2 Відновлення розривних функцій розривними сплайнами апроксимаційного типу методом найменших квадратів та виявлення точок розриву .....	14
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....	19
1.4 Постановка задач дослідження .....	21
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	22
2.1 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерполяційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи .....	22
2.2 Наближення розривної функції двох змінних розривними апроксимаційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи .....	26
2.3 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерполяційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною .....	28
2.4 Наближення розривної функції двох змінних розривними апроксимаційними сплайнами, використовуючи прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною .....	31
2.5 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи .....	32
2.6 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами, використовуючи трикутні елементи	

	7
з однією криволінійною стороною .....	41
Висновки за розділом 2 .....	45
3 Програмна реалізація .....	47
3.1 Система комп'ютерної математики MathCad .....	47
3.2 Алгоритм розв'язання задачі відновлення розривної 2D внутрішньої структури об'єкта, використовуючи криволінійне розбиття області покриття об'єкта .....	48
3.3 Опис програми .....	49
Висновки за розділом 3 .....	49
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз .....	51
4.1 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції двох змінних розривним сплайном інтерлінаційного типу при розбитті області покриття на трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною .....	51
4.2 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції двох змінних розривним сплайном інтерполяційного типу при розбитті області покриття на трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною .....	54
Висновки за розділом 4 .....	56
Висновки .....	57
Перелік джерел посилання .....	58
Додаток А Лістинг програми .....	60

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

КТ – комп’ютерна томографія;

$\forall$  – квантор загальності “для всіх”;

$R$  – множина дійсних чисел  $x \in R \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$ ;

$R^n$  – евклідов  $n$ -вимірний простір  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \Leftrightarrow x_i \in R, i = \overline{1, n}$ ;

$\delta_{ij}, \delta_{i,j}$  – символ Кронекера,  $\delta_{i,i} = 1, \delta_{i,j} = 0$ , якщо  $i \neq j$ ;

$C(G)$  – простір функцій, неперервних у  $G \in R^n$ ;

$C^r(G)$  – простір функцій, неперервних у  $G \in R^n$  разом із частинними похідними порядку  $r$ ;

$C^{(r,m)}(G)$  – простір функцій, неперервних у  $G \subset R^3$  разом із частинними похідними порядку  $r$  по першій змінній,  $m$  – по другій;

$\lim_{x \rightarrow x^\pm} f(x)$  – правостороння або лівостороння границі функції  $f(x)$  при

$x \rightarrow x_i + 0$  або  $x \rightarrow x_i - 0$ ;

$Lf(x)$  – оператор  $L$  діє на функцію  $f(x)$ ;

$f^{+,+}(x_i y_j)$  – одностороння границя функції  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow x_i + 0$ ,  
 $y \rightarrow y_j + 0$ .

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Багато практичних задач, які виникають в різних галузях науки, описуються функціями, що містять особливості, в тому числі розриви або стрибки. Цей факт говорить про те, що треба вміти працювати з функціями, які мають розриви або стрибки, наприклад, при моделюванні дискретних процесів, аналізі сигналів або вивченні явищ, де величини змінюються стрибкоподібно. Відновлення таких функцій вимагає застосування методів, що дозволяють подолати розриви та отримати наближення до функцій без порушень їхньої природи. З цього виходить, що актуальними є методи та алгоритми наближення внутрішньої структури тіла, внутрішня структура якого потерпає розриви.

У математиці зазвичай використовуються методи інтерполяції або апроксимації для побудови неперервних функцій, які максимально наближаються до заданих даних або функцій з розривами. Серед таких методів можна виділити: інтерполяцію за допомогою сплайн-функцій (це метод забезпечує добрий компроміс між точністю відновлення та гладкістю функції); метафункції – використовуються для побудови загальних моделей функцій з розривами, де розриви можна обробляти окремо; моделі регресії та нейронні мережі – сучасні методи відновлення функцій з розривами, що дозволяють ефективно працювати з великими наборами даних.

Загалом, вибір методу відновлення залежить від специфіки задачі, типу розриву та доступних даних.

Задачі наближення неперервних функцій ще зустрічаються в багатьох чисельних методи, таких як методи скінченних елементів або методи обробки сигналів. В таких задачах необхідно наближувати розривні функції для того, щоб розв'язувати рівняння, що описують фізичні або інженерні системи. Використання таких наближень дозволяє обробляти функції, які не є неперервними, але на які можна накласти ефективні методи чисельного аналізу.

В обробці сигналів і зображень часто зустрічаються дискретизації або стрибки. Розриви можуть виникати через обмеження в якості передавання да-

них або через стиснення. У таких випадках наближення розривних функцій дозволяє зберігати значущу інформацію при мінімізації втрат даних.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є створення та тестування алгоритму відновлення функції двох змінних, якщо про неї відомі її сліди вздовж заданої системи ліній, використовуючи для цього новий інформаційний оператор – інтерлінацію та розбиття області на прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі реконструкції розривних функцій за відомими її слідами вздовж взаємно перпендикулярних ліній;

- розробити алгоритми реконструкції розривної функції двох змінних, з використанням прямокутних елементів з однією криволінійною стороною та інтерлінації функцій;

- створити програму в системі комп'ютерної математики MathCad та протестувати алгоритм реконструкції розривної функції двох змінних, використовуючи розбиття області на елементи з однією криволінійною стороною та інтерлінацію.

*Об'єктом дослідження* є процес наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами.

*Предметом дослідження* є розривні сплайни інтерфлетаційного типу.

**Методи дослідження.** У роботі використовуються методи теорії наближення функцій однієї та багатьох змінних, методи наближення операторами сплайн-інтерлінації функції двох змінних.

# 1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Математичне моделювання розривних об'єктів

Задачі апроксимації функцій займають провідне місце в прикладній математиці. Вирішення багатьох теоретичних і прикладних задач потребує заміни одних функціональних залежностей іншими, більш зручними для реалізації конкретної задачі [1]. Така заміна відбувається за умови виконання низки вимог до об'єкта, що наближається, його форми та властивостей. До них відносяться: клас функцій, тип вхідних даних, точність апроксимації, обчислювальні витрати, тип кінцевого результату та багато іншого. Для опису характеристик такої заміни введено поняття критерію якості, що включає аналіз виконаної роботи з апроксимації функції та отриману точність апроксимації. Йдеться про сукупні обчислення вихідної функції, попередньо витрачені на її аналіз приналежності до того чи іншого класу, фактичні витрати на саму апроксимацію, а також витрати на перерахунок, якщо не вдається досягти бажаного результату відразу. При цьому інформація про характер вихідної функції може бути відсутня, а сама функція може бути перенесена в категорію функцій з особливостями.

На рис. 1.1 зображена функція, що задана на відрізку  $[a, b]$ , яка має різні типи особливостей, які необхідно враховувати при апроксимації для підвищення точності наближення.

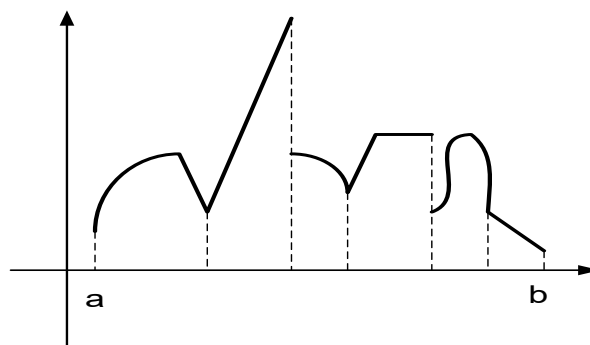


Рисунок 1.1 – Функція з особливостями

На практиці в багатьох технічних задачах виникає потреба досліджувати об'єкти, які математично описуються функціями, що мають особливості, наприклад, розриви першого роду. Такі проблеми виникають, зокрема, з дистанційними методами дослідження, коли виникає потреба дослідити тіло, не розрізаючи його. Наприклад, у задачах комп'ютерної томографії [2] доводиться відновлювати внутрішню структуру тіла людини, яка складається з органів різної щільності; в дефектоскопії важливим завданням є виявлення тріщин у промислових виробках методами неруйнівного контролю, а також визначення відхилень внутрішньої структури виробу від стандарту. За останні 30 років томографічні методи відновлення неоднорідних просторових фізичних характеристик набули широкого поширення в різних галузях, у тому числі в такій важливій, як медична діагностика. На сьогоднішній день комп'ютерна томографія – цілком сформований напрямок науки, зі своїм спектром завдань і методів їх вирішення. У томографії розроблено велику кількість обчислювальних методів, алгоритмів і програмних засобів, спрямованих на відновлення внутрішньої структури об'єкта. Вони добре працюють при відновленні об'єктів із гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів із розривними характеристиками. Тому задача створення методів наближення функцій з розривами є актуальною.

Апроксимація розривних функцій раніше детально не розглядалася, існують лише підходи до розв'язування такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Так, наприклад, з'явилися різні базисні сплайни на основі апроксимації Попова Б.А. [3], атомарні функції Рвачова В.Л. [4], барицентричні інтерполяційні сплайни [5] та багато інших. Усі вони зосереджені на теоретичній стороні апроксимації, а не на прикладній, тобто враховують особливості функції, обумовлюючи її щоразу різними вимогами до неї. Але сама ідея апроксимації має суто прикладний характер.

При наближенні розривних функцій непевними конструкціями проявляється явище Гіббса [6], особливо в контексті теорії наближень та чисельних методів, де використовуються кінцеві різниці або інші методи. Цей феномен від-

носиться до ситуації, коли при чисельному наближенні розривної функції (наприклад, функції, яка має стрибок у значенні, як це буває у разі переходу між фазами речовини), виникають осциляції (або «зайві коливання») біля розриву. До важливих особливостей явища Гіббса відносяться наступні:

- помилки при апроксимації: при використанні чисельних методів (наприклад, розкладів у ряди Фур'є) помилка апроксимації поблизу розриву функції може досягти максимуму і стабілізуватися на рівні близько 9% від величини стрибка, незалежно від того, наскільки дрібно буде зроблено розбиття або збільшено кількість крапок;

- осциляція: навіть якщо розрив функції досить різкий, апроксимації з використанням звичайних методів можуть призвести до появи осциляцій, які характерні для феномена Гіббса. Це явище спостерігається у розрахунках та моделюваннях, коли функції з різкими переходами чи стрибками намагаються апроксимувати за допомогою безперервних математичних моделей;

- рішення та пом'якшення ефекту: для пом'якшення або усунення феномена Гіббса часто використовуються спеціальні методи згладжування, такі як фільтрація, функції, що згладжують, або більш складні алгоритми апроксимації, які зменшують осциляції і забезпечують більш точне наближення розривної функції.

Феномен Гіббса при наближенні розривних функцій відноситься до небажаних осциляцій, які виникають при спробі апроксимувати різкі зміни функцій. Ці осциляції виявляються стійкими навіть за підвищення точності обчислень, що утрудняє точний опис розривних процесів без застосування додаткових методів згладжування чи поліпшення чисельних алгоритмів.

Автори роботи [7] запропонували вейвлети для реконструкції розривних ліній. Існують роботи, в яких пропонується використовувати пряме і зворотне перетворення Радона для реконструкції розривів в комп'ютерній томографії. Автор статті [8] здійснив подальший розвиток цієї методології та інструментарію алгоритмічної реконструкції розривів у комп'ютерній томографії, запропонував підходи, які дозволяють відновлювати не лише набір розривів, але й зна-

чення стрибків за допомогою перетворення Радона. Але всі ці методи не усувають повністю явище Гіббса.

Були розроблені та досліджені методи інтерполяції, апроксимації та інтегрування для наближення розривних функцій однієї змінної [9] і двох змінних, використовуючи прямокутне розбиття [10], розбиття на трикутні елементи [11], проєкції вздовж заданої системи ліній [12].

## 1.2 Відновлення розривних функцій розривними сплайнами апроксимаційного типу методом найменших квадратів та виявлення точок розриву

Наведемо в цьому пункті метод відновлення функції однієї змінною з розривами першого роду та алгоритм візуального знаходження точок розриву [13].

