УДК 510.62:681.51.015

В. В. ШЛЯХОВ, канд. техн. наук, *С. Н. ГЕРАСИН*

УПРОЩЕНИЕ АКСИОМАТИКИ ПРЕДИКАТОВ n-МЕРНОЙ ЛИНЕЙНОСТИ

Построение математических моделей по методу сравнения приводит к различным результатам в случае той или иной интерпретации множества входных сигналов. Чаще других моделей используются следующие: бесконечномерное функциональное гильбертово пространство типа L_2, конечномерное евклидово, конечное множество с введенной на нем структурой линейного пространства над произвольным полем. Очевидно, что только последняя реализация обладает конечной мощностью, в то же время остальные модели имеют бесконечное число элементов. Предметом данной статьи является изучение и модификация характеристических свойств линейно порожденных предикатов, определенных на конечномерном линейном пространстве.

Важность этой задачи объясняется тем, что идентификация систем методом сравнения подразумевает проведение экспериментов с целью установления истинности сформулированных аксиом. Очевидно, что экспериментальная проверка аксиом, сформулированных в обычной форме [1], невозможна, поэтому возникает необходимость представить все или хотя бы часть аксиом в виде, когда подобная проверка может быть осуществлена за конечное число операций.

Пусть A — конечномерное линейное пространство над произвольным полем G, размерность A равняется m. Выберем в A систему из m линейно независимых векторов $\{a_i\}_{i=1}^{m}$; известно, что такая система является базисом линейного пространства [2]. Сформулируем теперь ряд аксиом и покажем их эквивалентность характеристическим свойствам предикатов n-мерной линейности.

1. Ограниченная рефлексивность. $E(a_j, a_j)=1$, $j=\overline{1, m}$.

2. Аддитивность. Если $E(x, y)=E(u, v)=1$, то для любых $x, y, u, v \in A$, $E(x+u, y+v)=1$.

3. Однородность. Если $E(x, y)=1$, то $E(\lambda x, \lambda y)=1$, при любых $x, y \in A$, $\lambda \in G$.

4. Ограниченная n-мерность. Если существует набор элементов $\{l_i\}_{i=1}^{n} \in A$, такой, что для любого a_j, $j=\overline{1, m}$, найдется единственный набор чисел из поля $\{\alpha_i(a_j)\}_{i=1}^{n}$, для которого выполняется соотношение:

$$E\left(a_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a_j)\, e_i\right)=1, \quad j=\overline{1, m}.$$

Теорема 1. *Из свойств 1—4 вытекают свойства рефлексивности и n-мерности.*

Доказательство. Произвольный вектор $x \in A$ представим в виде $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_m a_m$, где $\{a_i\}_{i=1}^m$ — базис пространства A. Очевидно, выполняются равенства $E(a_j, a_j) = 1$, $j = \overline{1, m}$, на основании свойства однородности верны следующие равенства: $E(x_j a_j, x_j a_j) = 1$, $j = \overline{1, m}$. Учитывая аддитивность, получаем $E(x, x) = 1$. Рефлексивность доказана. Покажем выполнение n-мерности. Докажем, что для каждого элемента $x \in A$ можно найти набор чисел такой, что будет верно равенство $E(x, \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i) = 1$, где $\{e_i\}_{i=1}^n$ — линейно независимые векторы. По ограниченной n-мерности $E(a_i, \sum_{i=1}^{n} x_j \alpha_i \times \times (a_j) e_j) = 1$, $i = \overline{1, m}$, используя однородность, получаем

$$E(x_j a_j, \sum_{i=1}^{n} x_j \alpha_j (a_l) e_l) = 1, \; j = \overline{1, m}.$$

Воспользуемся аддитивностью

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j \alpha_j (a_i)\right) e_i\right) = 1, \; j = \overline{1, m}.$$

Выражение, стоящее в скобках, обозначим через $\eta_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j (a_i)$. Осталось доказать, что набор $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ выбирается единственным образом. Предположим, что найдутся два набора $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mu_i\}_{i=1}^n$, для которых $E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right) = E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right) = 1$. Воспользуемся свойствами однородности и аддитивности. Тогда $E\left(0, \sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \mu_i) e_i\right) = 1$. Пусть $(\eta_i - \mu_i) = \gamma_i$. Следовательно, $E\left(0, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i\right) = 1$. На основании ограниченной n-мерности можно записать $E\left(a_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_j) e_i\right) = 1$. Из аддитивности выводим $E\left(a_j, \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i (a_j) + \gamma_i) e_i\right) = 1$. Сравнивая с предыдущим равенством и учитывая единственность коэффициентов $\{\alpha_i (a_j)\}_{i=1}^n$, $j = \overline{1, m}$, получаем $\gamma_i = 0$ или $\eta_i = \mu_i$, $i = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Выясним вопрос о независимости свойств 1—4.

