Проблемы бионики
1998. Вып. 48. С. 12—22
ХТУРЭ

УДК 510.62

Н.А. ГВОЗДИНСКАЯ, З.В. ДУДАРЬ, С.А. ПОСЛАВСКИЙ, Ю.П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

О ЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ

Данная статья является продолжением работы [1]. Обозначим символом K множество логических скаляров $K=\{0,1\}$[2]. Произвольная система элементов совокупности K, расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется логической *(m, n)* — матрицей над K или просто *логической матрицей*. Чтобы записать матрицу, выпишем обозначения ее элементов и получившуюся таблицу заключим в скобки или ограничим двойными чертами [3].

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Логическая матрица, число строк которой совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Для квадратной логической матрицы число ее строк (или столбцов) называется *порядком квадратной логической матрицы*. Квадратная логическая матрица, все диагональные элементы которой равны единице, а остальные — нулю, называется *единичной логической матрицей* и обозначается символом E. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой логической матрицей* и обозначается символом **0**. Две логические матрицы называются *равными*, если число строк и столбцов у них соответственно равны и если логические скаляры, стоящие на соответственных местах этих матриц, тоже равны. Таким образом, одно равенство между *(m, n)* — матрицами равносильно системе mn равенств между их элементами. Логическая матрица, имеющая только одну строку, называется просто *логической строкой*, а число ее элементов — *длиной строки*. Логическая матрица, имеющая только один столбец, называется *логическим столбцом*, а число его элементов — *высотой столбца*.

В качестве основных операций над логическими матрицами принимаем: логическое умножение скаляра на матрицу или матрицы на скаляр, логическое сложение (дизъюнкцию) двух матриц, отрицание матриц, логическое умножение (конъюнкция) матриц. Чтобы умножить логический скаляр α на логическую матрицу A, нужно умножить на α все элементы матрицы A:

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \dots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} \dots \alpha a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$A\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha & a_{12}\alpha \dots & a_{1n}\alpha \\ a_{21}\alpha & a_{22}\alpha \dots & a_{2n}\alpha \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\alpha & a_{m2}\alpha \dots & a_{mn}\alpha \end{pmatrix}.$$

Например:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \wedge 1 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \\ 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 & 0 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что для логического поля имеет место аксиома коммутативности [1], справедливо равенство:

$$\alpha A = A\alpha. \quad (2)$$

Для любой логической матрицы над K и для любых логических скаляров $\alpha, \beta \in K$ имеют место следующие соотношения:

$$1 \cdot A = A; \quad (3)$$

$$0 \cdot A = \mathbf{0}; \quad (4)$$

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}; \quad (5)$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A. \quad (6)$$

Логической суммой (дизъюнкцией) двух логических матриц над K, имеющих соответственно равное число строк и столбцов, называется матрица, имеющая то же число строк и столбцов, и элементы которой равны логическим суммам (дизъюнкциям) соответствующих элементов складываемых матриц:

$$C = A \vee B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{m1} \dots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \vee b_{11} \dots a_{1n} \vee b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \vee b_{m1} \dots a_{mn} \vee b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vee 0 & 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из определения дизъюнкции логических матриц вытекают следующие соотношения: дизъюнкция матриц *коммутативна* $A \vee B = B \vee A$; дизъюнкция матриц *ассоциативна* $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$; дизъюнкция матриц *дистрибутивна относительно умножения на скаляр* $\alpha(A \vee B) = \alpha A \vee \alpha B$; умножение матрицы на скаляр *дистрибутивно относительно дизъюнкции скаляров* $(\alpha \vee \beta)A = \alpha A \vee \beta A$; *закон нуля* $A \vee \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee A = A$; *закон идемпотентности* $A \vee A = A$.

Докажем первое из перечисленных свойств, т.е. свойство коммутативности. Для этого установим равенство соответствующих элементов для матриц, стоящих в левой и правой частях этого соотношения. Пусть $C = A \vee B = \|c_{ij}\|$. По определению дизъюнкции матриц, $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$. Пусть теперь $D = B \vee A = \|d_{ij}\|$. В силу того же определения, $d_{ij} = b_{ij} \vee a_{ij}$. Так как для логического поля выполняется аксиома коммутативности, то $a_{ij} \vee b_{ij} = b_{ij} \vee a_{ij}$. Следовательно, $c_{ij} = d_{ij}$, т. е. элементы, стоящие на соответственных местах матриц в левой и правой частях соотношения коммутативности, равны. Из этого вытекает равенство самих матриц. Таким образом, свойство коммутативности доказано. Доказательство остальных соотношений проводится аналогичным образом.