Означення. Розривний апроксимаційний лінійний сплайн на відрізку  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  це функція

$$S(x) = Sp_k(x, C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (1.1)$$

де  $C_k^+$ ,  $C_{k+1}^-$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  – параметри сплайну  $S(x)$ , що визначаються у вигляді односторонніх границь  $C_k^+ = \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f(x)$ ,  $C_{k+1}^- = \lim_{x \rightarrow x_{k+1} - 0} f(x)$  і які знаходяться методом найменших квадратів в інтегральній формі з умови

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(t))^2 dt \rightarrow \min_C. \quad (1.2)$$

Оцінка похибки наближення розривної функції  $f(x)$  розривним апроксимаційним сплайном  $S(x)$  на кожному інтервалі розбиття  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  має вигляд:

– якщо  $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$ , то

$$\|f(x) - S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]};$$

– якщо  $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$ , то

$$\|f(x) - S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}.$$

Тут  $L_\infty[a, b] = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p[a, b]$ .

Зауважимо, що якщо функція  $f(x) = a(\text{const})$  наближається розривним лінійним сплайном методом найменших квадратів, то перша оцінка є точною, якщо ж функція має вигляд  $f(x) = ax + b$ , то в другій оцінці також досягається рівність.

Якщо наближувала функція  $f(x)$  є кусково-постійною або кусково-лінійною функцією з точками розриву  $x = x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  та наближуємо її розривним сплайном  $S(x)$  і невідомі  $C_k^+$ ,  $C_{k+1}^-$  знаходимо з умови (1.2), то отримаємо точно вихідну функцію, тобто  $S(x) = f(x)$ .

Якщо  $C_k^+ = C_k^- = S(x_k)$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , то побудований розривний апроксимаційний сплайн буде неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Приклад 1.1. Нехай задана функція  $f(x)$  на інтервалі  $[-1, 1]$  з трьома точками розриву першого роду (рис. 1.2):

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < -0.5, \\ x^2, & -0.5 \leq x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ 1 - x, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

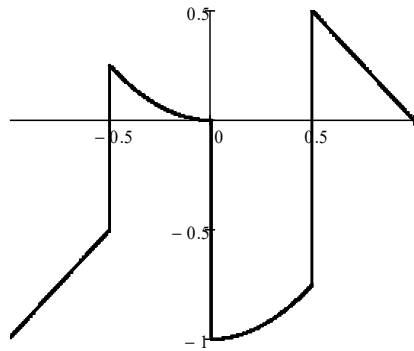


Рисунок 1.2 – Графік тестової функції  $f(x)$

Оберемо сітку:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -0.5$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0.5$ . Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

$$\begin{aligned} f(x_1 + 0) &= -1, & f(x_3 + 0) &= -0.5, \\ f(x_2 - 0) &= -0.5, & f(x_4 - 0) &= -0.5, \\ f(x_2 + 0) &= 0.25, & f(x_4 + 0) &= 0.5, \\ f(x_3 - 0) &= 0, & f(x_5 - 0) &= 0. \end{aligned}$$

Будуємо апроксимаційний сплайн, де коефіцієнти матриці  $S$  знаходиться методом найменших квадратів, тобто сплайн має наступний вигляд (рис.1.3):

$$Sp(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < -0.5, \\ -0.5x - 0.04, & -0.5 < x < 0, \\ 0.5, & 0 < x < 0.5, \\ 1 - x, & 0.5 < x < 1. \end{cases}$$

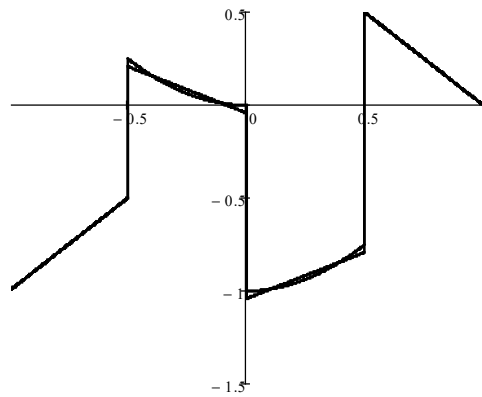


Рисунок 1.3 – Графічний вигляд функції  $f(x)$  та апроксимаційного сплайну  $Sp(x)$

Можна зробити висновок, що апроксимаційний сплайн точно наближує функцію на тих інтервалах, де вона постійна або задана лінійно. Приклад підтверджує вище викладену теорію.

Нехай розривна функція задана на інтервалі  $E = [0;1]$ . Розіб'ємо його вузлами  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$  на  $n$  інтервалів  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ . Причому вузли  $x_k$  не співпадають з розривами функції  $f(x)$ . У якості інформації про функцію відомі її односторонні значення у заданій сітці вузлів. Викладемо алгоритм наближення розривної функції по крокам.

Дія 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , за формулою (1.1) з невідомими коефіцієнтами  $C_k^+$ ,  $C_{k+1}^-$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ .

Дія 2. Знаходимо матрицю невідомих  $C$  коефіцієнтів сплайна з умови (1.2). Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн (1.1) отримаємо сплайн  $S_k(x) = Sp_k(x, C)$ .

Дія 3. На кожному з інтервалів  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  обчислюємо значення

$$J_k^* = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} J_k(x), \quad J_k(x) = |f(x) - S_k(x)|.$$

Означення. Якщо  $\left| \lim_{x \rightarrow x_q^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_q^-} f(x) \right| < \varepsilon$ , то функцію  $f(x)$  називається

$\varepsilon$ -неперервною в точці  $x_q$ .

Дія 4. Якщо  $f(x)$  є  $\varepsilon$ -неперервною в точці  $x_{q+1}$ , то вузол  $x_{q+1}$  видаляємо з розгляду.

Дія 5. З усіх  $J_k^*$  обираємо максимальне значення  $M = \max_{1 \leq k \leq n} (J_k^*)$  та ділимо інтервал, якому це максимальне значення належить, наприклад  $M \in [x_r, x_{r+1}]$ ,  $r < n$  навпіл, тобто вводимо новий вузол  $x^* = x_r + \frac{x_{r+1} - x_r}{2}$ .

Дія 6. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1.1) та за формулою (1.2) знаходимо невідому матрицю коефіцієнтів  $S$ . Перевіряємо виконання умови  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - Sp(x)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – задана точність наближення.

Якщо умова виконана, то отримали оптимальний вибір вузлів сплайну, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до дії 3.

Приклад 1.2. Нехай в області  $D = [0, 1]$  задана функція (рис. 1.4)

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2, & x \in (0, 0.5], \\ 2, & x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Тобто функція має розрив в точці  $x = 0.5$ .

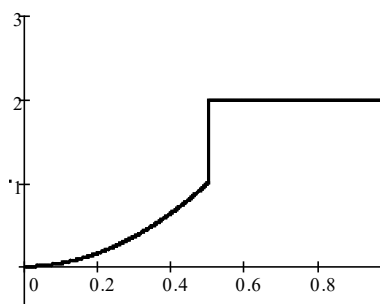


Рисунок 1.4 – Графічний вигляд функції

Оберемо вузли сплайна так, щоб вони не збігалися з розривом заданої

функції  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.3$ ,  $x_3 = 0.6$ ,  $x_4 = 1$ . Побудуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (1.1). Задамо точність наближення  $\varepsilon = 0.01$ . На рис. 1.5 наведені результати деяких з ітерацій.

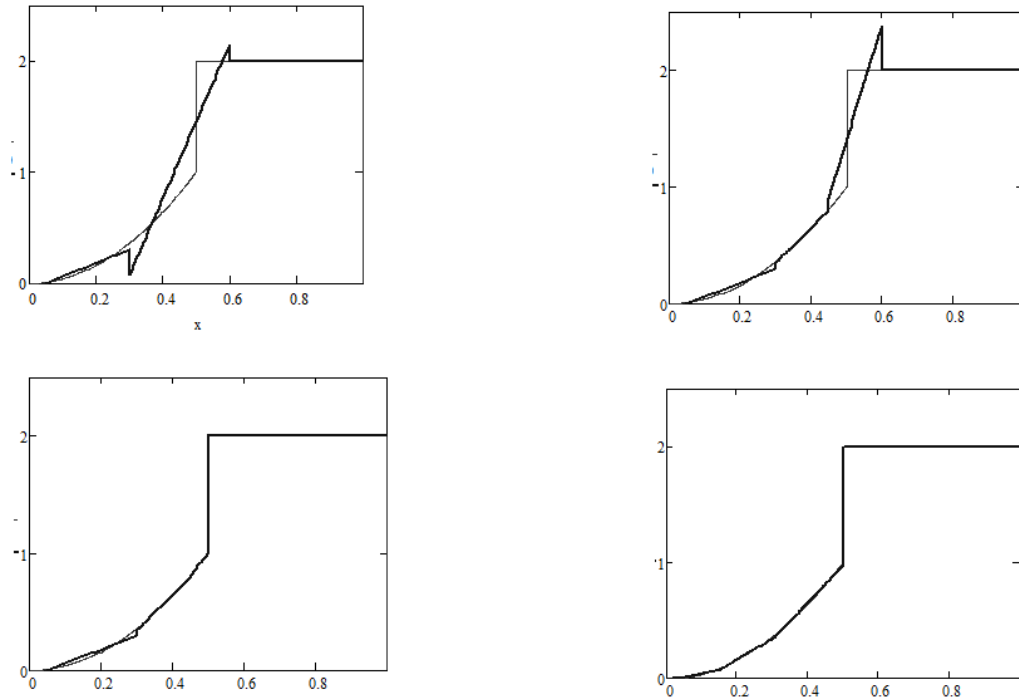


Рисунок 1.5 – Графічний вигляд вихідної функції (тонка лінія) та побудованого сплайну (товста лінія)

На останньому малюнку (рис. 1.5) сплайн  $S(x)$  наблизив задану функцію з точністю  $\varepsilon$ . При цьому оптимально обрали вузли сплайна, які дорівнюють

$$x_1 = 0, x_2 = 0.075, x_3 = 0.15, x_4 = 0.3, x_5 = 0.5, x_6 = 1.$$

### 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Термін «Дистанційні методи дослідження» використовуються для чисельного відновлення внутрішньої структури тіл, використовуючи в якості інформації про тіло лінійні інтеграли вздовж заданої системи ліній (або сліди чи

проекції).

Тобто задача полягає у відновленні щільності об'єкта на основі даних, які отримуються з дистанційних методів. Тобто треба знайти зображення або аналітичне представлення щільності тіла, не розрізаючи його.

Наведемо утворення проекційних даних, наприклад при трансмісійній комп'ютерній томографії.

Трансмісійна томографія – це початковий і найпростіший випадок КТ. У трансмісійній томографії досліджується об'єкт за допомогою приломлюючого випромінювання, наприклад,  $X$  – промені (рентгенівські промені) для тіла людини. Якщо  $I_0$  – це інтенсивність випромінювача,  $a(x)$  – лінійний коефіцієнт послаблення випромінювання в точці,  $LL$  – промінь, вздовж якого розповсюджується випромінювання, та  $I$  – інтенсивність випромінювання на виході з об'єкту, тоді

$$I = I_0 e^{-\int_L a(x) dx}.$$

Математична задача трансмісійної томографії – визначити  $a$  для великої множини осей  $L$ . Якщо  $L$  проста пряма лінія, яка з'єднує випромінювач  $x_0$  з детектором  $x_1$ , перетворюється так

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \int_{x_0}^{x_1} a(x) dx$$

В алгоритмі, що пропонується в даній роботі, функція що описує внутрішню структуру тіла, є функцією від двох змінних. Для її відновлення використовуються проекційні дані. В нашому випадку, проекції – це сліди функції вздовж заданої системи ліній.