Лемма. *Условия 1—4 независимы.*

Доказательство. 1. Ограниченная рефлексивность независима. $E(x, y)=D(x, -y)$, такой предикат очевидно однороден, аддитивен, ограничению n-мерен, но не ограниченно рефлексивен.

2. Ограниченная n-мерность независима. $E(x, y)\equiv 1$, этот предикат удовлетворяет всем свойствам, кроме ограниченной n-мерности, так как числа $\{\alpha_i(a_j)\}_{i=1}^{n}$ подбираются не единственным образом, независимость остальных свойств доказана в работе [1].

Очевидно, что предложенный набор ограниченных свойств не является единственным. Рассмотрим следующие свойства.

5. Ограниченная транзитивность. Если $E(x, 0)=E(y, 0)=1$, то $E(x, y)=1$.

6. Ограниченная аддитивность. Из равенства $E(x, y)=1$ для любого a_k, $k=\overline{1, m}$ вытекает $E(x+a_k, y+a_k)=1$.

Теорема 2. *Если предикат $E(x, y)$ удовлетворяет свойствам 1, 3—6, то он рефлексивен, аддитивен и n-мерен.*

Доказательство. Пусть предикат $E(x, y)=1$ и $z\in A$. Тогда $z=z_1a_1+\ldots+z_ma_m$. Допустим $z_i\neq 0$. Отсюда из однородности следует $E(z_i^{-1}x, z_i^{-1}y)=1$. Ограниченная аддитивность влечет $E(z_i^{-1}x+a_i, z_i^{-1}y+a_i)=1$ или $E(x+a_iz_i, y+a_iz_i)=1$. Поскольку последнее равенство справедливо для любого $z_i\neq 1$, то $E(x+z, y+z)=1$.

Таким образом, мы показали, что из равенства $E(x, y)=1$ вытекает $E(x+z, y+z)=1$ для любого $z\in A$. Предположим, $E(x_1 y_1)=1$ и $E(x_2, y_2)=1$. Тогда из рефлексивности (она доказывается так же, как и в предыдущей теореме) имеем

$$E(x_1, y_1)=1,\ E(-y_1, -y_1)=1, \tag{1}$$

$$E(x_2, y_2)=1,\ E(-y_2, -y_2)=1. \tag{2}$$

Используя доказанное выше свойство, получаем

$$E(x_1-y_1, 0)=1, \tag{3}$$

$$E(y_2-x_2, 0)=1. \tag{4}$$

Из (3), (4) на основании ограниченной транзитивности выводим $E(x_1-y_1, y_2-x_2)=1$.

Теперь справедлива следующая цепочка равенств:

$$E(x_1+x_2-y_1, y_2)=1;\quad E(x_1+x_2, y_1+y_2)=1.$$

Последнее равенство свидетельствует об аддитивности предиката $E(x, y)$. В итоге предикат E удовлетворяет условию теоремы *1*, следовательно, он n-мерен. Теорема доказана.

Исследуем независимость указанных свойств. Ограниченная аддитивность независима. Рассмотрим предикат вида $E(x, y)=D(x^2, y^2)$, причем, предикат такого типа рефлексивен, ограниченно транзитивен, однороден, ограниченно n-мерен, а в силу нелинейности — не ограниченно аддитивен.

В заключение отметим, что проблема независимости системы аксиом является чрезвычайно важной в связи с тем, что он позволяет сократить число экспериментов и обосновывает тот факт, что дальнейшее уменьшение невозможно. Имеют перспективу и исследования по разработке ограниченных свойств для других моделей множества входных сигналов. Скажем, формулировка свойств на основе базисных элементов функционального гильбертова пространства означает, что эксперименты следует проводить для функций одного класса, например, для полиномов или тригонометрических функций. При этом, безусловно, некоторые аксиомы усилятся, например, однородность заменится более сильной непрерывностью.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко С. Ю., Ицков Ф. Э., Ситников Д. Э., Ситников Д. Э.* Предикаты n-мерной линейности и их характеристические свойства//Пробл. бионики. 1985. Вып. 35. С. 65—73. 2. *Постников М. М.* Линейная алгебра. М., 1986. 400 с.

Поступила в редколлегию 25.03.87