



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Корсуну Кирилу Олеговичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання в'язкої рідини на мові Python  
з використанням паралельних обчислень

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1601 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель в'язкої рідини

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання  
в'язкої рідини

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз проблеми \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів роботи                                     | Терміни виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---------------------------------|----------|
| 1 | Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи | вересень 2019 р.                | виконано |
| 2 | Вибір та обґрунтування методу                           | жовтень – листопад 2019 р.      | виконано |
| 3 | Розробка алгоритму і програми                           | листопад – грудень 2019 р.      | виконано |
| 4 | Проведення аналітичних досліджень та розрахунків        | листопад – грудень 2019 р.      | виконано |
| 5 | Робота над текстом пояснювальної записки                | грудень 2019 р.                 | виконано |
| 6 | Представлення роботи на рецензію в ЕК                   | грудень 2019 р.                 | виконано |

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Артюх А.В.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 56 с., 12 табл., 14 рис., 1 дод., 21 джерела.

ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ, МЕТОД ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ, МЕТОД  $R$ -ФУНКЦІЙ, СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКУ, ПАРАЛЕЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ.

Об'єкт дослідження – рух в'язкої рідини.

Мета роботи – дослідити нестационарні течії в'язкої нестисливої рідини в скінченних однозв'язних областях.

Методи дослідження – метод послідовних наближень за нелінійністю, метод  $R$ -функцій, метод Гальоркіна для нестационарних задач.

Атестаційна робота присвячена застосуванню методу послідовних наближень за нелінійністю, методу  $R$ -функцій та методу Гальоркіна для нестационарних задач для чисельного аналізу течій в'язкої нестисливої рідини в скінченних однозв'язних областях. Побудовано алгоритм розв'язання нелінійної нестационарної задачі для функції течії та виконано його програмну реалізацію на мові Python з використанням паралельних обчислень. Обчислювальний експеримент було проведено для тестової задачі у одиничному квадраті.

## ABSTRACT

Introductory note: 56 pages, 12 tables, 14 figures, 1 appendix, 21 sources.

STREAM FUNCTION, GALERKIN METHOD, *R*-FUNCTIONS METHOD, STRUCTURE OF THE SOLUTION, PARALLEL COMPUTING

Object of research –the movement of a viscous fluid.

Purpose of work – investigate nonstationary flows of viscous incompressible fluid in finite single-connected regions.

Methods of research – the method of successive approximations on nonlinearity, the method of *R*-functions, the Galerkin method for nonstationary problems.

The attestation work is devoted to the application of the method of successive approximations on nonlinearity, the method of *R*-functions and the Galerkin method for nonstationary problems for numerical analysis of viscous incompressible fluid flows in finite single-connected domains. An algorithm for solving a nonlinear nonstationary problem for a flow function is constructed and its software implementation is performed in Python using parallel calculations. A computational experiment was performed for the test problem in a unit square.

## ЗМІСТ

|  | С. |
|--|----|
| Вступ .....  | 8  |
| 1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання в'язкої рідини та постановка задач дослідження ..... | 9  |
| 1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання в'язкої рідини .....                               | 9  |
| 1.1.1 Вербальна модель системи .....   | 9  |
| 1.1.2 Морфологічний опис системи .....   | 10 |
| 1.1.3 Функціональна модель системи .....   | 10 |
| 1.1.4 Інформаційна модель системи .....  | 12 |
| 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання в'язкої рідини .....                     | 15 |
| 1.2.1 Модель аналізу проблеми .....  | 15 |
| 1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій .....                       | 16 |
| 1.2.3 Модель вирішення проблеми .....  | 20 |
| 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....   | 20 |
| 1.3.1 Змістовна постановка задачі .....  | 20 |
| 1.3.2 Формальна постановка задачі .....  | 21 |
| 1.4 Постановка задач дослідження .....   | 22 |
| 2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....  | 23 |
| 2.1 Математичні моделі в'язких нестационарних течій .....  | 23 |
| 2.2 Структурний метод (метод <i>R</i> -функцій) .....  | 27 |
| 2.3 Метод математичного моделювання нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини .....                  | 36 |
| 2.4 Алгоритм розв'язання задачі .....  | 39 |
| 3 Програмна реалізація .....   | 40 |
| 3.1 Загальні засади паралельного підходу до імплементатії алгоритмів .....                                 | 40 |

|   |    |
|---|----|
|   | 7  |
| 3.2 Особливості програмної реалізації за допомогою Python ..... | 41 |
| 3.3 Опис програми.....  | 42 |
| 4 Результати обчислювального експерименту .....                 | 43 |
| 5 Аналіз можливих застосувань .....                             | 49 |
| Висновки .....  | 50 |
| Перелік джерел посилання .....                                  | 51 |
| Додаток А Лістинг програми .....                                | 53 |

## ВСТУП

Задачі, пов'язані з розрахунком нестационарних в'язких течій, виникають при моделюванні різних процесів в гідро- та аеродинаміки, теплоенергетиці, біомедицині, машинобудуванні тощо. Для знаходження розв'язку зазвичай використовуються чисельні методи, а саме метод скінчених елементів та метод скінчених різниць (сіток). Ці методи прості в реалізації, але не мають необхідної властивості універсальності, бо при переході до нової області необхідно генерувати нову сітку, замінювати складні ділянки межі простими, складеними, наприклад, з ділянок прямих. Найбільш повно і точно врахувати геометричну і аналітичну інформацію, яка міститься в математичній моделі, дозволяє використання конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій, що розробляється школою академіка НАН України В. Л. Рвачова. З використанням методу  $R$ -функцій задача гідродинаміки розв'язувалися в роботах С. В. Колосової, Т. І. Шейко, І. Г. Суворової, К. В. Максименко-Шейко, М. В. Сидорова. Проте в цих роботах не було приділено уваги програмній реалізації запропонованих методів, зокрема, з використанням паралельних обчислень. Тому тема атестаційної роботи є актуальною.

Метою атестаційної роботи є програмна реалізація на мові Python методу чисельного аналізу двовимірних нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини в скінчених однозв'язних областях на основі розв'язання нелінійної початково-крайової задачі для функції течії з використанням методу послідовних наближень за нелінійністю, методу  $R$ -функцій і методу Гальоркіна для нестационарних задач з використанням паралельних обчислень.

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання в'язкої рідини

### 1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Рух в'язкої нестисливої рідини».

Предмет аналізу – «Задача розрахунку течії в'язкої нестисливої рідини у скінченних однозв'язних областях».

Точка зору: дослідник.

Мета: представлення глобальної математичної моделі для вивчення різних фізичних процесів у в'язкій рідині.

На рис. 1.1 представлена модель типу «чорний ящик». Ця модель акцентує увагу лише на взаємодії системи із зовнішнім середовищем, а про її будову є тільки опосередкована інформація, що відображається у зв'язках із зовнішнім середовищем. Зв'язки з середовищем, що йдуть у систему (входи), дають можливість впливати на неї (для розглядуваної системи – це геометрія області, крайові умови, система диференціальних рівнянь), використовувати її як засіб, а зв'язки, що йдуть із системи (виходи), є результатами її функціонування, які або впливають на зміни у середовищі, або споживаються зовні системи (для розглядуваної системи – це наближений розв'язок для функції течії).

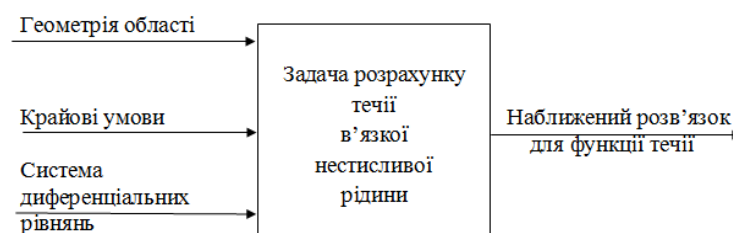


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

### 1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи розглянемо з опису зовнішнього середовища, яких наведено на рис. 1.2. Зовнішнє середовище – це сукупність всіх таких об'єктів за межами системи, зміна властивостей яких впливає на систему, а також тих об'єктів, чиї властивості змінюються в результаті поведінки системи.

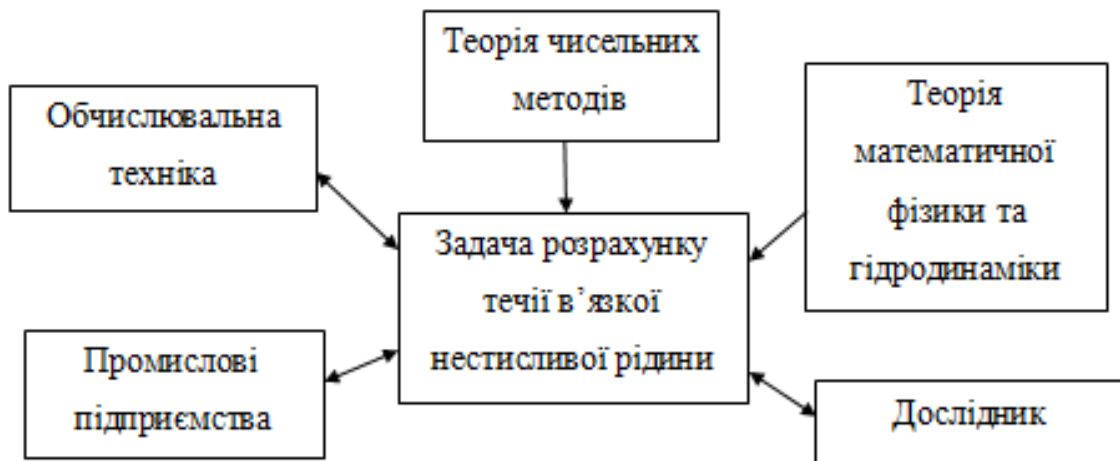


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Для розглядуваної системи зовнішнє середовище складається з аналітичного апарату (теорія числових методів і теорія математичної фізики та гідродинаміки), обчислювальної техніки, дослідника та промислових підприємств.

### 1.1.3 Функціональна модель системи

Контекстна діаграма є вершиною деревовидної структури діаграм і дає загальний опис системи та її взаємодії із зовнішнім середовищем. Вона зображує функціонування системи в цілому (рис. 1.3). В рамках методології IDEF0 процес представляється у вигляді набору елементів, які взаємодіють між собою, а також показуються ресурси, що споживаються кожною роботою.

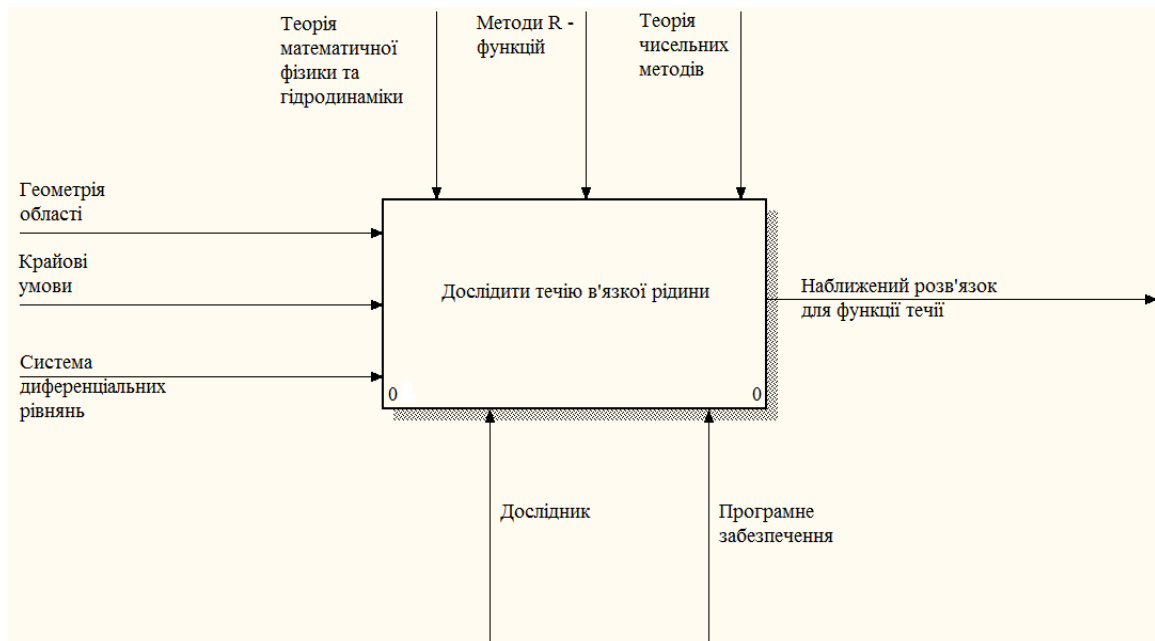


Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

Відповідно до рис. 1.3 на вхід подаються геометрія області, крайові умови, система диференціальних рівнянь, виходом є наближений розв'язок для функції течії, інструментами є теоріям математичної фізики, метод  $R$ -функцій, теорія чисельних методів, а керування відбувається за допомогою дослідника та програмного забезпечення.