#### 1.4 Постановка задач дослідження

З проведеного аналізу математичних моделей розривних об'єктів можна зробити висновок, що актуальною є задача відновлення розривної внутрішньої структури двовимірних об'єктів із заданими односторонніми слідами вздовж заданої системи взаємно перпендикулярних ліній. Тому, метою кваліфікаційної роботи є створення та тестування алгоритму реконструкції функцій двох змінних за допомогою інтерлінації функції. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі реконструкції функції двох змінних з розривами першого роду;
- дослідити методи та алгоритми наближення розривної функції двох змінних з використанням прямокутних елементів з однією криволінійною межею та нових інформаційних операторів (інтерлінації);
- створити алгоритм реконструкції розривної функції, використовуючи оператори розривної сплайн-інтерлінації;
- створення програми в СКМ MathCad та тестування розробленого алгоритму.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерполяційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи

Висвітliamo метод побудови та дослідження операторів розривної інтерполяції, таких, які в кожному прямокутному трапецієподібному елементі є операторами поліноміальної інтерполяції функції  $f(x, y)$  [13].

Нехай задана розривна функція двох змінних  $f(x, y)$  в області  $D = [0, 1]^2$  (рис. 2.1). Будемо вважати, що область  $D$  розбивається прямими  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ ,  $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$  та похилими лініями всередині прямокутника на прямокутні трапецієподібні (чотирикутні) елементи

$$\begin{aligned} \text{TP}_{ij}^{(1)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\}, \quad \text{TP}_{ij}^{(5)} = \{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\}, \\ \text{TP}_{ij}^{(2)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\}, \quad \text{TP}_{ij}^{(6)} = \{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\}, \\ \text{TP}_{ij}^{(3)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\}, \quad \text{TP}_{ij}^{(7)} = \{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\}, \\ \text{TP}_{ij}^{(4)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\}, \quad \text{TP}_{ij}^{(8)} = \{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(x), y_{j-1} < y < y_j\}. \end{aligned}$$

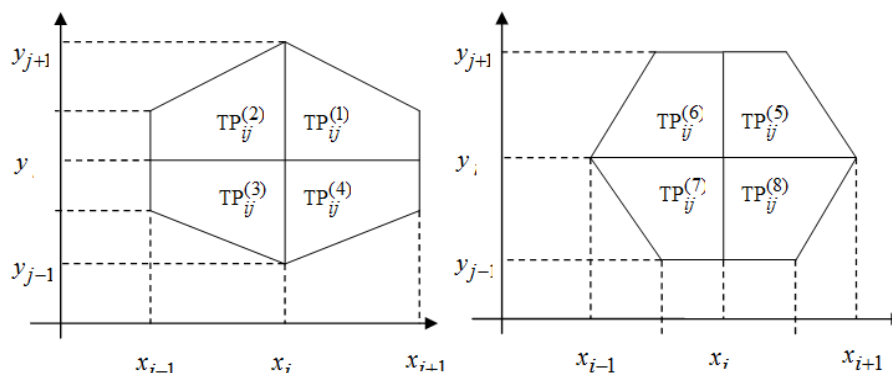


Рисунок 2.1 – Зображення можливих трапецієподібних елементів з прямим кутом у вузлі  $(x_i, y_j)$

Функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду на границях між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція  $f(x, y)$  може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває таких значень:

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)} &= f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(2)} &= f(x_i - 0, y_j + 0), \\
C_2^{(1)} &= f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), & C_2^{(2)} &= f(x_{i-1} + 0, y_j + 0), \\
C_3^{(1)} &= f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & C_3^{(2)} &= f(x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), \\
C_4^{(1)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & C_4^{(2)} &= f(x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), \\
C_1^{(3)} &= f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= f(x_i + 0, y_j - 0), \\
C_2^{(3)} &= f(x_{i-1} + 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= f(x_{i+1} - 0, y_j - 0), \\
C_3^{(3)} &= f(x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & C_3^{(4)} &= f(x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), \\
C_4^{(3)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i+1}) + 0), & C_4^{(4)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0), \\
C_1^{(5)} &= f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(6)} &= f(x_i - 0, y_j + 0), \\
C_2^{(5)} &= f(q_{i+1}^{(5)}(y_j) - 0, y_j + 0), & C_2^{(6)} &= f(q_{i-1}^{(6)}(y_j) + 0, y_j + 0), \\
C_3^{(5)} &= f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), & C_3^{(6)} &= f(q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1}) + 0, y_{j+1} - 0), \\
C_4^{(5)} &= f(q_{i+1}^{(5)}(y_{i+1}) - 0, y_{j+1} - 0), & C_4^{(6)} &= f(x_i - 0, y_{j+1} - 0), \\
C_1^{(7)} &= f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(8)} &= f(x_i + 0, y_j - 0), \\
C_2^{(7)} &= f(q_{i-1}^{(7)}(y_j) + 0, y_j - 0), & C_2^{(8)} &= f(q_{i+1}^{(8)}(y_j) - 0, y_j - 0), \\
C_3^{(7)} &= f(q_{i-1}^{(7)}(y_{j+1}) + 0, y_{j+1} - 0), & C_3^{(8)} &= f(x_i + 0, y_{j-1} + 0), \\
C_4^{(7)} &= f(x_i - 0, y_{j+1} - 0), & C_4^{(8)} &= f(q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1}) - 0, y_{j-1} + 0).
\end{aligned}$$

Означення. Розривний інтерполяційний сплайн в області  $\text{TR}_{ij}^{(k)} \subset D$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , це функція

$$\begin{aligned}
S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) = & C_1^{(k)} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)}) \omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(1)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)}) \omega 3_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\
& + C_3^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 4_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)}) \omega 4_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} + C_4^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)}) \omega 2_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})}, \quad (2.1)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) = y - y_j, \quad \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) = x - x_i, \\
\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y) = \begin{cases} y - g^{(k)}(x), & k = \overline{1, 4}, \\ y - y_{j+1}, & k = \overline{5, 8}, \end{cases} \quad \omega 4_{ij}^{(k)}(x, y) = \begin{cases} x - x_{i+1}, & k = \overline{1, 4}, \\ x - q^{(k)}(y), & k = \overline{5, 8}, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \quad A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} - 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} - 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4, \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_j) - 0, y_j + 0), & k = 5, \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_j) + 0, y_j + 0), & k = 6, \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_j) - 0, y_j - 0), & k = 7, \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_j) - 0, y_j - 0), & k = 8, \end{cases}$$

$$A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), & k = 4, \\ (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 5, \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 6, \\ (x_i - 0, y_{j-1} + 0), & k = 7, \\ (x_i + 0, y_{j-1} + 0), & k = 8, \end{cases}, \quad A_4^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1}) + 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0), & k = 4, \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_{j+1}) - 0, y_{j+1} - 0), & k = 5, \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1}) + 0, y_{j+1} - 0), & k = 6, \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_{j-1}) + 0, y_{j-1} + 0), & k = 7, \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1}) - 0, y_{j-1} + 0), & k = 8. \end{cases}$$

Функція  $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$ ,  $(x, y) \in TP_{ij}^{(k)} \subset D$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , задовольняє інтерполяційні властивості. Якщо  $f(x, y)$  має розриви першого роду у деяких точках  $(x_i, y_j)$  та  $f(x, y) \in C^{(r, r)}(TP_{ij}^{(1)})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $r = 1, 2$ , то залишок наближення функції  $f(x, y)$  сплайном  $S(x, y)$  на кожній трапеції буде мати вигляд

$$RS(x, y) = R_1 R_2 f(x, y) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) + \\ + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} R_2 f(x, g_{j+1}^{(1)}(x)),$$

де

$$R_1 f(x, y) = \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(0, r)}(x, \eta) G1(x, y, \eta) d\eta, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$R_2 f(x, y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r, 0)}(\xi, y) G2(x, \xi) d\xi, \quad y \in [y_j, g_{j+1}^{(1)}(x)],$$

$$G1(x, y, \eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq \eta \leq y \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \\ -\frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq y \leq \eta \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \end{cases}$$

$$G2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq \xi \leq x \leq x_{i+1}, \\ -\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq x \leq \xi \leq x_{i+1}. \end{cases}$$

Оцінка похибки наближення функції  $f(x, y)$  побудованим розривним інтерполяційним сплайном  $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$  на кожній трапеції має вигляд

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - S(x, y)| &\leq \|f(x, y)\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{64} \times \\
&\times \max \left\{ (y_j - y_{j+1}(x_i))^2, (y_j - y_{j+1}(x_{i+1}))^2 \right\} + \\
&+ \max \left\{ \left\| f^{(0,2)}(x_i, y) \right\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_i) - y_j)^2}{8}, \right. \\
&\left. \left\| f^{(0,2)}(x_{i+1}, y) \right\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j)^2}{8} \right\} + \\
&+ \max \left\{ \left\| f^{(2,0)}(x, y_j) \right\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8}, \right. \\
&\left. \left\| f^{(2,0)}(x, y_{j+1}(x)) \right\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8} \right\}.
\end{aligned}$$

Для функції  $f(x, y) = y^2 + \frac{xy}{2} - y$ , яка визначена в трапецієподібному елементі  $TP_{ij} = \left\{ 0 < x < 1, 0 < y < \frac{2-x}{2} \right\}$ , визначена похибка наближення є точною.

## 2.2 Наближення розривної функції двох змінних розривними апроксимаційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи

Викладемо метод відновлення розривної функції розривними апроксимаційними сплайнами за допомогою трапецієподібного розбиття області покриття функції [13].

Нехай задана розривна функція двох змінних  $f(x, y)$  в області  $D = [0, 1]^2$ .

Нехай її область розбита на прямокутні трапеції. Функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду на границях між цими трапеціями (не обов'язково між всіма). В якості відомих даних про функцію будемо вважати її значення у кутових точках трапецієвидного елемента. Побудуємо розривний згладжуючий сплайн для заданої розривної функції  $f(x, y)$  за заданою інформацією про неї.

Означення. Розривний апроксимаційний сплайн в області  $TP_{ij}^{(k)} \subset D$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , це розривний сплайн (2.1), коефіцієнти якого  $C_i^{(j)}$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ , знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\iint_{TP_{ij}^{(k)}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy \rightarrow \min_C. \quad (2.2)$$

Якщо вихідна функція  $f(x, y)$  є кусково-лінійною або кусково-сталюю функцією в кожному трапецієподібному елементі розбиття з точками розриву  $(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном  $S(x, y)$ , визначеним формулами (2.1) з невідомими  $C_m^{(k)}$ ,  $m = \overline{1, 4}$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , що знаходяться з умови (2.2), то отримаємо точно задану функцію, тобто  $S(x, y) = f(x, y)$ , де  $f(x, y) = A(const)$  або  $f(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy$ .

Якщо

$$C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = C_1^{(4)} = S(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

або

$$C_1^{(5)} = C_1^{(6)} = C_1^{(7)} = C_1^{(8)} = S(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (2.1) є неперерв-

ним апроксимаційним сплайном.

### 2.3 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерполяційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною

Наведемо побудову методу наближення розривної функції розривними інтерполяційними даними з використанням трапецієподібних елементів з однією криволінійною стороною [13].

Нехай задана розривна функція двох змінних  $f(x, y)$  в області  $D = [0, 1]^2$ . Нехай область  $D$  розбита на криволінійні трапеції. Якщо  $(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутника, то може зустрітися вісім типів трапецій (рис. 2.2):

$$\begin{aligned} \text{TP}_{ij}^{(1)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\}, & \text{TP}_{ij}^{(2)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\}, \\ \text{TP}_{ij}^{(3)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\}, & \text{TP}_{ij}^{(4)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\}, \\ \text{TP}_{ij}^{(5)} &= \{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\}, & \text{TP}_{ij}^{(6)} &= \{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\}, \\ \text{TP}_{ij}^{(7)} &= \{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\}, & \text{TP}_{ij}^{(8)} &= \{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(x), y_{j-1} < y < y_j\}, \end{aligned}$$

де функції  $g_u^{(v)}(x)$ ,  $q_s^{(v)}(y)$ ,  $u = \{j+1, j-1\}$ ,  $s = \{i+1, i-1\}$ ,  $v = \{1, 2, 3, 4\}$  є квадратичними функціями, тобто задаються виразами  $g(x) = ax^2 + bx + c$  або  $q(y) = ay^2 + by + c$ .

Функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду на границях між цими елементами. Побудуємо оператор розривної інтерполяції, який в кожному елементі розбиття є оператором інтерполяції функції  $f(x, y)$ .