Конъюнкцией двух матриц над K, имеющих соответственно равное число столбцов и строк, называется такая логическая матрица над K, которая имеет такое же число строк и столбцов, и элементы которой равны конъюнкциям соответствующих элементов перемножаемых матриц:

$$C = A \wedge B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{m1} \dots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \wedge b_{11} \dots a_{1n} \wedge b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \wedge b_{m1} \dots a_{mn} \wedge b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\wedge 0 & 1\wedge 1 & 1\wedge 1\\ 1\wedge 0 & 1\wedge 1 & 0\wedge 1\\ 1\wedge 1 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Для конъюнкции матриц выполняются следующие соотношения: *коммутативности* $A\wedge B=B\wedge A$; *ассоциативности* $(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$; *ассоциативности относительно умножения на скаляр* $\alpha(A\wedge B)=(\alpha A)\wedge B$; *дистрибутивности* $(A\vee B)\wedge C=A\wedge C\vee B\wedge C$, $A\wedge B\vee C=(A\vee C)\wedge(B\vee C)$; *элиминации* $A\vee A\wedge B=A$; $A\wedge(A\vee B)=A$; *идемпотентности* $A\wedge A=A$; *закон нуля* $A\wedge\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Доказательство этих соотношений проводится аналогично доказательству коммутативности дизъюнкции матриц.

Отрицанием матрицы $\overline{A}$ называется матрица, элементы которой равны $\overline{a_{ij}}$. Для отрицания матриц выполняются следующие равенства: *закон противоречия* $A\wedge\overline{A}=O$; *закон двойного отрицания* $\overline{\overline{A}}=A$; *закон исключения третьего* $A\vee\overline{A}=1$; *законы свертывания* $A\vee B\wedge\overline{B}=A$, $A\wedge(B\vee\overline{B})=A$; *законы де Моргана* $\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}$, $\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B}$. Доказательство этих утверждений также проводится аналогично приведенному выше.

В отличие от перечисленных выше операций с матрицами, операция логического умножения одной логической матрицы на другую определяется несколько сложнее. Пусть есть две логические матрицы A и B, причем число столбцов первой из них совпадает с числом строк второй. Только при соблюдении этого условия операция умножения одной логической матрицы на другую имеет смысл. В противном случае ее выполнить невозможно. *Правило умножения матриц*: чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы, полученной в результате умножения, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на соответственные элементы j-го столбца второй и полученные результаты сложить. Т.е. если матрица $A=\|a_{ij}\|_{m\times n}$, а $B=\|b_{ij}\|_{n\times k}$, то элементы матрицы $C=AB$ будут определяться по формуле

$$c_{ip}=a_{i1}b_{1p}\vee a_{i2}b_{2p}\vee\ldots\vee a_{in}b_{np}\ (i=1\ldots m,\ p=1\ldots k,\ j=1\ldots n)\ . \qquad (8)$$

Например:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\wedge 1\vee 0\wedge 1 & 1\wedge 0\vee 0\wedge 1 & 1\wedge 0\vee 0\wedge 1\\ 1\wedge 1\vee 1\wedge 1 & 1\wedge 0\vee 1\wedge 1 & 1\wedge 0\vee 1\wedge 1\\ 0\wedge 1\vee 1\wedge 1 & 0\wedge 0\vee 1\wedge 1 & 0\wedge 0\vee 1\wedge 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Умножение двух матриц, вообще говоря, некоммутативно. Оно зависит от порядка сомножителей. Если в приведенном примере мы поменяем порядок умножаемых матриц, то результат будет другим:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\wedge 1\vee 0\wedge 1\vee 0\wedge 0 & 1\wedge 0\vee 0\wedge 1\vee 0\wedge 1\\ 1\wedge 1\vee 1\wedge 1\vee 1\wedge 0 & 1\wedge 0\vee 1\wedge 1\vee 1\wedge 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Если рассматривать матрицы не квадратные, то может получиться так, что в одном порядке операция их умножения имеет смысл, а в обратном — нет. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим две логические матрицы $A=\|a_{ij}\|_{2\times 3}$ и $B=\|b_{jp}\|_{3\times 4}$.

