УДК 621.396.67.01

В.В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА АНТЕНН ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

Задачи синтеза антенн наряду с задачами восстановления относятся к обратным задачам математической физики, для которых большое значение имеет вопрос о чувствительности и устойчивости получаемого решения. Применительно к обратным задачам теории антенн в детерминированной формулировке проблема устойчивости и чувствительности, видимо, впервые обстоятельно обсуждалась в работе [1]. В ней отмечено, что в задачах синтеза, в отличие от задач восстановления, основным является вопрос о чувствительности решения, устойчивость же его при этом имеет второстепенное значение.

Иная ситуация складывается при решении обратных задач в статистической постановке. Если вопрос об оценке чувствительности полученного решения стоит так же, как и в детерминированном синтезе (за исключением того, что речь должна идти о чувствительности к «чужим» флуктуациям [2]), то ответ на вопрос о необходимости и важности оценки устойчивости решения задач статистического синтеза не столь однозначен, что связано со спецификой задач синтеза в статистической постановке. Как правило, в задачах статистического синтеза используется значительно больший объём информации, играющей роль исходной. Так, при синтезе антенны с заданной диаграммой направленности (ДН) по полю (средней или номинальной), кроме требуемой ДН необходимо знать закон распределения, корреляционную функцию, дисперсию и радиус корреляции флуктуаций амплитудно-фазового распределения (АФР). При этом закон распределения и корреляционная функция могут быть выбраны на основании информации о механизме их происхождения (более детально этот вопрос обсуждается, например в [3]). Что касается дисперсии и радиуса корреляции то либо они определяются в результате решения самой задачи [4], либо их значения должны быть заданы в качестве исходных данных [5].

В первом случае ситуация с устойчивостью оказывается такой же, как в задачах детерминированного синтеза. Во втором случае, поскольку статистические параметры не подлежат определению в процессе решения, то они становятся исходными данными задачи. Следовательно, естественным образом возникает важный с практической точки зрения вопрос об устойчивости получаемого решения (самого АФР или некоторого функционала от него) к неточности задания соответствующей исходной величины. Как правило, получить точную информацию о статистике флуктуаций АФР при его реализации не удается. Это касается как численных значений указанных статистических параметров АФР (дисперсии и радиуса корреляции), так и, например, вида корреляционной функции (коэффициента корреляции). Поэтому оптимальное АФР, найденное при неточных исходных статистических данных, не обеспечит в результате его реализации той максимальной близости (в определенной метрике) к требуемой ДН, которую можно было бы получить, если бы заданные статистические параметры флуктуаций АФР в точности равнялись тем, которые будут иметь место при реализации. Оценка степени устойчивости решения задачи синтеза в этом случае как раз и позволит судить о величине проигрыша в близости к заданной диаграмме направленности по сравнению с максимально возможной и более того, что весьма важно, также определить те исходные статистические данные, требования к точности задания которых должны быть наиболее жесткими.

Рассмотрим линейную антенну длиной L. С точностью до постоянного множителя диаграмма направленности её описывается известным выражением

$$f(u) = \mathbf{A}i = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i(x)e^{jux}\,dx, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ – линейный интегральный оператор; $i(x)$ – функция, описывающая амплитуднофазовое распределение; $x=(2z/L)$ – безразмерная продольная координата; $u=(\pi L/\lambda)\sin\theta = a\sin\theta$ обобщенный угол; θ – угол, отсчитываемый от оси антенны; λ – длина волны в свободном пространстве.

Будем считать, что ДН и АФР являются элементами гильбертовых пространств $L_f^2(-a,a)$ и $L_i^2(-1,1)$ соответственно, со скалярными произведениями

$$(f_1(u),f_2(u))_{L_f^2} = \int_{-a}^{a} g(u)f_1(u)\overline{f_2}(u)du, \qquad (i_1(x),\, i_2(x))_{L_i^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i_1(x)\overline{i_2}(x)dx,$$

где черта означает комплексное сопряжение, g(u) – неотрицательная во всей области интегрирования весовая функция.