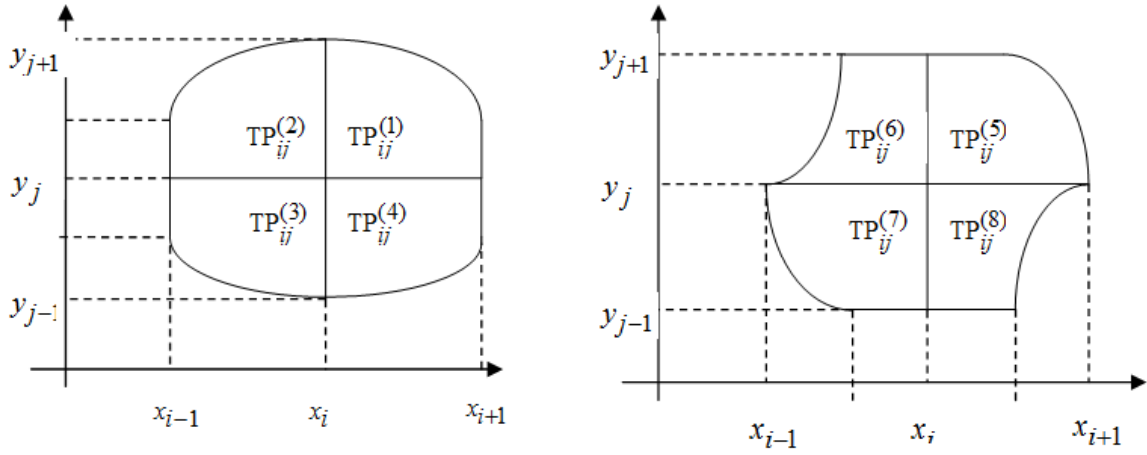


Рисунок 2.2 – Зображення можливих трапецієподібних елементів з прямим кутом у вузлі  $(x_i, y_j)$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція  $f(x, y)$  може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває значень  $C_u^{(v)}$ ,  $u = \overline{1,4}$ ,  $v = \overline{1,8}$ .

Означення. Розривний інтерполяційний сплайн в області  $TP_{ij}^{(k)} \subset D$ ,  $k = \overline{1,8}$ , це функція

$$\begin{aligned}
 S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) = & C_1^{(k)} \frac{\omega_4^{(k)}(x, y) \omega_3^{(k)}(x, y)}{\omega_4^{(k)}(A_1^{(k)}) \omega_3^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(1)} \frac{\omega_2^{(k)}(x, y) \omega_3^{(k)}(x, y)}{\omega_2^{(k)}(A_2^{(k)}) \omega_3^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\
 & + C_3^{(1)} \frac{\omega_1^{(k)}(x, y) \omega_4^{(k)}(x, y)}{\omega_1^{(k)}(A_3^{(k)}) \omega_4^{(k)}(A_3^{(k)})} + C_4^{(1)} \frac{\omega_1^{(k)}(x, y) \omega_2^{(k)}(x, y)}{\omega_1^{(k)}(A_4^{(k)}) \omega_2^{(k)}(A_4^{(k)})}, \quad (2.3) \\
 \omega_1^{(k)}(x, y) = & y - y_j, \quad \omega_2^{(k)}(x, y) = x - x_i, \\
 \omega_3^{(k)}(x, y) = & \begin{cases} y - g^{(k)}(x), & k = \overline{1,4}, \\ y - y_{j+1}, & k = \overline{5,8}, \end{cases} \quad \omega_4^{(k)}(x, y) = \begin{cases} x - x_{i+1}, & k = \overline{1,4}, \\ x - q^{(k)}(y), & k = \overline{5,8}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} - 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} - 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4, \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_j) - 0, y_j + 0), & k = 5, \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_j) + 0, y_j + 0), & k = 6, \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_j) - 0, y_j - 0), & k = 7, \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_j) - 0, y_j - 0), & k = 8, \end{cases}$$

$$A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), & k = 4, \\ (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 5, \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 6, \\ (x_i - 0, y_{j-1} + 0), & k = 7, \\ (x_i + 0, y_{j-1} + 0), & k = 8, \end{cases} \quad A_4^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1}) + 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0), & k = 4, \\ (q_{i+1}^{(5)}(y_{j+1}) - 0, y_{j+1} - 0), & k = 5, \\ (q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1}) + 0, y_{j+1} - 0), & k = 6, \\ (q_{i-1}^{(7)}(y_{j-1}) + 0, y_{j-1} + 0), & k = 7, \\ (q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1}) - 0, y_{j-1} + 0), & k = 8. \end{cases}$$

Функція  $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \text{TP}_{ij}^{(k)} \subset D$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , задовольняє інтерполяційні властивості.

Теорема. Якщо  $f(x, y)$  має розриви першого роду у деяких точках  $(x_i, y_j)$  та  $f(x, y) \in C^{(r, r)}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $r = 1, 2$ , то залишок наближення функції  $f(x, y)$  сплайном вигляду (2.3) на кожному трапецієподібному елементі буде мати вигляд

$$RS(x, y) = R_1 R_2 f(x, y) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) +$$

$$+ \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} R_2 f(x, g_{j+1}^{(1)}(x)),$$

де

$$R_1 f(x, y) = \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(0,r)}(x, \eta) G1(x, y, \eta) d\eta, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$R_2 f(x, y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi, y) G2(x, \xi) d\xi, \quad y \in [y_j, g_{j+1}^{(1)}(x)],$$

$$G1(x, y, \eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq \xi \leq y \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \\ \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq y \leq \xi \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \end{cases}$$

$$G2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq \xi \leq x \leq x_{i+1}, \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq x \leq \xi \leq x_{i+1}. \end{cases}$$

#### 2.4 Наближення розривної функції двох змінних розривними апроксимаційними сплайнами, використовуючи прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною

Наведемо метод наближення розривних функцій розривними сплайнами апроксимаційного типу за допомогою розбиття області покриття функції на прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною [13].

Розривним апроксимаційним сплайном в області  $TR_{ij} \subset D$ , називають

функцію (2.3), в якій коефіцієнти  $C_{ij}^k, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, 4}$  сплайна  $S(x, y)$  знаходяться методом найменших квадратів з умови (1.2)

Якщо вихідна функція  $f(x, y)$  є кусково-лінійною або кусково-сталюю функцією в кожному трапецієподібному елементі розбиття з точками розриву  $(x_i, y_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ , у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном  $S(x, y)$ , визначеним формулами (2.3) з невідомими  $C_m^{(k)}, m = \overline{1, 4}, k = \overline{1, 8}$ , що знаходяться з умови (1.2), то отримаємо точно вихідну функцію, тобто  $S(x, y) = f(x, y)$ , де  $f(x, y) = A(const)$  або  $f(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy$ .

Зауваження. Якщо  $C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = C_1^{(4)} = S(x_i, y_j) \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ , або  $C_1^{(5)} = C_1^{(6)} = C_1^{(7)} = C_1^{(8)} = S(x_i, y_j)$ , то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (2.3) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

## 2.5 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами, використовуючи трапецієподібні елементи

Тепер для трапецієподібного розбиття застосуємо новий інформаційний оператор – розривну інтерлінацію [13].

Нехай задана розривна функція двох змінних  $f(x, y)$  в області  $D = [0, 1]^2$ . Будемо вважати, що область  $D$  розбивається прямими  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$  на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається похилою лінією на прямокутну трапецію та прямокутний трикутник. Трапеції та трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду на границях між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Побудуємо оператор розривної кусково-поліноміальної інтерлінації та-

кий, що в кожній трапеції є операторами поліноміальної інтерлінації функції  $f(x, y)$ .

Якщо  $(x_i, y_j)$  – вузол, в якому знаходиться прями́й кут прямокутника, то може зустрітися вісім типів трапецій, аналітичний та графічний вигляд яких наведений в підрозділі 2.1 (рис. 2.1). Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція  $f(x, y)$  може мати (а може і не мати) розриви першого роду.

Розглянемо трапецію типу  $TR_{ij}^{(1)} = \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\}$ .

Вважаємо заданими:

а) сліди функції  $f(x, y)$  на прями́й  $x = x_i$  (справа та зліва прямої відповідно):

$$\Phi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y) = f(x_i + 0, y), \quad \Phi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y) = f(x_i - 0, y),$$

$$\Phi pp_{ij} = \Phi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\Phi pm_{ij+1} = \Phi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0);$$

б) сліди функції  $f(x, y)$  на прями́й  $x = x_{i+1}$  (справа та зліва прямої відповідно):

$$\Phi p_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} + 0} f(x, y) = f(x_{i+1} + 0, y),$$

$$\Phi m_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} - 0} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y),$$

$$\Phi mp_{i+1,j} = \Phi p_{i+1}(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$\Phi mm_{i+1,j+1} = \Phi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0);$$

в) сліди функції  $f(x, y)$  на прями́й  $y = y_j$  (над та під прямою відповідно):

$$\Psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0),$$

$$\Psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\Psi pp_{ij} = \Psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\Psi mp_{i+1, j} = \Psi m_j(x_{i+1}) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0);$$

г) сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$  (під та над прямою відповідно):

$$\Psi m_{j+1}(x) = f\left(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0\right),$$

$$\Psi p_{j+1}(x) = f\left(x, g_{j+1}^{(1)}(x) + 0\right),$$

$$\Psi pm_{i, j+1} = \Psi m_{j+1}(x_i) = f\left(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0\right),$$

$$\Psi mm_{i+1, j+1} = \Psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f\left(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0\right).$$

Означення. Розривний інтерлінаційний сплайн в трапецієподібному елементі  $TP_{ij}^{(1)}$  – це функція

$$Lf(x, y) = (L_1 + L_2 - L_2 L_1) f(x, y), \quad (2.4)$$

де

$$L_1 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \varphi m_{i+1}(y),$$

$$L_2 f(x, y) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \Psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \Psi p_j(x).$$

Теорема. Якщо сліди функції  $f(x, y)$  задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned} \Psi p_j(x_i) &= \Phi p_i(y_j), \quad \Psi p_j(x_{i+1}) = \Phi m_{i+1}(y_j) \\ \Phi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) &= \Psi m_{j+1}(x_i), \quad \Phi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = \Psi m_{j+1}(x_{i+1}), \end{aligned}$$

то оператор (2.4) інтерлінує  $f(x, y)$  на  $\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}$ :  $Lf(x, y)|_{\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}} = f(x, y)|_{\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}}$ , тоб-

то

$$\begin{aligned} Lf(x_i, y) &= \Phi p_i(x), \quad Lf(x_{i+1}, y) = \Phi p_{i+1}(x), \\ Lf(x, y_j) &= \Psi p_j(x), \quad Lf(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) = \Psi m_{j+1}(x). \end{aligned}$$

Комутативність операторів відсутня, тобто  $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$ .

Знайдемо залишок та оцінку побудованого методу наближення.

Теорема. Для залишкового члена  $Rf(x, y) = (I - L)f(x, y)$  виконується рівність

$$Rf(x, y) = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 P_{1,k}(x) P_{2,m}(x, y) \int_{x_k}^x \int_{y_m(x)}^y f^{(p,q)}(\xi, \eta) \frac{(x_k - \xi)^{p-1} (y_\ell - \eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!} d\xi d\eta,$$

$1 \leq p, q \leq 2$ ,  $y_1(x) = y_j$ ,  $y_2(x) = g_{j+1}^{(1)}(x)$ , а поліноми  $P_{1,k}(x), P_{2,m}(x, y)$  мають вигляд

$$P_{1,1}(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad P_{1,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$P_{2,1}(x) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}, \quad P_{2,2}(x) = \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}.$$

Оцінимо похибку наближення розривної функції  $f(x, y)$  побудованим розривним інтерліантом  $Lf(x, y)$ , визначеним формулою (2.4) в трапецієподібному елементі  $TP_{ij}^{(1)}$ .

Якщо односторонні сліди функції на відповідних лініях, що утворюють границі трапецієподібних елементів, збігаються, то розривна функція перетворюється в неперервну.