Після опису системи в цілому проводиться розбиття її на великі фрагменти. Цей процес називається функціональної декомпозицією, а діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодія фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції. Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні і так далі, до досягнення потрібного рівня деталізації опису [4, 9].

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт на попередній діаграмі. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Задача розрахунку нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини». Декомпозиція контекстної діаграми (рис. 1.4) демонструє основні функції системи та їх деталізації за рівнями (рис. 1.5).

IDEF3 є методом, який має основною метою дати можливість аналітикам

описати ситуацію, коли процеси виконуються в певній послідовності, а також описати об'єкти, що беруть участь спільно в одному процесі.

На рис. 1.4 наведено декомпозиція роботи «Дослідити нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини»: рівень A0, а на рис. 1.5 наведено декомпозицію роботи «Отримати систему диференціальних рівнянь»: рівень A1. Опис роботи «Дослідити нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини»: рівень A0 (в нотації IDEF3) наведено на рис. 1.6, а опис роботи «Отримати систему диференціальних рівнянь»: рівень A1 (в нотації IDEF3) наведено на рис. 1.7.

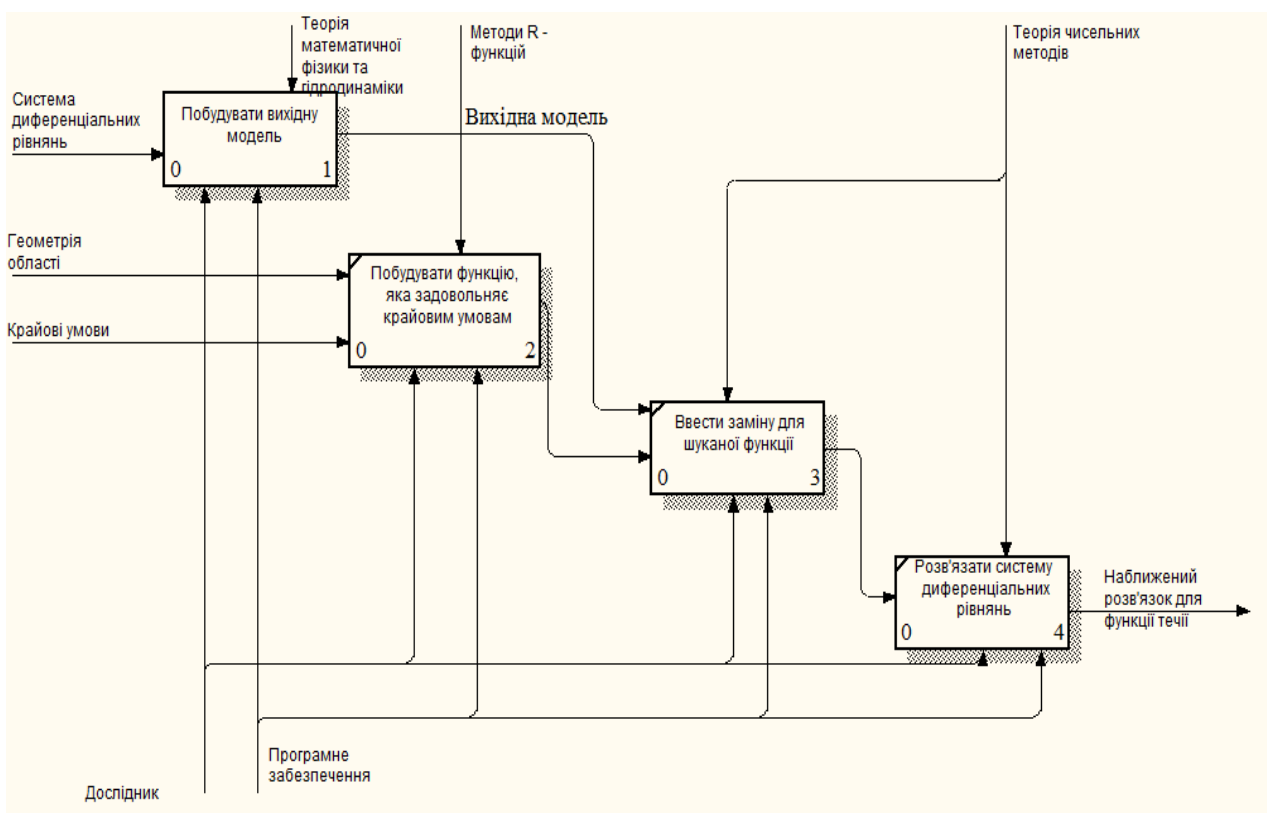


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Дослідити нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини»: рівень A0

#### 1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель системи відображає відносини між елементами системи у вигляді структур даних, акцентуючи увагу дослідника на складі і взаємозв'язку потоків даних.

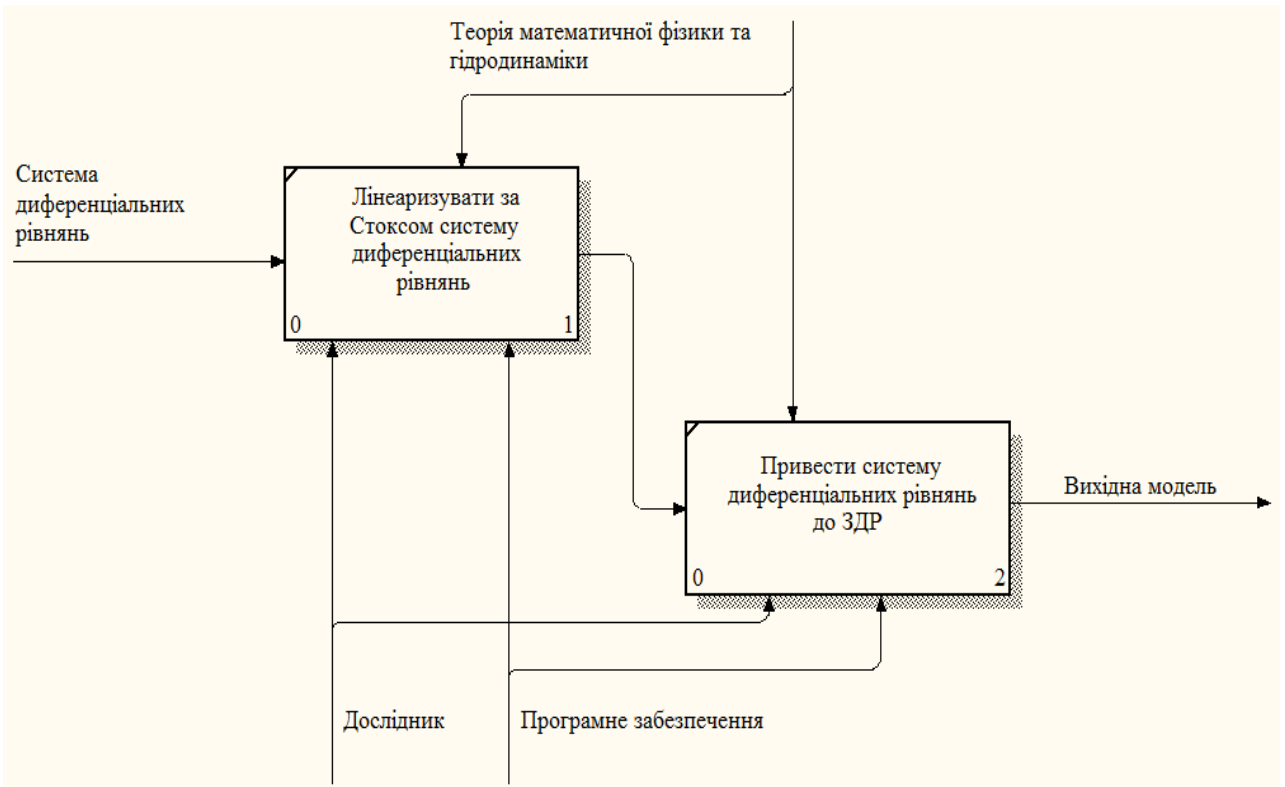


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Отримати систему диференціальних рівнянь»: рівень A1

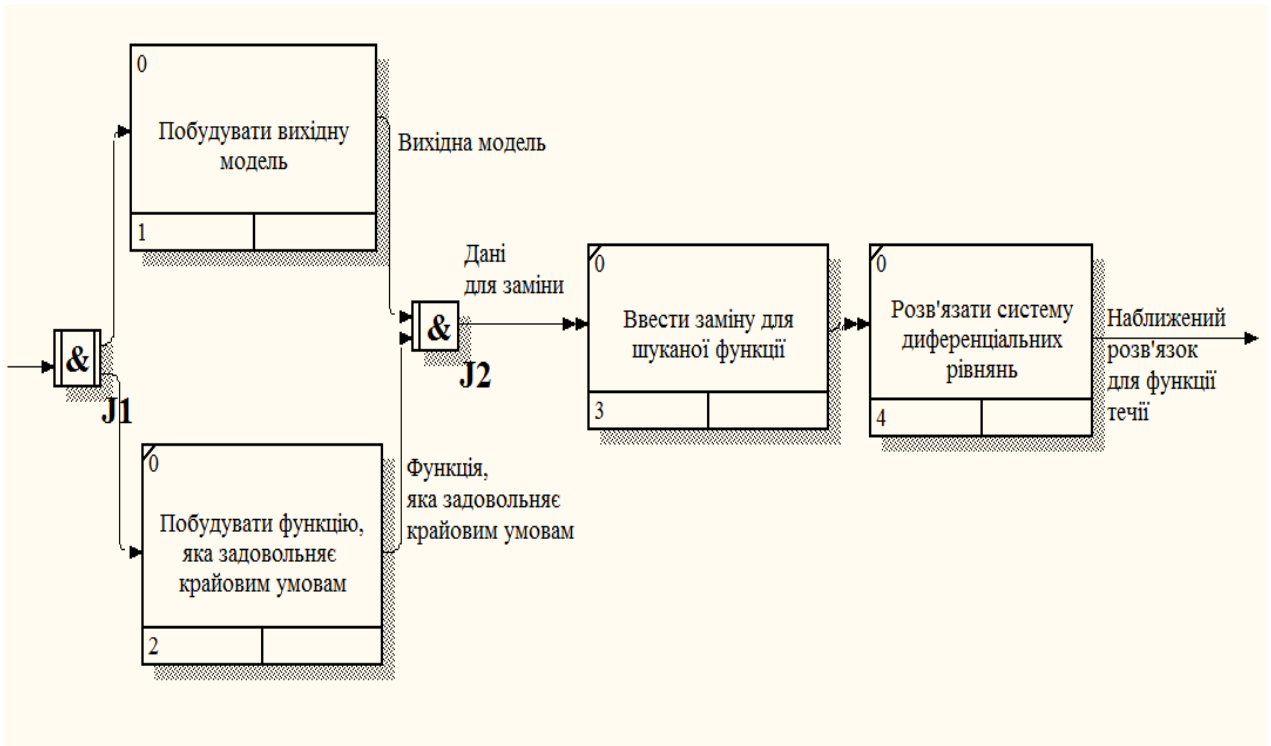


Рисунок 1.6 – Опис роботи «Дослідити нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