При наличии флуктуаций $i(x)$ является случайной функцией, которую при нормировке к амплитуде и фазе центрального источника в отсутствие флуктуаций [3] можно записать как

$$i(x) = i_0(x)e^{B(x)+j\varphi(x)} = i_0(x)q(x) \tag{2}$$

со средним значением

$$\langle i(x)\rangle = i_0(x)p(x), \tag{3}$$

где $i_0(x)$ – АФР в отсутствие флуктуаций, $p(x)=\left\langle e^{B(x)+j\varphi(x)}\right\rangle$, B(x) и $\varphi(x)$ – случайные функции, описывающие флуктуации уровня амплитуды и фазы источников соответственно, $\langle\cdots\rangle$ – знак математического ожидания.

Уклонение случайной ДН от некоторой заданной F(u) определим с помощью математического ожидания (МО) квадрата нормы их разности в L_f^2

$$\left\langle \varepsilon^2\right\rangle = \left\langle \left\| F(u)-f(u)\right\|_{L_f^2}^2 \right\rangle = \left\| F-\langle f\rangle\right\|_{L_f^2}^2 + \left(\langle i\rangle, \mathbf{S}\langle i\rangle\right)_{L_i^2}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{S}$ – линейный интегральный оператор

$$\mathbf{S}i = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i(x)R(x,x_1)K(x,x_1)dx_1, \tag{5}$$

где

$$R(x,x_1) = \left\langle \left[q(x)/p(x)-1\right]\left[q^*(x_1)/p^*(x_1)-1\right]\right\rangle, \quad K(x,x_1) = \int_{-a}^{a} g(u)e^{ju(x-x_1)}du. \tag{6}$$

Задача синтеза в статистической постановке [5], [6] наиболее часто формулируется следующим образом. Определить регулярное АФР $i_0(x)$, которое при флуктуациях с заданными статистическими параметрами обеспечит минимум МО квадратичного отклонения синтезируемой ДН от заданной. Аналитически эта задача сводится к минимизации функционала $\left\langle\varepsilon^2\right\rangle$, определенного соотношением (4), по среднему АФР $\langle i\rangle$. Регулярное АФР $i_0(x)$ затем легко определяется с помощью (3)

$$i_0(x) = \langle i(x)\rangle_0 / p(x) = \mathbf{H}_s^{-1}\mathbf{A}^* F(u)/p(x), \tag{7}$$

где $\langle i(x)\rangle_0$ – оптимальное среднее АФР, на котором достигается минимум функционала (4), а оператор $\mathbf{H}$ имеет вид

$$\mathbf{H}_{r,s} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}+\mathbf{S}_{r,s}\right). \tag{8}$$

Здесь и далее индекс r относится к случаю, когда оператор $\mathbf{S}$ определяется через параметры флуктуаций при реализации, а индекс s – когда в $\mathbf{S}$ входят параметры флуктуаций, задаваемые при постановке задачи синтеза, $\mathbf{A}^*$ - оператор, сопряженный с оператором $\mathbf{A}$.

При этом минимальное матожидание КО

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min} = \|F\|^2_{L_f^2} - \left(F, \mathbf{A}\mathbf{H}_s^{-1}\mathbf{A}^* F\right)_{L_f^2}. \tag{9}$$

Отметим, что неточность в задании исходных значений статистических параметров флуктуаций АФР фактически приводит к решению линейного операторного уравнения вида $\mathbf{H}i = f$ с неточно заданным оператором $\mathbf{H}$.