Приклад. Нехай задана функція на одиничному квадраті  $[0, 1] \times [0, 1]$ , область визначення якої зображено на рис. 2.3:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \in Tp_1 = \{0.5 < x < 1, 0.5 < y < -0.4x + 1\}, \\ x + y, & x \in Tp_2 = \{0 < x < 0.5, 0.5 < y < 0.4x + 0.6\}, \\ 1.5 + 4x^2 - y^2, & x \in Tp_3 = \{0 < x < 0.5, 0.4 - 0.4x < y < 0.5\}, \\ 1.5 - 4x^2 - y^2, & x \in Tp_4 = \{0.5 < x < 1, 0.4x < y < 0.5\}. \end{cases}$$

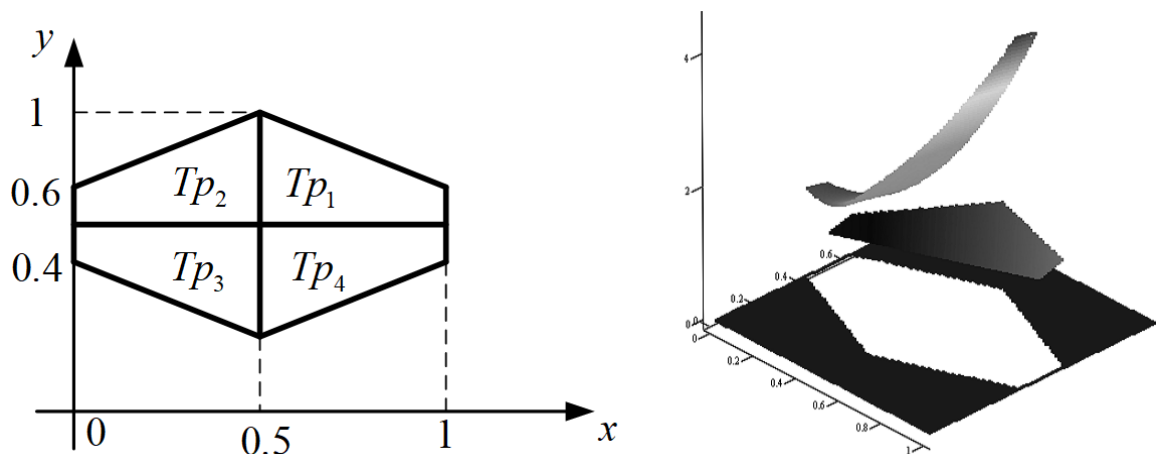


Рисунок 2.3 – Зображення області визначення функції  $f(x, y)$

Нехай задані лінії:

$$x = x_1 = 0, \quad x = x_2 = 0.5, \quad x = x_3 = 1,$$

$$y = g_3^{(1)}(x) = -\frac{2}{5}x + 1, \quad y = g_3^{(2)}(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}, \quad y = g_2^{(k)} = 0.5, \quad k = \overline{1,4},$$

$$y = g_1^{(3)}(x) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}x, \quad y = g_1^{(4)}(x) = \frac{2}{5}x.$$

Тобто на деяких лініях функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду, а на деяких лініях функція неперервна. Вони розбивають область визначення функції  $f(x, y)$  на вісім трапецієподібних елементів (один з кутів обов'язково є прямим). Побудуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданій сітці за формулою, яка згідно формули (2.3) для даного прикладу набуває вигляду

$$S_{ap}(x, y) = C_1^{(1)} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}(x)}{y_j - g_{j+1}(x)} + C_2^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}(x)}{y_j - g_{j+1}(x)} +$$

$$+ C_3^{(1)} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}(x) - y_j} + C_4^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}(x) - y_j}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Після знаходження коефіцієнтів матриці  $C$  методом найменших квадратів за формулою (1.2), отримаємо сплайн, наведений на рис. 2.4.

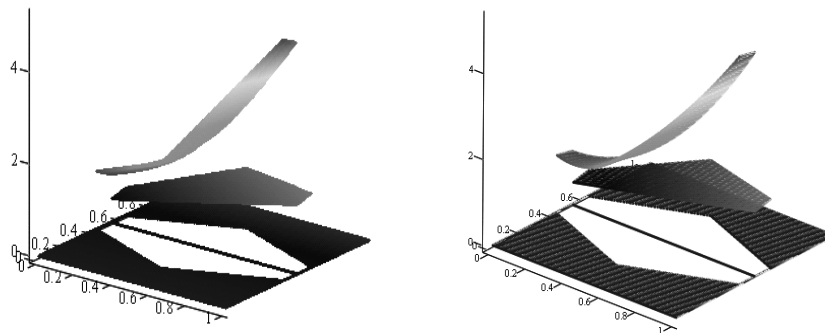


Рисунок 2.4 – Зображення розривного апроксимаційного та інтерлінаційного сплайнів

Максимальне відхилення вихідної функції  $f(x, y)$  від побудованого

сплайна  $S_{ap}(x, y): \max|f(x, y) - S_{ap}(x, y)| \approx 0.08$ .

Тепер побудуємо інтерлінаційний розривний сплайн за формулою (2.4). В якості експериментальних даних виступають сліди функції на заданій системі ліній (рис. 2.4)

$$Tp_1: \varphi p_2(y) = \lim_{x \rightarrow x_2+0} f(x, y) = y + 0.5, \quad \varphi m_3(y) = \lim_{x \rightarrow x_3-0} f(x, y) = y + 1,$$

$$\psi p_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0.5+0} f(x, y) = x + 0.5, \quad \psi m_3(x) = \lim_{x \rightarrow g_1(x)-0} f(x, y) = \frac{3}{5}x + 1;$$

$$Tp_2: \varphi p_1(y) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x, y) = y, \quad \varphi m_2(y) = \lim_{x \rightarrow x_2-0} f(x, y) = y + 0.5,$$

$$\psi p_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0.5+0} f(x, y) = x + 0.5, \quad \psi m_3(x) = \lim_{x \rightarrow g_2(x)-0} f(x, y) = \frac{7}{5}x + \frac{3}{5};$$

$$Tp_3: \varphi p_1(y) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x, y) = 1.5 - y^2, \quad \varphi m_2(y) = \lim_{x \rightarrow x_2-0} f(x, y) = 2.5 - y^2,$$

$$\psi m_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0.5-0} f(x, y) = 4x^2 + 1.25,$$

$$\psi p_1(x) = \lim_{x \rightarrow g_3(x)+0} f(x, y) = 4x^2 - (0.4x - 0.4)^2 + 1.5;$$

$$Tp_4: \varphi p_2(y) = \lim_{x \rightarrow x_2+0} f(x, y) = 2.5 - y^2, \quad \varphi m_3(y) = \lim_{x \rightarrow x_3-0} f(x, y) = 5.5 - y^2,$$

$$\psi m_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0.5-0} f(x, y) = 4x^2 + 1.25,$$

$$\psi p_1(x) = \lim_{x \rightarrow g_4(x)+0} f(x, y) = 3.84x^2 + 1.5.$$

Для елемента  $Tp_1(i=2, j=2)$  за формулою (2.4) маємо

$$\begin{aligned} L_1 f(x, y) &= \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \varphi p_2(y) + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \varphi m_3(y) = \frac{x - 1}{-0.5} (y + 0.5) + \frac{x - 0.5}{0.5} (y + 1) = \\ &= (x - 1)(-2y - 1) + (2x - 1)(y + 1) = x + y; \end{aligned}$$

$$L_2 f(x, y) = \frac{y - y_2}{g_3^{(1)}(x) - y_2} \psi m_3(x) + \frac{y - g_3^{(1)}(x)}{y_2 - g_3^{(1)}(x)} \psi p_2(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y-0.5}{-0.4x+1-0.5}(0.6x+1) + \frac{y+0.4x-1}{0.5+0.4x-1}(x+0.5) = \\
&= \frac{(y-0.5)(0.6x+1) - (y+0.4x-1)(x+0.5)}{-0.4x+0.5} = x+y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2L_1f(x,y) &= \frac{y-y_2}{g_3^{(1)}(x)-y_2} \left( \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \varphi p_2(g_3^{(1)}(x)) + \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \varphi m_3(g_3^{(1)}(x)) \right) + \\
&+ \frac{y-g_3^{(1)}(x)}{y_2-g_3^{(1)}(x)} \left( \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \varphi p_2(y_2) + \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \varphi m_3(y_2) \right) = \\
&= \frac{y-0.5}{-0.4x+1-0.5} \left( \frac{x-1}{-0.5} \left( -\frac{2}{5}x+1+0.5 \right) + \frac{x-0.5}{0.5} \left( -\frac{2}{5}x+1+1 \right) \right) + \\
&+ \frac{y+0.4x-1}{0.5+0.4x-1} \left( \frac{x-1}{-0.5} + \frac{x-0.5}{0.5} \cdot 1.5 \right) = \\
&= \frac{y-0.5}{-0.4x+0.5} (-2(x-1)(-0.4x+1.5) + (2x-1)(0.4x-2)) + \\
&+ \frac{y+0.4x-1}{0.4x-0.5} (-2(x-1) + 3x-1.5) = x+y;
\end{aligned}$$

$$Lf(x,y) = L_1f(x,y) + L_2f(x,y) - L_2L_1f(x,y) = x+y+x+y-x-y = x+y.$$

Тобто інтерлінаційний сплайн на елементі  $Tr_1$  повністю співпав із заданою функцією на цьому елементі. Тепер побудуємо інтерлінаційний сплайн на елементі  $Tr_4(i=2, j=1)$

$$\begin{aligned}
L_1f(x,y) &= \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \varphi p_2(y) + \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \varphi m_3(y) = \frac{x-1}{-0.5} (2.5-y^2) + \frac{x-0.5}{0.5} (5.5-y^2) = \\
&= (x-1)(-5+2y^2) + (2x-1)(5.5-y^2) = -5x+5-2y^2+11x-5.5+y^2 = \\
&= -y^2+6x-0.5,
\end{aligned}$$

$$L_2f(x,y) = \frac{y-y_2}{g_1^{(4)}(x)-y_2} \psi p_1(x) + \frac{y-g_1^{(4)}(x)}{y_2-g_1^{(4)}(x)} \psi m_2(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y-0.5}{0.4x-0.5}(3.84x^2+1.5) + \frac{y-0.4x}{0.5-0.4x}(4x^2+1.25) = \\
&= 0.2x - 0.5y + 4x^2 - 0.4xy + 1.5, \\
L_2L_1f(x,y) &= \frac{y-y_2}{g_1^{(4)}(x)-y_2} \left( \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \varphi p_2(g_1^{(4)}(x)) + \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \varphi m_3(g_1^{(4)}(x)) \right) + \\
&+ \frac{y-g_1^{(4)}(x)}{y_2-g_1^{(4)}(x)} \left( \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \varphi p_2(y_2) + \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \varphi m_3(y_2) \right) = \\
&= \frac{y-0.5}{0.4x-0.5} \left( \frac{x-1}{-0.5} (2.5 - (0.4x)^2) + \frac{x-0.5}{0.5} (5.5 - (0.4x)^2) \right) + \\
&+ \frac{y-0.4x}{0.5-0.4x} \left( \frac{x-1}{-0.5} (2.5 - 0.25) + \frac{x-0.5}{0.5} (5.5 - 0.25) \right) = \\
&= \frac{y-0.5}{0.4x-0.5} \left( (-5 + 0.32x^2)(x-1) + (11 - 0.32x^2)(x-0.5) \right) + \\
&+ \frac{y-0.4x}{0.5-0.4x} (-4.5(x-1) + 10.5(x-0.5)) = 6.2x - 0.5y - 0.4xy - 0.5, \\
Lf(x,y) &= L_1f(x,y) + L_2f(x,y) - L_2L_1f(x,y) = \\
&= -y^2 + 6x - 0.5 + 0.2x - 0.5y + 4x^2 - 0.4xy + 1.5 - 6.2x + 0.5y + 0.4xy + 0.5 = \\
&= -y^2 - 4x^2 + 1.5.
\end{aligned}$$

Аналогічно будуються інтерлінаційні сплайни на елементах  $Tr_2$  і  $Tr_3$ .