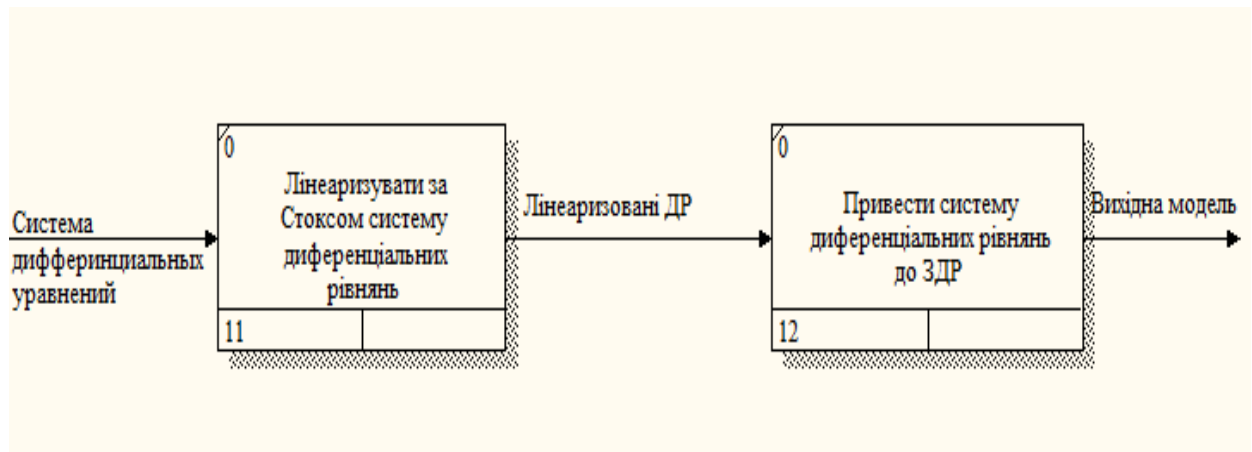


Рисунок 1.7 – Опис роботи «Отримати систему диференційних рівнянь»: рівень A1 (в нотації IDEF3)

Відображення структури системи, у якій зв'язками є інформаційні потоки, можна здійснити за допомогою діаграм потоків даних DFD (Date Flow Diagrams). Ці діаграми використовують для аналізу та моделювання інформаційних систем з метою мінімізації потоків даних та зменшення їх об'єму, виявлення як дублювання інформації, так і дублювання шляхів її передавання. DFD відображають джерела та споживачів інформації, вид та напрямок передачі інформації, елементи накопичення та процеси перетворення, при цьому використовуються різні засоби відображення елементів (нотації).

DFD-діаграма представлена на рис. 1.8, а DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. 1.9.

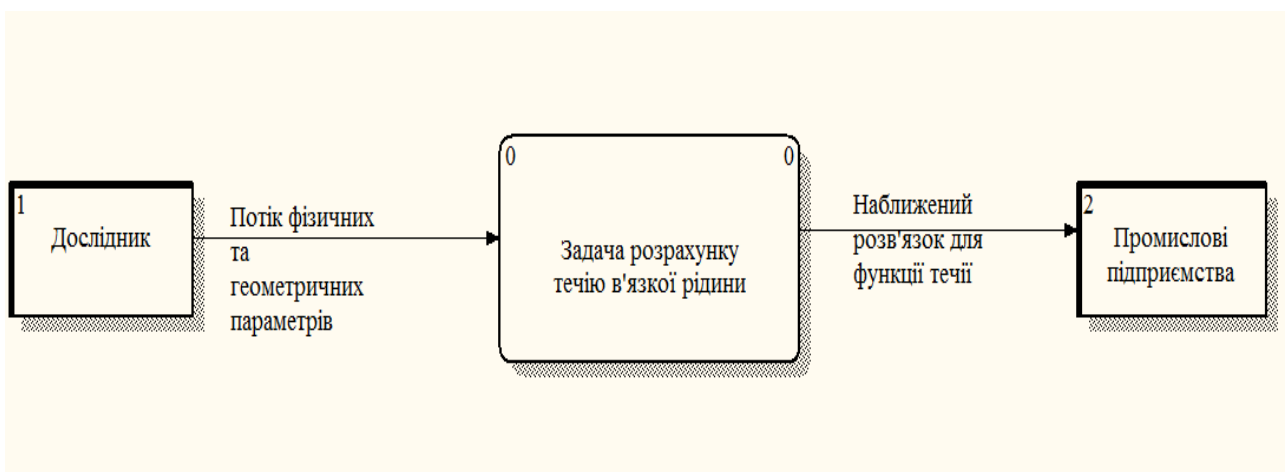


Рисунок 1.8 – DFD-діаграма

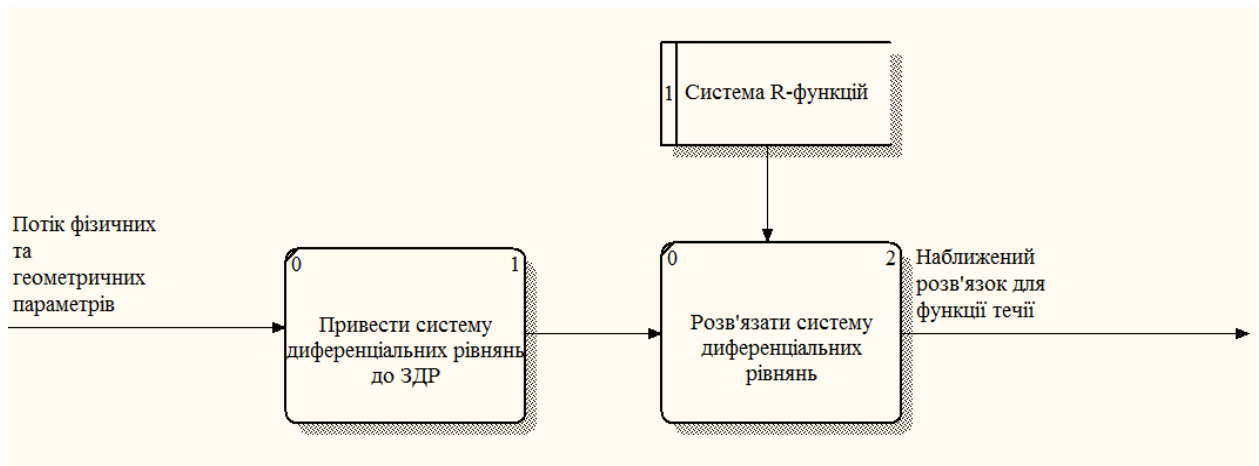


Рисунок 1.9 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання в'язкої рідини

### 1.2.1 Модель аналізу проблеми

Досліджуємо задачу про вибір методу, яким буде розв'язуватися задача розрахунку нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини. Оберемо таку систему критеріїв:

Критерій 1 (K1): точно описує геометрію області.

Критерій 2 (K2): дозволяє будувати структуру розв'язку задачі.

Критерій 3 (K3): отримує наближений розв'язок у вигляді аналітичної формули.

Критерій 4 (K4): швидкість збіжності.

Критерій 5 (K5): час роботи програми.

Обирати будемо з такої множини альтернатив:

Альтернатива 1 (A1): сіткові методи.

Альтернатива 2 (A2): метод  $R$ -функцій.

Альтернатива 3 (A3): метод скінченних елементів.

Ієрархічна структура проблеми вибору наведена на рис. 1.10.

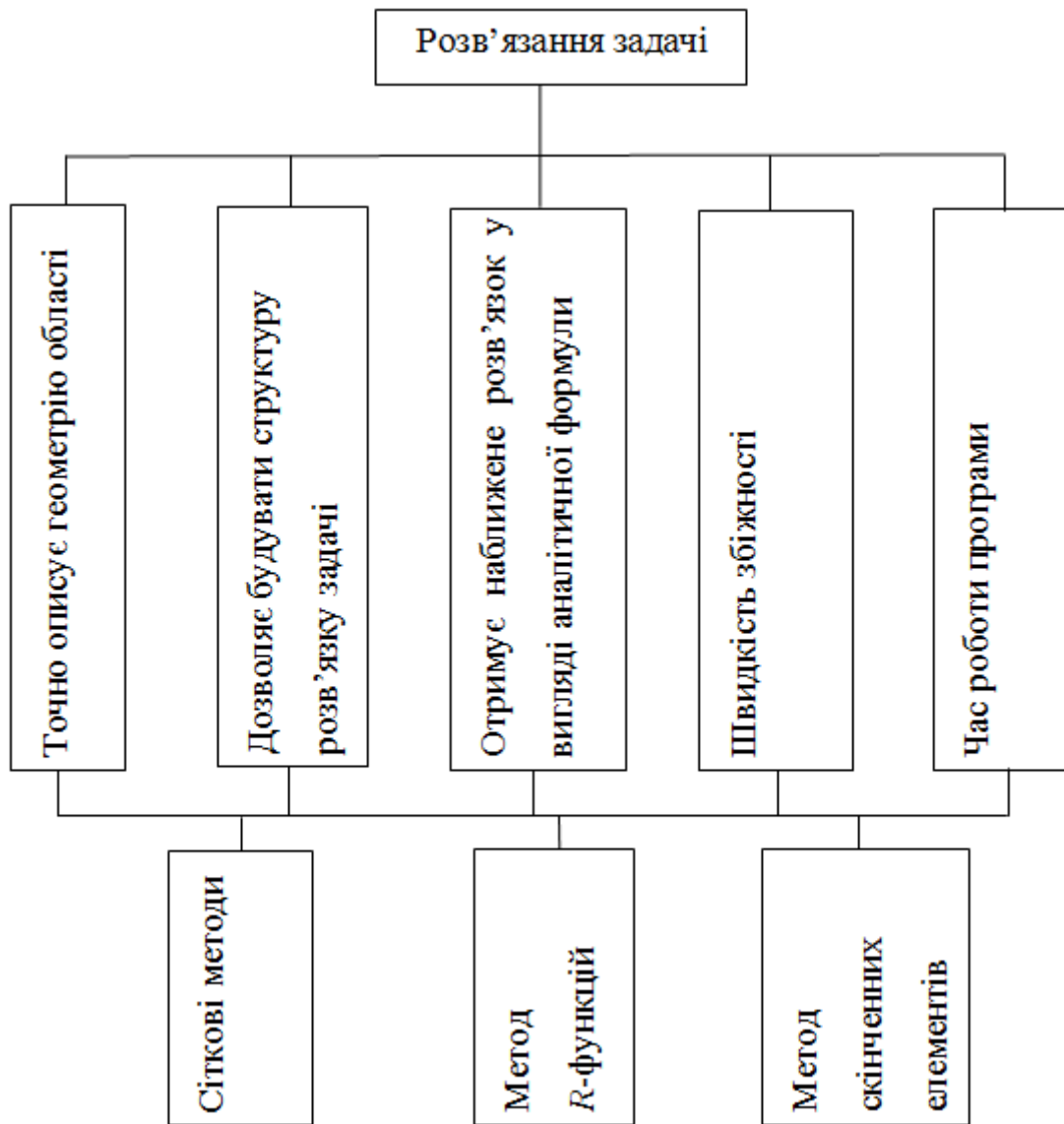


Рисунок 1.10 – Ієрархічна модель процесу аналізу розв'язання задачі

### 1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Спочатку сформуємо матрицю попарних порівнянь для елементів першого рівня ієрархій (тобто критеріїв) і розрахуємо вектор локальних пріоритетів

(табл. 1.1). Індекс узгодженості  $(IU) = \frac{5,58 - 5}{5 - 1} = 0,12$ , випадкова узгодже-

ність = 1,12, відносна узгодженість  $(BU) = \frac{0,12}{1,12} = 0,10 = 10\%$ .

Таблиця 1.1 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв

| Критерії оцінювання | K1            | K2            | K3            | K4            | K5 | Оцінки компонентів | Вектор пріоритетів | Величина значущості |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----|--------------------|--------------------|---------------------|
| K1                  | 1             | 3             | 8             | 9             | 3  | 3,65               | 0,482              | 0,917               |
| K2                  | $\frac{1}{3}$ | 1             | 9             | 9             | 4  | 2,55               | 0,333              | 1,506               |
| K3                  | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{9}$ | 1             | $\frac{1}{3}$ | 2  | 0,39               | 0,051              | 1,100               |
| K4                  | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 3             | 1             | 1  | 0,51               | 0,068              | 1,389               |
| K5                  | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1             | 1  | 0,46               | 0,060              | 0,670               |
| Всього              |               |               |               |               |    | 7,56               |                    | 5,580               |

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив за кожним критерієм (табл. 1.2 – 1.6).