В общем случае значения статистических параметров флуктуаций АФР, заданные в качестве исходных данных задачи, будут отличаться от значений их при реализации найденного оптимального АФР. Величины, задаваемые при постановке задачи, а также найденные в результате ее решения, будем отмечать индексом "s". Значения этих величин при реализации - индексом "r". Тогда среднее значение квадратичного отклонения (КО) диаграммы, получаемой при практическом воспроизведении оптимального АФР, от заданной согласно (4) равно

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \|F\|^2_{L_f^2} + \left(\langle i_r \rangle, \mathbf{H}_r \langle i_r \rangle\right)_{L_i^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{A}^* F, \langle i_r \rangle\right)_{L_i^2}, \tag{10}$$

где усреднение проводится по флуктуациям АФР, появляющимся при реализации, $i_r = i_0 q_r$.

В качестве регулярного АФР в (9) взята его оптимальная величина $\mathrm{i}_0(\mathrm{x})$, найденная при решении и определяемая по (7), со средним значением при реализации

$$\langle i_r \rangle = \frac{p_r}{p_s}\mathbf{H}_s^{-1}\mathbf{A}^* F.$$

Пусть флуктуации реализуемого АФР и найденного при синтезе имеют одинаковые закон распределения и вид коэффициента корреляции, а дисперсия α_s и радиус корреляции c_s отличаются от их значений при реализации α_r и c_r:

$$\alpha_s = \alpha_r + \Delta\alpha,$$

$$c_s = c_r + \Delta c.$$

Будем полагать, что отклонение α_s и c_s от α_r и c_r малы – $\Delta\alpha \ll 1$ и $\Delta \hat{a} \ll 1$. В этом случае, отбрасывая члены третьего порядка малости и выше по $\Delta\alpha$ и Δc, получим

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min} + (\Delta\alpha)^2 \cdot k_{y,\alpha}^{-1}(\alpha_s, c_s) + (\Delta c)^2 \cdot k_{y,c}^{-1}(\alpha_s, c_s) + \Delta\alpha \cdot \Delta c \cdot k_{y,\alpha c}^{-1}(\alpha_s, c_s), \tag{12}$$

где

$$k_{y,\alpha}(\alpha_s, c_s) = \left[\left(\beta_r \langle i_r \rangle + \mathbf{Q}_{\alpha r}\mathbf{A}^* F\right), \mathbf{H}_r\left(\beta_r \langle i_r \rangle + \mathbf{Q}_{\alpha r}\mathbf{A}^* F\right)\right]^{-1}_{L_i^2}, \tag{13}$$

$$k_{y,c}(\alpha_s, c_s) = \left[\left(\gamma_r \langle i_r \rangle + \mathbf{Q}_{cr}\mathbf{A}^* F\right), \mathbf{H}_r\left(\gamma_r \langle i_r \rangle + \mathbf{Q}_{cr}\mathbf{A}^* F\right)\right]^{-1}_{L_i^2}, \tag{14}$$

$$k_{y,\alpha c}(\alpha_s, c_s) = 0.5 \cdot \left[\left(\beta_r \langle i_r \rangle + \mathbf{Q}_{\alpha r}\mathbf{A}^* F\right), \mathbf{H}_r\left(\gamma_r \langle i_r \rangle + \mathbf{Q}_{cr}\mathbf{A}^* F\right)\right]^{-1}_{L_i^2} \tag{15}$$

и

$$\beta_r = \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\left(\frac{p_r}{p_s}\right)\Bigg|_{\substack{\alpha_s = \alpha_r \\ c_s = c_r}}, \ \gamma_r = \frac{\partial}{\partial c_s}\left(\frac{p_r}{p_s}\right)\Bigg|_{\substack{\alpha_s = \alpha_r \\ c_s = c_r}}, \ \mathbf{Q}_{\alpha r} = \frac{\partial \mathbf{H}_s^{-1}}{\partial \alpha_s}\Bigg|_{\substack{\alpha_s = \alpha_r \\ c_s = c_r}}, \quad \mathbf{Q}_{cr} = \frac{\partial \mathbf{H}_s^{-1}}{\partial c_s}\Bigg|_{\substack{\alpha_s = \alpha_r \\ c_s = c_r}}.$$

Величины $k_{y,\alpha}$, $k_{y,c}$, $k_{y,\alpha c}$ характеризуют степень отклонения $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$ от $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min}$ в зависимости от неточности задания исходных данных α_s и c_s. Коэффициенты $k_{y,\alpha}$ *и* $k_{y,c}$ естественно рассматривать как коэффициенты устойчивости по дисперсии и радиусу корреляции флуктуаций АФР соответственно. Величина $k_{y,\alpha}$ полностью определяет устойчивость $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$, если $\Delta c = 0$, а $k_{y,c}$ полностью определяет устойчивость $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$ при $\Delta\alpha = 0$.