В результаті отримали розривний інтерлінаційний сплайн (рис. 2.3), який повністю збігається із заданою розривною функцією, тобто максимальне відхилення наближуваної функції  $f(x,y)$  від побудованого сплайна  $S(x,y)$ :

$$\max |f(x,y) - S(x,y)| = 0.$$

Отже, розривний інтерлінаційний сплайн точно відновив задану розривну функцію.

## 2.6 Наближення розривної функції двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами, використовуючи трикутні елементи з однією криволінійною стороною

Продемонструємо метод наближення розривної функції від двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами використовуючи криволінійну триангуляцію області покриття функції [13].

Нехай задана розривна функція двох змінних  $f(x, y)$  в області  $D$ . Будемо вважати, що область  $D$  розбивається прямими  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ ,  $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$  на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається на два прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Побудуємо оператор розривної кусково-поліноміальної інтерлінації такий, що в кожному трикутнику він є оператором поліноміальної інтерлінації функції  $f(x, y)$ .

Розглянемо трикутний елемент  $T_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  (рис. 2.5), в якому катети задаються рівняннями  $AB: x = x_i$ ,  $AC: y = y_j$ , а гіпотенуза  $BC$ , взагалі кажучи, є криволінійною і може задаватися рівнянням

$$h(x) + g(y) = 1,$$

тобто  $y = g^{-1}(1 - h(x))$  або  $x = h^{-1}(1 - g(y))$ .

Причому виконуються наступні співвідношення:  $g(y_j) = 0$ ,  $h(x_i) = 0$ .

Нехай на цьому трикутнику задана функція  $f(x, y)$ , яка на лініях заданого трикутного елемента може мати розриви першого роду.

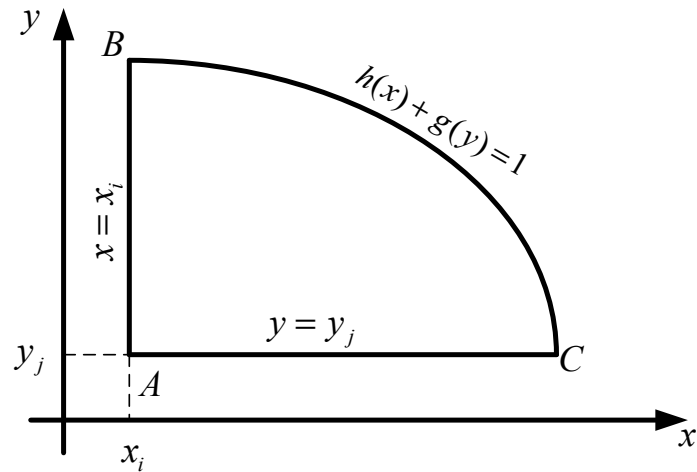


Рисунок 2.5 – Один з можливих трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою та з прямим кутом у вузлі  $(x_i, y_j)$

Вважаємо заданими:

а) сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $x = x_i$  (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y) = f(x_i + 0, y),$$

$$\varphi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y) = f(x_i - 0, y),$$

$$\varphi p p_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi m p_{ij} = \varphi m_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i - 0, y_j + 0);$$

б) сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $y = y_j$  (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0),$$

$$\psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\Psi_{pp_{ij}} = \Psi_{p_j}(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\Psi_{pm_{ij}} = \Psi_{m_j}(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j - 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j - 0);$$

в) сліди функції  $f(x, y)$  на криволінійній гіпотенузі (під та над прямою відповідно):

$$\eta_{m_{ij}}(x) = f(x, g^{-1}(1 - h(x)) - 0), \quad \eta_{p_{ij}}(x) = f(x, g^{-1}(1 - h(x)) + 0);$$

$$\eta_{pm_{ij}} = \eta_{m_{ij}}(x_i) = f(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x_i)) - 0),$$

$$\eta_{pp_{ij}} = \eta_{p_{ij}}(x_i) = f(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x_i)) + 0),$$

або

$$\eta_{m_{ij}}(y) = f(h^{-1}(1 - g(y)) + 0, y), \quad \eta_{p_{ij}}(y) = f(h^{-1}(1 - g(y)) - 0, y),$$

$$\eta_{pm_{ij}} = \eta_{m_{ij}}(y_j) = f(h^{-1}(1 - g(y_j)) + 0, y_j - 0),$$

$$\eta_{mp_{ij}} = \eta_{p_{ij}}(y_j) = f(h^{-1}(1 - g(y_j)) - 0, y_j + 0).$$

Введемо позначення:

$$\mu_{m_i}(x) = f(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x)) - 0), \quad \mu_{p_i}(x) = f(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x)) + 0),$$

або

$$\mu_{p_j}(y) = f(h^{-1}(1 - g(y)) + 0, y_j - 0), \quad \mu_{m_j}(y) = f(h^{-1}(1 - g(y)) - 0, y_j + 0).$$

Легко перевірити, що виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned}\mu m_i(x_i) &= \eta m_{ij}(x_i), \quad \mu p_i(x_i) = \eta p_{ij}(y_j), \\ \mu p_j(y_j) &= \eta m_{ij}(y_j), \quad \mu m_j(y_j) = \eta p_{ij}(y_j).\end{aligned}$$

Теорема. Якщо сліди функції  $f(x, y)$  задовольняють умовам

$$\begin{aligned}\psi p_j(x_i) &= \varphi p_i(y_j), \quad \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i(g^{-1}(1 - h(x_i))), \\ \eta m_{ij}(h^{-1}(1 - g(y_j))) &= \psi p_j(h^{-1}(1 - g(y_j))),\end{aligned}$$

то оператор

$$L f(x, y) = L_1 f(x, y) + L_2(x, y) - L_{12}(x, y),$$

де

$$\begin{aligned}L_1 f(x, y) &= h(x) \cdot \eta m_{ij}(y) + g(y) \cdot \eta m_{ij}(x), \\ L_2 f(x, y) &= \psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j), \\ L_1 L_2 f(x, y) &= h(x) (\varphi p_i(y) + \mu p_j(y) - \varphi p_i(y_j)) + \\ &+ g(y) (\eta m_{ij}(x_i) + \mu m_i(x) - \psi p_j(x)),\end{aligned}$$

інтерлінує функцію  $f(x, y)$  на трьох сторонах трикутника  $T_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , тобто

$$\begin{aligned}L f(x, y)|_{y=y_j} &= \psi p_j(x), \quad L f(x, y)|_{x=x_i} = \varphi p_i(y), \\ L f(x, y) &= f(x, y), \quad \text{якщо } h(x) + g(y) = 1.\end{aligned}$$

Якщо  $f(x, y) \in C^{(1,1)}(T_{ij})$ , то для залишку  $Rf(x, y) = (I - L)f(x, y)$  виконуються співвідношення

$$Rf(x, y) = (1 - h(x) - g(y)) \int_0^x \int_0^y f^{(1,1)}(u, v) dudv + \\ + f(x) \int_x^{h^{-1}(1-g(y))} \int_0^y f^{(1,1)}(u, v) dudv + g(y) \int_0^x \int_y^{g^{-1}(1-h(x))} f^{(1,1)}(u, v) dudv.$$

Наслідок. Для довільних функцій  $f(x, y) = u(x) + v(y)$ , де  $u(x)$ ,  $v(y)$  – довільні функції однієї змінної справедлива рівність  $Lf(x, y) = f(x, y)$ .

Зауваження. Якщо  $\varphi p_i(y) = \varphi m_i(y)$ ,  $\psi p_j(x) = \psi m_j(x)$ ,  $\eta p_{ij}(x) = \eta m_{ij}(x)$ , то побудований розривний сплайн є неперервним інтерлінаційним сплайном на границях трикутного елемента  $T_{ij}$ .

## Висновки за розділом 2

Якщо наближувати будь-яку розривну функцію будь-якими неперервними функціями, можемо спостерігати явище Гіббса, яке за допомогою різних розроблених фільтрів можна зменшити. Але повністю уникнути це явище фільтри не дають змогу.

Існуючі оператори (атомарні функції Рвачова В.Л., оператори Попова Б.А. тощо) описуються лише з боку теоретичної апроксимації, тобто вони враховують розриви функції, накладаючи на нею всякий раз різні вимоги. Але сама ідея апроксимації має суто прикладний характер, тому й методи мають висвітлювати не лише теоретичну сторону, а й застосовуватися на практиці.

Методи виявлення розривів за допомогою вейвлетів є надто трудомісткими.

Побудовані оператори розривної інтерполяції дозволяють ідентифікувати точки розриву функції за допомогою значень шуканої функції у вузлах заданої сітки, але вони не діють, якщо в якості вхідних даних виступають сліди функції вздовж заданої системи ліній (саме такі експериментальні дані виникають в дистанційних методах дослідження).

Виходячи з описаного, є актуальною задача розробки, реалізації та тестування алгоритму відновлення внутрішньої структури двовимірного тіла, що описується функцією двох змінних з розривами першого роду на заданих дослідником лініях, за допомогою розривних інтерлінаційних сплайнів, які є природнім математичним апаратом для розв'язання задач із подібними експериментальними даними.

В розділі 2 розглядаються інтерполяційні методи наближення розривної функції двох змінних за допомогою розбиття її області покриття на трапецієподібні прямокутні елементи та такі самі елементи з однією криволінійною стороною. Також запропонована побудова розривного сплайн - інтерлінанта для наближеного відновлення розривної функції, використовуючи трапецієподібне розбиття (прямокутні трапеції з однією криволінійною гранню). В кожному з випадків наведені інтерполяційні та інтерлінаційні властивості відповідно та похибки наближення. Причому побудовані розривні інтерлінаційні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни інтерлінаційного типу.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Система комп'ютерної математики MathCad

MathCad – це програмне забезпечення, що розроблене для інженерних та наукових розрахунків, поєднує в собі можливості обчислень, візуалізації даних та документування. Відмітимо основні характеристики та особливості системи комп'ютерної математики MathCad:

а) інтуїтивний інтерфейс – MathCad дозволяє виконувати розрахунки у форматі, близькому до математичному запису; вирази виглядають так, наче вони були написані на папері, а інтерфейс, що легко читається, підходить для користувачів з мінімальним досвідом роботи з програмуванням;

б) широкі обчислювальні можливості – система підтримує чисельні та символні обчислення, має можливість роботи з великими масивами даних, матрицями, векторами та складними формулами; підтримує функції із різних галузей: математика, інженерія, фізика, статистика та ін.;

в) документування розрахунків – результати розрахунків автоматично інтегруються в документ разом із текстовими поясненнями та графіками, що підходить до створення звітів, де розрахунки супроводжуються поясненнями; запис формул, як в зошиті;

г) графічна візуалізація даних – існує можливість побудови двовимірних та тривимірних графіків, можливість аналізувати дані за допомогою візуалізації;

г) підтримка одиниць виміру – MathCad має можливість використання різних одиниць виміру та автоматичної їх конвертації, а помилки в одиницях вимірювання виявляються та виправляються автоматично.

д) гнучкість та інтеграція – однією з переваг системи MathCad є також те, що вона може взаємодіяти з іншими системами: Excel, Matlab, AutoCad, Visual Basic тощо;

е) простота навчання – MathCad є простішою системою для освоєння, ніж

традиційні мови програмування (наприклад, MATLAB або Python) та підходить для студентів, викладачів і професіоналів;

є) підтримка стандартів – програма часто використовується в компаніях, де потрібна відповідність стандартам якості розрахунків та документації; MathCad часто застосовується в інженерних та наукових розрахунках, таких як проектування, оптимізація, аналіз даних та створення технічних звітів.

### 3.2 Алгоритм розв’язання задачі відновлення розривної 2D

внутрішньої структури об’єкта, використовуючи криволінійне розбиття області покриття об’єкта

Алгоритм будемо будувати в припущенні, що внутрішня структура двовимірного тіла описується функцією від двох змінних з розривами першого роду на лініях (не обов’язково всіх) розбиття області покриття об’єкта. Припускаємо, що об’єкт повністю розміщений в одиничному квадраті. Цю область розбиваємо на прямокутні трапеції з однією криволінійною стороною.