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

| Критерій 1 | A1 | A2            | A3            | Власний вектор | Вектор пріоритетів | Величина значущості |
|------------|----|---------------|---------------|----------------|--------------------|---------------------|
| A1         | 1  | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | 0,44           | 0,09               | 0,836               |
| A2         | 6  | 1             | 8             | 3,63           | 0,77               | 0,998               |
| A3         | 2  | $\frac{1}{8}$ | 1             | 0,62           | 0,13               | 1,273               |
| Всього     |    |               |               | 4,69           |                    | 3,107               |

Для таблиці 1.2  $IУ = 0,05$ ,  $ВУ = 0,05 = 5\%$ .

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

| Критерій 2 | A1            | A2            | A3 | Власний вектор | Вектор пріоритетів | Величина значущості |
|------------|---------------|---------------|----|----------------|--------------------|---------------------|
| A1         | 1             | $\frac{1}{4}$ | 3  | 0,90           | 0,22               | 1,202               |
| A2         | 4             | 1             | 5  | 2,71           | 0,67               | 0,97                |
| A3         | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | 1  | 0,41           | 0,10               | 0,905               |
| Всього     |               |               |    | 4,02           |                    | 3,077               |

Для таблиці 1.3  $IУ = 0,042$ ,  $ВУ = 0,047 = 4,7\%$ .

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

| Критерій 3 | A1            | A2 | A3            | Власний вектор | Вектор пріоритетів | Величина значущості |
|------------|---------------|----|---------------|----------------|--------------------|---------------------|
| A1         | 1             | 3  | $\frac{1}{7}$ | 0,754          | 0,153              | 1,275               |
| A2         | $\frac{1}{3}$ | 1  | $\frac{1}{8}$ | 0,346          | 0,070              | 0,844               |
| A3         | 7             | 8  | 1             | 3,825          | 0,776              | 0,984               |
| Всього     |               |    |               | 4,925          |                    | 3,103               |

Для таблиці 1.4  $IУ = 0,052$ ,  $ВУ = 0,057 = 5,7\%$ .

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

| Критерій 4 | A1            | A2            | A3 | Власний вектор | Вектор пріоритетів | Величина значущості |
|------------|---------------|---------------|----|----------------|--------------------|---------------------|
| A1         | 1             | $\frac{1}{2}$ | 5  | 1,357          | 0,341              | 1,09                |
| A2         | 2             | 1             | 6  | 2,28           | 0,576              | 0,961               |
| A3         | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | 1  | 0,321          | 0,081              | 0,973               |
| Всього     |               |               |    | 3,958          |                    | 3,024               |

Для таблиці 1.5  $IУ = 0,014$ ,  $ВУ = 0,016 = 1,6\%$ .

Таблиця 1.6 – Порівняння за п'ятим критерієм

| Критерій 5 | A1            | A2            | A3 | Власний вектор | Вектор пріоритетів | Величина значущості |
|------------|---------------|---------------|----|----------------|--------------------|---------------------|
| A1         | 1             | $\frac{1}{2}$ | 4  | 1,259          | 0,323              | 1,051               |
| A2         | 2             | 1             | 6  | 2,289          | 0,587              | 0,979               |
| A3         | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | 1  | 0,346          | 0,088              | 0,978               |
| Всього     |               |               |    | 3,894          |                    | 3,008               |

Для таблиці 1.6  $IУ = 0,0046$ ,  $ВУ = 0,0051 = 0,51\%$

### 1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити остаточні підрахунки на прийняти рішення про вибір методу. Розрахуємо вектор узагальнених пріоритетів. У таблиці 1.7 наведені остаточні результати. Як бачимо, максимальна компонента вектора узагальнених пріоритетів відповідає другій альтернативі, тобто обираємо метод  $R$ -функцій для розв'язання задачі розрахунку течії в'язкої нестисливої рідини.

Таблиця 1.7 – Остаточні розрахунки

| Критерій<br>/Альтернатива | K1   | K2   | K3    | K4    | K5    | Узагальнені<br>пріоритети |
|---------------------------|------|------|-------|-------|-------|---------------------------|
| A1                        | 0,09 | 0,22 | 0,153 | 0,341 | 0,323 | 0,166                     |
| A2                        | 0,77 | 0,67 | 0,070 | 0,576 | 0,587 | 0,668                     |
| A3                        | 0,13 | 0,10 | 0,776 | 0,081 | 0,088 | 0,144                     |

## 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

### 1.3.1 Змістовна постановка задачі

Математичне моделювання та аналіз течій в'язких рідин широко застосовується в багатьох прикладних задачах. Розглянемо змістовну постановку задачі. Нехай деяка плоска область  $\Omega$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  заповнена в'язкою нестисливою рідиною. Рідина характеризується фізичними параметрами  $\nu$  – кінематична в'язкість та  $\rho$  – густина. Межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  може складатися з ділянок двох типів: тверді непроникні та проникні стінки. На непроникних стінках виконуються умови прилипання, які означають, що між поверхнею твердої стінки та в'язкою рідиною діють сили молекулярного зв'язку, що призводить до того, що вектор швидкості рідини в точках, які примикають до твер-

дої непроникної стінки, збігається за величиною і напрямком з вектором швидкості руху точок цієї стінки [7, 8]. Необхідно визначити вектор  $\mathbf{v}$  швидкостей в'язкої рідини в області  $\Omega$ .

### 1.3.2 Формальна постановка задачі

При розгляді течій в'язкої нестисливої рідини у плоских однозв'язних областях (плоскопаралельні течії) зручно від вектору швидкостей  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  переходити до функції течії, яка вводиться співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Тоді для функції течії  $\psi(x, y, t)$  можна поставити початково-крайову задачу вигляду [1, 2]

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi = J(\Delta \psi, \psi) \text{ у } \Omega, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$\psi|_{\partial \Omega} = f_0(s, t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial \Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial \Omega, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (1.4)$$

де  $\nu$  – кінематична в'язкість;

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \text{ – бігармонічний оператор;}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа;}$$

$$J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x};$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня до  $\partial\Omega$  нормаль;

Функції  $f_0(s, t)$  і  $g_0(s, t)$  задаються виходячи з задання  $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}$ , а функція  $\psi_0(x, y)$  – виходячи з задання  $\mathbf{v}|_{t=0}$ . Методика їх завдання розглянута в [17].

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного системного аналізу можна сформулювати такі мету та задачі атестаційної роботи.

Метою атестаційної роботи є застосування структурного методу (методу  $R$ -функцій) для отримання у наближено-аналітичному вигляді розв'язку задачі математичного моделювання плоских нестационарних в'язких течій з використанням можливостей мови Python для організації паралельних обчислень.

Для досягнення поставленої мети треба вирішити наступні задачі:

- провести аналіз математичних моделей течій в'язкої рідини;
- ознайомитися з методами отримання наближено-аналітичних розв'язків для нестационарних нелінійних задач математичної фізики (зокрема, методом  $R$ -функцій та методом послідовних наближень за нелінійністю);
- розробити чисельний алгоритм знаходження у наближено-аналітичному вигляді розв'язку задачі для функції течії;
- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму на мові Python з реалізацією паралельних обчислень;
- провести обчислювальний експеримент для тестової задачі.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Математичні моделі в'язких нестационарних течій

Математичне моделювання та аналіз течій в'язких рідин широко застосовується в багатьох прикладних задачах, зокрема в задачах обтікання різних тіл в'язкою рідиною або у задачах перемішування. Ці проблеми пов'язані з багаточисельними застосуваннями в авіаційній, суднобудівній, хімічній та інших галузях промисловості.

Рух в'язкої нестисливої рідини описується системою рівнянь Нав'є-Стокса [7, 8]

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} &= F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \Delta V_1, \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} &= F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \Delta V_2, \\ \frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + \nu \Delta V_3\end{aligned}\quad (2.1)$$

та рівнянням нерозривності

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \quad (2.2)$$

Тут  $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$  – вектор швидкості рідини,  $P$  – тиск,  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$  – вектор масової сили,  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості,  $\rho$  – густина рідини.

Перейдемо у рівняннях (2.1), (2.2) до безрозмірних змінних за формулами  $v_x = \frac{V_x}{U_0}$ ,  $v_y = \frac{V_y}{U_0}$ ,  $v_z = \frac{V_z}{U_0}$ ,  $x = \frac{X}{L}$ ,  $y = \frac{Y}{L}$ ,  $z = \frac{Z}{L}$ , де  $U_0$  – характерна швид-

кість,  $L$  – характерна довжина.

Надалі розглядатимемо плоску задачу. При розв'язанні задач цього класу виділяють два глобальних підходи. Перший з них – це розв'язування системи Нав'є-Стокса в природних змінних «швидкість-тиск», другий – це розв'язування рівнянь для функції течії  $\psi$  чи еквівалентної системи в змінних «функція течії-завихореність».

Для плоскої стаціонарної течії у випадку, коли масові сили відсутні, система Нав'є-Стокса в природних змінних приймає вигляд

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

а система в змінних «функція течії-завихореність» має вигляд

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nu \Delta \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2.6)$$

$$-\Delta \psi = \zeta. \quad (2.7)$$

Порівняльні переваги  $(v_x, v_y, p)$ -системи та  $(\psi, \zeta)$ -системи залежать від розв'язуваної задачі. Суттєвим недоліком системи (2.3) – (2.5) є те, що відсутні умови на межі для тиску і при побудові чисельного методу необхідно на кожному кроці слідкувати за виконанням рівняння нерозривності (2.5). Для цього будуються додаткові обчислювальні процедури, які ускладнюють процес розв'язування задачі. Система (2.6), (2.7) має низку переваг. Оскільки вона не містить тиску – немає необхідності піклуватись про соленоїдальність вектору швидкості. Ця умова виконана автоматично, оскільки введення функції течії  $\psi$

співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.8)$$

перетворює рівняння нерозривності (2.5) в тотожність. Проте виникають труднощі, відсутні в початковій постановці, пов'язані із завданням крайових умов для завихореності, які відсутні у фізичній постановці задачі. Це призводить до того, що існує багато методик розрахунку рівнянь Нав'є-Стокса в  $(\psi, \zeta)$ -формі, що застосовуються без достатнього теоретичного обґрунтування..

Більш привабливим з цієї точки зору є еквівалентне (2.6), (2.7) рівняння для функції течії

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = 0 \text{ у } \Omega. \quad (2.9)$$

В цьому випадку із фізичних міркувань можна задати  $\psi|_{\partial\Omega}$  та  $\left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega}$ , де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega$ .

Нехай на  $\partial\Omega$  задано розподіл швидкості рідини

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}^*(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad (2.10)$$

причому  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} ds = 0$ , де  $\mathbf{n}$  – вектор зовнішньої нормалі до  $\partial\Omega$ . Тоді

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.11)$$

де  $\boldsymbol{\tau}$  – одиничний вектор, що направлений за дотичною до  $\partial\Omega$ .

Інтегруючи перше зі співвідношень з (2.11) вздовж  $\partial\Omega$ , отримуємо крайові умови на  $\partial\Omega$  найбільш загального вигляду

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s, t), \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s, t), \quad s \in \partial\Omega. \quad (2.12)$$

Крім того, для рівняння (2.9) потрібно задати початкову умову

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y). \quad (2.13)$$

Отже, для визначення поля швидкостей в'язкої рідини у випадку плоско-паралельної в'язкої течії потрібно розв'язати початково-крайову задачу (2.9), (2.12), (2.13) та знайти поле швидкостей за формулами (1.6). Втім розробка ефективних чисельних методів розв'язання рівняння (2.9) ускладнюється четвертим порядком цього рівняння та його нелінійністю.

Найбільш уживаними чисельними методами розв'язання задач гідродинаміки в'язкої рідини є метод скінченних різниць (МСР) та метод скінченних елементів (МСЕ).