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Если же мы поменяем порядок сомножителей, то выполняемая операция не будет иметь смысла, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Рассмотрим теперь основные свойства умножения матриц:

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B; \tag{9}$$

$$A(\alpha B)=(A\alpha)B; \tag{10}$$

$$(AB)\alpha=A(B\alpha). \tag{11}$$

Докажем свойство (9). Пусть $A=\|a_{ij}\|_{mn}$, $B=\|b_{ij}\|_{np}$. Пользуясь правилом умножения матриц, получаем для элемента, стоящего в i-й строке и k-м столбце матрицы $\alpha(AB)$ (i=1...m, k=1...p) следующее выражение: $c_{ik}=\alpha(a_{i1}b_{1k}\vee\ldots\vee a_{in}b_{nk})$. Аналогично для элемента, стоящего в той же i-й строке и k-м столбце матрицы $(\alpha A)B$, получаем выражение: $d_{ik}=(\alpha a_{i1})b_{1k}\vee\ldots\vee(\alpha a_{in})b_{nk}$. Выражения для c_{ik} и d_{ik} равны. Следовательно, равны и сами элементы, из чего вытекает равенство матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (9). Аналогичным образом доказываются свойства (10)—(11), а также свойства (12)—(13):

$$(A \vee B)C = AC \vee BC; \tag{12}$$

$$C(A \vee B) = CA \vee CB. \tag{13}$$

Из свойств (12)—(13) непосредственно вытекает следующее правило: чтобы умножить дизъюнкцию логических матриц на дизъюнкцию, необходимо каждую матрицу первой дизъюнкции умножить на каждую матрицу второй и полученные результаты сложить. Для умножения логических матриц выполняется свойство *ассоциативности*:

$$A(BC) = (AB)C \tag{14}$$

В силу того, что операции дизъюнкции, конъюнкции и умножения можно применять не к любым матрицам, а только к тем, количество строк и столбцов которых удовлетворяет указанным выше условиям, соотношения (12)—(14) следует понимать таким образом, что если действия, указанные по одну сторону от знака равенства, возможны, то также имеют смысл и действия, указанные по другую его сторону, а результаты в обоих случаях совпадают. Докажем равенство (14). Для этого положим $AB=M$, а $BC=N$ и обозначим элементы матриц M и N через μ_{ik} и η_{jl}. Согласно правилу умножения матриц имеем:

$$\mu_{ik} = a_{i1}b_{1k} \vee \ldots \vee a_{in}b_{nk}, \quad \eta_{jl} = b_{j1}c_{1l} \vee \ldots \vee b_{jp}c_{pl},$$

где a_{ij}, b_{jk}, c_{kl} — элементы матриц A, B, C. Выполняя операцию логического умножения матрицы M на C, в i-й строке и в l-м столбце матрицы $(AB)C$, получим

$$\mu_{i1}c_{1l} \vee \ldots \vee \mu_{ip}c_{pl} = \bigvee_j \bigvee_k a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

Аналогично, выполняя умножение A на N, в i-й строке и l-м столбце матрицы $A(BC)$, получим дизъюнкцию:

$$a_{i1}\eta_{1l} \vee \ldots \vee a_{ip}\eta_{pl} = \bigvee_j \bigvee_k a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

Так как обе эти дизъюнкции отличаются только порядком слагаемых, то равенство (14) доказано. Из соотношения (14) следует, что результат умножения нескольких матриц A, B, C,..., Z, записанных в определенном порядке, от способа расстановки скобок не зависит. Поэтому можно говорить не только об умножении двух, но и об умножении большего числа матриц. Например, можно говорить просто об умножении четырех матриц $ABCD$, так как все пять возможных способов вычисления результата этой операции $((AB)C)D$, $(A(BC))D$, $A((BC)D)$, $A(B(CD))$, $(AB)(CD)$ дают один и тот же

БИБЛИОТЕКА ЖИРИ ИНВ. № 936354

результат в силу того, что каждый следующий результат умножения получается из предшествующего непосредственным применением закона ассоциативности (14).