Наведемо алгоритм по кроках:

- визначення сітки розбиття у вигляді трапецій з однією криволінійною стороною;
- введення експериментальних даних у вигляді односторонніх слідів функції, яку треба відновити, вздовж заданих ліній (прямих і криволінійних);
- побудова розривного сплайну інтерлінаційного типу, який в кожному трапецієподібному елементі може мати різний аналітичний вигляд;
- порівняння отриманого сплайну з точними функціями (тестовими) та з класичним розривним інтерполяційним сплайном, побудованим для таких самих тестових функцій та такого самого розбиття, але з використанням іншої вхідної інформації (значення у вузлах сітки).

### 3.3 Опис програми

Перевіримо роботу побудованого алгоритму на прикладі двох тестових функцій від двох змінних, які вважаємо повністю поміщеними в одиничний квадрат. Одна з тестових функцій має розриви на всіх лініях розбиття, інша – не на всіх. Інформацією про функцію виступають односторонні сліди (зліва та справа) вздовж заданої системи ліній (прямих і кривих). Система ліній, що розбиває область покриття об'єкта, задається дослідником та утворюється з елементарних трапецієвидних елементів з прямим кутом та однією криволінійною стороною.

Наступним кроком визначаємо зв'язок номера трапецієподібного елемента з індексами його вершини, в якій знаходиться прямий кут. В кожному елементарному трапецієподібному елементі будуємо сплайни інтерлінаційного типу, аналітичний вигляд яких, взагалі кажучи, може відрізнятися. Сукупність побудованих сплайнів утворює розривний інтерлінаційний сплайн. Проводимо порівняння отриманого сплайну з тестовими функціями та наводимо обчислювальну похибку та графічні ілюстрації отриманих результатів.

Для порівняння побудованого розривного інтерлінаційного сплайну в кожному трапецієподібному елементі створюємо інтерполяційний сплайн за іншими вхідними даними (інтерполяційними) на такому самому розбитті. Обчислюємо обчислювальну похибку та наводимо графічні результати. Проводимо порівняння двох розривних сплайнів та тестових функцій та робимо графічні ілюстрації отриманих результатів.

### Висновки за розділом 3

У розділі 3 описуються характеристика та переваги для використання системи комп'ютерної математики MathCad. Також наводиться алгоритм чисельного відновлення внутрішньої структури двовимірного тіла, що має розриви

першого роду на вибраних дослідником лініях, що утворюють розбиття області покриття тіла на елементарні прямокутні трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною. Внутрішня структура тіла описується розривною функцією від двох змінних. В якості інформації про цю функцію вважаємо її односторонні сліди вздовж заданих ліній розбиття (не обов'язково вздовж кожної). За введеною інформацією для відновлення використовуємо природній для цього новий інформаційний оператор – інтерлінацію двох змінних. Використання інтерлінації дозволяє наблизити функцію з розривами першого роду на лініях розбиття області покриття функції та отримати графічні ілюстрації результатів відновлення.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції двох змінних розривним сплайном інтерлінаційного типу при розбитті області покриття на трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною

Задамо на одиничному квадраті  $D = [0,1] \times [0,1]$  тестову функцію з розривами першого роду на всіх лініях розбиття (трапецієподібних елементах з криволінійною стороною)

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0.5 < x < 1, 0.5 < y < (x - 1)^2 + 0.7, \\ 1.5 - 4x^2 - y^2, & 0 < x < 0.5, 0.5 < y < -(x - 0.5)^2 + 0.95, \\ 0.5, & 0 < x < 0.5, (x - 0.5)^2 + 0.05 < y < 0.5, \\ 1.5 - x, & 0.5 < x < 1, -(x - 1)^2 + 0.3 < y < 0.5. \end{cases}$$

Область визначення функції розіб'ємо на чотирикутні елементи лініями:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 1, \\ y_1 &= 0, \quad y_2^1 = (x - 0.5)^2 + 0.05, \quad y_2^2 = -(x - 1)^2 + 0.3, \\ y_3 &= 0.5, \quad y_3^1 = (x - 1)^2 + 0.7, \quad y_3^2 = -(x - 0.5)^2 + 0.95. \end{aligned}$$

Внаслідок такого розбиття утворилися вісім трапецієподібних елементів з однією криволінійною стороною. В якості експериментальних даних візьмемо односторонні сліди функції вздовж заданих ліній.

Побудуємо розривний сплайн інтерполяційного типу  $LL(x, y)$  за формулою (2.1). Результати чисельного експерименту наведено на рис. 4.1 та рис. 4.2.

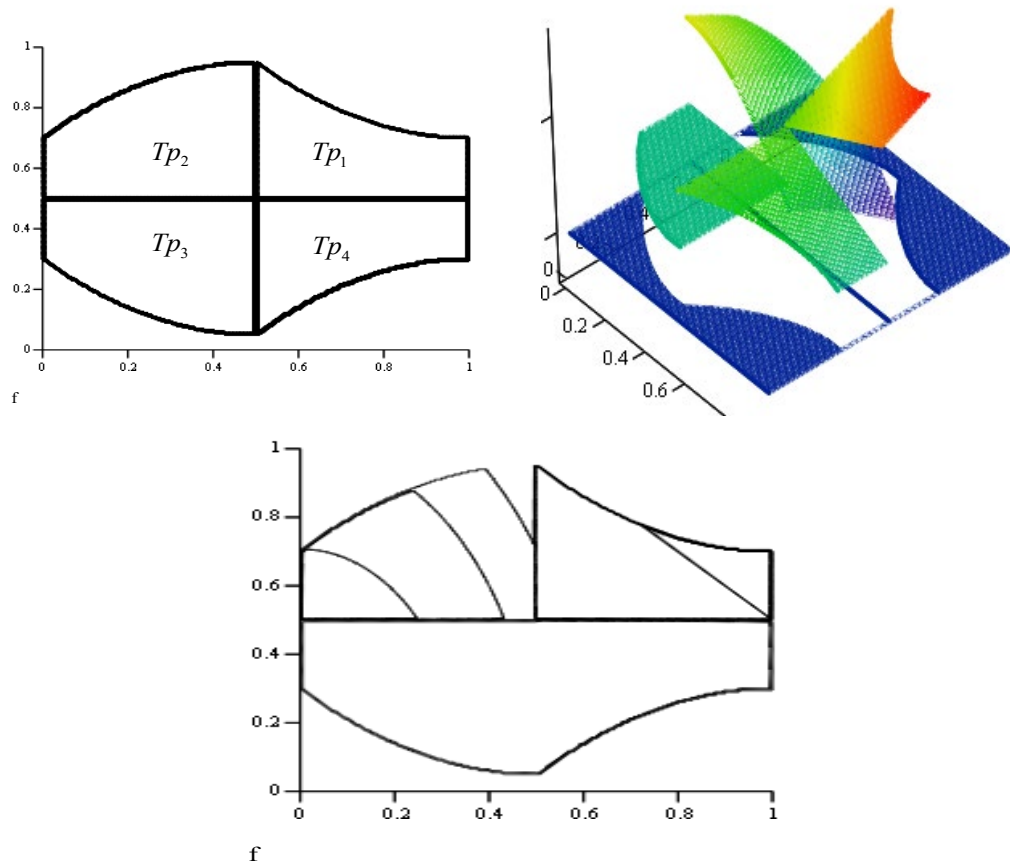


Рисунок 4.1 – Графічна інтерпретація області визначення тестової функції, самої функції та її ліній рівня

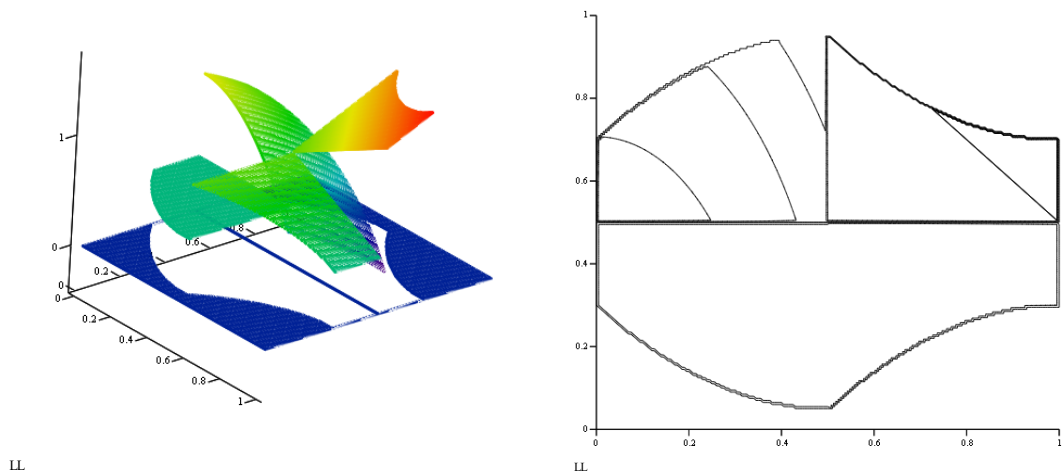


Рисунок 4.2 – Графічна інтерпретація побудованого розривного сплайну інтерліаційного типу, та його ліній рівня

Обчислимо чисельну похибку наближення тестової функції інтерліа-

ційним сплайном у вигляді максимального відхилення:

$$\max |f(x, y) - LL(x, y)| = 0.$$

Створимо чисельний експеримент для тестової функції  $g(x, y)$  (рис. 4.3), яка має розриви не на всіх трапецієподібних елементах розбиття

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0.5 < x < 1, 0.5 < y < -\frac{2}{5}x + 1, \\ x + y, & 0 < x < 0.5, 0.5 < y < \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}, \\ 1.5 - 4x^2 - y^2, & 0 < x < 0.5, \frac{2}{5} - \frac{2}{5}x < y < 0.5, \\ 1.5 - 4x^2 - y^2, & 0.5 < x < 1, \frac{2}{5}x < y < 0.5. \end{cases}$$

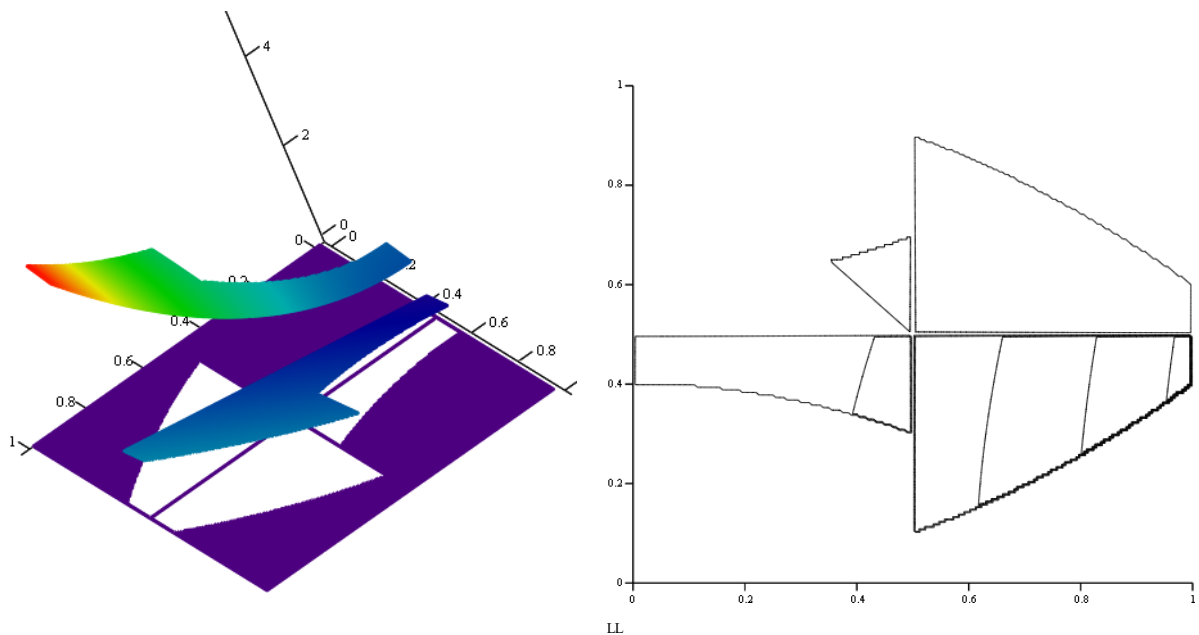


Рисунок 4.3 – Графічна інтерпретація тестової функції  $g(x, y)$  та її ліній рівня

Побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн та такої тестової функції. Графічна інтерпретація зображена на рис. 4.4.