У МСР відбувається заміна неперервної області  $\Omega$  скінченним набором точок – сіткою, а похідні у диференціальних рівнянь апроксимуються відношенням скінченних різниць. Отримані так системи алгебраїчних рівнянь розв'язуються якимось ітераційними методами. Серед переваг МСР слід відзначити простоту його програмної реалізації, проте недоліками цього методу є відсутність зручних оцінок похибки та те, що наближеннями замінюються як область, так і самі диференціальні рівняння.

Застосування МСЕ полягає у розбитті області  $\Omega$  на набір підобластей (звичай трикутних) з наступною побудовою скінченних елементів – фінітних базисних функцій, за якими і розкладається шуканий розв'язок. При цьому від диференціальних рівнянь переходять до деяких еквівалентних інтегральних співвідношень (варіаційне формулювання задачі), а для визначення коефіцієн-

тів розкладу наближеного розв'язку отримують систему алгебраїчних чи диференціальних рівнянь. Для реалізації МСЕ розроблено багато стандартних програм та пакетів, але в цього методу є суттєвий недолік, який полягає в тому, що при розбитті області зазвичай криволінійні ділянки межі замінюються ломаною, що вписана в межу  $\partial\Omega$ .

Альтернативою МСР і МСЕ при розв'язанні задач математичного моделювання різних фізико-механічних полів (зокрема, гідродинамічних) є використання методу  $R$ -функцій, запропонованого академіком НАН України В. Л. Рвачовим [15, 16]. У обчислювальній гідродинаміці метод  $R$ -функцій застосовувався Колосовою С. В. (течії ідеальної рідини в каналах і задачі обтікання тіл [6]), Максименко-Шейко К. В. (течії в'язкої рідини в областях з гвинтовою симетрією [10]), Сидоровим М. В. (стаціонарні течії в'язкої рідини в однозв'язних і багатозв'язних областях) [5], Слісаренком О. П. (задачі теплообміну в трубах складного перетину) [18], Суворовою І. Г. (стаціонарні течії в'язкої рідини) [14], Шейко Т. І. (магніто-гідродинамічні течії) [13], Артюхом А.В. (нестационарні течії в'язкої нестисливої рідини у однозв'язних областях) [2], Ламтюговою С.М. (задачі обтікання тіл обертання та циліндричних тіл) [21] та іншими.

## 2.2 Структурний метод (метод $R$ -функцій)

При моделюванні плоских фізико-механічних полів метод  $R$ -функцій застосовується за наступною схемою:

– точний аналітичний опис геометрії області  $\Omega$ , тобто побудова такої функції  $\omega(x, y)$ , що

$$\omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega, \omega(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1,$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня до  $\partial\Omega$  нормаль;

– продовження крайових умов всередину області  $\Omega$ , тобто довизначення функцій та диференціальних операторів, заданих на межі  $\partial\Omega$ , у внутрішніх точках області  $\Omega$ ;

– побудова загальної структури розв’язку, тобто жмутка функцій, яка залежить від деяких невизначених компонент-функцій і при будь-якому їх виборі точно задовольняє всім крайовим умовам задачі;

– побудова наближеного розв’язку, тобто апроксимація невизначених компонент, що входять до структурної формули, одним із чисельних методів.

Розглянемо основні положення теорії методу  $R$ -функцій [15, 16].

$R$ -функцією (функцією В. Л. Рвачова), що відповідає розбиттю числової осі на проміжки  $(-\infty, 0)$  та  $(0, +\infty)$ , називається така функція, знак якої повністю визначається знаками її аргументів, тобто функція  $z = f(x, y)$  називається  $R$ -функцією, якщо існує така булева функція  $F$ , що  $S z(x, y) = F S x, S(y)$ ,

де двозначний предикат  $S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ . В цьому випадку булева функція  $F$

називається супроводжуючою.

Найбільш уживаною системою  $R$ -функцій є система  $\mathfrak{R}_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv -x, \\ x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee_0 y &\equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Супроводжуючими булевими функціями для них є відповідно  $\neg, \wedge, \vee$ .

Розглянемо спочатку розв’язання оберненої задачі аналітичної геометрії за допомогою методу  $R$ -функцій. Нехай в  $\mathbb{R}^2$  задано геометричний об’єкт  $\Omega$  з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$  і треба побудувати функцію  $\omega(x, y)$ , яка є додатною всередині  $\Omega$ , від’ємною поза межами  $\Omega$  і дорівнює нулю на  $\partial\Omega$ . Отже, рівняння  $\omega(x, y) = 0$  буде в неявній формі визначати геометричне місце точок,

яке відповідає межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$ .

Нехай область  $\Omega$  можна побудувати з більш простих областей  $\Omega_1 = \{\omega_1(x, y) \geq 0\}$ , ...,  $\Omega_m = \{\omega_m(x, y) \geq 0\}$ , де  $\omega_i(x, y)$  – елементарні функції,  $i = 1, 2, \dots, m$ , за допомогою операцій об'єднання  $\cup$ , перетину  $\cap$  та доповнення  $\neg$  множин. Тоді області  $\Omega$  можна поставити у відповідність предикат

$$\Omega = F \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m, \quad (2.14)$$

який приймає значення 1, якщо  $(x, y) \in \Omega \cup \partial\Omega$ , і 0, якщо  $(x, y) \notin \Omega \cup \partial\Omega$ .

Перехід від предикатної форми задання області (2.14) до звичайної, яка прийнята в аналітичній геометрії, відбувається за допомогою формальної заміни  $\Omega$  на  $\omega(x, y)$ ,  $\Omega_i$  на  $\omega_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , а символів  $\{\cap, \cup, \neg\}$  – на символи  $R$ -операцій  $\{\wedge_0, \vee_0, -\}$  відповідно. В результаті отримаємо єдиний аналітичний вираз  $\omega(x, y)$ , який визначає в елементарних функціях шукане рівняння  $\omega(x, y) = 0$  межі  $\partial\Omega$ . При цьому для внутрішніх точок області буде виконуватися нерівність  $\omega(x, y) > 0$ , а для зовнішніх –  $\omega(x, y) < 0$ .

Рівняння  $\omega(x, y) = 0$  межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  називається нормалізованим на межі  $\partial\Omega$ , якщо функція  $\omega(x, y)$  задовольняє умовам  $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \text{ де } \mathbf{n} \text{ – вектор зовнішньої нормалі до } \partial\Omega, \text{ визначений в її регуляр-}$$

них точках.

Як приклад, розглянемо область  $\Omega$ , яка представляє собою прямокутник, обмежений прямими  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ . Вводячи області  $\Omega_1 = \{(x, y) : x(1-x) \geq 0\}$  – вертикальна смуга між прямими  $x = 0$  і  $x = 1$ ;  $\Omega_2 = \{(x, y) : y(1-y) \geq 0\}$  – горизонтальна смуга між прямими  $y = 0$  і  $y = 1$ , бачимо, що область  $\Omega$  може бути подана у вигляді

$$\bar{\Omega} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

Розглядаючи  $\Omega_1$ , и  $\Omega_2$  як двозначні предикати, можна записати предикатне рівняння області  $\bar{\Omega}$

$$\bar{\Omega} = \Omega_1 \wedge \Omega_2 = 1.$$

Замінюючи тепер  $\Omega_1$ , і  $\Omega_2$ , на ліві частини визначаючих їх нерівностей, а кон'юнкцію  $\wedge$  – на  $\mathfrak{R}_0$ -кон'юнкцію  $\wedge_0$ , отримаємо функцію

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)] = \\ &= x(1-x) + y(1-y) - \sqrt{x^2(1-x)^2 + y^2(1-y)^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Функція (2.15) як раз і матиме властивості

$$\omega(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega, \omega(x, y) < 0 \text{ зовні } \Omega, \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1,$$

де  $\mathbf{n}$  – вектор зовнішньої нормалі до  $\partial\Omega$ , визначений в її регулярних точках.

Як було зазначено вище, одним з етапів застосування методу  $R$ -функцій в задачах математичного моделювання фізико-механічних полів є продовження крайових умов всередину області. Наведемо два основних підходи [15, 16]. Які для цього використовуються.

Нехай в точках межі  $\partial\Omega$  функція  $\varphi_0$  задана у вигляді

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_{0,1}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_{0,n}(s), & s \in \partial\Omega_n, \end{cases}$$

де ділянки межі  $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$  попарно різні, не мають спільних внутрішніх то-

чок і  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$ .

Нехай далі  $\varphi_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , такі, що  $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_{0,i}$ , а  $\omega_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , такі, що  $\omega_i(x, y) = 0$  на  $\partial\Omega_i$  і  $\omega_i(x, y) > 0$  в  $\text{cl}\Omega \setminus \partial\Omega_i$ . Тоді функція

$$\varphi = \frac{\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \dots + \frac{\varphi_n}{\omega_n}}{\frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j} \quad (2.16)$$

має властивість

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0.$$

Формулу (2.16) називають формулою «склеювання» і позначають  $\varphi = \text{ЕС}\varphi_0$ , де ЕС називають оператором склеювання межових значень.

Другий підхід пов'язаний з продовженням диференціальних операторів, які задані на межі  $\partial\Omega$ , в середину області  $\Omega$ . Якщо  $\omega = 0$  – нормалізоване рівняння межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$ , то оператор  $D_1$ , що діє за правилом

$$D_1 u \equiv (\nabla\omega, \nabla u) = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

задовольняє в регулярних точках  $\partial\Omega$  рівність

$$-D_1 u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня до  $\partial\Omega$  нормаль.

Зазначимо, що вираз  $D_1 u$  має сенс всюди в  $\text{cl}\Omega$  і за допомогою оператора

$D_1$  можна будувати жмутки функцій, нормальна похідна яких, або довільна лінійна комбінація нормальної похідної і самої функції на межі області приймає задані значення.

Загальною структурою розв'язку крайової задачі називається вираз  $u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m)$ , який при довільному виборі компонент вектор-функції  $\Phi$  точно задовольняє усім крайовим умовам задачі. Тут  $B$  – оператор, що залежить від геометрії області  $\Omega$  і ділянок  $\partial\Omega_i$  її межі, а також операторів крайових умов, але не залежний від вигляду оператора  $A$  і функції  $f$ .

Отже, структура розв'язку продовжує крайові умови всередину області.

Відомо [17], що крайові умови (2.12) задовольняє жмуток функцій

$$\psi = f - \omega(g + D_1 f) + \omega^2 \Phi, \quad (2.17)$$

де  $f = ECf_0$ ,  $g = ECg_0$ ;

$\omega = 0$  – нормалізоване рівняння  $\partial\Omega$ ;

$\Phi$  – невизначена компонента.

Майже усі наближені методи розв'язання крайових задач для рівнянь у частинних похідних базуються на зведенні нескінченновимірної задачі до скінченновимірної. Для нестационарних задач в методі  $R$ -функцій це досягається шляхом подання невизначеної компоненти  $\Phi$  структури розв'язку у вигляді скінченної суми

$$\Phi(x, y, t) \approx \Phi_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(x, y),$$

де  $\varphi_k(x, y)$  – відомі елементи повної функціональної послідовності;

$c_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , – невідомі коефіцієнти.

Невідомі коефіцієнти  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , обираються так, щоб найкраще (у деякому сенсі) задовольнити рівняння крайової задачі.

Одним з методів знаходження функцій  $c_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , є метод Гальоркіна для нестационарних задач [11].

Розглянемо задачу Коші для нестационарного операторного рівняння

$$\frac{d}{dt}Au + Bu = f t, \quad (2.18)$$

тобто задачу інтегрування рівняння (2.18) при початковій умові

$$u|_{t=0} = \varphi. \quad (2.19)$$

Вважатимемо, що  $A, B$  – оператори, які діють у деякому сепарабельному гільбертовому просторі  $H$ ;  $f t$  – задана, а  $u = u t$  – шукана функції зі значеннями у просторі  $H$ ; крім того,  $\varphi \in H$ .