Отметим, что отклонение $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$ от оптимального $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min}$ пропорционально второй степени $\Delta\alpha$ и Δc. Это означает, что при неточно заданных значениях статистических параметров флуктуаций, независимо от знака $\Delta\alpha$ и Δc, найденное решение приведет к большему, по сравнению с минимально возможным, значению $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$.

Для более детального анализа введенных величин рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда в антенне присутствуют только фазовые флуктуации. Будем полагать, что имеет место нормальный закон распределения, коэффициент корреляции примем в гауссовой форме. Оптимальное среднее АФР будем искать в виде разложения по системе собственных функций $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ самосопряженного оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ [7]

$$\left\langle i_s \right\rangle_0 = \sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n(a, ax).$$

Здесь и далее верхний предел суммирования N – целое число, которое при необходимости всегда можно $\to \infty$.

При малых α $(\alpha << 1)$, а также малых или больших радиусах корреляции c, как показано в [8], для $\left\langle i_s \right\rangle_0$ имеет место выражение

$$\left\langle i_s \right\rangle_0 = \sum_{n=0}^{N} \frac{(F, \psi_n)_{L_f^2}}{\sqrt{\lambda_n(a)}\left[\lambda_n(a) + \alpha_s J_{nn}(a, c_s)\right]} \psi_n(a, ax), \qquad (16)$$

где $\lambda_n(a)$ - собственные значения оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, которые есть положительные вещественные числа, упорядоченные так, что $1 \ge \lambda_0 \ge \lambda_1 \ge \cdots \lambda_n \ge 0$,

$$J_{nn}(a, c) = \left(\psi_n(a, ax), \mathbf{S}_0 \psi_n(a, ax')\right)_{L_i^2},$$

$$\mathbf{S}_0 \psi_n(a, ax') = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} K(x, x') \exp\left\{-\frac{(x - x')^2}{c_2}\right\} \psi_n(a, ax') dx'.$$

Зависимости величины $J_{nn}(a, c)$ от c и n достаточно подробно изучены в [6]. Для антенны с $a = 3\pi$ графики $J_{nn}(a, c)/\lambda_n(a)$ показаны на рис. 1.

Подставив (14) в (13), для $k_{y,\alpha}$ и $k_{y,c}$ получим:

$$k_{y,\alpha}(a) = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{\left|(F, \psi_n(a, u))_{L_f^2}\right|^2}{\lambda_n(a)} \cdot K_n^{(1)}(\alpha_r, c_r, a) \right\}^{-1}, \qquad (17)$$

$$k_{y,c}(a)=\left\{\sum_{n=0}^{N}\frac{\left|(F,\psi_n(a,u))_{L_f^2}\right|^2}{\lambda_n(a)}\cdot K_n^{(2)}(\alpha_r,c_r,a)\right\}^{-1}, \tag{18}$$

$$k_{y,\alpha c}(\alpha_r,c_r,a)=-\left\{\sum_{n=0}^{N}\frac{\left|(F,\psi_n(a,u))_{L_f^2}\right|^2}{\lambda_n(a)}\sqrt{K_n^{(1)}(\alpha_r,c_r,a)K_n^{(2)}(\alpha_r,c_r,a)}\right\}^{-1}, \tag{19}$$

где $K_n^{(1)}(\alpha,c,a)=\dfrac{[1-(2-\alpha)J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)]^2}{4[1+\alpha_r J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)]^3}$, $\qquad K_n^{(2)}(\alpha,c,a)=\dfrac{\alpha_r^2\cdot\left[\dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{J_{nn}(a,c)}{\lambda_n(a)}\right]^2}{[1+\alpha_r J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)]^3}$.