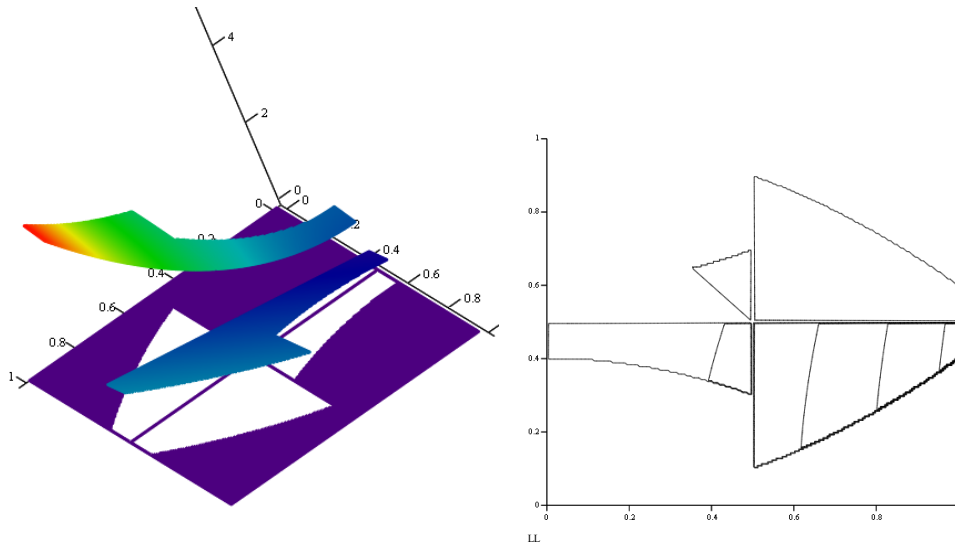


Рисунок 4.4 – Графічна інтерпретація інтерлінаційного сплайну, побудованого для тестової функції  $g(x, y)$ , та його ліній рівня

Роблячи висновок з проведеного тестування, можна сказати, що розривна інтерлінація наближує задані тестові функції точно, про що і стверджує викладена вище теорія.

#### 4.2 Чисельний експеримент для реконструкції розривної функції двох змінних розривним сплайном інтерполяційного типу при розбитті області покриття на трапецієподібні елементи з однією криволінійною стороною

Для порівняння з оператором розривної інтерлінації проведемо відновлення розривних тестових функцій з попереднього пункту розривним інтерполяційним сплайном  $S(x, y)$  за формулою (2.4).

Спочатку розглянемо тестову функцію  $f(x, y)$  з таким самим розбиттям області визначення функції, як в попередньому пункті.

Побудований розривний інтерполяційний сплайн зображено графічно на рис. 4.5 та рис. 4.6.

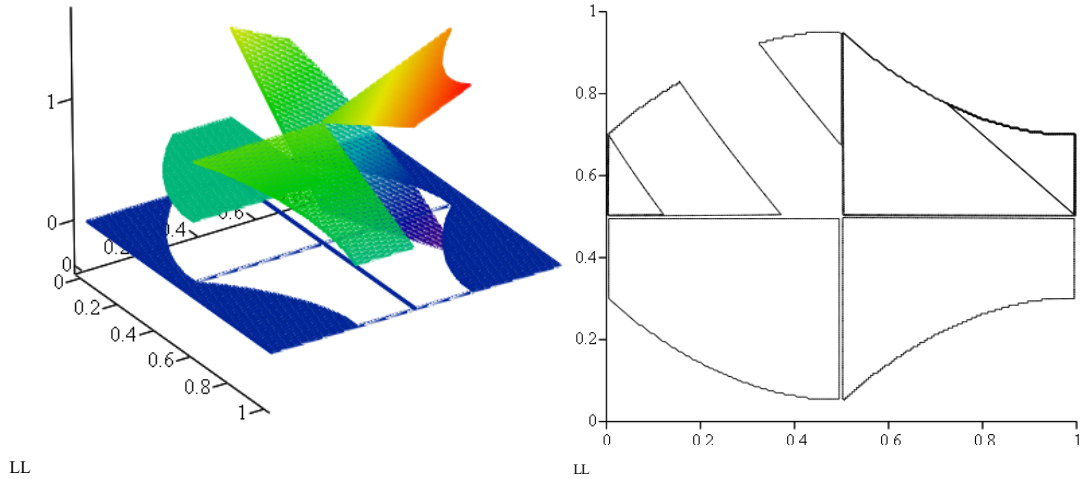


Рисунок 4.5 – Графічна інтерпретація інтерполяційного розривного сплайну, побудованого для тестової функції  $f(x, y)$ , та його ліній рівня

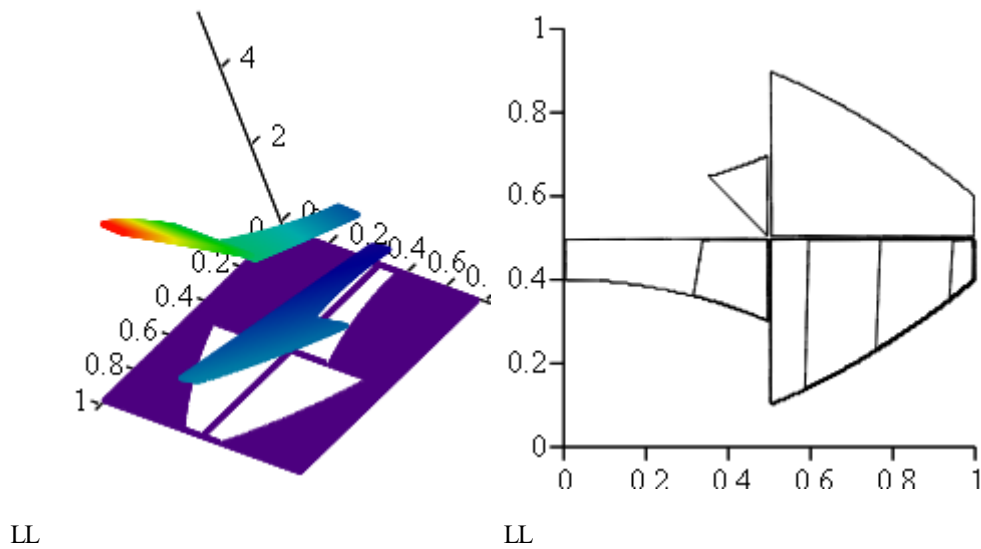


Рисунок 4.6 – Графічна інтерпретація інтерполяційного сплайну, побудованого для тестової функції  $g(x, y)$ , та його ліній рівня

Обчислимо чисельну похибку наближення тестової функції інтерполяційним сплайном у вигляді максимального відхилення:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| = 0.37.$$

## Висновки за розділом 4

У даному розділі проводиться перевірка тестування алгоритму відновлення розривної функції двох змінних за допомогою розривної інтерлінації на прикладі двох тестових функцій, одна з яких має розриви на всіх границях заданої трапецієподібної сітки (кожний трапецієподібний елемент має одну криволінійну сторону), а друга – не на всіх сторонах трапецій. Розривна інтерлінація будується з використанням заданих односторонніх слідів функції вздовж ліній заданого трапецієподібного розбиття. Результати порівнюються з тестовими функціями та оператором розривної інтерполяції, який використовує інші експериментальні дані (значення шуканої функції у вузлах заданої сітки) та такого самого розбиття області покриття функції, як і для інтерлінації.

Побудований алгоритм відновлення розривної функції двох змінних можна використовувати для моделювання тіл, що мають розривну внутрішню структуру, та для дослідження яких використовуються дистанційні методи (тобто експериментальними даними є проекції чи сліди функцій вдовж ліній). За результатами проведених чисельних експериментів можна зробити висновок, що метод розривної інтерлінації розривної функції дає більш точний результат, ніж метод розривної інтерполяції розривної функції. Алгоритм може працювати з об'єктами, що мають більш складну форму, та дозволяє уникати явища Гіббса.

## ВИСНОВКИ

В процесі виконання кваліфікаційної роботи було проведено аналітичний літературний огляд джерел, що присвячені відновленню розривних функцій однієї чи двох змінних, а також огляд сучасного стану та актуальності поставленої задачі.

В роботі запропоновано алгоритм для відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла, використовуючи новий інформаційний оператор – інтерлінацію функцій. Експериментальними даними виступають сліди (проекції) функції вздовж заданої системи ліній. В якості ліній виступають сторони прямокутних трапецієподібних елементів з однією криволінійною стороною. Створений алгоритм дає змогу наблизити функцію від двох змінних з розривами першого роду точніше, ніж це робить розривна інтерполяція функцій двох змінних, працювати з об'єктами більш складної форми та уникати явища Гіббса.

Для перевірки роботи алгоритму були створені програми в системі комп'ютерної математики MathCad, які були перевірені на двох тестових функціях, одна з яких має розриви на всіх границях прямокутних трапецієподібних елементів з однією криволінійною стороною, на які розбивається область, що покриває тіло; інша тестова функція має розриви не на всіх сторонах-границях елементарних криволінійних трапецій.

Створений алгоритм реконструкції розривної функції двох змінних, коли про функцію відомі її сліди вздовж заданих ліній (взагалі кажучи, криволінійних), може бути використаний для моделювання двовимірних тіл, які досліджуються дистанційними методами, а також для побудови модифікаційного алгоритму знаходження ліній розриву для розривної функції від двох змінних.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Schumaker L. Spline Functions: Computational Methods. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 2015. 411 p.
2. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлотації функцій. Монографія. Харків: ХНУРЕ, 2008. 160 с.
3. Попов Б. А. Рівномірні наближення сплайнами. Київ : Наукова Думка, 1989. 372 с.
4. Brysina I. V., Makarichev V.O. Atomic functions and their generalizations in data processing: function theory approach. *Radio electronic and computer systems*, 2018, №3(87), P. 4–10.
5. Bos L., De Marchi S., Hormann K., Klein G. On the Lebesgue constant of barycentric rational interpolation at equidistant nodes. *Numerische Mathematik*. 2012. № 121. Iss. 3. P. 461–471.
6. Olevska Yu. B., Olevskiy V. I., Shapka I. V., and Naumenko T. S. Application of two-dimensional Padé-type approximants for reducing the Gibbs phenomenon, Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. *11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: proceedings*. New York : American Institute of Physics, Melville, NY, 2018. P. 060014-1–060014-8.
7. Denoising and detecting discontinuities using wavelets / Suresh V., Koteswarao S. Rao, Thiagarajan G., Das R. P. *Indian Journal of Science and Technology*. 2016. № 9(19). P. 1–4.
8. Louis A. K. Feature Reconstruction in Inverse Problems. *Inverse Problems*. 2011. Vol. 27. № 6. P. 1–25.
9. Lytvyn O. M., Pershina I. I., Lytvyn O. O., Kulyk S. I.: Mathematical modelling of discontinuous processes in a computer tomography by means of discontinuous splines. *7th World Congress on Industrial Process Tomography: proceedings (Krakow, Poland, 2-5 September 2013)*. Krakow, 2014. P. 441–450.

10. Литвин О. М., Першина Ю. І., Пасічник В. О. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної. *Вісник НТУ «ХП»*. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХП». 2015. № 6(1115). С. 67–76.

11. Lytvyn O. N., Pershina Y. I., Sergienko I. V. Estimation of discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol 50. №4. P. 594–602.

12. Approximation of Discontinuous Functions of Two Variables by Discontinuous Interpolation Splines Using Triangular Elements / Mezhujev V., Lytvyn, O. M., Pershyna I., Nechuiviter O. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2020. Vol. 14. № 1. P. 75–89.

13. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія. Київ : Наук. думка, 2017. 314 с.