Припустимо, що оператори  $A$  і  $B$  – самоспряжені додатно означені, незалежні від часу  $t$ . Прийmemo, що їх області визначення  $D_A$  і  $D_B$  перетинаються по деякій множині  $D$ , всюди щільній в даному гільбертовому просторі  $H$  і в кожному з енергетичних просторів  $H_A$  і  $H_B$ . Тоді простори  $H_A$  і  $H_B$  перетинаються по деякій множині  $D_0 \supset D$ , щільній в кожному з них.

Множина  $D_0$  буде гільбертовим простором, якщо в ввести на ній скалярний добуток формулою

$$[u, v]_0 = (Au, v) + (Bu, v) = [u, v]_A + [u, v]_B.$$

Новий гільбертів простір позначимо через  $H_0$ . Норму в  $H_0$  позначатимемо через

$$\|u\|_0^2 = \|u\|_A^2 + \|u\|_B^2.$$

Якщо простір  $H_0$  не є повним, то поповнимо його у звичайний спосіб. Зрозуміло, що множина  $D_0$  є щільною у  $H_0$ . Вважатимемо також, що  $\varphi \in H_0$ .

Суть методу Бубнова-Гальоркіна полягає в наступному. Візьмемо координатну систему

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots,$$

що задовольняє таким умовам:

- а)  $\varphi_k \in H_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;
- б) при будь-якому  $n$  елементи  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  лінійно незалежні;
- в) система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  повна в  $H_0$  (а отже, і в  $H_A$  та  $H_B$ ).

Наближений розв'язок задачі (2.18), (2.19) шукатимемо у вигляді

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k. \quad (2.20)$$

Коефіцієнти  $c_k(t)$  визначаються з системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \frac{dc_k(t)}{dt} [\varphi_k, \varphi_j]_A + \sum_{k=1}^n c_k(t) [\varphi_k, \varphi_j]_B = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.21)$$

при початкових умовах

$$c_k(0) = \alpha_k. \quad (2.22)$$

Запишемо задачу (2.21), (2.22) в матричному вигляді. Введемо такі позначення для матриць:

$$\mathbf{R}_{A_n} = \|\|[\varphi_k, \varphi_j]_A\|\|_{n \times n}, \quad \mathbf{R}_{B_n} = \|\|[\varphi_k, \varphi_j]_B\|\|_{n \times n}$$

и для векторів

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^T, \\ \mathbf{f}(t) &= ((f(t), \varphi_1), (f(t), \varphi_2), \dots, (f(t), \varphi_n))^T, \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T. \end{aligned}$$

Тоді задача (2.21), (2.22) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{A_n} \dot{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{R}_{B_n} \mathbf{c}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{c}(0) &= \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

В [11] рекомендується  $\alpha_k$  обрати так, щоб  $\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$  було проекцією елемента  $\varphi$  в просторі  $H_0$  на підпростір, натягнутий на елементи  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . При цьому для визначення  $\alpha_k$  ми приходимо до системи

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j]_0 \alpha_k = [\varphi, \varphi_j]_0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

Формально систему диференціальних рівнянь можна отримати так. Нехай координатні елементи  $\varphi_k$  належать множині  $D$ , тобто належать областям визначення одразу всіх двох операторів  $A$  і  $B$ . Тоді вираз (2.20) можна підставити в ліву частину рівняння (2.18). Як завжди в методі Бубнова-Гальоркіна, вимагатимемо, щоб отриманий відхил  $\frac{d}{dt} Au_n + Bu_n - f$  був ортогональним у вихідному просторі  $H$  до елементів  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Тоді, після спрощень, ми і отримаємо систему рівнянь (2.21).

Задача Коші (2.21), (2.22) матиме єдиний розв'язок. Підставимо його в (2.20), отримаємо елемент, який називатимемо наближеним розв'язком задачі (2.18), (2.19).

Питання збіжності наближеного розв'язку  $u_n$   $t$  вигляду (2.20) до точного розв'язку  $u$   $t$  детально розглянуті у [3]. Стійкість процесу Бубнова-Гальоркіна для нестационарних задач досліджена в роботі [11].

### 2.3 Метод математичного моделювання нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини

Для розв'язання задачі (1.2) – (1.4) сумісно скористаємося методами послідовних наближень за нелінійністю,  $R$ -функцій та Гальоркіна для нестационарних задач.

Нехай  $u_0(x, y, t)$  – розв'язок наступної задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u_0 &= 0, (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u_0|_{\partial\Omega} &= f_0(s, t), \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), s \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u_0|_{t=0} &= \psi_0(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

У задачі (1.2) – (1.4) зробимо заміну  $\psi = u_0 + u$ , де  $u$  – нова невідома функція. Тоді для функції  $u$  отримаємо початково-крайову задачу з однорідними крайовими та початковими умовами.

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu \Delta^2 u_0 = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u), (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2.24)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, t \geq 0, \quad (2.25)$$

$$u|_{t=0} = 0, (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (2.26)$$

Для знаходження узагальненого розв'язку задачі (2.24) – (2.26) (а отже, і для вихідної задачі (1.2) – (1.4)) побудуємо ітераційний процес послідовних наближень за нелінійністю. Нехай початкове наближення  $u^{(0)}$  задано. Тоді за відомого значення  $u^{(k)}$  функції  $u$  на  $k$ -й ітерації наступне  $(k+1)$ -е наближення знаходимо як розв'язок лінійної задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu \Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}), (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2.27)$$

$$u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \left. \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, t \geq 0, \quad (2.28)$$

$$u^{(k+1)}|_{t=0} = 0, (x, y) \in \bar{\Omega}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Таким чином, ітераційний процес (2.27) – (2.29) зводить розв'язання нелінійної нестационарної задачі (2.24) – (2.26) до послідовності лінійних нестационарних задач.

Для побудови узагальненого розв'язку задачі (2.27) – (2.29) застосуємо метод Гальоркіна для нестационарних задач. Наближений розв'язок задачі (2.27) – (2.29) на  $(k+1)$ -й ітерації шукаємо у вигляді

$$u_n^{k+1}(t) = \sum_{i=1}^n c_i^{k+1}(t) \varphi_i, \quad (2.30)$$

де  $c_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , – невідомі функції;

$\{\varphi_i\}$  – координатна послідовність.

Відповідно до методу Гальоркіна невідомі функції  $c_i^{(k+1)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , знайдемо з умови ортогональності відхилю, одержуваної при підстановці (2.30)

в рівняння (2.28), першим  $n$  координатним функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Це призводить для визначення  $c_i^{(k+1)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i^{(k+1)}(t) b_{ij} + \nu \sum_{i=1}^n c_i^{(k+1)}(t) a_{ij} = l_j^{(k)} t, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

$$c_i^{k+1} 0 = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.32)$$

де

$$b_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$a_{ij} = \iint_{\Omega} \Delta \varphi_i \cdot \Delta \varphi_j dx dy, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$l_j^{(k)}(t) = \iint_{\Omega} J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) \cdot \varphi_j dx dy, \quad j = 1, \dots, n.$$

У матричних позначеннях  $C^{(k+1)}(t) = \{c_i^{(k+1)}(t)\}$ ,  $B = \{b_{ij}\}$ ,  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $L^{(k)}(t) = \{l_j^{(k)}(t)\}$ . Тут  $B$ ,  $A$ ,  $S$  – квадратні матриці порядку  $n$ ,  $C^{(k+1)}$  та  $L^{(k)}$  матриці-стовпчики. Тоді задачу (2.31), (2.32) можна записати у вигляді

$$BC^{(k+1)}(t) + \nu AC^{(k+1)}(t) = L^{(k)}(t), \quad t \in (0; T], \quad (2.34)$$

$$C^{(k+1)}(0) = \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

Відзначимо, що матриці  $B$ ,  $A$  – матриці з відмінними від нуля визначниками, вони симетричні та додатно означені.

Питання збіжності ітераційного процесу (2.27) – (2.29) розглянуто у [1].

Зокрема, доведено збіжність процесу за малих значень  $\frac{1}{\nu}$ .

Відповідно до структури розв'язку (2.17) при реалізації розглядуваного методу координатні функції для задачі (2.27) – (2.29) можна обрати у вигляді

$$\varphi_k(x, y) = \omega^2(x, y)\tau_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $\{\tau_k(x, y)\}$  – будь-яка повна у просторі  $L_2(\Omega)$  система функцій;

$\omega(x, y) = 0$  – нормалізоване рівняння  $\partial\Omega$ , побудоване методом  $R$ -функцій.

Задача для функції  $u_0(x, y, t)$  теж може бути розв'язана методом Гальоркіна з використанням структури розв'язку (2.17).

#### 2.4 Алгоритм розв'язання задачі

Сумісне застосування методу послідовних наближень за нелінійністю, методу  $R$ -функцій та методу Гальоркіна для нестационарних задач для розв'язання задачі (1.2) – (1.4) полягає в наступному:

- а) побудувати методом  $R$ -функцій нормалізоване рівняння  $\omega(x, y) = 0$  межі  $\partial\Omega$ , задати  $\nu$  та функції  $f_0(s, t)$ ,  $g_0(s, t)$ ,  $\psi_0(x, y)$ , точність  $\varepsilon > 0$ ;
- б) розв'язати задачу для функції  $u_0(x, y, t)$ ;
- в) реалізувати ітераційний процес (2.27) – (2.29), розв'язуючи в циклі систему диференціальних рівнянь (2.34), (2.35) до досягнення заданої точності;
- г) записати наближений розв'язок задачі (1.2) – (1.4) у вигляді  $\psi_N = u_0 + u_n^N$ .

Зауважимо, що у системі (2.34), (2.35) матриці  $A$  і  $B$  не залежать від номера ітерації, а отже, можуть бути розраховані один раз при реалізації ітераційного процесу. Крім того, елементи цих матриць розраховуються незалежно один від одного, а тому при їх розрахунку можна скористатися розпаралелюванням обчислень.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Загальні засади паралельного підходу до імплементації алгоритмів

Паралельні обчислення – це форма обчислень, в яких кілька дій проводяться одночасно. Їхнім підґрунтям є те, що великі задачі можна розділити на кілька менших, кожна з яких можна розв’язувати незалежно від інших. Їхнє застосування триває вже протягом багатьох років, в основному у високопродуктивних обчисленнях, але зацікавлення ними зросло тільки нещодавно, через фізичні обмеження зростання частоти універсальних процесорів, пов’язані зі споживаною потужністю і відповідно виділенням тепла. Саме тому паралельне обчислення стає домінуючою парадигмою в комп’ютерній архітектурі, в основному в формі багатоядерних процесорів [12].

В залежності від характеру обчислень та даними, якими вони оперують розрізняють наступні рівні паралелізму:

- паралелізм бітового рівня, який базується на подвоєнні розміру машинного слова, завдяки чому зменшується кількість інструкцій, необхідних для виконання операції над даними чий розмір більший ніж розмір вхідного слова;

- паралелізм рівня інструкцій, коли інструкції можна перевпорядкувати та об’єднати в групи, які потім виконувати паралельно, без зміни результату роботи програми;

- паралелізм даних, основна ідея якого полягає в тому, що одна операція виконується відразу над всіма елементами масиву даних;

- паралелізм задач (багатопотоковість), який є стилем програмування, заснованим на паралелізмі завдань, що означає, що обчислювальна задача розбивається на декілька відносно самостійних підзадач і кожен процесор працює над виконанням своєї власної підзадачі.

Паралельні комп’ютери можна грубо класифікувати за рівнем, на якому апаратне забезпечення підтримує паралелізм. Така класифікація майже аналогічна відстані між основними обчислювальними елементами:

- а) багатоядерні процесори – це процесори, що містять кілька ядер, що дозволяє їм за такт виконувати кілька інструкцій з різних потоків;
- б) симетричні мультипроцесори – це комп'ютерна система з багатьма ідентичними процесорами, що поділяють пам'ять, та з'єднуються через шину;
- в) розподілені комп'ютери (мультипроцесори з розподіленою пам'яттю) – це комп'ютерні системи з розподіленою пам'яттю, у якій обчислювальні елементи з'єднані мережею;
- г) кластери – група слабо зв'язаних комп'ютерів, що тісно співпрацюють в межах виконання поставленої задачі;
- д) масово паралельні процесори – це окремі комп'ютери з багатьма процесорами з'єднаними в мережу;
- е) ґрід-мережі – найбільш розподілена форма паралельних обчислень, яка використовує для розв'язання задачі комп'ютери зв'язані мережею Інтернет;
- ж) графічні процесори загального призначення – це спеціалізовані графічні прискорювачі, що можуть виконувати розрахунки аналогічні загальним обчисленням, які зазвичай проводить центральний процесор.