Видно, что слагаемые в суммах являются произведениями двух сомножителей. Один из них зависит только от вида синтезируемой ДН, а второй только от параметров флуктуаций АФР. Это означает, что характер влияния изменения этих параметров на устойчивость решения задачи синтеза одинаков для ДН различных типов.

Наибольшее влияние на устойчивость решения оказывают высшие (реактивные) гармоники с $n>2a/\pi$. Действительно, множитель $K_n^{(1)}(a,\alpha_r,c_r)$ имеет малые значения при α_r, удовлетворяющих условию $[J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)]\approx 1/(2-\alpha_r)$. Поскольку в рассматриваемом случае $0\le\alpha_r<1$, то $0.5\le[J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)]<1$. Из рис. 1 видно, что такие значения $J_{nn}(a,c)/\lambda_n(a)$ наиболее характерны для активных $(n\le 2a/\pi)$ гармоник в разложении АФР и, следовательно, их вклад в сумму будет невелик. Значения множителя $K_n^{(2)}$ пропорциональны $\dfrac{\partial}{\partial c}\dfrac{J_{nn}(a,c)}{\lambda_n}$, которая для $c<<1$ равна величине $a/2\sqrt{\pi}\lambda_n(a)$. Так как для активных гармоник $\lambda_n(a)\approx 1$, а для реактивных $\lambda_n(a)<<1$, то очевидно, что влияние последних будет преобладающим.

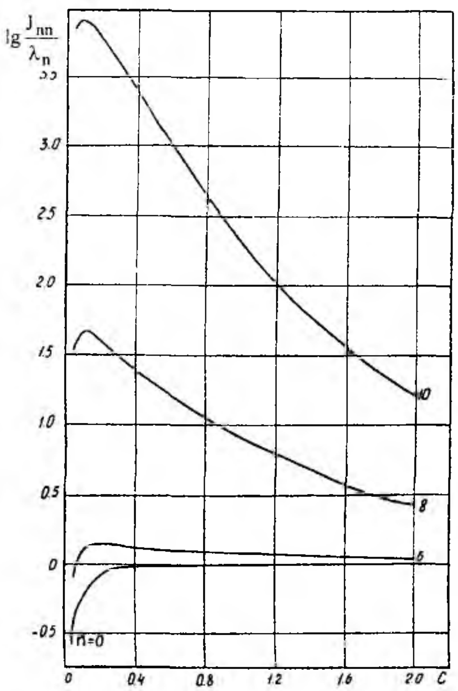

Рис. 1

При малых α_r и c_r коэффициент устойчивости $k_{y,\alpha}$ растет с увеличением α_r и уменьшается с ростом c_r, так как производные от $K_n^{(1)}$ по параметрам соответственно отрицательна и положительна при $1>c_r<c_0$, где c_0 - есть корень уравнения $J_{nn}(a,c_0)/\lambda_n(a)=1/(2-\alpha_r)$.

Характер изменения $k_{y,c}$ - обратный: он уменьшается с ростом α_r и растет с увеличением c_r. Наименьшие значения $k_{y,c}$ принимает для значений c_r, при которых $[J_{nn}(a,c)]'$ велика, то есть для c_r, удовлетворяющих условию $c_r<\sqrt{\pi}/(2N+1)$, где N - максимальный номер гармоники, учитываемой в разложении АФР.

Поскольку на практике точная информация о значениях α_r обычно отсутствует, а известна лишь область значений, которые может принимать дисперсия флуктуаций при реализации оптимального АФР, то установленная зависимость $k_{y,\alpha}$ от α_r позволяет сформулировать следующее полезное правило по выбору значения α_r при постановке задачи синтеза.