Рассмотрим произвольную логическую матрицу $A=\|a_{ij}\|_{mn}$. Оказывается, что

$$AE=EA=A. \tag{15}$$

Чтобы имели смысл все выражения из равенства (15), единичная матрица E в первом произведении должна иметь порядок n, а во втором — порядок m. Обозначим AE через B, а EA — через C. Элементы матриц B и C обозначим соответственно через b_{ij} и c_{ij}. Пользуясь правилом умножения матриц, запишем выражения для b_{ij} и c_{ij} :

$$b_{ij}=a_{i1}\cdot 0\vee\ldots\vee a_{ij}\cdot 1\vee\ldots\vee a_{in}\cdot 0=a_{ij},$$

$$c_{ij}=0\cdot a_{i1}\vee\ldots\vee 1\cdot a_{ij}\vee\ldots\vee 0\cdot a_{in}=a_{ij}.$$

Очевидно, что $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$. Следовательно, равны и соответствующие матрицы, что и доказывает утверждение (15).

Рассмотрим произвольную логическую матрицу A. Если в ней произвести замену строк столбцами, то полученная матрица будет называться *транспонированной* по отношению к A и обозначаться символом A^T:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Например:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для произвольных логических матриц A и B и логических скаляров α и β имеют место следующие правила транспонирования:

$$(\alpha A\vee\beta B)^T=\alpha A^T\vee\beta B^T, \tag{16}$$

$$\overline{A^T}=\overline{A}^T, \tag{17}$$

$$(AB)^T=B^TA^T, \tag{18}$$

$$(\alpha A \wedge \beta B)^T = \alpha A^T \wedge \beta B^T. \qquad (19)$$

Докажем равенство (18). Элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $C=(AB)^T$, равен элементу, стоящему в j-й строке и i-м столбце матрицы AB, т.е. он равен $c_{ij}=a_{j1}b_{1i} \vee \ldots \vee a_{jn}b_{ni}$, где a_{jp}, b_{pi} — элементы матриц A и B соответственно. Но это выражение есть дизъюнкция результатов логического умножения элементов i-й строки матрицы B^T на соответственные элементы j-го столбца матрицы A^T, так что $(AB)^T=B^TA^T$, что и доказывает равенство (18). Пусть A — произвольная квадратная матрица над K. Тогда если выполняется соотношение $A^T=A$, то такая матрица называется *симметрической*. Например, логическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является симметрической. Из правил транспонирования дизъюнкции, конъюнкции и отрицания матриц непосредственно вытекает, что дизъюнкция, конъюнкция и отрицание симметрических матриц есть матрицы симметрические. Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат умножения симметрических матриц может и не быть симметрической матрицей. Это видно из приведенного ниже примера:

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Произвольная квадратная логическая матрица над K называется *обратимой*, если существует квадратная матрица B над K, удовлетворяющая следующему соотношению:

$$AB=BA=E. \tag{20}$$

Если некоторая матрица B удовлетворяет этому соотношению, то она называется *матрицей, обратной к* A, или *обращением матрицы* A. Если матрица A обратима, то существует лишь одно ее обращение. Действительно, если кроме матрицы B условиям (20) удовлетворяет и матрица C, то умножив обе части равенства $AC=E$ слева на B, мы получим $BAC=BE$, или $C=B$. Если обращение матрицы A существует, оно обозначается символом A^{-1}. Таким образом,

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{21}$$

В условие (20) матрицы A и B входят симметрично. В силу этого, если для A обращением является матрица B, то для B обращением является матрица A. Другими словами,

$$(A^{-1})^{-1}=A. \tag{22}$$

Если для квадратных матриц D, F, G одного порядка существует обращение, то результат их логического умножения также обратим, причем

$$(DFG)^{-1}=G^{-1}F^{-1}D^{-1}, \tag{23}$$

т.е. обращение результата умножения матриц равно результату умножения обращений сомножителей, расположенных в противоположном порядке. Чтобы доказать это утверждение, достаточно проверить равенство $D^{-1}F^{-1}G^{-1}GFD=GFDD^{-1}F^{-1}G^{-1}$, являющееся очевидными следствиями соотношения вида (21) для матриц D, F, G. Для каждой матрицы A, у которой существует обращение, кроме ее нулевой и натуральных степеней $A^0=E$, $A^1=A$, $A^2=AA$ и т.д., рассмотрим также ее целые отрицательные степени:

$$A^{-2}=A^{-1}A^{-1};\ A^{-3}=A^{-1}A^{-1}A^{-1}. \tag{24}$$

Дробные степени для матриц не вводим. Из соотношений (21) и (24) следует, что к любой обратимой матрице A и к любым целым (не обязательно