### 3.2 Особливості програмної реалізації за допомогою Python

Мова Python є високорівневою мовою широкого застосування. Автор мови (Ґвідо ван Россум) зробив неабиякий акцент на читабельності коду та синтаксисі. Мова дозволяє програмісту реалізувати задачі із значно меншою кількістю рядків коду, ніж потрібно у інших мовах таких як C++ чи Java. Мова є крос-платформенною та застосовується для різних напрямків.

Мова Python підтримує популярні серед інших мов програмування парадигми: ООП, імперативне та функціональне програмування. Python є динамічно типізованим. Включає у себе автоматичне управління пам'яттю та надає масу додаткових бібліотек.

Python є також дуже популярним серед науковців. Він успішно викорис-

товується в таких галузях як біологія, обчислювальна хімія, біоінформатика, генетика, обчислювальна математика і статистика, астрономія, економіка.

OpenMP реалізує паралельні обчислення за допомогою багатопотоковості, в якій «головний» (master) потік створює набір підлеглих (slave) потоків і завдання розподіляється між ними. Передбачається, що потоки виконуються паралельно на машині з декількома процесорами (кількість процесорів не обов'язково має бути більше або дорівнювати кількості потоків).

### 3.3 Опис програми

Програма розрахунку течії в'язкої рідини була виконана у середовищі JetBrains PyCharm на мові програмування Python.

Перший пакет програми «Coord\_function» містить набір базисних функцій та їх перших, других та третіх похідних в одновимірному та двовимірному вигляді, а також включає в себе задання координатних функцій.

Другий пакет «r\_functions» задає систему базових операцій:  $R$ -кон'юнкцію та  $R$ -диз'юнкцію, а також містить в собі набір побудованих функцій омега для розглядуваних областей течії рідини.

Третій блок «numerical\_integration» включає в себе розрахунок вузлів та вагових коефіцієнтів формул чисельного інтегрування.

Четвертий блок «Calculation Matrix & Vector» відповідає за розв'язання системи диференціальних рівнянь методу Гальоркіна.

Фрагмент коду програми наведено в Додатку А.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент для задачі (1.2) – (1.4) було проведено в одиничному квадраті  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  при значеннях кінематичної в'язкості  $\nu = 0,01$  та  $\nu = 0,005$  на проміжку часу  $t \in (0; 5]$ , причому функції у крайових та початкових умовах було обрано такими:

$$f_0(s, t) = 0, g_0(s, t) = \begin{cases} e^{-t} - 1, & y = 1, \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = 1\}, \end{cases} \psi_0(x, y) = 0.$$

Таким чином, розв'язується задача

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi = J(\Delta \psi, \psi) \text{ у } \Omega, t \in (0; 5], \quad (4.1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} e^{-t} - 1, & y = 1, \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y = 1\}, \end{cases} t \in [0; 5], \quad (4.2)$$

$$\psi|_{t=0} = 0, (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (4.3)$$

За базисні функції було обрано сплайни Шенберга шостого порядку [16], тобто для апроксимації невизначеної компоненти використовувалася формула

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{i=-3}^{N_y+3} \sum_{j=-3}^{N_y+3} c_{ij}(t) B_6\left(\frac{N_x x}{a} - i\right) B_6\left(\frac{N_y y}{b} - j\right) = \sum_{i=-3}^{N_y+3} \sum_{j=-3}^{N_y+3} c_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y),$$

де  $B_6(t)$  – сплайн Шенберга шостого порядку.

Інтеграли в системі звичайних диференціальних рівнянь (2.31), (2.32) розраховувалися за допомогою формули Гауса з 16 вузлами по кожній змінній на кожному з 16-ти часткових квадратів.

Нормалізоване рівняння області  $\Omega$  має вигляд:

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &\equiv [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)] \equiv \\ &\equiv x(1-x) + y(1-y) - \sqrt{x^2(1-x)^2 + y^2(1-y)^2} = 0.\end{aligned}$$

Також за допомогою формули склеювання отримано, що

$$f(x, y, t) \equiv 0, \quad g(x, y, t) = \frac{(e^{-t} - 1)xy(1-x)}{1-y+xy(1-x)}.$$

Отже, структура розв'язку задачі (4.1) – (4.3) має вигляд

$$\psi(x, y, t) = -\omega(x, y) \frac{(e^{-t} - 1)xy(1-x)}{1-y+xy(1-x)} + \omega^2(x, y)\Phi(x, y, t).$$

У таблицях 4.1 – 4.4 наведено числові характеристики течії. Тут  $t$  – час,  $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$  – координати центру завихореності (точка максимуму функції течії),  $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$  – значення функції течії у центрі завихореності,  $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$  – значення завихореності у центрі завихореності,  $\max_{y \in [0; 1]} v_x(0, 5, y)$  – максимум однієї з координат швидкості в перерізі  $x = 0,5$ , а  $\|\psi\|_{L_2 \Omega}$ ,  $\|v_x\|_{L_2 \Omega}$ ,  $\|v_y\|_{L_2 \Omega}$ ,  $\|\zeta\|_{L_2 \Omega}$  – норми функції течії, координат вектора швидкостей та завихореності у просторі  $L_2(\Omega)$  відповідно. Відмітимо також, що для  $\nu = 0,01$  ітераційний процес з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  збігся за 23 ітерації, а для  $\nu = 0,005$  – за 48 ітерацій.

На рис. 4.1 і 4.2 наведено лінії рівня функції течії  $\psi$  та завихореності  $\zeta$  у моменти часу  $t = 1,0$ ,  $t = 3,0$  і  $t = 5,0$  для  $\nu = 0,01$ , а на рис. 4.3 і 4.4 наведено лінії рівня функції течії  $\psi$  та завихореності  $\zeta$  у моменти часу  $t = 1,0$ ,  $t = 3,0$  і  $t = 5,0$  для  $\nu = 0,005$ ,

Таблиця 4.1 – Характеристики течії у центрі завихореності при  $\nu = 0,01$ 

| $t$ | $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ | $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ | $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ |
|-----|------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 0,5 | (0,5177; 0,8814)       | -0,0167                    | -1,1232                     |
| 1,0 | (0,5675; 0,8510)       | -0,0360                    | -1,8367                     |
| 2,0 | (0,6061; 0,8303)       | -0,0524                    | -3,1762                     |
| 3,0 | (0,6283; 0,8147)       | -0,0657                    | -3,8072                     |
| 4,0 | (0,6466; 0,7929)       | -0,0842                    | -3,8555                     |
| 5,0 | (0,6523; 0,7720)       | -0,1002                    | -3,6613                     |

Таблиця 4.2 – Характеристика течії в перерізі  $x = 0,5$  та норми в  $L_2(\Omega)$ при  $\nu = 0,01$ 

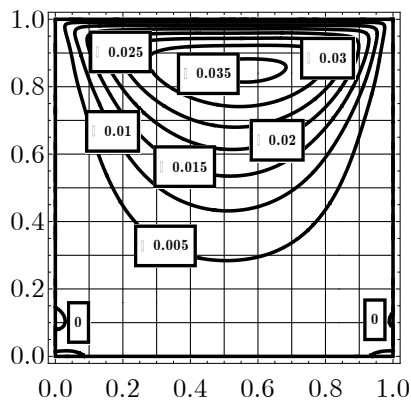
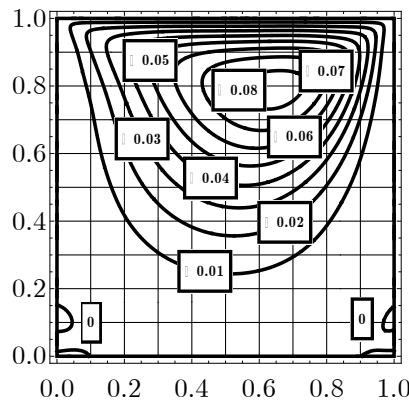
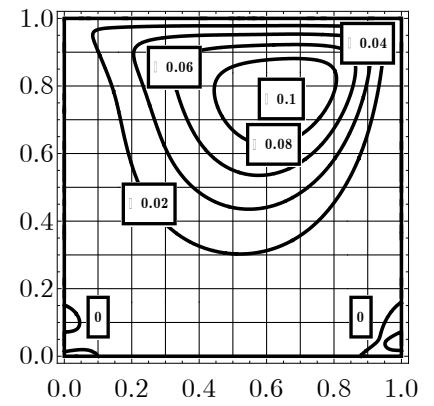
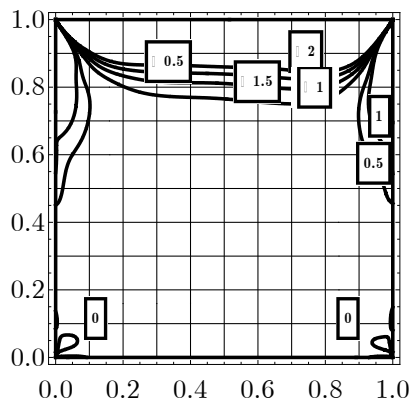
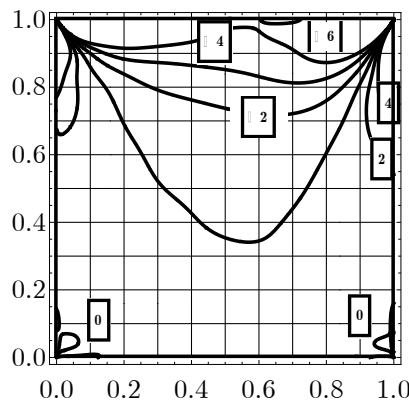
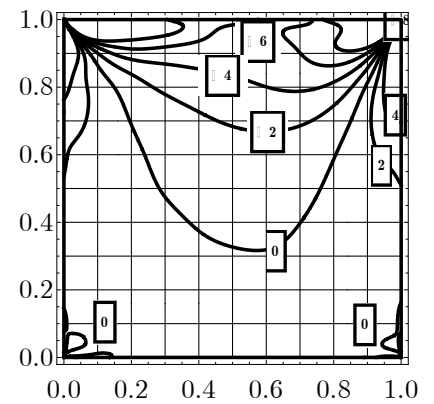
| $t$ | $\max_{y \in [0; 1]} v_x(0,5, y)$ | $\ \psi\ _{L_2 \Omega}$ | $\ v_x\ _{L_2 \Omega}$ | $\ v_y\ _{L_2 \Omega}$ | $\ \zeta\ _{L_2 \Omega}$ |
|-----|-----------------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 0,5 | 0,3935                            | 0,0066                  | 0,0584                 | 0,0236                 | 2,0557                   |
| 1,0 | 0,6321                            | 0,0144                  | 0,1078                 | 0,0501                 | 3,2044                   |
| 1,5 | 0,8647                            | 0,0260                  | 0,1672                 | 0,0898                 | 4,3205                   |
| 2,0 | 0,9502                            | 0,0327                  | 0,1949                 | 0,1132                 | 4,7349                   |
| 3,0 | 0,9817                            | 0,0365                  | 0,2077                 | 0,1264                 | 4,8890                   |
| 5,0 | 0,9933                            | 0,0387                  | 0,2136                 | 0,1338                 | 4,9462                   |

Таблиця 4.3 – Характеристики течії у центрі завихореності при  $\nu = 0,005$ 

| $t$ | $(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ | $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ | $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$ |
|-----|------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 0,5 | (0,5011; 0,9046)       | -0,0126                    | -1,0919                     |
| 1,0 | (0,5853; 0,8789)       | -0,0277                    | -1,8847                     |
| 2,0 | (0,6852; 0,8618)       | -0,0414                    | -3,8370                     |
| 3,0 | (0,7261; 0,8460)       | -0,0541                    | -5,1764                     |
| 4,0 | (0,7467; 0,8221)       | -0,0758                    | -5,3153                     |
| 5,0 | (0,7463; 0,7932)       | -0,1026                    | -4,7394                     |