Чтобы при реализации оптимального АФР получить наименьшее отклонение реального значения $\langle\varepsilon^2\rangle$ от $\langle\varepsilon^2\rangle_{\min}$, следует при постановке задачи брать наибольшее α_r из области возможных значений этого параметра. В этом случае ожидаемое $\langle\varepsilon^2\rangle_{\min}$ будет наименее отличаться от реально получаемого.

В случае больших радиусов корреляции $(c >> 1)$

$$J_{nn}(a,c) = \lambda_n(a)\left[1 + O\left(1/c^2\right)\right]$$

и

$$\frac{\partial J_{nn}(a,c)}{\partial c} \sim \lambda_n(a)\frac{1}{c^3}.$$

Тогда для $k_{y,\alpha}$ и $k_{y,c}$ получим:

$$k_{y,\alpha} = \frac{(1+\alpha_r)^3}{(1-\alpha_r)^2}k_y^0(a)\ ,\ k_{y,c} \sim \frac{(1+\alpha_r)^3 c^6}{\alpha_r^2}k_y^0(a)\ , \qquad (20)$$

где $k_y^{(0)}(a) = \left\{\sum\limits_{n=0}^{N}\left|(F,\psi_n)_{L_f^2}{}^2\right| / \lambda_n(a)\right\}$.

Из (20) и (21) следует, что с ростом α_r при $c >> 1$ коэффициенты устойчивости увеличиваются, хотя эта зависимость весьма слабая и при этом $\kappa_{y,c} >> \kappa_{y,\alpha}$.

Таким образом, в работе показано, что при решении задач синтеза антенн в статистической постановке, в отличие от задач детерминированного синтеза, наряду с вопросом о чувствительности приобретает важное значение вопрос об устойчивости получаемого решения. В конечном итоге он сводится к изучению устойчивости решения линейного операторного уравнения с неточно заданным оператором. В задачах статистического синтеза по критерию минимума среднеквадратичного отклонения синтезируемой ДН от заданной, устойчивость целесообразно определять как разность между средним значением квадратичного отклонения реально воспроизводимой ДН от заданной и минимально возможным его значением. Эта разность обусловлена отклонением статистических параметров флуктуаций АФР, заданных в качестве исходных данных, от значений их при реализации. Степень устойчивости может быть оценена с помощью двух коэффициентов – коэффициента устойчивости по дисперсии и коэффициента устойчивости по радиусу корреляции флуктуаций АФР. Значения этих коэффициентов могут существенно различаться по величине в зависимости от значений соответствующих статистических параметров флуктуаций АФР, обусловленных возможностями технологии или условиями функционирования.

Список литературы: 1. *Gilbert E.M., Morgan S.P.* Optimum Disign of Directive Antenna Arrays Subject to Random Variable // Bell Sestem Tech. J., 1955. Vol. 34. N 3. P 637 – 663. 2. *Deshamps G.A., Cabayan* H.S. Antenna Synthesis and Solution of Invers Problems by Regularization Methods // IEEE Trans., 1972. Vol. AP – 20. N 3. P. 269 – 274.
3. *Шифрин Я.С.* Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. Радио, 1970. 384 с. 4. *Должиков В. В.* О статистическом синтезе линейных антенн по заданной диаграмме направленности // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 120. С. 76-80. 5. *Шифрин Я.С., Должиков В.В.* Статистический синтез линейной непрерывной антенны по заданной диаграмме направленности // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 9. С. 1329-1335. 6. *Справочник* по антенной технике / Под ред. Я.Н. Фельда, Е.Г. Зелкина. М.:ИПРЖР,1997. Т.1. 256 с. 7. *Б.М. Минкович, В.П. Яковлев.* Теория синтеза антенн. М.: Сов. радио, 1969. 296 с. 8. *Шифрин Я.С., Должиков В.В., Радченко В.Ю.* Сверхнаправленность в статистической теории антенн. Харьков. 1987. 140 с. Деп. В УкрНИИНТИ, 05.01.88, № 86-Ук. 88.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 26. 12. 2001