положительным) числам p, q можно применять обычные правила действия со степенями:

$$A^pA^q=A^{p+q}; \tag{25}$$

$$(A^p)^q=A^{pq}. \tag{26}$$

Логические матрицы над K, для которых выполняется условие $AB=BA$, называются *перестановочными*. Если матрицы A и B обратимы и перестановочны, то

$$(AB)^p=A^pB^p \tag{27}$$

Рассмотрим связь операций транспонирования и обращения. Применяя правило транспонирования результата умножения матриц (18) к соотношениям (21), получаем:

$$(A^{-1})^TA^T=A^T(A^{-1})^T=E, \tag{28}$$

т.е. в результате транспонирования обратимой матрицы A получаем снова обратимую матрицу

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T. \tag{29}$$

Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если каждый ее столбец и каждая ее строка содержат ровно по одной единице. Для ортогональных матриц выполняется соотношение

$$AA^T=A^TA=E, \tag{30}$$

т.е. транспонированная матрица обратна к исходной. Отсюда, в частности, следует, что каждая ортогональная матрица обратима. Обращение ортогональной матрицы является ортогональной матрицей. Далее, если матрицы A и B ортогональны, то $A^T=A^{-1}$, $B^T=B^{-1}$, а значит, $(AB)^T=B^TA^T=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$. Другими словами, результат умножения ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

Теорема 1. *Пусть A и B — квадратные логические матрицы над K и $AB=E$. Тогда A и B — ортогональные матрицы и $B=A^T$.*

Доказательство. Пусть размерность матриц A и B — $n\times n$. Выберем произвольно целое k, $1\le k\le n$. Если k-я строка матрицы A нулевая, то и k-я строка матрицы AB будет нулевой. Поэтому в каждой строке матрицы A есть хотя бы одна единица и этой единице соответствует некоторая единица в матрице B (пусть это будет элемент $a_{kj}=1$, которому соответствует b_{jk}). При $s\ne k$ ($1\le s\le n$) имеем $a_{sj}=0$, так как иначе $(AB)_{sk}=a_{sj}b_{jk}=1$, т.е. $AB\ne E$. Аналогично, в матрице B все элементы строки j, за исключением b_{jk}, равны

нулю. Таким образом, в каждой строке матрицы A есть хотя бы одна единица, причем все эти единицы расположены в разных столбцах. Поэтому матрица A — ортогональна. Аналогично, ортогональна и матрица B. Равенство $B=A^T$ теперь очевидно (каждому элементу $a_{kj}=1$ соответствует $b_{jk}=1$). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что логическая матрица A обратима в том и только в том случае, когда в каждой ее строке и в каждом ее столбце только один элемент будет равным единице, а все остальные — нулю, и обращение A будет являться ее транспонированной матрицей. Проиллюстрируем это утверждение на примере. Имеем

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ AA^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отметим, что обратимые логические матрицы размерности $n\times n$ образуют группу, изоморфную группе перестановок из n элементов. Теперь возьмем логическую матрицу A, у которой есть столбцы и строки, содержащие больше одной единицы. Тогда

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ AA^T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Результат умножения произвольной логической матрицы на ее транспонированную матрицу является матрицей симметрической.*

Доказательство. Пусть имеется логическая матрица A и ее транспонированная матрица A^T. Тогда $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$, так как $(A^T)^T=A$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О логических пространствах // АСУ и приборы автоматики. Вып.106, 1997. С. 21—30. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Логическая алгебра // Проблемы бионики. 1991. Вып.46. С. 3—10. 3. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры М.:Наука, 1975. 400 с.

Поступила в редколлегию 15.10.97