Таблиця 4.4 – Характеристика течії в перерізі  $x = 0,5$  та норми в  $L_2(\Omega)$ при  $\nu = 0,005$ 

| $t$ | $\max_{y \in [0;1]} v_x(0,5, y)$ | $\ \psi\ _{L_2 \Omega}$ | $\ v_x\ _{L_2 \Omega}$ | $\ v_y\ _{L_2 \Omega}$ | $\ \zeta\ _{L_2 \Omega}$ |
|-----|----------------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 0,5 | 0,3934                           | 0,0049                  | 0,0512                 | 0,0183                 | 2,1481                   |
| 1,0 | 0,6321                           | 0,0110                  | 0,0962                 | 0,0399                 | 3,2985                   |
| 1,5 | 0,8646                           | 0,0206                  | 0,1540                 | 0,0756                 | 4,4163                   |
| 2,0 | 0,9502                           | 0,0269                  | 0,1842                 | 0,0998                 | 4,8390                   |
| 3,0 | 0,9816                           | 0,0311                  | 0,2001                 | 0,1156                 | 5,0000                   |
| 5,0 | 0,9932                           | 0,0339                  | 0,2088                 | 0,1260                 | 4,0613                   |

а)  $t = 1,0$ ;б)  $t = 3,0$ ;в)  $t = 5,0$ Рисунок 4.1 – Лінії рівня функції течії  $\psi$  для  $\nu = 0,01$  у різні моменти часуа)  $t = 1,0$ ;б)  $t = 3,0$ ;в)  $t = 5,0$ Рисунок 4.2 – Лінії рівня функції завихореності  $\psi$  для  $\nu = 0,01$ 

у різні моменти часу

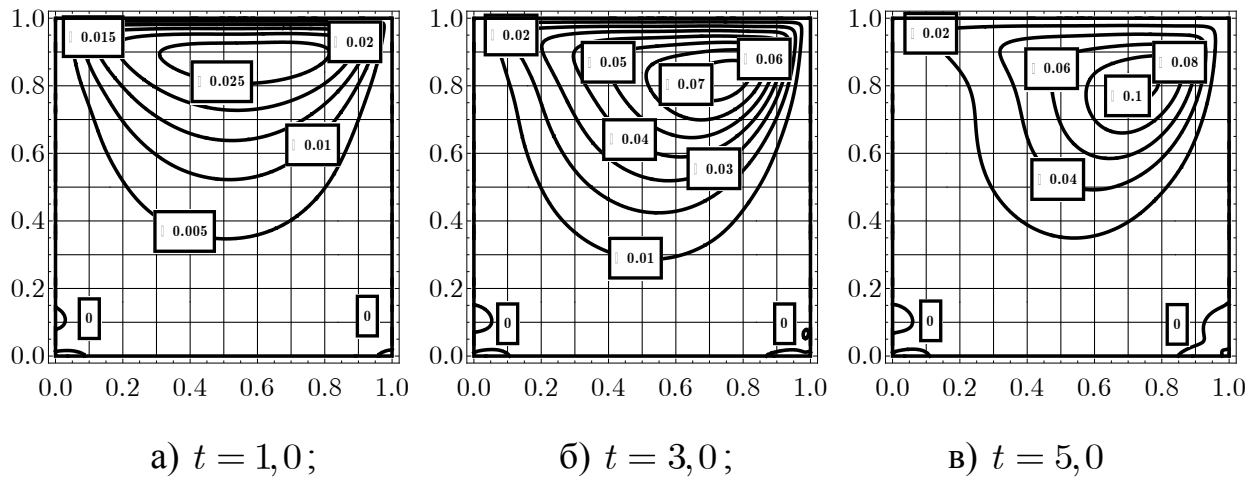


Рисунок 4.3 – Лінії рівня функції течії  $\psi$  для  $\nu = 0,005$  у різні моменти часу

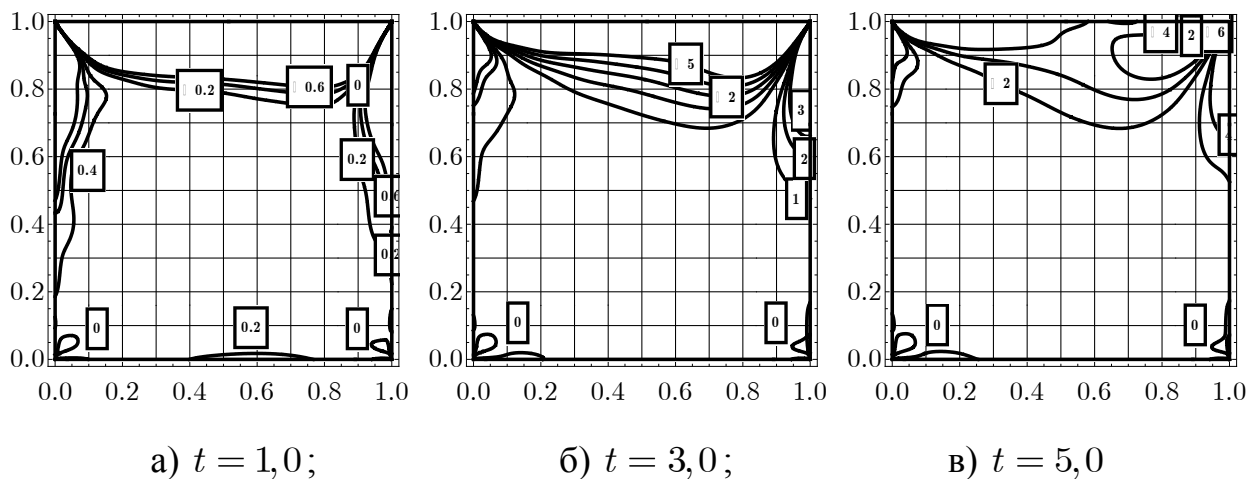


Рисунок 4.4 – Лінії рівня функції завихореності  $\psi$  для  $\nu = 0,005$   
у різні моменти часу

Для задачі (4.1) – (4.3) у [19] методом граничних елементів для стаціонарного розв'язку отримані наступні результати:  $x_{v.c.} = 0,6250$ ,  $y_{v.c.} = 0,7500$ ,  $\psi(x_{v.c.}, y_{v.c.}) = -0,1029$ ,  $\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.}) = -3,1668$ . Відносне розходження для цих величин з результатами, наведеними у таблиці 4.1, становить близько 0,5% – 1,5%. Також отримані результати добре узгоджуються з результатами, наведеними в роботі [20], де використовувалися метод кінцевих різниць і метод релаксації.

У таблиці 4.5 наведено порівняння швидкості обчислення програми на мові програмування Python, Wolfram Mathematica 10 та Python з використанням

паралельних обчислень, при 64, 100 та 225 базисних функціях.

Таблиця 4.5 – Порівняння часу роботи програми для різних реалізацій

| Кількість базисних функцій | Час виконання на Python, с | Час виконання на Mathematica, с | Час виконання на Python (з Numba), с |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| 64                         | 755                        | 156                             | 34                                   |
| 100                        | 902                        | 180                             | 40                                   |
| 225                        | 2063                       | 410                             | 93                                   |

Як бачимо зі зростанням кількості базисних функцій маємо значний ви-  
 граш у часі саме при реалізації на Python з використанням паралельних обчис-  
 лень.

## 5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Результати, отримані у атестаційній роботі, можуть бути використані в наукових дослідженнях у фізиці, а також інженерній практиці при розв'язуванні задач, пов'язаних із моделюванням течій в'язкої нестисливої рідини. Запропонований алгоритм може бути використаний науковими установами для більш швидкого отримання результатів математичного моделювання процесів різної природи. Розроблений програмний продукт може знайти застосування у науково-дослідних установах, що мають потребу в інтенсивних обчисленнях чи обробці даних.

Зауважимо також, що на відміну від сіткових методів, які дають розв'язок задачі у вигляді матриці значень функції, розв'язок розглянутої у атестаційній роботі початково-крайової задачі отримано у наближеному аналітичному вигляді, що полегшує подальше застосування результатів на практиці. Також необхідно зауважити, що методи реалізовані в даній роботі можуть бути застосовані для більш складних областей течії рідини.

У подальшому дослідження в'язких плоскопаралельних течій нестисливої рідини методом  $R$ -функцій доцільно зосередити на розв'язанні подібних початково-крайових задач для багатозв'язних областей, а також на знаходженні векторного поля швидкостей, поля тиску та інших характеристик течій.

## ВИСНОВКИ

У атестаційній роботі було розглянуто метод математичного моделювання течії в'язкої нестисливої рідини у скінченних однозв'язних областях, геометрія яких може бути описана за допомогою конструктивного апарату теорії  $R$ -функцій. Математичною моделлю розглядуваної течії є нелінійна початково-крайова задача для функції течії. Для її чисельного аналізу було використано методи послідовних наближень за нелінійністю, структурний метод (метод  $R$ -функцій) з апроксимацією невизначеної компоненти методом Гальоркіна для нестационарних задач. Використання методів  $R$ -функцій та Гальоркіна дозволило отримати наближений розв'язок задачі у чисельно-аналітичному вигляді, що спрощує його подальше використання для знаходження різних характеристик течії, а також точно врахувати на аналітичному рівні у чисельному алгоритмі геометрію області та крайові умови задачі.

Обчислювальний експеримент було проведено для тестової задачі у квадратній області. Результати наведено у вигляді ліній рівня функції течії, завихореності, а також у вигляді таблиць з порівнянням числових характеристик течії для двох значень кінематичної в'язкості  $\nu$ . Програмна реалізація виконана на мові Python з використанням паралельних обчислень, що значно скоротило час обчислень. Проте, до недоліків застосованого методу слід віднести його повільну збіжність зі зростанням величини  $\frac{1}{\nu}$  та відсутність збіжності ітераційного процесу для великих значень  $\frac{1}{\nu}$ .

Отримані результати добре узгоджуються з результатами, відомими з літератури і отриманими іншими методами.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом  $R$ -функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 251 с.
2. Артюх А. В., Сидоров М. В. Применение методов  $R$ -функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2011. № 2. С. 5-12.
3. Вишик М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Математический сборник. 1956. Т. 39 (81), № 1. С. 51 – 148.
4. Катренко А. В. Системний аналіз. Львів : "Новий світ – 2000", 2011. 396 с.
5. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение метода  $R$ -функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісник ХНУ. Сер. Прикладна математика і механіка. 2003. № 602. С. 61-67.
6. Колосова С. В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе // Прикладная механика. 1971. № 7, Вып. 10. С. 100-105.
7. Ландау Л. Ф., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. Москва : Физматлит, 2003. 736 с.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003. 840 с.
9. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системний аналіз. Вводный курс : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
10. Максименко-Шейко К. В. Моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам методом  $R$ -функций // Электронное моделирование. 2005. Т. 27, № 1. С. 31-43.
11. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва :

Наука, 1966. 432 с.

12. Паралельні обчислення – Вікіпедія. URL : [https://uk.wikipedia.org/wiki/Паралельні\\_обчислення](https://uk.wikipedia.org/wiki/Паралельні_обчислення) (дата звернення: 29.09.2019).

13. Рвачев В. Л., Корсунский А. Л., Шейко Т. И. Метод  $R$ -функций в задаче о течении Гартмана // Магнитная гидродинамика. 1982. № 2. С. 64-69.

14. Рвачев В. Л., Суворова И. Г., Шейко Т. И. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом  $R$ -функций в системе "Поле-3" // Математические методы и физико-механические поля. 1991. Вып. 33. С. 95-99.

15. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев : Наукова думка, 1974. 260 с.

16. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения: Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

17. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 3. С. 39 – 42.

18. Слесаренко А. П., Котульский Д. А.  $R$ -функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения // Проблемы машиностроения. 2001. Т. 4, № 3-4. С. 72-78.

19. Barragy E., Carey G. F. Stream function-vorticity driven cavity solutions using p-finite elements // Computers and Fluids, 1997. № 26. P. 453-468.

20. Erturk E., Corke T. C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 48. P. 747-774.

21. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the  $R$ -function method // J. Eng. Math. 2015. Vol. 91. P. 59-79.